Théorie des Nombres

M. Don Zagier, professeur

Cours : Fonctions Thêta

Les fonctions thêta sont l'un des outils les plus importants pour la construction et l'étude des formes modulaires, avec des applications nombreuses en théorie des nombres (représentations des entiers par les formes quadratiques), géométrie algébrique (théorie des variétés abeliennes), théorie de codage, etc. La première partie du cours de cette année s'est concentrée sur la théorie classique des fonctions thêta holomorphes associées aux formes quadratiques définies positives, tandis que la deuxième partie, qui sera continuée dans le cours de 2005-2006, a été dévouée à l'étude des fonctions thêta associées aux formes quadratiques indéfinies, un champ d'investigation beaucoup moins développé mais potentiellement tout aussi riche en applications.

Séries thêta pour les formes quadratiques définies

L'énoncé fondamental est que, si Q est une forme quadratique définie positive à valeurs entières ou rationnelles sur un réseau L de dimension n, alors la *série thêta* (ou *fonction thêta*) associée $\Theta_Q(\tau) = \sum_{x\in L} e^{2i\pi Q(x)\tau}$ ($\tau \in \mathfrak{h}$ = demi-plan supérieur) est une forme modulaire holomorphe de poids $n/2$ en τ. Déjà cet énoncé simple, dont la démonstration est une application de la formule de sommation de Poisson, a beaucoup de conséquences arithmétiques. Par exemple, puisque la deuxième et la quatrième puissance de la série thêta la plus simple $\theta(\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n^2}$ ($q = e^{2i\pi\tau}$) sont des formes modulaires de poids 1 et de poids 2 sur $\Gamma_0(4)$ (avec caractère $\left(\frac{-4}{\cdot}\right)$ dans le premier cas), et puisque les espaces des formes modulaires de ces deux types ont dimension 1 et sont engendrés par des séries d'Eisenstein à coefficients de Fourier connus, nous obtenons des démonstrations immédiates des deux formules classiques

$$r_2(n) = 4\sum_{d\mid n}\left(\frac{-4}{d}\right), \qquad r_4(n) = 8\sum_{d\mid n,\,4\nmid d} d$$

pour les nombres de représentations d'un entier positif comme somme de deux ou de quatre carrés. Nous indiquons plusieurs directions dans lesquelles cet énoncé fondamental peut être raffiné et appliqué.

Séries thêta avec coefficients sphériques. Une variante importante de l'énoncé de modularité donné ci-dessus est que, si $P(x)$ est un polynôme homogène sphérique de degré ν par rapport à la forme quadratique $Q(x)$, alors la série thêta généralisée $\Theta_{Q,P}(\tau) = \sum_{x\in L} P(x)e^{2i\pi Q(x)\tau}$ est une forme modulaire holomorphe de poids $n/2 + \nu$. Rappelons qu'un polynôme P est *sphérique* (ou *harmonique* ; les deux mots sont synonymes) par rapport à Q si $\Delta_Q P = 0$, où Δ_Q est l'opérateur de Laplace par rapport à Q, défini comme $\Delta_Q = \frac{1}{2}\sum_{i,j} (A^{-1})_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$ si $Q(x) = \frac{1}{2}\sum_{i,j} A_{ij}x_ix_j = \frac{1}{2}x^t Ax$ pour une matrice symétrique $A = (A_{ij})$. Soit $\mathcal{P} = \mathcal{P}^n$ l'espace $\mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$ des polynômes en n variables et $\mathcal{H} = \mathcal{H}^Q$ le sous-espace des polynômes sphériques par rapport à Q. Les deux faits fondamentaux concernant ces polynômes sont :

(i) $\mathcal{P} = \mathcal{H} \oplus Q\cdot\mathcal{P}$: chaque polynôme en n variables a une décomposition unique comme somme d'un polynôme sphérique et d'un polynôme divisible par Q, et

(ii) pour chaque $z \in \mathbb{C}^n$ avec $Q(z) = 0$ et chaque entier positif ν la fonction $P(x) = B(x, z)^\nu$, où $B(x, z) = x^tAz$ est la forme bilinéaire associée à Q, appartient à $\mathcal{H}$, et l'espace $\mathcal{H}$ est engendré par ces fonctions.

Le premier énoncé donne la formule

$$\dim \mathcal{H}^Q_\nu = \dim \mathcal{P}^n_\nu - \dim \mathcal{P}^n_{\nu-2} = \binom{\nu+n-1}{n-1} - \binom{\nu+n-3}{n-1}$$

pour la dimension de l'espace $\mathcal{H}^Q_\nu$ des polynômes sphériques homogènes de degré ν et entraîne aussi la décomposition en somme directe

$$\mathcal{P}^n = \mathcal{H} \oplus Q\cdot\mathcal{H} \oplus Q^2\cdot\mathcal{H} \oplus \cdots,$$

c'est-à-dire, chaque polynôme $P(x)$ en n variables s'écrit de façon unique comme polynôme $P(x) = \sum_{i\geq 0} P_i(x)\, Q(x)^i$ en $Q(x)$ avec des coefficients qui sont des polynômes sphériques en x. Au niveau des séries thêta, cela veut dire que la série thêta $\Theta_{Q,P}(\tau) = \sum P(x)q^{Q(x)}$ associée à un polynôme homogène arbitraire $P(x)$ de degré ν, bien que non modulaire en général, est une somme $\sum D^i\Theta_{Q,P_i}(x)$ (où $D = \frac{1}{2i\pi}\frac{d}{d\tau} = q\frac{d}{dq}$) de dérivées de séries thêta modulaires et est donc une *forme quasi-modulaire* de poids $n/2 + \nu$ (cf. cours des années 2000-2002).

La preuve du fait que $\Theta_{Q,P}$ (ou plus généralement $\Theta_{Q,P,c}(x) = \sum_{x\in L} c(x)P(x)q^{Q(x)}$ pour une fonction périodique c sur L, c'est-à-dire, une fonction $c : L \to \mathbb{C}$ qui se factorise par L/mL pour un entier $m > 0$) est une forme modulaire de poids $n/2 + \nu$ pour n'importe quelle forme quadratique définie positive $Q : L \to \mathbb{Q}$ et polynôme sphérique P de degré ν par rapport à Q, est classique, due à B. Schoeneberg, mais a néanmoins été présentée en détail puisqu'elle est un élément important dans la théorie des formes modulaires et n'est pas suffisamment bien connue. L'idée de base est d'utiliser le fait que l'opération de $\mathrm{PGL}_2^+(\mathbb{Q})$ sur le demi-plan supérieur $\mathfrak{h}$ est engendrée par les transformations de la forme $\tau \mapsto \tau + \lambda$ ($\lambda \in \mathbb{Q}$) et $\tau \mapsto -1/N\tau$ ($N \in \mathbb{Q}_{>0}$) et que l'espace de toutes les séries thêta $\Theta_{Q,P,c}$ est invariant par les transformations des deux types, ce qui est évident dans le premier cas et une conséquence de la formule de sommation de Poisson dans le deuxième. Les détails, et la détermination exacte des niveaux et des caractères des formes obtenues, sont assez compliqués et font appel en particulier à l'évaluation des sommes de Gauss.

Formes quadratiques de bas rang. Si le rang n du réseau L est très petit, les séries thêta associées ont des propriétés spéciales. Le premier cas est celui des formes quadratiques *unaires* ($n = 1$). Ici Q a la forme $Q(x) = \lambda x^2$ pour un $\lambda \in \mathbb{Q}_{>0}$ et l'opérateur de Laplace associé est proportionnel à d^2/dx^2, de façon qu'un polynôme homogène $P(x) = cx^\nu$ est sphérique seulement si $\nu < 2$. Il n'existe donc que deux types de séries thêta unaires : celles de poids 1/2, qui ont la forme $\sum_{x\in\mathbb{Z}} c(x)q^{\lambda x^2}$ avec une fonction périodique *paire* c, et celles de poids 3/2, qui ont la forme $\sum_{x\in\mathbb{Z}} xc(x)q^{\lambda x^2}$ avec une fonction périodique *impaire* c. Le résultat le plus important ici est le *théorème de Serre et Stark*, qui nous dit que chaque forme modulaire holomorphe de poids 1/2 est une combinaison linéaire de séries thêta unaires du premier type. Par exemple, la fonction êta de Dedekind $\eta(\tau) = q^{1/24}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)$ est la racine 24-ième de la célèbre fonction discriminant $\Delta \in S_{12}(SL_2(\mathbb{Z}))$ et est par conséquent une forme modulaire de poids 1/2 et de niveau 1 (avec caractère), et sa représentation comme série thêta unaire est l'identité $\eta(\tau) = \sum_{n>0}\left(\frac{12}{n}\right)q^{n^2/24}$ due à Euler.

Plusieurs autres cas spéciaux et applications ont été mentionnés dans le cours. L'un d'entre eux, que j'avais conjecturé il y a quelques années et qui a été démontré depuis par mon étudiant G. Mersmann, sera formulé ici parce que le résultat est intéressant et n'a jamais été publié. L'énoncé est que toutes les formes modulaires holomorphes $f(\tau)$ de poids demi-entier donné k qui sont des produits de fonctions êta (donc $f(\tau) = \prod_{m=1}^{\infty}\eta(m\tau)^{a_m}$ avec $a_m \in \mathbb{Z}$ et $\frac{1}{2}\sum a_m = k$, avec des inégalités pour garantir l'holomorphie aux pointes) peuvent être décrites en termes d'un nombre fini d'entre elles. En particulier, dans le cas $k = 1/2$ chaque tel produit avec $\sum a_m = 1$ est égal à $f_j(N\tau)$ pour un entier $N \geq 1$ et un indice $1 \leq j \leq 14$, où $f_1, \ldots, f_{14}$ sont les 14 produits explicites

$$1,\ \frac{1^2}{2},\ \frac{2^2}{1},\ \frac{1\cdot 4}{2},\ \frac{2^3}{1\cdot 4},\ \frac{2^5}{1^2\,4^2},\ \frac{1^2\,6}{2\cdot 3},\ \frac{2^2\,3}{1\cdot 6},\ \frac{2\cdot 3^2}{1\cdot 6},$$

$$\frac{1\cdot 6^2}{2\cdot 3},\ \frac{1\cdot 4\cdot 6^2}{2\cdot 3\cdot 12},\ \frac{2^2\,3\cdot 12}{1\cdot 4\cdot 6},\ \frac{2^5\,3\cdot 12}{1^2\,4^2\,6^2},\ \frac{1\cdot 4\cdot 6^5}{2^2\,3^2\,12^2}.$$

(Ici nous avons simplifié les notations en écrivant par exemple $\frac{2^3}{1\cdot 4}$ pour $\frac{\eta(2\tau)^3}{\eta(\tau)\eta(4\tau)}$.)

Chacun de ces 14 produits-êta spéciaux est alors une série thêta unaire par le théorème de Serre et Stark ou par une vérification directe, un cas typique étant l'identité classique $\frac{\eta(2\tau)^5}{\eta(\tau)^2\eta(4\tau)^2} = \sum q^{n^2} = \theta(\tau)$.

Le prochain cas est celui des formes quadratiques *binaires* ($n = 2$). On a ici une structure algébrique supplémentaire : on peut identifier $\mathbb{R}^2$ avec le corps $\mathbb{C}$ et (à un facteur près) chaque réseau L de dimension 2 muni d'une forme quadratique définie positive à valeurs rationnelles peut être identifié avec un idéal dans un corps quadratique imaginaire K avec la forme norme $Q(x) = N(x) = x\bar{x}$ ($x \in L \subset K \subset \mathbb{C}$). L'opérateur de Laplace associé est alors proportionnel à $\frac{\partial^2}{\partial x \partial \bar{x}}$, et les polynômes homogènes sphériques de degré ν sont les combinaisons linéaires de x^ν et $\bar{x}^\nu$ (un espace de dimension 2 pour $\nu > 0$, en accord avec la formule pour la dimension de $\mathcal{P}_\nu$ donnée ci-dessus). Une série thêta binaire typique a donc la forme $\Theta(\tau) = \sum_{x\in L} c(x)x^\nu q^{\lambda N(x)}$, où L est un idéal dans K et $c(x)$ une fonction périodique dans L. De telles séries, ou leurs combinaisons linéaires, s'appellent les *formes modulaires de type CM* (CM = complex multiplication) parce que dans le cas $\nu = 1$ cette classe contient les formes paraboliques de poids 2 associées aux courbes elliptiques à multiplication complexe. Les formes modulaires de type CM ont une riche structure arithmétique supplémentaire qui contient la théorie de Gauss des représentations des entiers par les formes quadratiques binaires dans le cas $\nu = 0$ et la théorie des courbes elliptiques à multiplication complexe quand $\nu = 1$. En général chaque série thêta de type CM est, à une normalisation $\tau \to \lambda\tau$ près, une combinaison linéaire de fonctions $\Theta_\psi(\tau) = \sum \psi(\mathfrak{a}) q^{N(\mathfrak{a})}$, où la somme porte sur les idéaux de K et ψ est un « Grössencharakter » ou caractère de Hecke de K de poids ν, c'est-à-dire une fonction multiplicative sur les idéaux de K dont la valeur est α^ν pour un idéal principal (α) avec α congru à 1 modulo un idéal suffisamment grand. Les fonctions Θ_ψ sont des fonctions propres de Hecke et forment la seule famille infinie de telles fonctions, à part les séries d'Eisenstein, qu'on peut écrire explicitement. Elles ont la propriété caractéristique d'être *lacunaires* : la p-ième valeur propre d'une fonction propre de Hecke de type CM est 0 pour 50 % (asymptotiquement) des nombres premiers p et le n-ième coefficient de Fourier d'une forme modulaire quelconque de type CM est 0 pour 100 % (asymptotiquement) des entiers positifs n. Inversement, un théorème profond de Serre dit qu'une forme propre de Hecke ou une forme modulaire arbitraire qui est lacunaire dans ce sens est de type CM. D'autres résultats concernant les séries thêta de ce type sont ceux de Villegas-Zagier, déjà discutés dans le cours de 2001-2002, qui relient les coefficients de Taylor aux points CM des séries thêta binaires de poids impair k à des produits de coefficients de Taylor aux points CM de séries thêta unaires du poids demi-entier $k/2$.

Enfin, pour les formes quadratiques *ternaires* ($n = 3$) il y a une relation entre les coefficients des séries thêta Θ_Q et les nombres de classes des corps quadratiques imaginaires provenant du fait que les coefficients de Fourier des séries d'Eisenstein de poids 3/2 s'expriment en termes de tels nombres de classes. En particulier, le théorème de Gauss-Hermite dit que le nombre $r_3(n)$ de représentations d'un entier positif n comme somme de trois carrés, c'est-à-dire, le n-ième coefficient de Fourier de $\theta(\tau)^3$, est un multiple simple du nombre de classes de $\mathbb{Q}(\sqrt{-n})$; par exemple, $r_3(n) = 24h(-n)$ si $n > 3$ est congru à 3 (mod 8) et sans facteurs carrés. Pour des formes ternaires plus générales on obtient des renseignements moins précis.

Séries thêta comme formes de Jacobi. Déjà dans les œuvres de Jacobi, les séries thêta n'étaient pas simplement des fonctions d'une variable $\tau \in \mathfrak{h}$, comme $\theta(\tau) = \sum e^{2i\pi n^2\tau}$, mais des fonctions de deux variables complexes $\tau \in \mathfrak{h}$ et $z \in \mathbb{C}$, comme $\theta(\tau, z) = \sum e^{2i\pi(n^2\tau+nz)}$, et en fait, c'était la dépendance de z qui était considérée comme la plus intéressante, puisque les quotients des séries thêta de ce type avec τ fixé donnent des fonctions elliptiques de z par rapport au réseau $\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$. Plus généralement, si L est un réseau de rang n et $Q : L \to \mathbb{Q}$ une forme quadratique définie positive comme avant, et si l'on fixe un vecteur x_0 dans L, alors la série thêta $\Theta_{Q,x_0}(\tau, z) = \sum_{x\in L} e^{2i\pi(Q(x)\tau+B(x,x_0)z)}$, où B est la forme bilinéaire symétrique associée à Q, est une forme de Jacobi de poids $k = n/2$ et d'indice $Q(x_0)$, ce qui veut dire qu'elle a un comportement modulaire par rapport aux transformations $(\tau, z) \mapsto \left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \frac{z}{c\tau + d}\right)$ avec $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dans un sous-groupe d'indice fini de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ et un comportement elliptique par rapport aux transformations $(\tau, z) \mapsto (\tau, z + \lambda)$ avec λ appartenant à un réseau d'indice fini dans $\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}$. Nous avons discuté quelques applications de cet aspect de la théorie des séries thêta. En particulier nous avons présenté une démonstration simple de la modularité des séries thêta, due à Y.-J. Choie, qui n'utilise pas la formule de sommation de Poisson mais se sert plutôt du fait qu'une série thêta de Jacobi comme $\theta(\tau, z)$ peut être caractérisée de façon unique par ses propriétés de transformation elliptiques par rapport à $z \mapsto z + m\tau + n$ (qui sont triviales à vérifier) et le fait qu'elle est une solution de l'équation de chaleur.

Applications des séries thêta. Il y a des applications nombreuses, d'importance en particulier dans la théorie des empilements de sphères et dans la théorie de codage, des séries thêta modulaires $\Theta_{Q,P}(\tau)$ et des séries thêta de Jacobi $\Theta_{Q,x_0}(\tau, z)$. Certaines d'entre elles ont été présentées. Nous en mentionnons deux ici. Si Q est donnée par une matrice symétrique de déterminant 1 à coefficients entiers et coefficients diagonaux pairs, alors $\Theta_Q(\tau)$ est une forme modulaire de poids $n/2$ sur le groupe modulaire $\Gamma_1 = \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$. Deux conséquences bien connues en sont que le rang n de Q est divisible par 8 et que la valeur minimale de $Q(x)$ pour $0 \neq x \in L$ est $\leq r$, où $r = \dim M_{n/2}(\Gamma_1) = [n/24]+1$. Le réseau L s'appelle *extrémal* si cette borne est atteinte. On sait qu'il existe des réseaux extrémaux pour $n = 24$ (réseau de Leech), 32, 40, 48, 56, 64 et 80, le cas $n = 72$ étant ouvert, mais un théorème de Mallows, Odlyzko et Sloane dit qu'il n'y a pas de réseaux extrémaux de rang très grand. Une démonstration simplifiée de ce résultat a été donnée. La série thêta d'un réseau extrémal de rang n ne dépend que de n, pas du réseau. Par exemple, si $n = 24m$, alors $\Theta_Q(\tau) = 1 + ma(m)\, q^{m+1} + (mb(m)/2 - 24m(m + 31)a(m))\, q^{m+2} + \ldots$, où $a(m)$ et $b(m)$ sont les coefficients de $\Delta(\tau)^m$ quand on écrit les deux fonctions modulaires $j(\tau)$ et $j(\tau)^2$, respectivement, comme des séries de Laurent par rapport à la forme modulaire $\Delta \in S_{12}(\Gamma_1)$. À partir de ceci il n'est pas difficile de montrer que $a(m)$ est équivalent à $Am^{-3/2}C^m$ pour certaines constantes $A = 225153{,}793389\ldots$ et $C = 1/\Delta(\tau_0) = 69{,}1164201716\ldots$, où $\tau_0 = 0{,}52352170017992\ldots\, i$ est l'unique zéro purement imaginaire de la forme quasi modulaire $E_2(\tau)$, tandis que $b(m)$ a un comportement asymptotique analogue mais avec la constante A remplacée par $B = \lambda A$ avec $\lambda = j(\tau_0) - 720 = 163067{,}793145\ldots$. Il en suit que le coefficient $mb(m)/2 - 24m(m + 31)a(m)$ de q^{m+2} en $\Theta_Q(\tau)$ serait négatif si m était plus grand qu'approximativement 6800, ce qui correspond à $n \approx 163000$, et donc qu'il ne peut pas y avoir des réseaux extrémaux de rang plus grand que cela. Comme deuxième application, on a présenté une preuve d'une conjecture donnée par Kac et Wakimoto en 1994. Cette conjecture, qui a été démontrée également par Milne (d'une manière plus compliquée, en utilisant des fonctions elliptiques plutôt que modulaires), donne une formule explicite pour le nombre de représentations d'un entier positif n comme somme de k nombres triangulaires pour tout k de la forme $4s^2$ ou $4s(s + 1)$. Pour la démonstration, on donne une caractérisation de la série thêta correspondante par une certaine propriété extrémale dans l'espace des formes modulaires de poids $k/2$ sur le groupe $\Gamma_0(2)$, et on identifie la forme unique ayant cette propriété extrémale avec un polynôme explicite dans les séries d'Eisenstein de poids entier pour ce groupe.

Séries thêta pour les formes quadratiques indéfinies

La deuxième partie du cours concernait le cas beaucoup moins étudié des séries thêta associées aux formes quadratiques indéfinies (« séries thêta indéfinies »). Nous n'en donnons ici qu'une discussion assez brève, puisque ce thème sera continué dans le cours de l'année prochaine et sera décrite plus en détail dans le résumé de ce cours-là.

Si on essaie de définir les fonctions thêta directement par des séries comme $\sum_{x \in L} q^{Q(x)}$ dans le cas où la forme quadratique Q n'est plus définie positive, on échoue pour deux raisons : d'abord, parce que les termes de cette série ne sont même pas bornés, et deuxièmement, parce que la forme Q sur le réseau L a en général un groupe d'unités infini, de manière que chaque terme q^n qui figure dans la série y figure un nombre infini de fois. Une façon de résoudre ces difficultés est de considérer des formes modulaires non holomorphes dans lesquelles la fonction $q^n = e^{2i\pi n\tau}$ est remplacée par une fonction de la forme $\varphi(|n|\,\Im(\tau))\, e^{2i\pi n\Re(\tau)}$ qui tend rapidement vers zéro pour $n \to -\infty$ et non seulement pour $n \to +\infty$, et en même temps de remplacer la sommation sur le réseau L par une sommation sur le quotient de L par l'opération du groupe d'automorphismes $\Gamma_Q = \mathrm{Aut}(Q, L)$. Un cas spécial de ce procédé est celui des séries thêta binaires non holomorphes associées aux corps quadratiques réels définies par Maass. Il a été traité dans le cours au moyen d'une construction un peu différente de celle de Maass. Ces séries thêta sont les analogues pour les corps quadratiques réels des formes modulaires de type CM associées aux corps quadratiques imaginaires discutées ci-dessus, mais sont maintenant des « wave forms » de Maass (voir le résumé de cours de 2003-2004) plutôt que des formes modulaires holomorphes. L'inconvénient de cette construction, et de celle plus générale donnée par Siegel de séries thêta non holomorphes pour les formes quadratiques indéfinies de rang plus grand, est qu'en abandonnant l'exigence d'holomorphie on perd aussi les propriétés d'algébricité des coefficients des séries thêta, de façon qu'on n'obtient plus le même genre de renseignements arithmétiques concernant les représentations des entiers positifs par Q que dans le cas défini.

La voie que nous avons suivie est de remplacer $\sum_{x\in L} q^{Q(x)}$ par une série de la forme $\Theta_{Q;C}(\tau) = \sum_{x\in L\cap C} q^{Q(x)}$ (ou plus généralement $\Theta_{Q,P;C}(\tau) = \sum_{x\in L\cap C} P(x) q^{Q(x)}$, avec P un polynôme sphérique par rapport à Q), où $C \subset L \otimes \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^n$ est un cône polyédral sur lequel la forme quadratique Q est strictement positive. Les sommes de ce type n'ont en général aucune raison d'être modulaires, mais parfois elles le sont, un exemple particulièrement simple étant la série d'Eisenstein classique $G_k(\tau) = -B_k/2k + \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n$ de poids k et de niveau 1, qui (à part son terme constant) peut être écrite comme la série thêta indéfinie $\sum_{a,b>0} a^{k-1} q^{ab}$ associée à la forme quadratique $Q(a,b) = ab$ et la fonction sphérique $P(a, b) = a^{k-1}$. La question devient alors de déterminer sous quelles conditions des séries de la forme $\Theta_{Q;C}$ ou $\Theta_{Q,P;C}$, ou des combinaisons linéaires de telles séries, seront des formes modulaires holomorphes.

Une réponse plus ou moins complète à cette question a été présentée dans le cours dans le cas où Q est de signature $(n-1, 1)$, avec des résultats partiaux pour le cas de Q arbitraire. Ces résultats, obtenus en collaboration avec Sander Zwegers, sont basés sur deux investigations précédentes : un article de Göttsche-Zagier (1998) sur les formes de Jacobi et leurs liens avec les invariants de Donaldson des variétés de dimension 4 avec $b_+ = 1$, et la thèse doctorale de Zwegers (2002) dans laquelle il a trouvé les termes non holomorphes simples qu'il faut rajouter aux célèbres « fausses fonctions thêta » (mock theta functions) de Ramanujan pour que celles-ci se transforment comme des formes modulaires.

Dans l'article de Göttsche et Zagier on considère des séries thêta de la forme $\Theta_{Q,c}^{x_0,x_1}(\tau) = \sum_{x\in L} \varepsilon^{x_0,x_1}(x)\, c(x)\, q^{Q(x)}$, où Q est une forme quadratique de signature $(n-1, 1)$, $c : L \to \mathbb{C}$ une fonction périodique, x_0 et x_1 deux éléments de L avec $Q(x_i) \leq 0$ et $B(x_0, x_1) < 0$, et $\varepsilon^{x_0,x_1}(x) = \mathrm{sign}(B(x_0,x)) - \mathrm{sign}(B(x_1,x))$. Il a été montré que ces séries convergent (ce qui n'est pas évident) et qu'elles sont modulaires si $Q(x_0) = Q(x_1) = 0$, mais aucun comportement de transformation modulaire n'a été trouvé en général. Dans la thèse de Zwegers, comme l'une de trois méthodes différentes (qui ont été discutées toutes dans le cours) qu'il a données pour étudier les fausses fonctions thêta, il a démontré qu'on peut remplacer $\Theta_{Q,c}^{x_0,x_1}$ par une fonction modifiée $\hat{\Theta}_{Q,c}^{x_0,x_1}$ qui est égale à $\Theta_{Q,c}^{x_0,x_1}$ quand $Q(x_0) = Q(x_1) = 0$ et qui se comporte toujours comme une forme modulaire de poids $n/2$, mais sans être holomorphe en général. La fonction $\hat{\Theta}_{Q,c}^{x_0,x_1}$ est définie exactement comme $\Theta_{Q,c}^{x_0,x_1}$, mais avec la fonction discontinue $\mathrm{sign}(B(x_i,x))$ remplacée par la fonction lisse $E(B(x_i,x)\Im(\tau))$, où $E(t) = 2\int_0^t e^{-\pi u^2}du$. La modularité de $\hat{\Theta}_{Q,c}^{x_0,x_1}$ est une conséquence de la formule de sommation de Poisson ou d'un théorème de Vignéras (1976) qui donne un critère pour la modularité des séries thêta indéfinies non holomorphes d'un type assez général. Le fait que $E(t) = \mathrm{sign}(t) + \mathrm{O}(e^{-\pi t^2})$ implique la décomposition $\hat{\Theta}_{Q,c}^{x_0,x_1} = \Theta_{Q,c}^{x_0,x_1} + \varphi_{Q,c}^{x_0} - \varphi_{Q,c}^{x_1}$, où chaque $\varphi_{Q,c}^{x_i}(\tau)$ ne dépend que de l'un de x_0 et x_1 et où $\varphi_{Q,c\circ\gamma}^{\gamma(x_i)} = \varphi_{Q,c}^{x_i}$ pour chaque élément γ du groupe d'automorphismes Γ_Q de Q. Ceci a deux conséquences :

(i) si $c \circ \gamma = c$ pour un élément $\gamma \in \Gamma_Q$, alors $\Theta_{Q,c}^{x_0,\gamma(x_0)} = \hat{\Theta}_{Q,c}^{x_0,\gamma(x_0)}$ est indépendant de x_0 et est une forme modulaire holomorphe de poids $n/2$;

(ii) plus généralement, si $c_1, ..., c_I$ sont des fonctions périodiques sur L et $\gamma_1, ..., \gamma_I$ des éléments de Γ_Q avec $\sum_i (c_i \circ \gamma_i - c_i) = 0$, alors $\sum_i \Theta_{Q,c_i}^{x_0,\gamma_i(x_0)} = \Sigma_i\, \hat{\Theta}_{Q,c_i}^{x_0,\gamma_i(x_0)}$ est indépendant de x_0 et est une forme modulaire holomorphe.

On obtient donc une application canonique

$$\Theta : H_1(\Gamma_Q; \mathrm{Per}(L)) \to M_{n/2}$$

du premier groupe d'homologie de Γ_Q, à coefficients dans l'espace $\mathrm{Per}(L)$ des fonctions périodiques sur L, dans l'espace des formes modulaires holomorphes de poids $n/2$ (et de niveau variable), et plus généralement, une application du groupe $H_1(\Gamma_Q; \mathrm{Per}(L) \otimes \mathcal{P}_\nu^Q)$ en $M_{n/2+\nu}$, où $\mathcal{P}_\nu^Q$ est l'espace des polynômes homogènes de degré ν qui sont sphériques par rapport à Q. La généralisation visée, non encore entièrement démontrée, est que le même résultat reste vrai pour Q de signature arbitraire $(n - s, s)$, mais en remplaçant le premier groupe d'homologie H_1 par le s-ième groupe d'homologie H_s.

Un certain nombre de cas spéciaux et d'applications ont été discutés, entre autres une définition de « fausses formes modulaires » qui généralise les fausses fonctions thêta de Ramanujan et la construction de fausses fonctions thêta de niveau (ou « ordre » dans la terminologie de Ramanujan) arbitrairement grand. Ils seront présentés plus en détail dans le cours de l'année prochaine.

Cours à l'École Normale Supérieure : « Bouillon Mathématique »

Le cours de cette année, au lieu de traiter des sujets divers comme cela a été fait dans les cours précédents de cette série, faisait partie du trimestre « Méthodes explicites en théorie des nombres » de l'IHP et était dévoué à la théorie des formes quadratiques binaires et des corps quadratiques. En particulier, on a traité les propriétés arithmétiques et analytiques de la fonction zêta de Riemann et des séries L de Dirichlet, avec comme application le théorème de Dirichlet sur les nombres premiers dans les suites arithmétiques, le lien entre les formes quadratiques binaires et les idéaux dans les corps quadratiques, la formule analytique pour le nombre des classes, la théorie de la réduction des formes quadratiques et son lien avec les fractions continues, et la théorie des genres.

Conférences invitées

Strasbourg, septembre 2004 : *Multiple zeta values, double shuffles, and modular forms. Physique et Théorie des nombres*, 75^{e} rencontre entre physiciens théoriciens et mathématiciens, Institut de Recherche Mathématique Avancée de Strasbourg.

Bremen, Allemagne, février 2005 : *The mock theta functions of Ramanujan.* Colloquium.

Bonn, Allemagne, février 2005 : *Mock modular forms.* Conférence à l'occasion de la retraite de Y. Manin.

Utrecht, Pays-Bas, février 2005 : *The amazing five-term relation.* Conférence hors série.

Utrecht, Pays-Bas, mars 2005 : *The equally amazing dilogarithm.* Conférence hors série.

Paris, mars 2005 : *Ramanujan à Hardy : de la première à la dernière lettre.* Conférence à la Bibliothèque Nationale de France dans le cadre du cycle « Un texte, un mathématicien ».

Bonn, Allemagne, avril 2005 : *Introduction to modular forms* (3 exposés). Conférences pour membres de l'école doctorale « IMPRS », Max-Planck-Institut für Mathematik.

Bonn, Allemagne, avril 2005 : *Higher spherical polynomials.* Séminaire de théorie des nombres, Max-Planck-Institut für Mathematik.

Marseille, mai 2005 : *Les fausses formes modulaires.* Séminaire Mathématique de Provence.

Luminy, juin 2005 : *Regulators, L-values, polylogarithms, special polynomials, knots, 3-manifolds and modular forms.* Variations sur la mesure de Mahler, CIRM.

Paris, juin 2005 : *Automorphic forms and their period functions.* Resonances and periodic orbits : spectral and dynamical zeta functions in quantum and classical chaos. « Le temps au travail », Institut Henri Poincaré.

Genève, Suisse, juillet 2005 : *Dilogarithms, modular forms and mock modular forms.* Borel memorial conference.

St.-Flour, août 2005 : *Les aspects expérimentaux en théorie des nombres.* Université d'été de Saint-Flour, « Le calcul sous toutes ses formes ».

Leiden, Pays-Bas, septembre 2005 : *Algebraic K-theory, modular forms and quantum invariants.* Arithmetic Geometry and High Energy Physics, Lorentz Center.

Autres missions et activités

Heidelberg, Allemagne, septembre 2004 : Comité d'évaluation scientifique du Landau Minerva Center de l'Université Hébreu de Jerusalem, Israël.

Oslo, Norvège, octobre 2004 : Comité de sélection pour le Prix Abel de l'Académie Royale de Norvège.

Paris, octobre-décembre 2004 : Membre du comité d'organisation du trimestre « Méthodes explicites en théorie des nombres » à l'Institut Henri Poincaré.

Bonn, Allemagne, janvier 2005 : Comité scientifique international de l'Institut Minerva « Emmy Noether » de l'Université de Bar-Ilan, Israël.

Berlin, Allemagne, février 2005 : Sitzung der Chemisch-Physikalisch-Technischen Sektion, Max-Planck-Gesellschaft.

Bruxelles, Belgique, février 2005 : Comité de sélection pour le Prix Abel de l'Académie Royale de Norvège.

Oslo, Norvège, mai 2005 : Cérémonie du décernement du Prix Abel de l'Académie Royale de Norvège.

Berlin, Allemagne, juin 2005 : Hauptversammlung, Max-Planck-Gesellschaft.

Publications et prépublications

A geometric property of parallelograms inscribed in ellipses (avec A. Connes). À paraître dans le *American Mathematical Monthly.* 4 pages.

Ramanujan à Hardy : de la première à la dernière lettre. À paraître dans *Tangente.* 14 pages.

La conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer : nombre magique pour problème elliptique. Les Dossiers de La Recherche, n° 20, août-octobre 2005, pp. 48-53.

Double zeta values and modular forms (avec H. Gangl et M. Kaneko). À paraître dans *Automorphic forms and Zeta functions. Proceedings of the conference in memory of Tsuneo Arakawa*, World Scientific, 2006, 25 pages.