Théorie des nombres

M. Don Zagier, professeur

Cours : Théorie et applications des fausses formes modulaires

Dans sa célèbre dernière lettre à Hardy, envoyée juste trois mois avant sa mort prématurée en 1920, Ramanujan lui fait part de sa découverte d'une nouvelle classe de fonctions qu'il appelle les « *mock ϑ-functions* » et dont il est convaincu que « they enter into mathematics as beautifully as the ordinary ϑ-functions » – c'est-à-dire, dans la terminologie moderne, que les formes modulaires classiques. Pendant plus de 80 ans ces objets sont restés mystérieux, mais en 2002 la propriété décisive des fonctions trouvées par Ramanujan a été décelée par Sander Zwegers, et, depuis cette date, il y a eu une véritable explosion d'activité, avec des développements théoriques du sujet et de nombreuses applications en divers domaines des mathématiques et de la physique théorique, et on peut dire maintenant que la prédiction de Ramanujan s'est avérée juste. Les fausses formes modulaires (*mock modular forms*), pour leur donner leur nom actuel, ont déjà été traitées de façon périphérique dans le cours de 2005-2006, et elles ont été traitées aussi dans la partie du cours de 2011-2012 qui a eu lieu en Corée du Sud. Dans le cours de cette année, la théorie a été présentée beaucoup plus en détail, avec l'accent mis sur les liens avec la théorie des formes modulaires de Jacobi et les applications motivées par la physique (théorie des cordes des trous noirs). Tous les résultats présentés sont contenus dans un article de 150 pages (arXiv:1208.4074) écrit avec Atish Dabholkar et Sameer Murthy qui paraîtra sous forme de monographie.

Fausses formes modulaires et fausses fonctions thêta

Dans la lettre dans laquelle il introduisit les « *mock ϑ-functions* », Ramanujan en donna 17 exemples, quelques propriétés, et quelques relations, mais aucune définition. Il divisa les 17 exemples en trois classes, quatre fonctions qu'il désigna comme étant d'ordre 3, 10 fonctions d'ordre 5 et 3 d'ordre 7, cette notion aussi restant indéfinie. Toutes ces fonctions étaient ce qu'on appelle aujourd'hui des séries q-hypergéométriques, c'est-à-dire des séries de la forme $F(q)=\sum_{n=0}^{\infty} R(q,q)R(q,q^2)\cdots R(q,q^n)$ où $R(q,t)$

est une fonction rationnelle de q et t, et toutes les relations avaient la forme qu'une combinaison linéaire de deux « *mock ϑ-functions* » était un quotient de vraies fonctions thêta et donc, une forme modulaire. Par exemple, parmi les quatre « *mock ϑ-functions of order 3* » se trouvaient les deux fonctions

$$f(q)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2}}{(1+q)^2(1+q^2)^2\cdots(1+q^n)^2}\quad\text{et}\quad \phi(q)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-q)^{n^2}}{(1+q^2)(1+q^4)\cdots(1+q^{2n})}$$

avec la relation

$$2\phi(q)\;-\;f(q)=\frac{1-2q+2q^4-2q^9+\cdots}{(1+q)(1+q^2)(1+q^3)\cdots}\,.$$

Il était donc clair d'emblée que les « *mock ϑ-functions* » étaient très proches des formes modulaires classiques (que Ramanujan désignait toujours comme les « fonctions thêta »), mais, malgré les efforts de beaucoup de mathématiciens (Watson, Selberg, Andrews,...) dans les décennies qui suivirent, on n'a pas pu trouver la propriété essentielle qui caractérise les fausses fonctions thêta de Ramanujan. La solution ne vint qu'en 2002 avec la thèse doctorale de (mon élève) Sander Zwegers à Utrecht.

On rappelle qu'une forme modulaire classique est une fonction $H(q)=\sum_{n\geq 0}a_nq^n$ (où la sommation peut porter sur les entiers positifs mais aussi sur un ensemble de nombres rationnels positifs à dénominateurs bornés, par exemple, la fonction éta de Dedekind est donnée par $\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n q^{(6n+1)^2/24}\in q^{1/24}\mathbb{Z}[[q]]$) telle que la fonction associée $h(\tau):=H(e^{2i\pi\tau})$ se transforme sous l'opération des éléments $\gamma=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)$ de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ ou d'un sous-groupe $\Gamma\subset\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ d'indice fini par $h(\frac{a\tau+b}{c\tau+d})=(c\tau+d)^k h(\tau)$, le nombre $k\in\mathbb{Z}$ s'appelant le poids. (Plus généralement on peut avoir $k\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ et l'équation peut contenir un facteur C_γ qui sera une racine d'unité d'ordre borné, par exemple $k=\frac{1}{2}$ et $C_\gamma^{24}=1$ dans le cas de la fonction éta.) Dans la définition de Zwegers, une *fausse forme modulaire* de poids k sera aussi une fonction $h(\tau)=\mathrm{H}(e^{2i\pi\tau})$ avec $H(q)=\sum a_n q^n$, mais dont la propriété d'invariance sera plus compliquée, la non-modularité de f étant déterminée par une autre fonction $g(\tau)$, qui sera une vraie forme modulaire de poids $2-k$, s'appelant l'*ombre* de f. On associe à $g(\tau)$ de façon linéaire une certaine fonction non-holomorphe $g^*(\tau)$, et la relation entre h et g est que la *fonction complétée* $\widehat{h}(\tau):=h(\tau)+g^*(\tau)$ se transforme comme une forme modulaire classique de poids k. Si on note par M_k et $\mathbb{M}_k$ les espaces des formes modulaires classiques et des fausses formes modulaires, on aura donc une suite exacte $0\to M_k\to\mathbb{M}_k\to M_{2-k}$, où la dernière application envoie une fausse forme modulaire à son ombre. Dans le cas de la fonction $f(q)$ de Ramanujan donnée ci-dessus, la fausse forme modulaire est la fonction $h(\tau)=q^{-1/24}f(q)$ (Ramanujan a systématiquement omis des puissances rationnelles de q dans ses formules, mais il faut les réinsérer pour restaurer les propriétés de modularité désirées), et l'ombre $g(\tau)$ et la fonction $g^*(\tau)$ non-holomorphe associée sont données (à des multiples constants près) par

$$g(\tau)=\sum_{n\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,6)} nq^{n^2/24},\qquad g^*(\tau)=\sum_{n\equiv 1\ (\mathrm{mod}\,6)}\mathrm{sgn}(n)\ \mathrm{erfc}\left(\sqrt{\frac{\pi n^2\Im(\tau)}{6}}\right)q^{-n^2/24},$$

où $\mathrm{erfc}(x) = \int_x^\infty e^{-u^2}\,du$ est la fonction d'erreur complémentaire. On utilise aujourd'hui le mot « fausse fonction thêta » (*mock theta-function*) pour une fausse forme modulaire dont l'ombre, comme dans cet exemple, est une série thêta unaire (une forme modulaire de la forme $\sum \chi(n)\, q^{\lambda n^2}$ ou $\sum n\chi(n)\, q^{\lambda n^2}$ avec $\lambda \in \mathbb{Q}_{>0}$ et $\chi(n)$ périodique).

Le premier exemple d'une fonction satisfaisant à la loi de transformation qu'on vient de décrire était donné dans un article que j'ai écrit en 1975 ; c'est la forme $\mathcal{H}(\tau) = \sum_n H(n) q^n$, où $H(n)$ est le nombre de classes de Hurwitz et Kronecker (définie comme un multiple simple du nombre des classes d'idéaux du corps quadratique imaginaire $\mathbb{Q}(\sqrt{-n})$), dont l'ombre est un multiple de la fonction thêta de Jacobi $\sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n^2}$. Cet exemple est exceptionnel en étant holomorphe à l'infini ; en général, pour avoir des exemples intéressants, on est obligé d'élargir la définition des fausses formes modulaires en permettant des pôles à l'infini, c'est-à-dire, de permettre à f d'avoir une série de Fourier $\sum a_n q^n$ avec quelques exposants n négatifs, comme on l'a déjà vu dans le cas de la fausse forme modulaire $q^{-1/24}\, f(q)$ ci-dessus. On note l'espace des telles forme par $M_k^!$ et le sous-espace des formes modulaires holomorphes dans le demi-plan de Poincaré mais méromorphes à l'infini par $M_k^!$, ces espaces étant liés par une suite exacte $0 \to M_k^! \to \mathbb{M}_k^! \to M_{2-k}$. Les pôles à l'infini influencent la croissance des coefficients de Fourier : ainsi on a $H(n) = \mathrm{O}(n^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$ pour les coefficients de $\mathcal{H}(\tau)$ mais $a_n \sim e^{c\sqrt{n}}$ pour les coefficients a_n d'une (vraie ou fausse) forme modulaire ayant des exposants négatifs dans son développement de Fourier.

Constructions des fausses formes modulaires

On en a esquissé plusieurs dans le cours. Une méthode, dont j'omets la description ici, est celle de la projection holomorphe. (Très brièvement, pour construire une fausse forme modulaire avec ombre g donnée, on choisit une forme modulaire auxiliaire f qui s'annule suffisamment dans les pointes pour compenser les pôles éventuels de la forme cherchée et divise la projection holomorphe du produit fg^* par f.) Une deuxième est basée sur les propriétés de la fonction

$$\mu(u,v) = \mu(u,v;\tau) = \frac{a^{1/2}}{q^{1/8} b^{1/2}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(-b)^n q^{n(n+1)/2}}{1 - aq^n} \Big/ \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-b)^n q^{n(n+1)/2}$$

utilisée par Zwegers, dans laquelle $\tau \in \mathfrak{H}$ (demi-plan de Poincaré) et u, v, $\in \mathbb{C}$ et où on a posé $q = \mathbf{e}(\tau) = \mathbf{e}^{2i\pi\tau}$, $a = \mathbf{e}(u)$, $b = \mathbf{e}(v)$. Le dénominateur de cette fraction est une série thêta de Jacobi $\vartheta(v) = \vartheta(v;\tau)$ classique et son numérateur ce qu'on appelle une somme d'Appell-Lerch. Zwegers montre que la fonction μ a des propriétés de transformation modulaires et elliptiques, mais seulement après que l'on y ajoute une certaine fonction, relativement simple mais non-holomorphe, qui ne dépend que de τ et de la différence $u - v$. Dans le cours on a expliqué ce phénomène en montrant que la fonction μ elle-même a une décomposition canonique de la forme

$$\mu(u,v) = \lambda(u-v) + \frac{1}{2\vartheta(u-v)} \frac{\wp'(u) + \wp'(v)}{\wp(u) - \wp(v)}$$

où $\lambda(z) = \lambda(z;\tau)$ est une fonction d'une seule variable elliptique et $\wp(z) = \wp(z;\tau)$ est la fonction $\wp$ de Weierstrass. La démonstration, qui est purement combinatoire, repose sur le développement de Fourier

$$\vartheta(u)\vartheta(v)\mu(u,v) = \sum_{r,s\in Z} \gamma_{r-s}(\tau) q^{rs} a^r b^s,$$

où $\gamma_n(\tau)$ ($n \in \mathbb{Z}$) est la série thêta tronquée $\gamma_n(\tau) = \sum_{m=n}^{\infty}(-1)^m q^{(m+\frac{1}{2})^2}$. Cette formule entraîne aussi, puisque $\gamma_n = \gamma_{-n}$, la symétrie $\mu(u,v) = \mu(v,u)$, autre propriété donnée par Zwegers mais peu évidente à partir de la définition de μ.

La troisième méthode, qui a été présentée en détail dans le cours, a été developpée en collaboration avec Davide Gaiotto. On l'illustre dans le cas de la fausse forme modulaire

$$h_2(\tau) = q^{-1/8}(-1 + 45q + 231q^2 + 770q^3 - ...)$$

avec ombre $\eta(\tau)^3$ qui figure dans la découverte sensationnelle du « *Mathieu moonshine* » par Eguchi, Ooguri et Tachikawa en 2010, d'après laquelle les coefficients 45, 231, 770, … de cette forme devraient être les dimensions de certaines représentations (dans les premiers cas, même irréductibles) du groupe de Mathieu M_{24}. En fait, on trouve deux représentations remarquables. D'une part, nous trouvons que le produit de la complétion $\widehat{h}_2(\tau)$ de $h_2(\tau)$ et de son ombre $\eta(\tau)^3$ est égale, à un facteur constant près, à la fonction

$$\mathcal{F}(\tau) = \frac{1}{12}E_2(\tau) - \frac{1}{2\pi i}\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}} \varepsilon(m,n)\frac{m}{m\tau+n}e^{-\pi|m\tau+n|^2/2\Im(\tau)},$$

où $E_2(\tau)$ est la série d'Eisenstein de poids 2 classique (une forme quasimodulaire) et $\varepsilon(m,n)$ est égal à 1 pour $(m,n) \in 2\mathbb{Z}^2$ et à -1 sinon. On montre que la fonction $\mathcal{F}$ se transforme comme une forme modulaire de poids 2 sur $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ et que sa dérivée partielle par rapport à $\overline{\tau}$ est un multiple constant de $\Im(\tau)^{-1/2}\,|\,\eta(\tau)\,|^6$. D'autre part, on montre que la fonction $\mathcal{G}(\tau)$ définie par

$$\mathcal{G}(\tau) = \frac{1}{\Im(\tau)^{1/2}}\int_{\mathbb{C}/(\mathbb{Z}\tau+\mathbb{Z})} \wp(z;\tau)\,|\,\theta(z;\tau)\,|^2 e^{-2\pi y^2/\Im(\tau)}dx\;dy \qquad (z = x+iy)$$

a les mêmes propriétés, et on en déduit que les deux fonctions $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ coïncident à un facteur près, après laquelle la fausse forme modulaire $h_2(\tau)$ peut être retrouvée en divisant $\mathcal{F}(\tau)$ ou $\mathcal{G}(\tau)$ par $\eta(\tau)^3$ et soustrayant un multiple de la fonction non-holomorphe mais explicite $(\eta^3)^*$.

Enfin, on a discuté aussi la question de comment reconnaître les fausses formes modulaires. Si on a une fonction $h(\tau) = H(q) = \sum a_n q^n$ que l'on soupçonne d'être fausse modulaire, il faut en deviner l'ombre g, après lequel on peut facilement calculer g^* et vérifier (au moins numériquement) que $\widehat{h} = h + g^*$ se comporte comme une forme modulaire. Il y a une méthode numérique de faire ceci, que nous avons illustré dans le cours pour l'exemple des « *mock ϑ-functions of order 10* ». On omet les détails ici, se contentant de dire qu'elle repose sur le calcul à haute précision de la fonction $h(\tau)$ quand τ s'approche d'un point rationnel (pointe) et sur la méthode d'interpolation numérique qui a déjà été présentée et utilisée dans plusieurs des cours antérieurs. Les coefficients numériques du développement asymptotique qu'on trouve donnent les valeurs aux arguments entiers de la série L de la fonction périodique $\chi(n)$ définissant l'ombre g cherchée.

Formes modulaires de Jacobi méromorphes

On rappelle que les formes modulaires de Jacobi, dont la théorie a été élaborée en collaboration avec M. Eichler et présentée pour la première fois au Collège de France en 1981, sont des fonctions φ de deux variables τ (dans le demi-plan de Poincaré) et z (dans $\mathbb{C}$) qui ont des propriétés modulaires par rapport aux transformations $(\tau,z)\mapsto(\frac{a\tau+b}{c\tau+d},\frac{z}{c\tau+d})$ avec $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\in\Gamma\subset\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ et des propriétés elliptiques par rapport aux transformations $(\tau,z)\mapsto(\tau,z+r\tau+s)$ avec $(r,s)\in\mathbb{Z}^2$. Ces fonctions se sont avérées être d'une grande utilité en plusieurs domaines de la combinatoire et de la théorie des nombres, mais aussi en physique mathématique (théorie conforme des champs et théorie des cordes). Avec Dabholkar et Murthy, et en étendant des résultats antérieurs de Zwegers, on a trouvé un lien intime entre les fausses formes modulaires et les formes modulaires de Jacobi méromorphes.

Une forme de Jacobi classique a deux invariants numériques en $\mathbb{Z}$, un *poids* k et un *indice* m, et ses lois de transformations implique qu'elle a un développement de Fourier de la forme

$$\varphi(\tau,z)=\sum_{n,\,r\in\mathbb{Z}} C(4nm-r^2,r\ (\mathrm{mod}\ 2m))\,q^n\zeta^r \qquad (q=\mathbf{e}(\tau),\zeta=\mathbf{e}(z)),$$

où le coefficient de $q^n\zeta^r$ ne dépend que du *discriminant* $4nm-r^2$ et de r modulo $2m$ et où la fonction $h_r(\tau)=\sum_\Delta C(\Delta,r)\,q^{\Delta/4m}$ est une forme modulaire de poids $k-\frac{1}{2}$ pour chaque $r\in\mathbb{Z}/2m\mathbb{Z}$. On dit que φ est *holomorphe à l'infini* si $C(\Delta,r)$ s'annule pour $\Delta<0$ (et donc $h_r\in M_{k-\frac{1}{2}}$ pour tout r) et *méromorphe à l'infini* si $C(\Delta,r)$ peut être non-nul pour un nombre fini de discriminants Δ négatifs (et donc $h_r\in M^!_{k-\frac{1}{2}}$). Dans les deux cas, la fonction φ a une décomposition thêta donnée par

$$\varphi(\tau,z)=\sum_{r\ (\mathrm{mod}\,2m)} h_r(\tau)\theta_{m,r}(\tau,z),\quad \text{où}\quad \theta_{m,r}(\tau,z)=\sum_{s\in 2m\mathbb{Z}+r} q^{s^2/4m}\zeta^s\,.$$

Si nous remplaçons dans ces formules les mots « formes modulaires » par « fausses formes modulaires » (donc $h_r\in\mathbb{M}^!_{k-\frac{1}{2}}$ au lieu de $M^!_{k-\frac{1}{2}}$), et si la fonction complétée $\widehat{\varphi}(\tau,z)=\sum_r\widehat{h}_r(\tau)\theta_{m,r}(\tau,z)$ se transforme comme une vraie forme de Jacobi, on obtient la classe des *fausses formes de Jacobi*. Un exemple simple est la fonction $\mathcal{H}^J(\tau,z)=\sum_{n,r}H(4n-r^2)q^n\zeta^r$, où $H(N)$ est le nombre de classes de Hurwitz-Kronecker défini ci-dessus (et étendu à $\mathbb{Z}$ par $H(N)=0$ pour $N<0$).

D'autre part, on peut considérer des fonctions de Jacobi méromorphes. On peut définir des coefficients de Fourier par des intégrales de Cauchy, mais les singularités impliquent que ces valeurs ne sont pas constantes et sautent quand le chemin d'intégration traverse un pôle (« *wall-crossing* »). Pour la même raison, les fonctions $h_r(\tau)$ ne sont pas définies de façon unique et on n'a pas, bien sûr, une décomposition théta de φ. Tous ces problèmes se résoudent en même temps si on définit $h_r(\tau)$ par l'intégrale de Cauchy

$$h_r(\tau)=q^{-r^2/4m}\int_{-\frac{r\tau}{2m}+\mathbb{R}/\mathbb{Z}}\mathbf{e}(-rz)\varphi(\tau,z)dz,$$

où la hauteur du chemin d'intégration dépend de τ. Alors on montre que la *partie finie* $\varphi^F(\tau, z) := \sum_{r \pmod{2m}} h_r(\tau)\, \theta_{m,r}(\tau, z)$ est une fausse forme de Jacobi au sens qu'on vient de définir et qu'on a une décomposition canonique $\varphi = \varphi^F + \varphi^P$ de φ dans cette partie finie et d'une *partie polaire* ϕ^P qui ne dépend que des pôles de φ et qui est donnée par une somme d'Appell-Lerch explicite. Cette décomposition donne en même temps une méthode systématique pour construire des fausses formes modulaires et aussi plusieurs applications en mathématiques et en physique.

Deux familles de formes de Jacobi spéciales

Avec Dabholkar et Murthy, on a étudié en détail deux familles de formes de Jacobi méromorphes et les fausses formes de Jacobi qui leur sont associées. La première est la classe des formes de Jacobi $\varphi_{1,m}$, de poids 1 et d'indice $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ arbitraire, ayant un pôle simple (avec partie principale $(2\pi iz)^{-1} + \mathrm{O}(1)$) en $z = 0$ et aucun autre pôle en $\mathbb{C}/(\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z})$, et la deuxième est la classe des formes $\varphi_{2,m}$ définie de la même manière mais avec poids 2 et un pôle double (à partie principale $(2\pi iz)^{-2} + \mathrm{O}(1)$) comme seule singularité. La deuxième est celle dont on avait besoin pour l'application à la théorie des cordes des trous noirs qui était notre motivation de départ (voir ci-dessous), tandis que la première s'est avérée très utile (après notre article) en relation avec le « *Mathieu moonshine* » déjà mentionné et de sa généralisation « *umbral moonshine* » (travaux de Jeff Harvey, Miranda Cheng, John Duncan et autres).

Les fonctions $\varphi_{1,m}$ et $\varphi_{2,m}$ ne sont pas définies de façon unique par les conditions indiquées, puisqu'on peut toujours y ajouter des formes de Jacobi holomorphes ou faiblement holomorphes, et une grande partie de notre investigation a été dédiée à la question de les choisir de façon optimale. Dans beaucoup de cas ce choix est unique ; par exemple, pour $m = 1$ on peut choisir $\phi_{2,1}$ de façon que sa partie finie est la fausse forme de Jacobi $\mathcal{H}^J$ définie ci-dessus. Nous montrons qu'on peut toujours choisir les $\phi_{2,m}$ telles que leurs parties primitives (dont on omet la définition, sauf pour dire que pour m sans facteurs carrés la partie primitive d'une forme coïncide avec la forme) sont *de croissance optimale* dans le sens très précis que les discriminants Δ pour lesquels il y a des coefficients de Fourier $C(\Delta, r)$ non nuls sont tous ≥ -1. Pour une telle forme, les coefficients de Fourier satisfont à une formule asymptotique de la forme $C(\Delta,r) \sim (\mathrm{C}^{\mathrm{te}})e^{\pi\sqrt{\Delta}/m}$, tandis que pour des formes ayant des coefficients de Fourier avec Δ plus négatif la croissance est toujours plus rapide. Un autre théorème lié que nous obtenons, et qui ne concerne que les formes de Jacobi classiques, dit que pour tout $m \geq 1$ le quotient de l'espace des formes de Jacobi de poids 2 et d'indice m et ayant croissance optimale dans ce sens par l'espace des formes de Jacobi holomorphes du même poids et indice est toujours un espace vectoriel de dimension 1.

Application à la théorie des cordes des trous noirs

Très brièvement, la situation est comme il suit. Un trou noir classique est totalement noir, ne laissant échapper ni lumière ni aucune autre forme de radiation. Dans la théorie quantique des trous noirs, les effets quantiques permettent une radiation (radiation de Hawking) et les trous noirs deviennent des objets thermaux, avec une entropie proportionelle à l'aire de sa surface de l'horizon des évènements. Dans la théorie des cordes, ce point de vue est remplacé par le calcul des dimensions des espaces propres de certains opérateurs (le nombre d'états dyoniques $\frac{1}{4}$-BPS de charge donnée), et dans un modèle particulier étudié par Witten, Verlinde et Verlinde et autres auteurs (compactification de type II sur le produit d'une surface $K3$ et d'une courbe elliptique), ces dimensions sont données par les coefficients de Fourier d'une certaine forme modulaire de Siegel méromorphe, la réciproque de la forme parabolique d'Igusa Φ_{10} de poids 10 sur $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{Z})$. Si on calcule les coefficients de Fourier-Jacobi de cette fonction, multipliée par la forme modulaire classique $\Delta(\tau)$ de poids 2, on obtient une suite de formes méromorphes de Jacobi de poids 2 et avec un pôle double à l'origine, c'est-à-dire, exactement des éléments (mais loin d'être optimaux) de la famille $\varphi_{2,m}$ discutée ci-dessus. La croissance du type $e^{c\sqrt{\Delta}}$ de leurs coefficients de Fourier donne la valeur correcte de l'entropie du trou noir, une rare confirmation de la cohérence de la théorie des cordes. La théorie des fausses formes modulaires et des fausses formes de Jacobi, et notamment la décomposition canonique d'une forme de Jacobi méromorphe en une partie finie et une partie polaire, ont des conséquences explicites pour la théorie physique. En particulier, cette décomposition est étroitement liée à la présence de trous noir multi-centrés (responsables aussi pour le phénomène de « *wall-crossing* »), et les coefficients de Fourier de la partie finie, qui est une fausse forme de Jacobi, donnent exactement le nombre des trous noir à un seul centre (« trous noirs immortels ») qui sont l'objet physique qu'on veut compter, tandis que la partie polaire correspond aux trous noirs multi-centrés qui peuvent dégénérer quand on traverse un mur.

Conférences invitées

Bad Honnef, Allemagne, août 2012 : *Mock modular forms and black holes* (2 conférences). Conference on Algebraic-Geometric methods in Fundamental Physics, Physikzentrum Bad Honnef.

Potsdam, Allemagne, septembre 2012 : *The mathematics of mock modular forms.* Workshop on Black Holes in Supergravity and M/Superstring Theory, MPI für Gravitationsphysik (Einstein-Institut).

Potsdam, Allemagne, septembre 2012 : *Arithmetical properties of quantum invariants of 3-manifolds.* Colloque, MPI für Gravitationsphysik (Einstein-Institut).

Saarbrücken, Allemagne, septembre 2012 : *Zur Person und Werk von Friedrich Hirzebruch.* Jahrestagung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.

Bures-sur-Yvette, décembre 2012 : *Modular forms, periods, and differential equations.* Conférence « Amplitudes and Periods », Institut des Hautes Études Scientifiques.

Trieste, Italie, janvier 2013 : *Partitions and modular forms.* Mathematics Seminar, International Centre for Theoretical Physics.

Aarhus, Danemark, janvier 2013 : *Partitions, coverings, and modular forms.* Nielsen Lecture (conférence spéciale annuelle), Centre for Quantum Geometry of Moduli Spaces, Aarhus Universitet.

Aarhus, Danemark, janvier 2013 : *Partitions, Siegel-Veech constants, and quasimodular forms*. Workshop « Topological Recursion and Quantum Algebraic Geometry », Centre for Quantum Geometry of Moduli Spaces, Aarhus Universitet.

Edinburgh, Écosse, février 2013 : *Modular forms and black holes: from Ramanujan to Hawking*. Maxwell Institute Lecture (conférence spéciale annuelle), Maxwell Institute for Mathematical Sciences.

Aurich, Allemagne, février 2013 : *Schönes aus der Zahlentheorie.* Conférence et rencontre avec les élèves du lycée Gymnasium Ulricianum.

Aurich, Allemagne, février 2013 : *Die Schönheit der Mathematik.* Auricher Wissenschaftstage (conférence grand public).

Darmstadt, Allemagne, mars 2013 : *Hecke operators and period polynomials for modular forms.* Conférence « Automorphic Forms and L-Functions », Universität Darmstadt.

Cambridge, Angleterre, mars 2013 : *Relations among multiple zeta values.* Workshop on Grothendieck-Teichmueller Theory and Multiple Zeta Values, Isaac Newton Institute.

Palo Alto, Californie, États-Unis, avril 2013 : *Mock modular forms and Jacobi forms.* Workshop on Gromov-Witten invariants and Number Theory, American Institute of Mathematics.

Palo Alto, Californie, États-Unis, avril 2013 : *Quasimodular forms and the holomorphic anomaly equation.* Workshop on Gromov-Witten invariants and Number Theory, American Institute of Mathematics.

Cambridge, Angleterre, avril 2013 : *From modular forms to finite groups.* Rothschild Visiting Lecture, Isaac Newton Institute and University of Cambridge.

Oxford, Angleterre, avril 2013 : *Deformations of Picard-Fuchs equations, modular forms, and the holomorphic anomaly equation.* « Deformation Week », Mathematical Institute, Oxford University.

Oxford, Angleterre, avril 2013 : *Arithmetic of quantum knot invariants.* Workshop on Higher Structures in Topology and Number Theory, Mathematical Institute, Oxford University, and Clay Institute.

Cambridge, Angleterre, avril 2013 : *Finite multiple zeta values.* Workshop on Grothendieck-Teichmueller Theory and Multiple Zeta Values, Isaac Newton Institute.

Cambridge, Angleterre, avril 2013 : *From quantum black holes to number theory.* Colloquium, Department of applied mathematics and theoretical physics, Cambridge University.

Londres, Angleterre, avril 2013 : *Deformations of Picard-Fuchs equations.* Mini-workshop on Arithmetic Related to Mirror Symmetry and Fano Varieties, Imperial College.

Bonn, Allemagne, juin 2013 : Green's functions on Riemann surfaces, trois exposés (1. Green's functions and heights on algebraic curves, 2. Green's functions for quotients of the upper half-plane, 3. Green's functions, multiple zeta values, and string amplitudes). Conférences pour membres de l'école doctorale « IMPRS », Max-Planck-Institut für Mathematik.

Utrecht, Pays-Bas, juin 2013 : *Higher rank zeta functions and Riemann hypothesis for elliptic curves*. Conférence « A Singular Life, in Honour of Eduard Looijenga », Universiteit Utrecht.

Bremen, Allemagne, juillet 2013 : *The dilogarithm* (2 exposés). Conférence plénière et séminaire, « Modern Mathematics-International Summer School for Students », Jakobs-Universität Bremen.

Utrecht, Pays-Bas, juillet 2013 : *Relations among multiple zeta values.* Conference on « Special Functions and Special Numbers (on the occasion of the 60th birthday of Frits Beukers) », Universiteit Utrecht.

Trieste, Italie, août 2013 : *Multiple zeta values and string amplitudes.* Mathematics Seminar, International Centre for Theoretical Physics.

Bruxelles, Belgique, août 2013 : *The multiple zeta sums of Euler - a link between number theory, geometry and mathematical physics*. Conférence plénière, 6th Brussels Summer School of Mathematics.

Bonn, Allemagne, septembre 2013 : *Das quadratische Reziprozitätsgesetz von Gauß* (2 exposés). “Schülerwoche” (programme d’initiation mathématique d’une semaine pour lycéens), Hausdorff Institute for Mathematics.

Toronto, Canada, septembre 2013 : *Quasimodular forms and the holomorphic anomaly equation*. Workshop on Modular forms around String Theory, The Fields Institute for Research in Mathematical Sciences.

Toronto, Canada, septembre 2013 : *Some number theory coming from string amplitude calculations.* Workshop on Modular forms around String Theory, The Fields Institute for Research in Mathematical Sciences.

Autres missions et activités

Trento, Italie, octobre 2012 : Comitato Direttivo, Centro Internazionale per la Ricerca Matematica.

Frankfurt, Allemagne, octobre 2012 : Membre du jury, soutenance de thèse de Christian Weiss (« Twisted Teichmüller curves »), Universität Frankfurt.

Utrecht, Pays-Bas, octobre 2012 : Membre du *search committee* pour deux professeurs en mathématiques.

Dublin, Irlande, novembre 2012 : Réunion du Governing Board, School of Theoretical Physics, Dublin Institute of Advanced Studies.

Heidelberg, Allemagne, décembre 2012 : Membre du comité d’évaluation de la *Forschergruppe* (groupe de recherche) « Symmetrie, Geometrie und Arithmetik » de la Deutsche Forschungsgemeinschaft.

Osaka, Japon, mars 2013 : Visite scientifique, collaboration avec T. Ibukiyama et K. Nagatomo.

Cambridge, Angleterre, avril 2013 : Rothschild Distinguished Visiting Fellow, Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences.

Palo Alto, Californie, États-Unis, avril 2013 : Co-organisateur (avec A. Klemm et Y. Ruan) du workshop « Gromov-Witten invariants and Number Theory », American Institute of Mathematics.

Bonn, Allemagne, mai 2013 : Co-organisateur (avec W. Ballmann, G. Faltings et P. Teichner) de l’*Arbeitstagung* 2013

Bonn, Allemagne, mai 2013 : Beirat (comité scientifique) de l’Emmy Noether Mathematical Institute, Bar-Ilan, Israël.

Paris, juillet 2013 : Membre du jury, soutenance de thèse de mon élève doctorale Paloma Bengoechea (« Corps quadratiques et formes modulaires »), Université de Paris 6.

Oberwolfach, Allemagne, juillet 2013 : Co-organisateur (avec K. Belabas et B. Poonen) du Workshop « Explicit methods in Number Theory ».

Bonn, Allemagne, septembre 2013 : Membre du jury, soutenance de thèse de mon élève doctoral Karl-Heinz Fricke (« Analytische und p-adische Aspekte von klassischen und Mock-Modulformen »), Université de Bonn.

Bonn, Allemagne, septembre 2013 : Mathematical Salon, Hausdorff Institute for Mathematics. Sonate pour violoncelle et piano en ut mineur de Camille Saint-Saëns, Op. 32 (avec M. Kreck, violoncelle).

PUBLICATIONS ET PRÉPUBLICATIONS

Zagier D., Higher Kronecker limit formulas for real quadratic fields (avec M. Vlasenko). *J. reine angew. Math.*, **679** (2013), 23-64.

Zagier D., Some questions and observations around the mathematics of Seki Takakazu (avec S. Wimmer-Zagier). Dans *Seki, Founder of Modern Mathematics in Japan - A Commemoration on His Tercentenary* (E. Knobloch, H. Komatsu, Dun Liu, éds.), Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, **39** (2013), 275-297.

Zagier D., Function theory related to the group $PSL(2,\mathbb{R})$ (avec R. Bruggeman et J. Lewis). Dans *From Fourier Analysis and Number Theory to Radon Transforms and Geometry. In memory of Leon Ehrenpreis* (H.M. Farkas, R.C. Gunning, M.I. Knopp, B.A. Taylor, éds.), Springer, Developments in Mathematics, **28** (2013), 107-201.

Zagier D., A Family of Combinatorial Identities (appendice à “Densities of Short Uniform Random Walks” de J.M. Borwein, A. Straub, J. Wan et W. Zudilin). *Canad. J. Math.*, **64** (2012), 961-990 (appendice : pp. 987-989).

Zagier D., Vanishing and non-vanishing theta values (avec H. Cohen). *Annales mathématiques du Québec,* **37** (2013), 45-61.

Zagier D., Asymptotics of the regular cube (appendice à “Asymptotics of classical spin networks” de S. Garoufalidis et R. van der Veen). *Geometry and Topology,* **17** (2013), 1-37 (appendice pp. 32-35).

Zagier D., Period functions for Maass forms and cohomology (avec R. Bruggeman et J. Lewis). *Memoirs of the AMS*, à paraître, 132 pages.