Théorie des nombres

M. Don Zagier, professeur

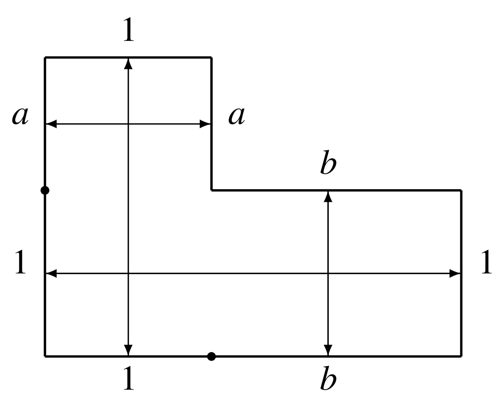
Cours : Courbes de Teichmüller et surfaces modulaires de Hilbert

La théorie des courbes de Teichmüller, qui mélange des éléments de la géométrie algébrique complexe et de la théorie des systèmes dynamiques, a vu un développement spectaculaire dans les dernières années, grâce aux travaux de C. McMullen et d'autres chercheurs. En particulier, dans le cas de genre 2, il y a une classification complète de ces courbes, due à K. Calta et à McMullen. Cette classification implique que les courbes de Teichmüller en genre 2 sont toujours contenues dans des surfaces modulaires de Hilbert, ce qui permet en principe une approche par les méthodes venant de la théorie des nombres et de la théorie des formes modulaires. Une telle approche a été développée par M. Möller et moi-même et était le sujet du cours de cette année, certains des résultats ayant déjà été présentés dans le cours de 2008-2009. On obtient en particulier une description des courbes de Teichmüller sur une surface modulaire de Hilbert donnée comme l'ensemble des zéros de la dérivée d'une certaine fonction thêta. Cette description explicite permet de mieux comprendre et de démontrer de façon beaucoup plus simple qu'avant les principaux résultats de la théorie obtenus dans les travaux de McMullen et de M. Bainbridge.

Courbes de Teichmüller

Soit g un entier ≥ 2. L'espace $\mathcal{M}_g$ de modules des courbes de genre g est une variété algébrique, de dimension complexe $3g-3$, munie d'une métrique canonique, la métrique de Teichmüller. Une *courbe de Teichmüller* est une courbe algébrique irréductible dans $\mathcal{M}_g$ qui est totalement géodésique par rapport à cette métrique. Une telle courbe peut s'obtenir de la manière suivante. On considère le fibré vectoriel $\Omega\mathcal{M}_g$ de dimension g sur $\mathcal{M}_g$ consistant en les classes d'équivalence $[C,\omega]$, où C est une courbe de genre g et ω une 1-forme holomorphe sur C, et le fibré en sphères $\Omega\mathcal{M}_g^{(1)} \subset \Omega\mathcal{M}_g$ obtenu en fixant une valeur non-nulle de $\int_C \omega \wedge \overline{\omega}$. N'importe quel élément de $\Omega\mathcal{M}_g^{(1)}$ peut être obtenu comme le résultat de l'identification en paires des côtés d'une collection finie de polygones dans $\mathbb{C}$ d'aire totale fixée, où les deux côtés que l'on identifie sont toujours parallèles et de la même longueur, mais d'orientation opposée, et où ω correspond à la 1-forme dz dans les polygones (z étant la coordonnée sur $\mathbb{C}$). L'opération naturelle de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}^2=\mathbb{C}$ envoie une telle collection de polygones à une autre, sans changer l'aire totale des polygones, et donne donc lieu à une opération sur $\Omega\mathcal{M}_g^{(1)}$ telle que le sous-groupe $\mathrm{SO}(2,\mathbb{R})$ ne change pas la courbe C mais multiplie la forme ω par un nombre complexe de module 1. L'orbite de $\xi=[C,\omega]$ dans $\Omega\mathcal{M}_g^{(1)}$ a la forme $\Gamma_\xi\backslash\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, où Γ_ξ est le stabilisateur de $\xi=[C,\omega]$ dans $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, et sa projection dans $\mathcal{M}_g$ a la forme $\Gamma_\xi\backslash\mathcal{H}$, où $\mathcal{H}=\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\mathrm{SO}(2,\mathbb{R})$ est le demi-plan de Poincaré. Le groupe Γ_ξ est toujours discret dans $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, mais en général il est trivial et l'orbite de ξ est dense en $\mathcal{M}_g$. Dans les cas rarissimes, qui s'appellent les *courbes de Veech*, où le groupe Γ_ξ est cofini, la courbe $\Gamma_\xi\backslash\mathcal{H}\subset\mathcal{M}_G$ est algébrique. Ce sont exactement les courbes de Teichmüller.

Le nombre de courbes de Teichmüller dans $\mathcal{M}_g$ pour g fixé est toujours au moins 2, puisque la courbe correspondante à un $2n$-gone ($n\geq 4$) avec ses côtés opposés identifiés en paires est toujours une courbe de Veech, de genre $g=[n/2]$, mais sauf pour des très petites valeurs de g, on ne sait même pas si ce nombre est fini ou infini. Dans le cas spécial $g=2$ des résultats de K. Calta et C. McMullen donnent un nombre infini de courbes de Teichmüller. On considère par exemple une « table en forme de L » comme celle indiquée dans la figure,



où a et b sont des nombres réels strictement positifs et où les côtés opposés sont identifiés de la manière indiquée. Ceci donne toujours une courbe de genre 2 avec une 1-forme holomorphe, qui d'après un résultat de McMullen sera une courbe de Veech si et seulement si les nombres a et b sont, soit rationnels (ce qui correspond à un revêtement d'une courbe de genre 1, cas qu'on exclura dorénavant), soit des irrationalités quadratiques avec $a^\sigma+b=-1$, où σ est l'élément non-trivial de $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$, $K=\mathbb{Q}(a)=\mathbb{Q}(b)$. Mais les résultats les plus intéressants sur les courbes de Teichmüller en genre 2 sont ceux qui les relient aux surfaces modulaires de Hilbert. C'est ce qu'on explique maintenant.

Surfaces abéliennes et surfaces modulaires de Hilbert

Soit $\mathcal{A}_g$ l'espace de modules des variétés abéliennes avec polarisation principale de dimension g. En envoyant une courbe de genre g à sa variété jacobienne on obtient une application $t : \mathcal{M}_g \to \mathcal{A}_g$ qui est injective grâce au théorème de Torelli. Dans le cas $g = 2$ on a $\dim \mathcal{M}_2 = 3 = \dim \mathcal{A}_2$ et l'image de $\mathcal{M}_2$ est le complément de la sous-variété $\mathcal{P} \subset \mathcal{A}_2$ de codimension 1 consistant dans les surfaces abéliennes reductibles (produits de deux courbes elliptiques).

Dans $\mathcal{A}_2$ on a d'autres sous-variétés distinguées, les *surfaces modulaires de Hilbert* X_K, où K est un corps quadratique réel (ou plus généralement X_D, où D est le discriminant d'un ordre $\mathcal{O} \subset K$ non forcément maximal). La surface modulaire de Hilbert usuelle est le quotient $\mathcal{H}^2 / \mathrm{SL}(2,\mathcal{O})$, où le groupe $\mathrm{SL}(2,\mathcal{O}) = \left\{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \mid a, b, c, d \in \mathcal{O}, ad - bc = 1\right\}$ opère sur $\mathcal{H}^2 = \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ par $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)(z_1, z_2) = \left(\frac{az_1+b}{cz_1+d}, \frac{a^\sigma z_2 + b^\sigma}{c^\sigma z_2 + d^\sigma}\right)$, $\langle\sigma\rangle = \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$. Ici, nous considérons plutôt $X_D = \mathcal{H}^2/\mathrm{SL}(\mathcal{O} + \mathcal{O}^\vee)$, où $\mathcal{O}^\vee = \left\{x \in K \mid \mathrm{tr}_{K/\mathbb{Q}}(x\mathcal{O}) \subseteq \mathbb{Z}\right\} = (1/\sqrt{D})\mathcal{O}$ et $\mathrm{SL}(\mathcal{O} + \mathcal{O}^\vee) = \left\{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \mid a, b/\sqrt{D},\ c\sqrt{D},\ d \in \mathcal{O},\ ad - bc = 1\right\}$, la raison en étant que le quotient

$$A_{\mathbf{z}} = \mathbb{C}^2/\mathcal{L}_{\mathbf{z}}, \qquad \mathcal{L}_{\mathbf{z}} = \left\{(r + sz_1,\ r^\sigma + s^\sigma z_2) \mid r \in \mathcal{O},\ b \in \mathcal{O}^\vee\right\}$$

est une surface abélienne principalement polarisée pour tout $\mathbf{z} = (z_1, z_2) \in \mathcal{H}^2$ et qu'on a une application $\mathbf{z} \mapsto A_{\mathbf{z}}$ de X_D en $\mathcal{A}_2$. On note par $\mathcal{P}_D$ l'intersection de X_D et de $\mathcal{P} \subset \mathcal{A}_2$, de façon que le complément de $\mathcal{P}_D$ dans X_D peut être identifié avec l'espace de modules des courbes de genre 2 dont la Jacobienne est munie d'une multiplication réelle par $\mathcal{O} = \mathcal{O}_D$.

On décrit maintenant le lien avec les courbes de Teichmüller. L'espace $\Omega\mathcal{M}_g$ de modules des différentielles non-nulles sur des courbes de genre g a une stratification naturelle donnée par les multiplicités de ses zéros, l'orbite d'un point $[C,\omega]$ étant évidemment contenue dans une seule strate. Dans le cas $g = 2$, il y a deux strates $\Omega\mathcal{M}_2(1,1)$ et $\Omega\mathcal{M}_2(2)$, correspondantes aux paires $[C,\omega]$ où ω a deux zéros simples resp. un zéro double. McMullen a démontré qu'il n'y a qu'une seule courbe de Teichmüller dans la première strate, celle correspondant au décagone dans la construction décrite ci-dessus. Par contre, dans la strate plus petite $\Omega\mathcal{M}_2(2)$, McMullen et Calta ont trouvé (indépendamment) un nombre infini de courbes de Teichmüller. Chaque telle courbe est contenue dans exactement une surface modulaire de Hilbert X_D. (On exclut comme avant les cas non-primitifs obtenus par revêtements de courbes de genre 1.) Inversement, chaque X_D contient exactement une ou deux courbes de Teichmüller, d'après la valeur de D modulo 8 : pour $D \equiv 1 \pmod 8$ il y a deux courbes W_D^0 et W_D^1, distinguées par un invariant de « *spin* », et dans tous les autres cas une seule courbe W_D. La courbe « totale » de Teichmüller W_D, définie dans le cas $D \equiv 1 \pmod 8$ comme la réunion des deux composantes W_D^0 et W_D^1, possède une caractérisation intrinsèque en utilisant l'identification entre les différentielles holomorphes sur une courbe et sur sa Jacobienne. Sur une surface abélienne avec multiplication par un ordre $\mathcal{O}$ dans un corps quadratique réel, l'espace des différentielles est engendré par deux différentielles ω_1 et ω_2 propres pour l'action de $\mathcal{O}$, uniques à des scalaires près, avec $\varphi_\lambda^*\omega_1 = \lambda\omega_1$ et $\varphi_\lambda^*\omega_2 = \lambda^\sigma\omega_2$ pour tout $\lambda \in \mathcal{O}$, où $\phi_\lambda =$ désigne l'opération de λ sur la surface. Si la surface est la Jacobienne d'une courbe C, on peut identifier ω_1 et ω_2 avec des différentielles sur C. Les points de W_D correspondent alors aux courbes telles que ω_1 a un zéro double, la paire $[C,\omega_1]$ étant dans ce cas une courbe de Veech. (On pourrait tout aussi bien considérer l'ensemble des points de X_D correspondant aux courbes où ω_2 a un zéro double, mais les deux ensembles sont échangés par la symétrie $\iota:(z_1,z_2)\mapsto(z_2,z_1)$ de X_D et l'application $X_D\to\mathcal{A}_2$ se factorise de toute manière par la projection $X_D\to X_D/\iota$.)

Il y a aussi une caractérisation géométrique des courbes de Teichmüller dans un X_D donné, due à McMullen : une courbe algébrique irréductible $W\subset X_D$ est une courbe de Teichmüller (et donc une composante de W_D) si et seulement si elle satisfait aux deux conditions évidemment nécessaires : (a) W est contenu dans le complément de $\mathcal{P}_D$ dans X_D, et (b) W est transversale au feuilletage $dz_1=0$ de la surface modulaire de Hilbert X_D, c'est-à-dire, la courbe W est localement le graphe $\{(z_1,\phi(z_1))\}$ d'une fonction holomorphe ϕ. En fait, on peut écrire la courbe W elle-même comme l'image par une application globale de la forme $z\mapsto(z,\phi(z))$, avec $\phi:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ holomorphe, d'une courbe $\mathcal{H}/\Gamma$, où $\Gamma\subset\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ est un sous-groupe fuchsien non-arithmétique dont on peut donner une présentation explicite dans chaque cas donné. Le groupe Γ est contenu dans $SL(\mathcal{O}\oplus\mathcal{O}^\vee)$ et l'application ϕ satisfait à l'équation fonctionnelle non-linéaire

$$\phi\Big(\frac{az+b}{cz+d}\Big)=\frac{a^\sigma\phi(z)+b^\sigma}{c^\sigma\phi(z)+d^\sigma}\qquad\forall\,\gamma=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\Gamma$$

déjà mentionnée dans le résumé de cours de l'année 2008-2009.

Description géométrique et équations différentielles

Pour un D donné on peut en principe décrire explicitement la courbe W_D (ou l'une de ses composantes $W_D^{(0)}$ et $W_D^{(1)}$ dans le cas $D\equiv 1\,(\mathrm{mod}\ 8)$) comme la base d'une famille de courbes de genre 2. Par exemple, la famille au-dessus de la courbe $W_{17}^{(1)}$ (ou plutôt d'un certain revêtement double de cette courbe) a été décrite par Bouw et Möller comme

$$\begin{aligned}Y^2&=(X+(At+B))\ \ (X+(Bt+A))\\&\quad\times(X^3+C(t+1)X^2+(D(t+1)^2+Et)X+F(t+1)^3+Gt(t+1)),\end{aligned}$$

avec $t\in\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ et $A=5(5+\sqrt{17})/2,\ldots,G=17(715+173\sqrt{17})\in K=\mathbb{Q}(\sqrt{17})$. Ici les coordonnées X et Y ont été choisies de telle manière que les différentielles propres ω_1 et ω_2 sont données respectivement par dX/Y et $X\,dX/Y$. Leurs périodes $y_1=y_1(t)$ et $y_2=y_2(t)$ satisfont à des équations différentielles linéaires d'ordre 2 (équations de Picard-Fuchs) qu'on peut également écrire explicitement. Si on regarde la courbe de Teichmüller dans la forme $\mathcal{H}/\Gamma$, alors la fonction $t:\mathcal{H}/\Gamma\to\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ peut être interprétée comme une fonction modulaire sur Γ, la fonction y_1 comme une forme modulaire de poids 1 sur Γ, et la fonction y_2 comme une *forme modulaire tordue* de poids (0,1) par rapport à la fonction ϕ mentionnée ci-dessus, c'est-à-dire, d'une fonction $f:\mathcal{H}\to\mathbb{C}$ satisfaisant à l'équation de tranformation $f(\gamma(z))=(c^\sigma\phi(z)+d^\sigma)f(z)$ pour tout $\gamma=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\Gamma$ et tout $z\in\mathcal{H}$. (La terminologie « formes modulaires de Teichmüller » pour les formes modulaires tordues de ce type qu'on a employée antérieurement a dû être abandonnée puisqu'elle avait déjà été employée dans un autre sens.) En utilisant les équations différentielles de y_1 et y_2, on peut trouver explicitement par un raisonnement un peu indirect le développement à l'infini de la fonction $\phi(z)$ et, en combinant ceci avec la description explicite de l'anneau des formes modulaires de Hilbert pour $\mathcal{O}_{17}$ donnée il y a quelques années par C. Hermann, aussi l'équation concrète en termes algébriques de la courbe de Teichmüller W_{17} dans X_{17}.

Courbes de Teichmüller et dérivées de séries thêta

Comme on l'a expliqué ci-dessus, les composantes de W_D ont la forme $\mathcal{H}/\Gamma$ où Γ est un groupe fuchsien qu'on peut décrire de façon algorithmique pour chaque D donné. En particulier, on peut calculer la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(W_D)$ de W_D. Ce calcul a été fait pour plusieurs valeurs de D il y a quelques années et les nombres trouvés avaient été reconnus par l'auteur comme étant proportionnels aux valeurs en $s=-1$ de la fonction zêta de Dedekind du corps K. D'autre part, la caractéristique d'Euler-Poincaré de la surface modulaire de Hilbert elle-même est proportionnelle à cette même valeur, et on trouve la formule conjecturale

$$\chi(W_D) = -\frac{9}{2}\chi(X_D).$$

Cette formule a été démontrée par Bainbridge par une analyse très détaillée et difficile de la géométrie des courbes de Teichmüller dans $\mathcal{M}_2$. Ses résultats montrent qu'il doit y avoir pour chaque D une forme modulaire de Hilbert de poids (3, 9), c'est-à-dire qui satisfait à

$$F_D\Big(\frac{az_1+b}{cz_1+d},\frac{a^\sigma z_2+b^\sigma}{c^\sigma z_2+d^\sigma}\Big) \;=\; (cz_1+d)^3(c^\sigma z_2+d^\sigma)^9 F_D(z_1,z_2),$$

qui donne W_D comme son lieu des zéros. L'aspect surprenant de ce résultat est non seulement que les courbes de Teichmüller sont données par l'annulation d'une seule forme modulaire (ce qui est très rare et certainement pas le cas pour les courbes modulaires sur X_D, beaucoup plus étudiées), mais que le poids de cette forme est indépendant de D, ce qui donne la proportionnalité entre $\chi(W_D)$ et $\chi(X_D)$ qu'on avait découverte expérimentalement. Mais les résultats de Bainbridge ne donnaient aucune indication sur la façon de construire la forme modulaire F_D.

Dans le travail avec Möller, on a trouvé la forme modulaire F_D de manière explicite. C'est le produit de 6 dérivées de fonctions thêta. Plus précisément, on a une fonction thêta $\theta_D : \mathcal{H}^2\times\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ telle que pour chaque $\mathbf{z}\in\mathcal{H}^2$ le lieu de zéros C_D de $\theta_D(\mathbf{z},\mathbf{u})$ dans la variété abélienne $A_{\mathbf{z}} = \mathbb{C}^2/\mathcal{L}_{\mathbf{z}}$ paramétrisée par $\mathbf{z}$ est la courbe de genre 2 ayant $A_{\mathbf{z}}$ comme sa Jacobienne. En translatant cette fonction thêta par les points d'ordre 2 dans $A_{\mathbf{z}}$, on obtient 16 fonctions thêta (« fonctions thêta avec caractéristique »), dont 10 paires et 6 impaires par rapport à $\mathbf{u}$. Si on spécialise les fonctions paires à $\mathbf{u}=\mathbf{0}$, on trouve 10 fonctions de poids $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ dont le produit est une forme modulaire de poids (5,5) ayant comme lieu de zéros la courbe $\mathcal{P}_D$. La spécialisation des fonctions impaires à $\mathbf{u}=\mathbf{0}$ serait bien sûr égale à zéro, mais on peut différentier θ_D par rapport à la deuxième coordonnée u_2 de $\mathbf{u}=(u_1,u_2)$ et spécialiser ensuite à $\mathbf{u}=\mathbf{0}$ pour obtenir 6 fonctions de poids $(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$ dont le produit est une forme modulaire de Hilbert de poids (3,9). C'est exactement la fonction F_D recherchée.

On a deux démonstrations et demie de ce fait, en utilisant les différentes caractérisations connues de la courbe de Teichmüller, et en les combinant on obtient des nouvelles démonstrations de ces caractérisations, plus élémentaires que celles qu'on avait avant. Pour la première, on montre directement que le diviseur de la fonction F_D *définie* comme le produit des dérivées des fonctions thêta correspond aux courbes de genre 2 avec multiplication réelle par $\mathcal{O}_D$ sur leur Jacobienne pour lesquelles la première différentielle propre a un double zéro. (On le voit relativement facilement en utilisant le fait que cette différentielle propre est la restriction à la courbe C_D de la forme différentielle du_1.) Les résultats de Calta et McMullen impliquent alors que ce diviseur coïncide avec la courbe de Teichmüller W_D. Pour la deuxième démonstration, on montre que le diviseur de F_D satisfait aux deux conditions (a) et (b) décrites ci-dessus qui caractérisent les courbes de Teichmüller dans X_D. Cette deuxième démonstration a donc deux moitiés : il faut montrer que la restriction de F_D à $\mathcal{P}_D$ n'a pas de zéros en dehors des pointes, et que les fonctions F_D et $\partial F_D/\partial z_2$ ne s'annulent pas simultanément dans $\mathcal{H}\times\mathcal{H}$. Pour le premier énoncé, nous avons deux arguments : d'une part on peut écrire la courbe réductible $\mathcal{P}_D$ comme une union explicite de courbes modulaires et montrer que la restriction de F_D à chacune de celles-ci est un produit de séries thêta classiques de Jacobi, qui ont un développement en produit infini et ne s'annulent donc jamais en $\mathcal{H}$; et d'autre part, on peut compter les zéros à l'infini de la restriction de F_D à $\mathcal{P}_D$ (en utilisant les « formes multiminimisantes » décrites ci-dessous) et montrer que leur nombre est égal au nombre total des zéros, ce qui implique qu'il n'existe pas d'autres zéros. Pour la transversalité, le premier argument ne fonctionne pas, puisqu'on n'a pas une description suffisamment explicite du diviseur de F_D pour pouvoir chercher une représentation en produit infini de la restriction de $\partial F_D/\partial z_2$ à ce diviseur, mais le deuxième fonctionne bien, si l'on se sert encore une fois des propriétés des séries thêta et des formes multiminimisantes pour compter les zéros de cette restriction dans les pointes et en déduire qu'il n'y en a pas d'autres.

Fractions continues et résolutions des singularités aux pointes

Cette partie plus technique du cours ne sera pas décrite ici en détail ; on renvoie pour cela à l'article avec Möller, actuellement en cours de préparation. Brièvement, on connaît deux compactifications intéressantes d'une surface modulaire de Hilbert. La première, trouvée par F. Hirzebruch il y a presque 40 ans, est la résolution minimale des singularités de la surface dans ses pointes et consiste en des cycles de courbes rationnelles dont les nombres d'auto-intersection sont donnés par les quotients partiels des fractions continues périodiques associées au corps quadratique réel sous-jacent. La deuxième, trouvée par Bainbridge beaucoup plus récemment, est la clôture de X_D dans la compactification de Deligne-Mumford de l'espace de modules $\mathcal{M}_2$, et est donnée également par des courbes rationnelles formant des cycles décrites par des fractions continues (différentes de celles qui interviennent dans le théorème de Hirzebruch), mais n'est pas lisse en général. Chaque composante de cette dernière compactification est coupée par la courbe de Teichmüller $W_D \subset X_D$, et il y a une correspondance presque bijective entre ces composantes et les pointes de la courbe W_D. En utilisant la description de W_D en termes de séries thêta on a pu comprendre cette correspondance de façon très explicite et décrire la relation entre les compactifications de X_D données par Hirzebruch et par Bainbridge. La clé essentielle ici était la notion de « forme quadratique multiminimisante » qu'on a introduite. Ce sont les formes quadratiques binaires définies positives qui prennent dans au moins une (et alors dans exactement une) classe non-triviale de $\mathbb{Z}^2/2\mathbb{Z}^2$ leur valeur minimale dans au moins deux points différents (même à signe près). Cette notion apparaît de façon naturelle quand on étudie les zéros à l'infini des fonctions thêtas et de leurs dérivées, et la classification des formes multiminisantes fait intervenir de façon naturelle les fractions continues.

CONFÉRENCES INVITÉES

– Berlin, Allemagne, octobre 2010 : *Mathematics in Another World*. Berlin Mathematical School (écoles doctorales en mathématiques de 3 universités berlinoises).

Bonn, Allemagne, octobre 2010 : *Multiple zeta values*. Séminaire de théorie des nombres, Max-Planck-Institut für Mathematik.

Marseille, décembre 2010 : *Courbes de Teichmüller en genre 2*. Séminaire, Université de Provence (Aix-Marseille 1).

Marseille, décembre 2010 : *Formes modulaires, fausses formes modulaires et trous noirs*. « Une journée à la FRUMAM », Colloquium des unités de recherche en mathématiques de Marseille, CPT-IML-LATP.

Budapest, Hongrie, décembre 2010 : *Mathématiques dans un autre monde : les mathématiques japonaises vers 1700.* Institut français, conférence organisée par l'ambassade de France en Hongrie, en coopération avec le Collège de France.

Budapest, Hongrie, décembre 2010 : *Euler's multiple zeta sums*. Conférence conjointe de l'Université Eötvös et l'Université de technologie de Budapest.

Budapest, Hongrie, décembre 2010 : *Les grandes questions en théorie des nombres.* Conférence pour lycéens, Ferenc Kölcsey Gymnāzium.

Trieste, Italie, mars 2011 : *Jacobi forms and mock modular forms* (4 conférences). École « Mock modular forms and applications », International Center for Theoretical Physics.

Trieste, Italie, mars 2011 : *Quantum modular forms*. Colloquium, International Center for Theoretical Physics.

Lausanne, Suisse, mars 2011 : *From mock theta functions to black holes.* Journée de Rham, École polytechnique fédérale de Lausanne.

Les Diablerets, Suisse, mars 2011 : *q-series, modularity, and quantum topology.* Spring School « Geometry and quantum topology ».

Hambourg, Allemagne, avril 2011 : *Mock modular forms: a new tool in mathematics and physics.* Séminaire conjoint de l'Université de Hambourg et de DESY.

Bristol, Angleterre, mai 2011 : *Double zeta values of odd weight*. Workshop on multiple zeta values, modular forms and elliptic motives, University of Bristol.

Pasadena, Californie, États-Unis, mai 2011 : *From topology to modular forms*. Number theory seminar, California Institute of Technology.

Atlanta, Georgia, États-Unis, mai 2011 : *Moonshine and mock modular forms.* Algebra seminar, Georgia Institute of Technology.

New York, États-Unis, juin 2011 : *Arithmetic properties of 3-dimensional quantum invariants*. « Faces of Geometry: 3-Manifolds, Groups and Singularities », Barnard College et Columbia University.

Zürich, Suisse, juillet 2011 : *Mock modular forms and mock Jacobi forms.* Workshop on Mathieu Moonshine, Pauli Center for Theoretical Studies, ETH.

Bremen, Allemagne, juillet 2011 : *Number Theory* (deux conférences). International Mathematical Summer School for Students, Jacobs-Universität.

AUTRES MISSIONS ET ACTIVITÉS

– Paris, 2010-2011 : Coopération intensive avec la Fondation Cartier pour l'art contemporain, préparation de l'exposition « Mathématiques : un dépaysement soudain » (21 octobre 2011-18 mars 2012).

– Oberwolfach, Allemagne, octobre 2010 : Wissenschaftsrat (comité scientifique) du Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach.

– Bures-sur-Yvette, janvier 2011 : Comité de sélection de l'IPDE (Institut post-doctoral européen pour les sciences mathématiques).

– Bonn, Allemagne, janvier 2011 : membre du « Fachbeirat » (comité scientifique international) de l'Institut Minerva « Emmy Noether » de l'Université de Bar-Ilan, Israël.

– Trieste, Italie, février-mars 2011 : Co-organisateur (avec K. Bringmann et L. Göttsche) d'une École et conférence « Mock modular forms and applications ».

– Newport Pagnell, Angleterre, mai 2011 : Réunion des chercheurs liés à la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer, Kavli Royal Society International Centre.

– Banff, mai 2011 : Co-organisateur (avec N. Yui, S. Gukov, C. Doran et V. Batyrev) de la conférence « Number Theory and Physics at the Crossroads », Banff International Research Station for Mathematical Innovation and Discovery.

– Oberwolfach, Allemagne, juillet 2011 : Co-organisateur (avec H. Lenstra and K. Belabas) de la conférence « Explicit Methods in Number Theory », Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach.

– Cologne, Allemagne, septembre 2011 : Co-organisateur (avec K. Bringmann et U. Goertz) de la section « Algebraische Geometrie und Zahlentheorie », conférence annuelle de la Deutsche Mathematiker-Vereinigung.

PUBLICATIONS ET PRÉPUBLICATIONS

Zagier D., « Higher Kronecker "limit" formulas for real quadratic fields », paru en ligne le 23 mars 2012 dans *J. reine Angew. Math.*, 42 pages.

Zagier D., avec Sun Z.-W., « On a curious property of Bell numbers », *Bull. Aust. Math. Soc.,* 84, 2011, 153-158.

Zagier D., avec Cohen H., « Vanishing theta values », paru en ligne février-mars dans *Annales des sciences mathématiques du Québec*, Numéro spécial dédié à Paulo Ribenboim, 11 pages.

Zagier D., « Evaluation of the multiple zeta values $\zeta(2, \ldots,2,3,2,\ldots,2)$ », 175, 2012, 977-1000.

Zagier D., « Proof of the Harvey-Moore identity », dans Klemm A., Maulik D., Pandharipande R. et Scheidegger E., « Noether-Lefschetz theory and the Yau-Zaslow conjecture », *J. Amer. Math. Soc.*, 23, 2010, 1013-1040 (1037-1038).

Zagier D., « Quantum modular forms », dans *Quanta of Maths: Conference in honor of Alain Connes*, Clay Mathematics Proceedings 11, AMS and Clay Mathematics Institute, 2010, 659-675.

Zagier D., « A Family of Combinatorial Identities », appendice dans Borwein J., Straub A., Wan J. et Zudilin W., « Densities of Short Uniform Random Walks », *Can. J. Math.*, paru en ligne en novembre 2011.

Zagier D., « Une passion pour les mathématiques », dans *Mathématiques, un dépaysement soudain*, éd. Fondation Cartier pour l'art contemporain, Paris, 2011, 90-97. Traduction en anglais, « A passion for mathematics », dans *Mathematics – A beautiful Elsewhere*. Le livre est paru en même temps dans les deux langues.

Zagier D., avec Bruggeman R. et Lewis J., « Function theory related to the group $PSL_2(\mathbb{R})$ », à paraître dans *From Fourier Analysis and Number Theory to Radon Transforms and Geometry. In memory of Leon Ehrenpreis*, Springer, Developments in Mathematics, 78 pages.