

Théorie des Nombres

M. Don ZAGIER, professeur

COURS : Périodes des formes modulaires

La théorie des périodes donne une méthode élémentaire et en même temps très puissante pour étudier les formes modulaires. Déjà le cas le plus simple, celui des périodes des formes modulaires holomorphes pour le groupe modulaire $\Gamma_1 = PSL_2(\mathbb{Z})$, présente beaucoup d'intérêt, ayant des liens avec (entre autres) :

- les valeurs spéciales (critiques) des fonctions L ,
- la cohomologie des groupes,
- les séries thêta de Jacobi,
- les fractions continues,
- les sommes de Dedekind,
- les valeurs de la fonction « double zêta » d'Euler

qui sont tous des thèmes classiques en théorie des nombres. Le cours de cette année a été dédié principalement à l'étude de ce cas spécial. Les généralisations aux autres groupes, aux formes modulaires de poids demi-entier et aux formes modulaires non-holomorphes de Maass seront l'objet de la suite du cours en 2003-2004.

On rappelle que pour chaque entier $n \in \mathbb{Z}$ il y a une opération notée $|_n$ du groupe $G = SL_2(\mathbb{R})$ sur l'ensemble des fonctions holomorphes dans le demi-plan supérieur de Poincaré \mathcal{H} définie par

$$(f|_n g)(z) = (cz + d)^{-n} f\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) \quad \text{pour } g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G, z \in \mathcal{H}.$$

On étend cette opération à une opération de l'anneau $\mathbb{Z}[G]$ de la façon évidente. Une forme modulaire de poids k par rapport à un sous-groupe discret (fuchsien) Γ de G est une fonction holomorphe invariante par l'opération $|_k$ du groupe Γ et à croissance polynomiale près du bord de \mathcal{H} . Le point de départ de la théorie des périodes est l'*identité de Bol* qui affirme que

$$\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}(F|_{2-k}g) = \left(\frac{d^{k-1}F}{dz^{k-1}}\right)|_k g$$

pour tout entier $k \geq 1$, toute fonction F holomorphe en \mathcal{H} , et tout $g \in G$. Si f est une forme modulaire de poids k , on choisit pour F une primitive $(k - 1)$ -ième ou *intégrale d'Eichler* de f , c'est-à-dire une fonction holomorphe en \mathcal{H} avec $F^{(k-1)} \doteq f$ (ici et dans la suite on note par \doteq l'égalité à un facteur scalaire près, ce qui simplifiera les formules). Alors l'identité de Bol donne

$$\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}(F|_{2-k}(1 - \gamma)) = \left(\frac{d^{k-1}F}{dz^{k-1}}\right)|_k(1 - \gamma) \doteq f|_k(1 - \gamma) = 0 \quad (\forall \gamma \in \Gamma)$$

et il s'ensuit que la fonction

$$r_\gamma = r_{F,\gamma} := F|_{2-k}(1 - \gamma)$$

est un polynôme en z de degré $\leq k - 2$. Notons par V_k l'espace des tels polynômes ; alors on voit aisément que le groupe G (et *a fortiori* son sous-groupe Γ) opère sur V_k par l'action $|_{2-k}$ et que l'application $r_F : \gamma \mapsto r_{F,\gamma}$ de Γ en V_k est un *cocycle* : on a

$$r_{\gamma\gamma'} = F|_{2-k}(1 - \gamma\gamma') = F|_{2-k}((1 - \gamma)\gamma' + 1 - \gamma') = r_\gamma|\gamma' + r_{\gamma'}.$$

Un autre choix de l'intégrale d'Eichler F changera celle-ci par un élément de V_k (puisque la primitive $(k - 1)$ -ième d'une fonction holomorphe est déterminée à un polynôme de degré $\leq k - 2$ près) et changera donc le cocycle r_F par un cobord. On obtient de cette manière une application

$$r : M_k(\Gamma) \rightarrow H^1(\Gamma, V_k)$$

de l'espace $M_k(\Gamma)$ des formes modulaires holomorphes de poids k sur Γ dans le premier groupe de cohomologie de Γ à coefficients dans V_k . C'est l'objet central de la théorie.

Spécialisons maintenant au cas où Γ est Γ_1 , le groupe modulaire, et f une forme modulaire parabolique. Alors d'une part il y a un choix canonique (à une constante multiplicative près) pour l'intégrale d'Eichler F de f qui est celle qui tend vers 0 quand $\text{Im}(z) \rightarrow \infty$; elle est donnée explicitement, soit par l'intégrale

$$F(z) = \int_z^\infty f(z')(z - z')^{k-2} dz' \quad (z \in \mathcal{H}),$$

soit par son développement de Fourier :

$$F(z) \doteq \sum_{m=1}^\infty \frac{a(m)}{m^{k-1}} q^m, \quad \text{où} \quad f(z) = \sum_{m=1}^\infty a(m)q^m, \quad q = e^{2\pi iz}.$$

Un calcul simple utilisant la modularité de f montre alors que

$$(F|_{2-k} \gamma)(z) = \int_z^{\gamma^{-1}(\infty)} f(z')(z - z')^{k-2} dz'$$

pour tout $\gamma \in \Gamma_1$. Le cocycle r_{F_s} , noté maintenant r_f puisqu'on a fait un choix bien déterminé de la fonction F , est donc donné par

$$r_{f,\gamma}(z) = \int_{\gamma^{-1}(\infty)}^{\infty} f(z')(z - z')^{k-2} dz',$$

ce qui rend sa nature polynomiale explicite. D'autre part, le groupe Γ_1 est engendré par les deux éléments $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (qui opère sur \mathcal{H} par $z \mapsto z + 1$) et $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (qui opère par $z \mapsto -1/z$), et il est évident que $r_{f,T} = 0$ puisque T fixe le point ∞ . Le cocycle r_f est donc déterminé totalement par sa valeur $P_f = r_{f,S}$ en S , qui est le polynôme

$$P_f(z) = \int_0^{\infty} f(z)(z - z')^{k-2} dz' = \sum_{n=0}^{k-2} i^{1-n} \binom{k-2}{n} P_n(f) z^{k-2-n},$$

où les nombres $P_n(f)$ sont les *périodes* de f , données par

$$P_n(f) = \int_0^{\infty} f(it) t^n dt \quad (0 \leq n \leq k - 2).$$

Un calcul classique de Hecke montre que ces nombres sont, à un facteur simple près, les *valeurs critiques* $L(f, 1), \dots, L(f, k - 1)$ de la fonction L associée à f , c'est-à-dire, de la fonction $L(f, s)$ définie par le prolongement analytique de la série de Dirichlet $\sum_{m=1}^{\infty} a(m) m^{-s}$, où les $a(m)$ sont les coefficients de Fourier de f introduits ci-dessus. C'est un exemple clé des théorèmes et conjectures qui relient les valeurs spéciales des séries $L(s)$ motiviques dans les arguments critiques (c'est-à-dire les valeurs intégrales de s pour laquelle ni le facteur gamma de $L(s)$, ni sa réflexion par l'équation fonctionnelle devient infini) aux « périodes » générales (= intégrales des formes différentielles algébriques sur des cycles algébriques). Ces théorèmes et conjectures sont l'un des piliers de la théorie des nombres et de la géométrie algébrique arithmétique contemporaines et beaucoup des développements les plus spectaculaires des dernières années y sont liés.

On peut maintenant développer la théorie en plusieurs directions différentes. En voici quelques-unes qui ont été traitées dans le cours.

Méthode de Rankin et algébricité des périodes

La méthode de Rankin et Selberg, inventée en 1939, consiste à calculer de deux façons différentes l'intégrale sur un domaine fondamental du produit d'une fonction automorphe et d'une série d'Eisenstein. Si on l'applique au calcul du produit de Petersson $(f, E_t h) = \int_{\Gamma \backslash \mathcal{H}} f(z) \bar{E}_t(z) \overline{h(\bar{z})} y^{k-2} dx dy$ ($z = x + iy$),

où $f = \sum a(m)q^m$ est une forme parabolique de poids k , E_ℓ la série d'Eisenstein de poids $\ell > 2$, et $h = \sum b(m)q^m$ une forme modulaire de poids $k - \ell$, on trouve que cette intégrale est, à un facteur simple près, la valeur en $s = k - 1$ de la convolution $L(f \otimes \bar{h}, s) = \sum a(m)\overline{b(m)}m^{-s}$ des séries L attachées à f et à h . Si on spécialise encore au cas où la forme modulaire $h(z)$ est elle-même une série d'Eisenstein de poids $k - \ell$ et où f est une fonction propre pour l'action des opérateurs de Hecke, on obtient la formule $(f, E_\ell E_{k-\ell}) = 2^{1-k} i^\ell P_{\ell-1}(f) P_{k-2}(f)$. Les séries d'Eisenstein E_ℓ et $E_{k-\ell}$ ayant des coefficients de Fourier rationnels, le produit de Petersson en question est un multiple algébrique (appartenant au corps de nombres engendré par les coefficients de f) du produit de Petersson (f, f) de la forme f avec elle-même, et on déduit en laissant varier le nombre pair ℓ que toutes les périodes $P_n(f)$ avec n impair sont algébriquement proportionnelles. Si on généralise la méthode en remplaçant le produit $E_\ell E_{k-\ell}$ par le crochet de Rankin-Cohen (étudié dans le cours de l'année passée) $[E_\ell, E_m]_n$, où $\ell + m + 2n = k$, on trouve la formule $(f, [E_\ell, E_m]_n) = 2^{1-k} i^{-m} \binom{k-2}{n} P_n(f) P_{\ell+n-1}(f)$. Le même raisonnement qu'avant montre alors que les périodes $P_n(f)$ avec n impair sont également algébriquement proportionnelles entre elles. Ces résultats d'algébricité sont dus à Manin, mais avec une démonstration complètement différente.

Périodes des formes modulaires spéciales

Les résultats d'algébricité qu'on vient d'expliquer impliquent que l'espace S_k des formes modulaires paraboliques sur Γ_1 possède, outre la structure rationnelle usuelle donnée par la rationalité des coefficients de Fourier, deux autres structures rationnelles canoniques et mutuellement duales : si on définit $S_k^-(\mathbb{Q})$ (resp. $S_k^+(\mathbb{Q})$) comme le \mathbb{Q} -espace vectoriel des formes modulaires $f \in S_k$ avec $P_n(f) \in \mathbb{Q}$ pour tout n pair (resp. impair), alors on a $S_k^+(\mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = S_k^-(\mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = S_k$ et $(f, g) \in \mathbb{Q}$ pour tout $f \in S_k^+(\mathbb{Q})$, $g \in S_k^-(\mathbb{Q})$. Il en suit que les formes paraboliques $R_n \in S_k$ ($n = 0, \dots, k - 2$) définies par la propriété que $(f, R_n) = P_n(f)$ pour toute forme parabolique $f \in S_k$ ont elles-mêmes des périodes rationnelles : on a $(R_m, R_n) = r_n(R_m) \in \mathbb{Q}$ pour $m \not\equiv n \pmod{2}$ et par conséquent $R_n \in S_k^\pm(\mathbb{Q})$ pour $(-1)^n = \pm 1$. Pour R_n on possède la représentation explicite $R_n(z) \doteq \sum_{\gamma \in \Gamma} z^{n+1|_k} \gamma$ (Cohen), et en l'utilisant on obtient une formule élémentaire exprimant le nombre rationnel (R_m, R_n) pour $0 < m, n < k - 2$, $m \not\equiv n \pmod{2}$, comme une combinaison linéaire simple des nombres de Bernoulli $B_{|m-n|+1}$ et $B_{|k-2-m-n|+1}$ (Kohnen-Zagier). Cela donne une base explicite sur \mathbb{Q} de l'espace des polynômes des périodes.

Fonction génératrice et séries thêta de Jacobi

Un calcul lié aux deux qui viennent d'être décrits mène à un résultat beaucoup plus satisfaisant qui donne simultanément les périodes de toutes les formes modulaires (de tout poids) sur Γ_1 par une fonction génératrice. Si $f \in S_k(\Gamma_1)$ est une forme

propre normalisée ($a(1) = 1$) pour les opérateurs de Hecke, on définit un polynôme en deux variables $P_f(X, Y)$ comme $c_k(P_f^+(X)P_f^-(Y) - P_f^-(X)P_f^+(Y))/(f, f)$, où $c_k = (2i)^{k-3}/(k-2)!$ et où P_f^\pm désignent les parties paire et impaire de P_f . Alors les résultats ci-dessus montrent que $P_f(X, Y)$ est un polynôme à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}$ et que la fonction à trois variables $C_k^0(X, Y, z) = \sum_f P_f(X, Y) f(z) \in V_k \otimes V_k \otimes \mathbb{C}[[q]]$ (somme sur toutes les formes propres normalisées $f \in S_k$) a des coefficients rationnels. Si on étend la définition des polynômes des périodes $P_f(z)$ au cas où $f \in M_k$ n'est plus parabolique (ce qui peut se faire de façon canonique et naturelle, les fonctions obtenues pour les séries d'Eisenstein étant données explicitement en termes de nombres de Bernoulli, mais n'appartenant plus à V_k), et si on remplace $C_k^0(X, Y, z)$ par sa somme $C_k(X, Y, z)$ avec une contribution venant de la série d'Eisenstein normalisée $G_k(z)$, et avec $C_0(X, Y, z) = (XY - 1)(X + Y)/X^2 Y^2$, alors on a :

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k(X, Y, z) T^{k-2} = \frac{\theta'(0)^2 \theta((XY - 1)T) \theta((X + Y)T)}{\theta(XYT) \theta(XT) \theta(YT) \theta(T)},$$

où $\theta(u) = \theta_z(u)$ est la série thêta de Jacobi classique, donnée par exemple par la formule

$$\theta(u) = q^{u^2/8} e^{u^2} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) (1 - q^n e^u) (1 - q^{n-1} e^{-u})$$

(« produit triple de Jacobi »). On peut extraire de cette formule des renseignements complets sur les coefficients de Fourier et sur les polynômes des périodes des formes propres pour les opérateurs de Hecke en $M_k(\Gamma_1)$ pour tout k .

Opérateurs de Hecke

Les applications $\mathbf{r}^\pm : f \mapsto P_f^\pm$ de $S_k(\Gamma_1)$ en V_k sont injectives avec des images connues. On peut donc identifier les espaces des formes paraboliques avec des espaces de polynômes, et toutes les structures qui existent pour les formes modulaires doivent pouvoir se retrouver dans l'univers plus simple des polynômes. En particulier, cela devrait être le cas pour l'opération de l'algèbre de Hecke, sans doute la structure la plus importante pour étudier les formes modulaires. Cela a été fait d'abord par Manin et puis dans des versions différentes par plusieurs autres auteurs (Mazur, Choie-Zagier, Merel, ...). Rappelons que le n -ième opérateur de Hecke sur $S_k(\Gamma_1)$ est défini comme $f \mapsto f|_k T_n$, où $T_n \in \mathbb{Z}[\mathcal{M}_n]$ (\mathcal{M}_n l'ensemble des matrices en $M_2(\mathbb{Z})/\{\pm 1\}$ de déterminant n) est la somme de n'importe quel système de représentants des classes $\Gamma_1 \backslash \mathcal{M}_n$. Si on choisit pour T_n l'élément T_n^∞ défini comme la somme de tous les éléments M de \mathcal{M}_n avec $M(\infty) = \infty$ et $0 \leq M(0) < 1$, alors la fonction $F|_{2-k} T_n^\infty$ sera une intégrale d'Eichler pour $f|_k T_n$ et on en déduit que le polynôme des périodes de $f|_k T_n$ est donné par $P_{f|_k T_n} = P_f|_{2-k} \tilde{T}_n$, où $\tilde{T}_n \in \mathbb{Z}[\mathcal{M}_n]$ est n'importe quelle solution de l'équation

$$(1 - S)\tilde{T}_n = T_n^\infty(1 - S) \pmod{(1 - T)\mathbb{Z}[\mathcal{M}_n]}.$$

(Preuve : On a $P_{f|T_n} = F_{f|T_n}|(1 - S) = F|T_n^\infty(1 - S) = F|(1 - S)\tilde{T}_n = P_f|\tilde{T}_n$.) On montre l'existence d'une telle somme \tilde{T}_n pour tout n . (Pour $n = 2$ on peut prendre par exemple $\tilde{T}_2 = T_2^\infty + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.) Les formules obtenues de cette manière donnent non seulement un point de vue nouveau et très élémentaire pour comprendre les opérateurs de Hecke et une méthode simple pour les calculer explicitement, mais aussi une nouvelle démonstration (en fait, deux nouvelles démonstrations) de la formule des traces d'Eichler-Selberg pour calculer les nombres $\text{tr}(T_n, S_k)$. La formule que l'on trouve est un peu différente de la formule classique et l'égalité des deux résultats donne des identités élémentaires mais pas du tout évidentes pour les nombres des classes des corps quadratiques imaginaires et pour les nombres de Bernoulli.

Produit scalaire de Petersson

Une autre structure fondamentale dans l'espace de $S_k(\Gamma_1)$ est le produit scalaire de Petersson $(f, g) = \int_{\Gamma \backslash \mathcal{H}} f(z) \overline{g(z)} y^{k-2} dx dy$, qui devrait donc être lui aussi calculable en termes des périodes de f et de g . C'est en effet possible (Haberland, Kohnen-Zagier). On considère, au lieu de l'intégrale d'Eichler usuelle de $g(z)$, l'intégrale modifiée

$$G^*(z) = \int_z^\infty g(z')(z' - \bar{z})^{k-2} dz.$$

Alors la différentielle de $f(z)\overline{G^*(z)} d\bar{z}$ est un multiple scalaire de l'intégrand du produit scalaire (f, g) et en combinant cette remarque avec le théorème de Stokes et le calcul (simple) du comportement de $G^*(z)$ sous l'opération du groupe modulaire on arrive à une expression pour (f, g) en termes de polynômes des périodes P_f et P_g . Cette formule a plusieurs conséquences, parmi lesquelles la détermination exacte de l'image de l'application r^- de $S_k(\Gamma_1)$ en V_k . (Les résultats classiques d'Eichler-Shimura-Manin donnent seulement un sous-espace de V_k qui contient cette image avec codimension 1).

Reconstruction d'une forme modulaire à partir de ses périodes

Comme on l'a déjà mentionné, on connaît exactement l'image des applications injectives $r^\pm : S_k(\Gamma_1) \rightarrow V_k$. On peut cependant demander mieux, à savoir une formule explicite qui permettrait de reconstruire une forme parabolique $f(z)$ dont on ne connaît que le polynôme des périodes pair ou impair $P_f^\pm(z)$. C'est en effet possible, en utilisant d'une façon assez inattendue la théorie des fractions continues. Étant donné un nombre réel x , on trouve sa fraction continue $x = n_0 - 1/(n_1 - 1/\dots)$ de façon inductive en posant $x_0 = x, x_{i+1} = 1/(n_i - x_i)$ avec $n_i \in \mathbb{Z}, x_i \leq n_i < x_{i+1} + 1$. On a alors $x_i = \gamma_i(x)$ avec $\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\gamma_{i+1}^{-1} = \gamma_i^{-1} \begin{pmatrix} n_i & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

D'autre part, l'expression pour l'intégrale d'Eichler F de f comme une somme $\sum_{m>0} m^{1-k} a(m) e^{2\pi i m z}$ converge aussi pour z réel et on peut donc parler des valeurs $F(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. Les identités $F|T = F$ et $F|S = F - P_f$ entraînent alors $P_f| \gamma_{i+1} = (F - F|T^{n_i} S)| \gamma_{i+1} = F| \gamma_{i+1} - F| \gamma_i$ et donc (après une vérification de convergence) $F(x) = -\sum_{i=1}^{\infty} (P_f| \gamma_i)(x)$. On utilise maintenant le lemme surprenant suivant :

Lemme. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ irrationnel, l'ensemble des matrices $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots\}$ défini par la fraction convergente de x est égal à l'ensemble $\gamma \in \Gamma_1$ tels que $0 \leq \gamma(\infty) < 1 \leq \gamma(x)$.

En combinant ce lemme avec la formule $f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t)(z - t)^{-k} dt$ qui exprime la forme parabolique f en termes de l'extension de son intégrale d'Eichler à \mathbb{R} , on obtient enfin la formule explicite

$$f(z) \doteq \sum_{\substack{\gamma \in \Gamma_1 \\ 0 \leq \gamma(\infty) < 1}} (Q_f|_k \gamma)(z) \quad \text{avec} \quad Q_f(z) = \int_1^{\infty} \frac{P_f(t)}{(t-z)^k} dt \in \mathbb{C} \left[\frac{1}{z-1} \right]$$

pour $f(z)$ comme une somme infinie de fonctions rationnelles. On peut obtenir d'autres représentations en changeant l'algorithme des fractions continues utilisé. Par exemple, avec l'algorithme des meilleures approximations (x_i et γ_i définis comme ci-dessus mais avec $x_i - \frac{1}{2} \leq n_i < x_i + \frac{1}{2}$), l'analogue du lemme ci-dessus dit que l'ensemble des γ_i ($i \geq 1$) pour un nombre réel x donné consiste en toutes les matrices $\gamma \in \Gamma_1$ telles que $\gamma(x) \geq 2$ et $\frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}) < \gamma(\infty) < \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$ ou bien $\gamma(x) \leq -2$ et $\frac{1}{2}(-3 + \sqrt{5}) < \gamma(\infty) < \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5})$. Des résultats analogues existent pour les méthodes de réduction associées à d'autres groupes que Γ_1 et seront traités dans le cours de l'année prochaine.

COURS À L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE : BOUILLON MATHÉMATIQUE

En dehors du cours officiel sur les périodes des formes modulaires, un cours supplémentaire a été donné à l'École Normale Supérieure, avec le titre « Bouillon Mathématique ». D'après la description dans la « plaquette » de l'ENS, « Ce cours propose une promenade à travers les mathématiques hors des sentiers battus. On rencontrera en chemin des thèmes variés d'algèbre, théorie des nombres, combinatoire et géométrie. Chaque séance sera consacrée à un sujet différent et ne devrait pas nécessiter de prérequis ». En plus, certains élèves de l'École ont rédigé, seuls ou en petits groupes, leurs notes des cours et on a discuté ensemble les résultats de ces exercices dans des « ateliers de rédaction ». Ce modèle peu standard a eu une résonance inattendue, puisque quelques 130 personnes ont assisté à la première conférence et environ la moitié de ce chiffre à l'intégralité du cours. Les thèmes traités étaient les suivants :

1. Le bandit manchot et les volumes des tranches des cubes.
2. Des inégalités classiques et moins classiques.
3. Démonstrations combinatoires du théorème de Fermat et de la loi de réciprocity quadratique.
4. Un algorithme rapide pour la sommation des séries à termes alternés.
5. L'équation d'Euler $w^4 + x^4 + y^4 = z^4$.
6. Sur la somme et le produit d'un ensemble avec lui-même.
7. Deux problèmes de probabilité.
8. La détermination de primalité en temps polynomial.
9. Les nombres de Markoff.

CONFÉRENCES INVITÉES

Düsseldorf, Allemagne, septembre 2002 : *Die Vermutung von Birch und Swinnerton-Dyer*. Nordrhein-Westfälische Akademie der Wissenschaften.

Saarbrücken, Allemagne, octobre 2002 : *Darstellung von Primzahlen als Summe zweier Kuben*. Conférence en l'honneur du Professeur H.-G. Zimmer.

Utrecht, Pays-Bas, novembre 2002 : *Traces of singular moduli*. Deux conférences, Dutch intercity seminar on Borcherds products.

Ankara, Turquie, novembre 2002 : *Taylor coefficients of modular forms*. Arf lecture, conférence spéciale annuelle du METU (Middle East Technical University).

Ankara, Turquie, novembre 2002 : *Modular forms and differential equations*. Séminaire, METU.

Ankara, Turquie, novembre 2002 : *Quadratic functions and modular forms*. Séminaire, METU.

Ankara, Turquie, novembre 2002 : *The conjecture of Birch and Swinnerton-Dyer*. Colloque, METU.

Bordeaux, décembre 2002 : *Coefficients de Taylor des formes modulaires*. Séminaire, Université de Bordeaux I.

Vienne, Autriche, janvier 2003 : *Passion für Mathematik*. Conférence populaire à l'occasion de l'ouverture du musée mathématique « math space » dans le Museumsquartier Wien.

Vienne, Autriche, janvier 2003 : *Perlen der Zahlentheorie*. Gödel lecture, conférence spéciale à l'Académie des Sciences d'Autriche.

Vienne, Autriche, janvier 2003 : *Summen von zwei Quadratzahlen*. Junior academy, conférence pour élèves organisée par l'Académie des Sciences d'Autriche.

Les Houches, mars 2003 : *Dilogarithms*. Deux conférences à l'École de Physique des Houches « Frontiers in Number Theory, Physics and Geometry ».

Durham, Grande-Bretagne, février 2003 : *The experimental side of number theory*. Collingwood Lecture, conférence spéciale annuelle pour les étudiants en mathématiques.

Osaka, Japon, avril 2003 : *Taylor coefficients of modular forms*. Miniconference on modular forms, Université d'Osaka.

Osaka, Japon, avril 2003 : *Mock theta functions*. Miniconference on modular forms, Université d'Osaka.

Osaka, Japon, avril 2003 : *The many aspects of the five-term relation*. Colloque, Université d'Osaka.

Milano, Italie, mai 2003 : *New Aspects of Modular Forms*. Lezioni Leonardesche 2003, conférence spéciale annuelle de l'Università di Milano.

Pisa, Italie, mai 2003 : *The Selberg zeta function, continued fractions, and dynamics*. Séminaire, Scuola Normale Superiore.

Pisa, Italie, mai 2003 : *Modular forms and their periods*. Colloquium de Giorgi, conférence spéciale annuelle de la Scuola Normale Superiore.

Roma, Italie, mai 2003 : *Mock theta functions*. Séminaire de théorie des nombres, Università di Roma 2.

Heidelberg, Allemagne, juin 2003 : *Modulformen von innen und außen*. Colloque, Universität Heidelberg.

Graz, Autriche, juillet 2003 : *The Taylor expansions of modular forms*. Conférence plénière publique, Journées Arithmétiques 2003.

Paderborn, Allemagne, juillet 2003 : *Die faszinierende Welt der Zahlen*. Conférence populaire dans la série « Faszination Mathematik » au Heinz Nixdorf MuseumsForum.

Bonn, Allemagne, août 2003 : *Quantum modular forms*. Workshop on Noncommutative Geometry and Number Theory.

AUTRES MISSIONS ET ACTIVITÉS

Utrecht, Pays-Bas, octobre 2002 : Soutenance de thèse de mon étudiant Sander Zweegers (« Mock theta functions »), Universiteit Utrecht.

Paris, novembre 2002 : Co-organisateur en collaboration avec l'Ambassade de Norvège du colloque « Niels Henrik Abel Aujourd'hui » en l'honneur d'Abel et de J.-P. Serre, Collège de France.

Bordeaux, décembre 2003 : Membre du jury, thèse de Christophe Delaunay (« Formes modulaires et invariants de courbes elliptiques définies sur \mathbb{Q} », Université de Bordeaux I.

Göttingen, Allemagne, mai 2003 : Membre, comité d'évaluation du groupe de recherche « Zetafunktionen und lokalsymmetrische Räume », Deutsche Forschungsgemeinschaft.

Bonn, Allemagne, juin 2003 : Co-organisateur (avec Yu. Manin, G. Faltings et G. Harder) de la « Mathematische Arbeitstagung 2003 » au Max-Planck-Institut für Mathematik.

Oberwolfach, Allemagne, juillet 2003 : Co-organisateur (avec H. Cohen et H. Lenstra) du workshop « Explicit methods in number theory » au Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach.

PUBLICATIONS

Traces of singular moduli. Dans *Motives, Polylogarithms and Hodge Theory* (Eds. F. Bogomolov et L. Katzarkov), Lecture Series **3**, International Press, Somerville (2002) 209-244.

(avec P. Kleban) Crossing probabilities and modular forms. *J. of Statistical Physics* **113** (2003) 431-453.