Théorie des Nombres

M. Don ZAGIER, professeur

COURS : FORMES MODULAIRES ET STRUCTURES ALGÉBRIQUES

On a discuté surtout deux sujets qui sont tous les deux purement algébriques mais dont l'étude était motivée par des questions dans la théorie des formes modulaires. Il s'agit d'une part d'une généralisation de la théorie classique des polynômes et des fonctions sphériques (travail en collaboration avec T. Ibukiyama) et de l'autre de l'étude des algèbres de Rankin-Cohen et leur analogie avec les algèbres vertex et les algèbres conformes (travail en collaboration avec K. Nagatomo). Les deux sujets ont déjà été abordés dans le cours de l'année 2001–2002 mais se sont beaucoup développés depuis et ont été traités maintenant en détail.

Polynômes et fonctions sphériques généralisés

Fixons deux entiers n et d et un produit scalaire $(\ ,\ )$ sur $\mathbb{R}^d$. On définit une application β_n de $\mathbb{R}^d \times \cdots \times \mathbb{R}^d = (\mathbb{R}^d)^n$ dans l'espace $\mathcal{S}_n$ des matrices $n \times n$ réelles et symétriques par

$$\beta_n :\ (x_1, \ldots, x_n) \mapsto T = (t_{ij})_{1 \le i,j \le n}\,, \quad t_{ij} = (x_i, x_j)\,, \tag{1}$$

de façon que chaque polynôme P sur $\mathcal{S}_n$ définit un polynôme $P^* = P \circ \beta_n$ sur $(\mathbb{R}^d)^n$. Si $d \ge n$, alors pour chaque multidegré $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ $(a_i \in \mathbb{Z}_{\ge 0})$ on note par $\mathcal{P}(\mathbf{a}; d)$ l'espace des polynômes P sur $\mathcal{S}_n$ tels que P^* soit un polynôme harmonique et homogène de degré a_i par rapport à x_i pour chaque $i = 1, \ldots, n$. (Une extension de cette définition à des valeurs de d inférieures à n ou même non-entières sera donnée plus bas.) Nous appelons les éléments de cet espace les *polynômes sphériques généralisés* ("higher spherical polynomials"). Il y a plusieurs raisons de les étudier :

(i) Dans le cas $n = 2$, l'espace $\mathcal{P}(a_1, a_2; d)$ est de dimension 1 si $a_1 = a_2$ (et 0 sinon) et est engendré dans ce cas par un polynôme en $t_{11}t_{22}$ et t_{12} qui est la version homogène du polynôme de Legendre ($d = 3$) ou du polynôme de Gegenbauer (d quelconque) classique. Les polynômes de Legendre et de Gegenbauer jouent un rôle important en beaucoup de domaines mathématiques et jouissent de plusieurs propriétés intéressantes et utiles : équations différentielles, propriétés d'orthogonalité, récurrences, fonctions génératrices, formules explicites, etc. Il est donc très naturel de vouloir les généraliser.

(ii) Les polynômes en $\mathcal{P}(\mathbf{a}; d)$ ont une application dans la théorie des formes modulaires de Siegel. Si P appartient à l'espace $\mathcal{P}(\mathbf{a}; d)$ et si

$$F(Z) = \sum_T c(T)\, e^{2\pi i\, \mathrm{Tr}(TZ)} \qquad (Z \in \mathfrak{H}_n = \text{demi-espace supérieur de Siegel})$$

est une forme modulaire de Siegel holomorphe de degré n et de poids $d/2$, alors la fonction

$$P\Big(\frac{1+\delta_{ij}}{2}\,\frac{\partial}{\partial z_{ij}}\Big) F(Z)\Big|_{\mathfrak{H}_1^n} = \sum_T c(T)\, P(T)\, e^{2\pi i (t_{11}z_1 + \ldots + t_{nn}z_n)} \qquad (z_1, \ldots, z_n \in \mathfrak{H}_1) \tag{2}$$

est une forme modulaire elliptique de poids $d/2+a_j$ en z_j pour chaque $j=1,\dots,n$. En prenant les images $g(\mathfrak{H}^n)\subset\mathfrak{H}_n$ avec des éléments $g\in\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ convenables, on obtient aussi des applications de l'espace des formes modulaires de Siegel de degré n dans des espaces de formes modulaires de Hilbert pour les corps de nombres totalement réels de degré n (ou des produits de formes modulaires de Hilbert pour les corps de nombres totalement réels dont la somme des degrés est égale à n). Dans le cas où F est une série thêta de Siegel, donnée par

$$F(Z)=\sum_{(x_1,\dots,x_n)\in L^n} e^{2\pi i\,\mathrm{Tr}(\,\beta_n(x_1,\dots,x_n)\,Z)}$$

où $L\subset\mathbb{R}^d$ est un réseau sur lequel la forme quadratique (x,x) prend des valeurs rationnelles, la fonction définie par (2) est la série

$$\sum_{x_1\in L}\cdots\sum_{x_n\in L}P^*(x_1,\dots,x_n)\,q_1^{(x_1,x_1)}\dots q_n^{(x_n,x_n)}\qquad(q_j=e^{2i\pi\,z_j})\,,$$

qui pour P appartenant à $\mathcal{P}(\mathbf{a};d)$ est une forme modulaire de poids $d/2+a_j$ en z_j par la théorie classique des séries thêta aux coefficients polynômes sphériques (voir cours de l'année 2004–2005).

(iii) Dans le cas spécial $n=3$, le système d'équations différentielles qui définit les polynômes sphériques généralisés est équivalent à un système Pfaffien intégrable de rang 8 (et a donc exactement 8 solutions linéairement indépendantes, dont une polynomiale, analogues aux fonctions de Legendre de première et deuxième espèce dans le cas classique $n=2$). Dans la théorie générale des équations différentielles, des tels systèmes sont extrêmement rares : les systèmes des équations différentielles linéaires à coefficients polynomiaux en plusieurs variables ont en général un espace de solutions de dimension soit 0, soit ∞, et il est très difficile de construire des systèmes Pfaffiens qui remplissent les conditions d'intégrabilité nécessaires. Le système provenant de l'étude des polynômes sphériques généralisés est donc intéressant aussi du point de vue de la théorie des équations différentielles.

(iv) Enfin, il y a un lien intéressant avec la théorie des représentations du groupe orthogonal $O(d)$ que nous ne discuterons pas ici.

Nous expliquons maintenant en détail quelques-uns des résultats les plus importants.

Équation de Legendre généralisée et dimension de $\mathcal{P}(\mathbf{a};d)$. La définition de $\mathcal{P}(\mathbf{a};d)$ donnée ci-dessus n'a un sens que si d est un entier positif, et ne donne un espace de dimension finie que pour $d\ge n$, puisque pour $d<n$ l'application $P\mapsto P^*$ n'est plus injective, les nombres (x_i,x_j) devenant dans ce cas algébriquement dépendants (par exemple $\det(T)=0$). On peut donner une autre définition de cet espace comme ensemble de solutions d'un système d'équations différentielles qui a un sens et est de dimension finie pour tout d.

On prend comme coordonnées sur $\mathcal{S}_n$ toutes les variables t_{ij}, avec $t_{ij}=t_{ji}$, et on écrit les éléments de $\mathbb{C}[\mathcal{S}_n]$ de façon symétrique comme des polynômes dans les variables $\sqrt{t_{ij}t_{ji}}$ $(=t_{ij})$, c'est-à-dire, on prend comme base de $\mathbb{C}[\mathcal{S}_n]$ l'ensemble des monômes $T^{\boldsymbol{\nu}}:=\prod_{i,j=1}^n t_{ij}^{\nu_{ij}/2}$ où $\boldsymbol{\nu}$ parcourt l'ensemble

$$\mathcal{N}=\mathcal{N}_n:=\bigl\{\boldsymbol{\nu}=(\nu_{ij})_{1\le i,j\le n}\mid \nu_{ij}=\nu_{ji}\in\mathbb{Z}_{\ge0}\,,\quad \nu_{ii}\equiv0\pmod 2\bigr\}$$

des matrices $n\times n$ paires et symétriques à coefficients positifs. Il y a un isomorphisme canonique $\mathbb{C}[\mathcal{S}_n]\cong\mathbb{C}^{\mathcal{N}}$ qui associe à un polynôme $\sum C_{\boldsymbol{\nu}}\,T^{\boldsymbol{\nu}}$ l'ensemble de ses coefficients

$\{C_{\boldsymbol{\nu}}\}$. On prend $\partial_{ij} = (1+\delta_{ij})\partial/\partial t_{ij}$ comme opérateur de différentiation par rapport à t_{ij}. On définit le *multidegré* du monôme $T^{\boldsymbol{\nu}}$ comme le vecteur $\boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{1} \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n$, où $\mathbf{1} = (1,\ldots,1)$, et on note par $\mathbb{C}[\mathcal{S}_n]_{\mathbf{a}}$ le sous-espace de $\mathbb{C}[\mathcal{S}_n]$ engendré par tous les monômes de multidegré $\mathbf{a}$ donné. On a donc $\mathbb{C}[\mathcal{S}_n]_{\mathbf{a}} \cong \mathbb{C}^{\mathcal{N}(\mathbf{a})}$, où $\mathcal{N}(\mathbf{a}) := \{\boldsymbol{\nu} \in \mathcal{N}_n \mid \boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{1} = \mathbf{a}\}$. Pour $d > 0$ entier on définit $\mathcal{P}(\mathbf{a}; d)$ comme l'espace des polynômes $P \in \mathbb{C}[\mathcal{S}_n]_{\mathbf{a}}$ pour lesquels le polynôme P^* (qui sera automatiquement multihomogène de multidegré $\mathbf{a}$ dans les x_i) est harmonique (sphérique) par rapport à chaque x_i. Un calcul direct montre que cette condition équivaut au système d'équations différentielles

$$D_1 P \,=\, \cdots \,=\, D_n P \,=\, 0\,, \qquad D_i = D_i^{(d)} := d\,\partial_{ii} + \sum_{j,k=1}^{n} t_{jk}\,\partial_{ij}\partial_{ik} \qquad (1 \leq i \leq n)\,. \tag{3}$$

On définit alors $\mathcal{P}(\mathbf{a}; d)$ pour tout $d \in \mathbb{C}$ comme $\bigl\{P \in \mathbb{C}[\mathcal{S}_n]_{\mathbf{a}} \;:\; D_1 P = \cdots = D_n P = 0\bigr\}$.

Soit $\mathcal{N}_0(\mathbf{a}) = \bigl\{\boldsymbol{\nu} \in \mathcal{N}(\mathbf{a}) \mid \nu_{ii} = 0\ (\forall i)\bigr\}$ et soit $\Phi : \mathcal{P}(\mathbf{a}; d) \to \mathbb{C}^{\mathcal{N}_0(\mathbf{a})}$ la projection canonique (la composée de l'inclusion $\mathcal{P}(\mathbf{a}; d) \subseteq \mathbb{C}[\mathcal{S}_n]_{\mathbf{a}} \cong \mathbb{C}^{\mathcal{N}(\mathbf{a})}$ et de la projection $\mathbb{C}^{\mathcal{N}(\mathbf{a})} \to \mathbb{C}^{\mathcal{N}_0(\mathbf{a})}$ qui correspond à l'opération de restreindre un polynôme $P(T)$ au sous-espace $\mathcal{S}_n^0 \subset \mathcal{S}_n$ des matrices T avec $t_{ii} = 0$ pout tout i). Le premier résultat dit que, sauf pour d appartenant à un ensemble fini, la dimension de $\mathcal{P}(\mathbf{a}; d)$ est indépendant de d et égal à la cardinalité $N_0(\mathbf{a})$ de l'ensemble $\mathcal{N}_0(\mathbf{a})$.

Théorème 1. *Soit d un nombre complexe avec $d/2 \notin \mathbb{Z} \cap \bigl(\bigcup_{i=1}^{n} [2-a_i, 1-a_i/2]\bigr)$. Alors l'application $\Phi : \mathcal{P}(\mathbf{a}; d) \to \mathbb{C}^{\mathcal{N}_0(\mathbf{a})}$ est un isomorphisme. En particulier,* $\dim \mathcal{P}(\mathbf{a}; d) = N_0(\mathbf{a})$.

Ce théorème est un peu surprenant puisque le système des équations différentielles (3) se traduit en un système d'équations linéaires pour les coefficients de $P \in \mathcal{P}(\mathbf{a}; d)$ qui est surdéterminé. Par exemple, pour $n = 4$ et $\mathbf{a} = (2,2,2,2)$ on a $N(\mathbf{a}) = 17$, une base pour $\mathbb{C}]\mathcal{S}_n]$ étant donnée par les monômes $t_{11}t_{22}t_{33}t_{44}$, $t_{11}t_{22}t_{34}^2$, $t_{11}t_{23}t_{34}t_{42}$, $t_{13}t_{14}t_{23}t_{24}$, $t_{12}^2 t_{34}^2$ et leurs permutations $(1+6+4+3+3 = 17)$, et le système (3) impose $4 \times 5 = 20$ conditions (par exemple, $D_1 P$ appartient à l'espace de dimension 5 engendré par $t_{22}t_{33}t_{44}$, $t_{22}t_{34}^2$, $t_{33}t_{24}^2$, $t_{44}t_{23}^2$, et $t_{23}t_{34}t_{42}$). *A priori* un système de 20 équations linéaires en 17 inconnues n'aurait aucune solution, mais le théorème dit qu'il y a $N_0(\mathbf{a}) = 6$ solutions linéairement indépendantes, i.e., le rang de la matrice 20×17 qui décrit le système n'est que 11. Un calcul numérique le confirme.

Produit scalaire et orthogonalité. L'une des propriétés essentielles des polynômes de Legendre ou de Gegenbauer classiques est leur orthogonalité par rapport à un certain produit scalaire. Les espaces de polynômes $\mathcal{P}(\mathbf{a}; d)$ possèdent une propriété analogue. Soit $\mathcal{S}_n^1 \subset \mathcal{S}_n$ l'espace des matrices définies positives avec tous leurs coefficients diagonaux égaux à 1. Pour P, $Q \in \mathbb{C}[\mathcal{S}_n]$ et $d \in \mathbb{C}$ avec $\Re(d) \geq n$ on définit un produit scalaire $(P,Q) = (P,Q)_d$ par

$$(P,Q) \;=\; \int_{\mathcal{S}_n^1} P(T)\,\overline{Q(T)}\,\det(T)^{(d-n-1)/2} \prod_{1 \leq i < j \leq n} dt_{ij}\,. \tag{4}$$

Pour d'autres valeurs de d on définit $(P,Q)_d$ par continuation analytique, la valeur de l'intégrale (4) pour P et Q fixés étant le produit d'un certain nombre de fonctions gamma et d'une fonction rationnelle de d, donc méromorphe en d. Dans le cas où $d \geq n$ est un entier, l'intégrale (4) est proportionnelle à l'intégrale de $P^*\,\overline{Q^*}$ sur la polysphère $(S^{d-1})^n \subset (\mathbb{R}^d)^n$. On a :

Théorème 2. *Les espaces de polynômes $\mathcal{P}(\mathbf{a};d)$ and $\mathcal{P}(\mathbf{b};d)$ pour des multi-indices distincts* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *sont orthogonaux par rapport au produit scalaire* (4).

On peut combiner ce résultat avec la démonstration du Théorème 1 pour donner un raffinement de ce dernier. Soient $\mathbf{a}$ et d comme dans le Théorème 1. Alors l'espace $\mathbb{C}[\mathcal{S}_n]_{\mathbf{a}}$ de tous les polynômes $\mathcal{S}_n$ de multidegré $\mathbf{a}$ a une décomposition en somme directe

$$\mathbb{C}[\mathcal{S}_n]_{\mathbf{a}} = \bigoplus_{\boldsymbol{\mu}} t_{11}^{\mu_1} \cdots t_{nn}^{\mu_n} \, \mathcal{P}(\mathbf{a} - 2\boldsymbol{\mu}; d)\,,$$

où la somme porte sur tous les n-tuples $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{Z}^n$ avec $0 \le \mu_i \le a_i/2$, et cette décomposition est orthogonale par rapport au produit scalaire (4).

Algèbre de Lie associée. Une propriété qui s'avère être très utile pour l'étude des polynômes sphériques généralisés est l'opération d'une algèbre de Lie canonique qui contient dans son algèbre enveloppante les opérateurs différentiels D_i définis dans (3). L'opérateur D_i correspond quand $T = \beta_n(x_1, \ldots, x_n)$ au Laplacien $\Delta_i = \sum\limits_{\alpha=1}^{d} \dfrac{\partial^2}{\partial x_{i,\alpha}^2}$ par rapport à la i-ième variable $x_i \in \mathbb{R}^d$. On peut considérer également les "opérateurs de Laplace mixtes" $\Delta_{ij} = \sum\limits_{\alpha=1}^{d} \dfrac{\partial^2}{\partial x_{i\alpha}\,\partial x_{j\alpha}}$ pour $i \ne j$ et un calcul analogue à celui dans le cas $i = j$ montre qu'ils correspondent aux opérateurs

$$D_{ij} = D_{ij}^{(d)} = d\,\partial_{ij} + \sum_{k,l=1}^{n} t_{kl}\,\partial_{ik}\partial_{jl}$$

agissant sur $\mathbb{C}[\mathcal{S}_n]$, avec $D_{ii} = D_i$. On définit également des opérateurs différentiels E_{ij} de premier ordre par

$$E_{ij} = \frac{d}{2}\,\delta_{ij} + \sum_{k=1}^{n} t_{ik}\partial_{jk} \qquad (1 \le i,\, j \le n)$$

ce qui correspond pour $i = j$ à l'opérateur d'Euler $\sum_\alpha x_i\,\partial/\partial x_{i,\alpha}$ (si on omet le terme $d/2$) et pour $i \ne j$ à l'"opérateur d'Euler mixte" $\sum_\alpha x_i\,\partial/\partial x_{j,\alpha}$, et enfin des opérateurs d'ordre zéro F_{ij} comme multiplication par t_{ij} $(1 \le i,\, j \le n)$. On trouve alors que l'espace vectoriel $\mathfrak{g} \subset \mathrm{End}(\mathbb{C}[\mathcal{S}_n])$ engendré par tous les opérateurs D_{ij}, E_{ij}, F_{ij} est une sous-algèbre de Lie, avec des commutateurs explicites (par exemple $[D_{ij}, F_{kl}] = \delta_{ik}E_{lj} + \delta_{il}E_{kj} + \delta_{jk}E_{li} + \delta_{jl}E_{ki}$), et que cette algèbre est isomorphe à l'algèbre de Lie $\mathfrak{sp}(2n,\mathbb{R}) = \{X \in M_{2n}(\mathbb{R}) \mid X\left(\begin{smallmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{smallmatrix}\right) = -\left(\begin{smallmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{smallmatrix}\right)X^t\}$. Ce fait est à la base du lien déjà mentionné entre la théorie développée ici et la théorie des formes modulaires de Siegel de degré n.

Construction spéciale pour $d = 4$. Pour $d = 4$ on peut donner une construction spéciale de polynômes sphériques généralisés en identifiant $\mathbb{R}^d$ avec l'espace $M_2(\mathbb{R})$ des matrices réelles 2×2, muni de la forme quadratique $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \det(g) = ad - bc$. (Cette forme n'est pas définie positive, mais cela n'a aucune importance puisque les équations différentielles qui définissent l'espace $\mathcal{P}(\mathbf{a};d)$ ne dépendent pas du choix du produit scalaire.) Le groupe $G = SL(2,\mathbb{R})$ opère sur $M(2,\mathbb{R})$ par multiplication à droite et à gauche, et l'opération combinée de $G \times G$ sur $M_2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^4$ identifie $(G \times G)/\{\pm 1\}$ avec une forme de $SO(4)$. On note par V_1 la représentation standard de G de dimension 2 et par V_a ($a \in \mathbb{N}$) son produit symétrique a-ième, l'espace $(a+1)$-dimensionnel des polynômes homogènes de degré a en deux variables x et y, muni du produit scalaire G-invariant donné par

$$\langle x^p y^q,\, x^{p'} y^{q'}\rangle = (-1)^p\, p!\, q!\, \delta_{p,q'} \qquad (p+q = p'+q' = a)\,.$$

Cela donne pour chaque multi-degré $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ un produit scalaire G^n-invariant $\langle\ ,\ \rangle$ sur $W_{\mathbf{a}} = V_{a_1} \otimes \cdots \otimes V_{a_n}$. Pour chaque multi-indice $\boldsymbol{\nu} \in \mathcal{N}_0(\mathbf{a})$ on a le vecteur G-invariant

$$w_{\boldsymbol{\nu}} = \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{(x_i y_j - x_j y_i)^{\nu_{ij}}}{\nu_{ij}!} \;\in W_{\mathbf{a}}\,,$$

où (x_i, y_i) sont les coordonnées sur V_{a_i}. On définit alors une fonction $F_{\boldsymbol{\nu}}$ sur $M_2(\mathbb{R})^n$ par

$$F_{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{g}) = \langle \mathbf{g} w_{\boldsymbol{\nu}}, w_{\boldsymbol{\nu}}\rangle \qquad \bigl(\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_n) \in M_2(\mathbb{R})^n \;=\; (\mathbb{R}^4)^n\bigr)\,,$$

et plus généralement on pose $F_{\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{g}) = \langle \mathbf{g} w_{\boldsymbol{\mu}}, w_{\boldsymbol{\nu}}\rangle$ pour tous $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\nu} \in \mathcal{N}_0(\mathbf{a})$. Alors chaque fonction $F_{\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\nu}}$ est un polynôme homogène et harmonique de degré a_i par rapport à $g_i \in M_2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^4$ pour chaque $i = 1, \dots, n$, et est $O(4)$-invariant si $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\nu}$. Dans ce dernier cas il est l'image $P_{\boldsymbol{\nu}}^*$ d'un élément $P_{\boldsymbol{\nu}} \in \mathcal{P}(\mathbf{a}, 4)$.

On démontre en plus que les polynômes $F_{\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\nu}}$ sont les coefficients d'une fonction génératrice algébrique qui est la racine carrée réciproque du déterminant d'une certaine matrice $4n \times 4n$.

Les polynômes sphériques généralisés dans le cas $n = 3$. Le cas $n = 3$ est particulièrement intéressant, non seulement parce que c'est le premier qui va au-delà du cas classique, mais aussi parce que dans ce cas la dimension de $\mathcal{P}(\mathbf{a}; d)$ est toujours égale à 0 ou à 1 et qu'on a donc des polynômes plus canoniques que dans le cas général. Plus précisément, la dimension est égale à 1 si et seulement si l'entier $a_1 + a_2 + a_3 - 2\max\{a_1, a_2, a_3\}$ est pair et positif, i.e., si on peut écrire

$$a_1 = \nu_2 + \nu_3, \qquad a_2 = \nu_1 + \nu_3, \qquad a_3 = \nu_1 + \nu_2 \tag{5}$$

pour un triple $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ d'entiers $\nu_i \ge 0$, qu'on appelle alors l'*indice* du polynôme qui engendre $\mathcal{P}(\mathbf{a}; d)$. Il est utile de changer les noms des coordonnées de $\mathcal{S}_n$ pour $n = 3$ en posant

$$2\,T \;=\; \begin{pmatrix} 2m_1 & r_3 & r_2 \\ r_3 & 2m_2 & r_1 \\ r_2 & r_1 & 2m_3 \end{pmatrix}.$$

On commence par le cas $d = 4$. Dans ce cas-là la construction décrite ci-dessus produit des polynômes canoniques $P_{\boldsymbol{\nu}} \in \mathcal{P}(\mathbf{a}; d)$ et une fonction génératrice explicite pour ces polynômes qui prend la forme

$$\sum_{\boldsymbol{\nu}} P_{\boldsymbol{\nu}}(T)\, \mathbf{X}^{\boldsymbol{\nu}} \;=\; \frac{1}{\sqrt{\Delta_0(T, \mathbf{X})^2 - 4d(T) X_1 X_2 X_3}}\,,$$

où $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$, $\mathbf{X}^{\boldsymbol{\nu}} = X_1^{\nu_1} X_2^{\nu_2} X_3^{\nu_3}$, et $\Delta_0(T, \mathbf{X})$ et $d(T)$ sont donnés par

$$\Delta_0(T, \mathbf{X}) \;=\; 1 - \sum_{i=1}^{3} (r_i X_i - m_i r_i X_{i+1} X_{i+2} - m_{i+1} m_{i+2} X_i^2)$$

et

$$d(T) \;=\; 4\,\det(T) \;=\; \prod_{i=1}^{3} r_i \;-\; \sum_{i=1}^{3} m_i r_i^2 + 4 \prod_{i=1}^{3} m_i\,.$$

La généralisation aux degrés d arbitraires est donnée par le théorème suivant.

Théorème 3. *Pour $d \in \mathbb{C}$ quelconque soient $P_{\boldsymbol{\nu},d}(T)$ ($\boldsymbol{\nu} = (\nu_1,\nu_2,\nu_3) \in \mathbb{Z}^3_{\geq 0}$) les polynômes définis par la fonction génératrice*

$$\sum_{\boldsymbol{\nu}} P_{\boldsymbol{\nu},d}(T)\mathbf{X}^{\boldsymbol{\nu}} = \frac{R(T,\mathbf{X})^{(4-d)/2}}{\sqrt{\Delta_0(T,\mathbf{X})^2 - 4d(T)X_1X_2X_3}}\,,$$

où

$$R(T,\mathbf{X}) = \frac{\Delta_0(T,\mathbf{X}) + \sqrt{\Delta_0(T,\mathbf{X})^2 - 4d(T)X_1X_2X_3}}{2}\,.$$

Alors $P_{\boldsymbol{\nu},d}(T)$ appartient à l'espace $\mathcal{P}(\mathbf{a};d)$, où $\mathbf{a}$ est lié à $\boldsymbol{\nu}$ par (5)*, et engendre cet espace si $d \notin \{0,\,-2,\,-4,\,\dots\}$.*

Les polynômes $P_{\boldsymbol{\nu},d}(T)$ ont une structure combinatoire compliquée et intéressante. Dans le cours on a discuté des récurrences et des formules explicites pour leurs coefficients et pour leurs normes par rapport au produit scalaire (4).

Les fonctions sphériques généralisées pour $n = 3$. Les polynômes $P_{\boldsymbol{\nu},d}(T)$ étant multi-homogènes, on peut réduire le nombre des variables en ne considérant que les matrices

$$T = \begin{pmatrix} 1 & \xi_3 & \xi_2 \\ \xi_3 & 1 & \xi_1 \\ \xi_2 & \xi_1 & 1 \end{pmatrix}$$

appartenant à l'ensemble $\mathcal{S}_3^1$. Le système d'équations différentielles devient alors

$$\mathbf{S}: \qquad \mathcal{D}_1 Q = \mathcal{D}_2 Q = \mathcal{D}_3 Q = 0,$$

où

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_1 = (1-\xi_2^2)\frac{\partial^2}{\partial\xi_2^2} + (1-\xi_3^2)\frac{\partial^2}{\partial\xi_3^2} + 2(\xi_1 - \xi_2\xi_3)\frac{\partial^2}{\partial\xi_2\partial\xi_3} \\ -(d-1)\big(\xi_2\frac{\partial}{\partial\xi_2} + \xi_3\frac{\partial}{\partial\xi_3}\big) + (\nu_2+\nu_3)(\nu_2+\nu_3+d-2)\end{aligned}$$

et $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_3$ sont les opérateurs obtenus de celui-ci en en permutant les indices.

Théorème 4. *Pour des paramètres complexes quelconques d, ν_1, ν_2 et ν_3, le système* **S** *est holonomique de rang 8.*

Cela veut dire que l'espace des solutions holomorphes du système **S** est de dimension finie, égale à 8, en chaque point en dehors du lieu singulier $\{\xi_i = \pm 1\} \cup \{\det T = 0\}$ de ce système. Pour le démontrer, on associe à une fonction $Q(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ des trois variables complexes ξ_i le vecteur $u = (Q, Q_1, Q_2, Q_3, Q_{23}, Q_{13}, Q_{12}, Q_{123})$ de longueur 8, où $Q_i = \partial Q/\partial\xi_i$ etc., et on montre :

(i) Le système **S** pour une fonction Q se transforme en un système Pfaffien $du = \Omega u$, où d est la différentielle extérieure et $\Omega = \Omega_1\,d\xi_1 + \Omega_2\,d\xi_2 + \Omega_3\,d\xi_3$ est une matrice 8×8 de 1-formes.

(ii) On a la condition d'intégrabilité $d\Omega - \Omega \wedge \Omega = 0$.

Dans les deux cas les vérifications sont très compliquées et sont trouvées à l'aide d'un ordinateur. Pour (i), il faut résoudre successivement des équations linéaires qui expriment les dérivées Q_{11}, Q_{112} etc. de Q en termes des 8 dérivées partielles qui interviennent dans le vecteur u, et montrer que ce processus se termine. A chaque étape on a un système fini qui est en général surdéterminé (à la troisième étape, par exemple, on a 18 équations linéaires en 15 variables inconnues Q_{1111}, Q_{1112}, Q_{1113}, Q_{1122}, Q_{1123}, Q_{1133}, Q_{1222}, Q_{1223}, Q_{1233}, Q_{1333}, Q_{2222}, Q_{2223}, Q_{2233}, Q_{2333}, Q_{3333}) et il n'y a pas de raison *a priori* pour que ces équations aient une solution, mais c'est bien le cas. On trouve à la fin des formules explicites, mais relativement compliquées, pour les 192 coefficients de la 1-forme matricielle Ω. Il reste à vérifier la condition d'intégrabilité (ii), c'est-à-dire les trois identités

$$\Omega_i\Omega_j - \Omega_j\Omega_i \;=\; \frac{\partial\Omega_l}{\partial\xi_i} - \frac{\partial\Omega_i}{\partial\xi_j} \qquad (1 \le i < j \le 3)\,,$$

entre les trois matrices 8×8 Ω_i, ce qui se fait par un calcul direct.

Enfin, on a réussi dans beaucoup de cas à décrire complètement les 8 solutions linéairement indépendantes du système $\mathbf{S}$. Dans le cas le plus simple $d = 4$, $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0$ ce sont les fonctions

$$1\,, \quad \cot\theta_a, \quad 4\theta_a + L_b\cot\theta_c + L_c\cot\theta_b\,, \quad \log\Delta - \sum_{i=1}^{3}\theta_i\cot\theta_i$$

avec $\{a,b,c\} = \{1,2,3\}$, où $\theta_i = \cos^{-1}(\xi_i)$, $\Delta = \det(T) = 1 - \xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2 + 2\xi_1\xi_2\xi_3$ et

$$L_b \;=\; \frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{(1-\xi_a^2)(1-\xi_c^2)} - \xi_a\xi_c + \xi_b}{\sqrt{(1-\xi_a^2)(1-\xi_c^2)} + \xi_a\xi_c - \xi_b}\,.$$

Algèbres de Rankin-Cohen et $\mathfrak{sl}_2$-algèbres

On rappelle (voir résumé de cours de l'année 2000–2001) qu'une *algèbre de Rankin-Cohen* est une algèbre graduée $R = \oplus_{k=0}^{\infty} R_k$, $R_0 = \mathbb{C}$, munie d'une collection infinie d'applications bilinéaires

$$\mu_n = \mu_n^{(k,\ell)} : R_k \otimes R_\ell \longmapsto R_{k+\ell+n} \qquad (k,\,\ell,\,n\,\ge\,0)$$

qui satisfont à certains axiomes, l'exemple motivant étant le cas où R_k est l'espace des formes modulaires de poids $2k$ sur un sous-groupe discret $\Gamma \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ et les μ_n sont les crochets de Rankin-Cohen définis par

$$\mu_n^{(k,\ell)}(f,g) \;=\; \sum_{r+s=n} (-1)^r \binom{n+2k-1}{s}\binom{n+2\ell-1}{r} D^r(f)\,D^s(g) \tag{6}$$

($D^r(f) = r$-ième dérivée de f). Les axiomes pour le cas général sont que les applications μ_n doivent satisfaire à toutes les identités qui sont valables pour les crochets de Rankin-Cohen. C'est une définition indirecte et l'un des buts de l'étude de ces objets est de trouver, soit des axiomes explicites, soit une équivalence entre la catégorie des algèbres de Rankin-Cohen et une catégorie définie d'une façon plus naturelle.

Le premier résultat décrit une structure d'algèbre commutative et associative sur le *produit tensoriel diagonal complété* $R\,\widehat{\otimes}_\Delta R' = \prod_{k=0}^{\infty} R_k \otimes R'_k$ de deux algèbres de Rankin-Cohen R et R'.

Théorème 5. *Soient (R,μ_n) et (R',μ'_n) deux algèbres de Rankin-Cohen. Alors le produit sur $R\,\widehat{\otimes}_\Delta R'$ définie par*

$$m^*(f\otimes f', g\otimes g') \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} c_n(k,\ell)\,\mu_n(f,g)\otimes\mu'_n(f',g') \tag{7}$$

pour $f\otimes f'\in R_k\otimes R'_k$, $g\otimes g'\in R_\ell\otimes R'_\ell$, où $c_n(k,\ell)$ est donné par

$$c_n(k,\ell) \;=\; \frac{n!}{(n+2k-1)_n\,(n+2\ell-1)_n\,(2n+2k+2\ell-2)_n}\,,$$

est associative et commutative.

La motivation pour ce théorème et pour sa démonstration vient de la théorie des formes modulaires de Siegel et de Jacobi. Si f et f' sont des formes modulaires du même poids $2k$ sur des sous-groupes discrets Γ et Γ' de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, alors la fonction

$$F\begin{pmatrix}\tau & z\\ z & \tau'\end{pmatrix} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\frac{D^n(f)(\tau)\,D^n(f')(\tau')}{n!\,(n+2k-1)_n}\,z^{2n+2k}$$

se comporte comme une forme modulaire de Siegel de poids 0 par rapport au sous-groupe discret (mais de covolume infinie) $\Gamma\times\Gamma'\subset\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})\times\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})\subset\mathrm{Sp}_4(\mathbb{R})$. Cela donne une application $\rho_k : f\otimes f'\mapsto F$ de $M_{2k}(\Gamma)\otimes M_{2k}(\Gamma')$ dans l'ensemble $\mathfrak{S}=\mathfrak{S}(\Gamma,\Gamma')$ des fonctions dans le demi-espace de Siegel de degré 2 ayant ce comportement modulaire. Il est facile de voir que l'image de ρ_k est contenue dans le sous-espace $\mathfrak{S}^k\subset\mathfrak{S}$ formé par les fonctions qui s'annule au moins $2k$ fois sur le diviseur $z=0$, et que l'application induite de $M_{2k}(\Gamma)\otimes M_{2k}(\Gamma')$ en $\mathfrak{S}^k/\mathfrak{S}^{k+1}$ est un isomorphisme. Cela donne un isomorphisme entre $\mathfrak{S}$ et $M_{2*}(\Gamma)\,\widehat{\otimes}_\Delta M_{2*}(\Gamma')$, et le produit m^* dans le théorème correpond par rapport à cet isomorphisme au produit naturel dans $\mathfrak{S}$.

On applique maintenant le Théorème 5 au cas où $R'=\mathbb{S}$ est une algèbre de Rankin-Cohen particulière, donnée par $\mathbb{S}_0=\mathbb{C}$, $\mathbb{S}_k=\mathbb{C}[z]T^k$ pour $k>0$ avec les crochets donnés par la formule (6) avec D défini comme $T\,\partial/\partial z$. La formule (7) définit un produit $m^*_{\mathbb{S}}$ sur le produit tensoriel diagonal (non complété) $R\otimes_\Delta\mathbb{S}=\mathbb{C}\oplus(\bigoplus_{k>0}R_k\otimes\mathbb{C}[z])$. Explicitement, ce produit est donné par

$$m^*_{\mathbb{S}}(f\otimes z^\alpha,\, g\otimes z^\beta) \;=\; \sum_{n=0}^{\alpha+\beta} c_n(k,\ell)\,F_n(n+2k-1,n+2\ell-1;\alpha,\beta)\,\mu_n^{(k,\ell)}(f,g)\otimes z^{\alpha+\beta-n}\,,$$

où les coefficients $c_n(k,\ell)$ sont les mêmes que dans le Théorème 5 et F_n est le polynôme défini par

$$F_n(a,b;x,y) \;=\; \sum_{r+s=n}(-1)^r\,\frac{(a)_s(b)_r(x)_r(y)_s}{r!s!}\,, \qquad (x)_r \;:=\; x(x-1)\cdots(x-r+1)\,.$$

On peut maintenant utiliser la construction $R\mapsto R\otimes_\Delta\mathbb{S}$ pour donner un système d'axiomes raisonnable pour les algèbres de Rankin-Cohen :

Théorème 6. *Soit $(R,\{\mu_n\}_{n\ge 0})$ un espace vectoriel gradué muni d'une infinité d'applications $\mu_n : R_k\otimes R_\ell\to R_{k+\ell+n}$ $(k,\,\ell,\,n\ge 0)$. Alors l'algèbre $(R\otimes_\Delta\mathbb{S}, m^*_{\mathbb{S}})$ est une algèbre commutative et associative si et seulement si R est une algèbre de Rankin-Cohen.*

Le Théorème 6 permet en principe d'identifier la catégorie des algèbres de Rankin-Cohen avec une certaine sous-catégorie de la catégorie des algèbres commutatives et associatives. Pour déterminer cette sous-catégorie, on considère l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ avec les générateurs standards L_{-1}, L_0 et L_1, $[L_i, L_j] = (j-i)L_{i+j}$. Elle opère sur $\mathbb{S}$ par

$$L_j \;=\; z^j \left(z\,\frac{\partial}{\partial z} \;+\; (j+1)\,T\,\frac{\partial}{\partial T} \right) \qquad (j = -1,\,0,\,1)$$

et ceci induit une opération de $\mathfrak{g}$ sur le produit tensoriel diagonal $R \otimes_\Delta \mathbb{S}$ pour n'importe quelle algèbre de Rankin-Cohen R. On appelera $\mathfrak{g}$-*algèbre* une algèbre A munie d'une opération de $\mathfrak{g}$ sur A par dérivations (c'est-à-dire $X(fg) = X(f)g + fX(g)$ pour tout $f,\, g \in A$ et $X \in \mathfrak{sl}_2$). On note par $\mathcal{A}(\mathfrak{g})$ la catégorie des $\mathfrak{g}$-algèbres graduées avec unité ($A = \bigoplus A_k$, $A_0 = \mathbb{C}\cdot 1$) telles que L_0 opère comme multiplication par le degré ; les relations de commutation dans $\mathfrak{g}$ entraînent alors que chaque L_j ($j = -1,\, 0,\, 1$) est de degré j (c'est-à-dire, $L_j(A_k) \subseteq A_{k+j}$ pour tout k). On note par $\mathcal{A}(\mathfrak{g})^0$ la sous-catégorie pleine dont les objets sont les $\mathfrak{g}$-algèbres graduées pour lesquelles l'application $L_{-1} : A_1 \to A_0 = \mathbb{C}$ s'annule, et par $\mathcal{A}(\mathfrak{g})^0_{\mathrm{com,ass}}$ la sous-catégorie des $\mathfrak{g}$-algèbres commutatives et associatives dans $\mathcal{A}(\mathfrak{g})^0$. Pour chaque algèbre de Rankin-Cohen R, l'algèbre $Q(R) = (R \otimes_\Delta \mathbb{S},\, m^*_{\mathbb{S}})$ avec l'opération de $\mathfrak{g}$ qu'on vient de décrire appartient à $\mathcal{A}(\mathfrak{g})^0_{\mathrm{com,ass}}$. Inversement, si A est une $\mathfrak{s}l_2$-algèbre graduée commutative et associative, et si on définit une structure de Rankin-Cohen sur A par la formule (6) avec $D = L_1$, alors la *partie primitive* $P(A) = \mathrm{Ker}(L_{-1},\, A)$ de A est fermée par rapport à tous les crochets de Rankin-Cohen, et ceci donne une application P de $\mathcal{A}(\mathfrak{g})^0_{\mathrm{com,ass}}$ dans la catégorie des algèbres de Rankin-Cohen.

Théorème 7. *L'application $R \mapsto (R \otimes_\Delta \mathbb{S},\, m^*_{\mathbb{S}})$ donne une équivalence de catégories entre la catégorie des algèbres de Rankin-Cohen et la catégorie $\mathcal{A}(\mathfrak{g})^0_{\mathrm{com,ass}}$, avec inverse $A \mapsto Ker(L_{-1},\, A)$.*

Il y a une application de ce cercle d'idées à des structures algébriques provenant de la physique théorique, les *algèbres vertex* et les *algèbres d'opérateurs de vertex*, qui sont dans une certaine mesure des analogues des algèbres de Rankin-Cohen. Une algèbre vertex est un espace vectoriel gradué $V = \bigoplus_{k=0}^{\infty} V_k$ ($V_0 = \mathbb{C}\cdot 1$, $\dim V_k < \infty$) muni d'opérations $a \otimes b \mapsto a_{(n)}b$ de degré $-n-1$ de $V \otimes V$ en V pour tout $n \in \mathbb{Z}$ qui satisfont à l'identité $a_{(n)}1 = \delta_{n,-1}a$ ($a \in V$, $n \in \mathbb{Z}_{\geq -1}$) et à l'identité de Borcherds

$$\sum_{i=0}^{\infty} \binom{p}{i} (a_{(r+i)}b)_{(p+q-i)} = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{r}{i} \big(a_{(p+r-i)} b_{(q+i)} - (-1)^r b_{(q+r-i)} a_{(p+i)} \big)$$

pour tout $a,\, b \in V$ et $p,\, q,\, r \in \mathbb{Z}$. On dit que V est une algèbre d'opérateurs de vertex s'il existe en plus un élément $\omega \in V_2$ tel que $\omega_{(1)}a = ka$ et $\omega_{(0)}x = a_{(-2)}1$ pour tout $a \in V_k$; dans ce cas, les endomorphismes $L_n : a \mapsto \omega_{(n+1)}a$ de V forment une représentation de l'algèbre de Virasoro avec charge centrale c_V, où $\omega_{(3)}\omega = \frac{1}{2}c_V \cdot 1$. Ces structures jouent un rôle important dans la théorie conforme des champs et aussi dans divers domaines en mathématiques comme l'étude du groupe Monstre. Mais leur définition est compliquée et difficile à manier, et il serait souhaitable de trouver des équivalences avec des catégories d'objets plus transparents. On n'a pas réussi à faire cela, mais pour certaines structures liées telles que les W-*algèbres* et les *algèbres conformes* (nous omettons les définitions) ayant des axiomes moins exigeants, il y a des résultats analogues au théorème qu'on vient d'énoncer. Notamment, en utilisant un théorème récent de Yamamoto, on a pu montrer l'équivalence d'une certaine catégorie d'algèbres conformes avec la catégorie $\mathcal{A}(\mathfrak{g})^0_{\mathrm{Lie}}$ dont les objets sont les algèbres de Lie dans $\mathcal{A}(\mathfrak{g})^0$, les applications dans les deux sens étant tout à fait analogues aux applications P et Q définies ci-dessus.

Cours à l'École Normale Supérieure : "Bouillon Mathématique"

Au lieu de traiter des thèmes divers comme on l'a fait dans des années précédentes, on a choisi cette année de présenter un seul résultat, même assez spécial, dont la démonstration requiert des notions venant de plusieurs domaines différents des mathématiques. Il s'agit du théorème de Dijkgraaf et de Kaneko-Zagier, déjà traité dans le cours donné au Collège de France en 2001–2002 (mais là à un niveau beaucoup moins élémentaire), qui donne une formule pour le nombre des revêtements d'un tore de degré et de ramification donnés en termes des formes quasimodulaires. Avant d'arriver à la démonstration du théorème lui-même, il fallait présenter les éléments de plusieurs théories mathématiques, notamment :

- le groupe fondamental et la classification des revêtements,
- les représentations des groupes finis et leurs caractères,
- les formes modulaires et quasimodulaires pour $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$.

La démonstration elle-même se découpe en deux parties : on utilise la théorie des représentations du groupe symétrique pour donner les nombres cherchés comme les coefficients d'une fonction génératrice définie à partir d'un produit qui généralise le "triple produit" célèbre de Jacobi, et on démontre ensuite les propriétés de modularité nécessaires de ce produit.

Conférences invitées

Bristol, Angleterre, septembre 2006 : *Mock modular forms.*
Conférence à l'occasion du 75e anniversaire de Bryan Birch.

Bonn, Allemagne, septembre 2006 : *Ramanujan und die Mock-Thetafunktionen: eine romantische Geschichte aus der Mathematik.*
Conférence populaire dans le cadre du "Sonntagstreff", Deutsches Museum, Bonn.

Bonn, Allemagne, septembre 2006 : *Combinatorial and algebraic aspects of modular forms.*
Mini-symposium "Automorphic Forms" dans le cadre de la réunion annuelle de la DMV (Société Mathématique d'Allemagne).

Trento, Italie, octobre 2006 : *q-series: a link between number theory and physics.*
Giornata Matematica del C.I.R.M.

Schiermonnikoog, Pays-Bas, octobre 2006 : *The theory of mock modular forms.*
Conférence "Modular forms".

Nijmegen, Pays-Bas, octobre 2006 : *Relations between quantum theory, geometry and number theory.*
Conférence plénière au Symposium International "The Origins of the Universe", Institute for Mathematics, Astrophysics and Particle Physics.

Lille, novembre 2006 : *Various realizations and applications of the principal series for* $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$.
Aachen-Köln-Lille-Siegen Automorphic Forms Seminar.

Bonn, Allemagne, novembre 2006 : *Geheimnisse der Primzahlen, Primzahlen für Geheimnisse.*
"Tag der offenen Tür" (journée portes ouvertes), Max-Planck-Institut für Mathematik.

Grenoble, février 2007 : *Plans projectifs finis, courbes de Fermat, et périodes de Gauss.*
Séminaire de Théorie des Nombres.

Grenoble, mars 2007 : *Formes modulaires et Cohomologie.*
Colloquium.

Bonn, Allemagne, mars 2007 : *Exotic modular forms.*
Conference on combinatorics and physics, Max-Planck-Institut für Mathematik.

Bures-sur-Yvette, avril 2007 : *Quantum modular forms.*
Conférence à l'occasion du 60e anniversaire d'Alain Connes, IHES.

Zürich, Suisse, avril 2007 : *From topology to number theory to physics.*
Conférence à l'occasion du 80e anniversaire de Beno Eckmann.

Lausanne, Suisse, avril 2007 : *Finite projective planes: between combinatorics, geometry and number theory.*
Number Theory Day, École Polytechnique Fédérale de Lausanne.

Freiburg, Allemagne, avril 2007 : Zahlentheorie und die Kreiszahl π.
Gauß-Vorleslung, conférence spéciale de la DMV (Société Mathématique d'Allemagne).

Pise, Italie, mai 2007 : *Maass forms and cohomology.*
Activity on dynamical systems and number theory, Ennio di Giorgi Center.

Tours, mai 2007 : *Fonction zêta de Selberg et dynamique des fractions continues.*
Colloquium de la Fédération Denis Poisson.

Tours, mai 2007 : *Les nombres premiers et les secrets qu'ils cachent.*
Conférence plénière, Journée de Mathématiques "Les Nombres" de l'Académie Orléans-Tours.

Bures-sur-Yvette, mai 2007 : *Euler et la théorie des nombres.*
Journée spéciale "Leonhard Euler, mathématicien universel", IHES.

St. Petersbourg, Russie, juin 2007 : *Special values of L-series.*
Conférence sur "Arithmetical algebraic geometry".

Bonn, Allemagne, juillet 2007 : *Introduction to the Beilinson conjecture* (2 conférences).
Conférences pour membres de l'école doctorale "IMPRS", Max-Planck-Institut für Mathematik.

Paris, août 2007 : *Modular forms, liftings and Borcherds products.*
Conférence sur "Black Holes, Black Rings and Modular Forms," ENS.

Waldbröl, Allemagne, septembre 2007 : *Diophant und seine Gleichungen.*
Conférence pour lycéens, Hollenberg-Gymnasium.

Autres Missions et Activités

Trento, Italie, octobre 2006 : Comitativo Direttivo, Centro Internazionale per la Ricerca

Matematica.

Oberwolfach, Allemagne, octobre 2006 : Wissenschaftsrat (Comité scientifique) du Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach.

Bar-Ilan, Israël, avril 2007 : Beirat (comité scientifique), Emmy Noether Institute.

Pisa, Italie, mai 2007 : Co-organisateur, Activité sur "Dynamical systems and number theory" (avril-juillet 2007).

Bonn, Allemagne, juillet 2007 : Co-organisateur, Arbeitstagung 2007, Max-Planck-Institut für Mathematik.

Oberwolfach, Allemagne, juillet 2007 : Co-organisateur, Conférence sur "Explicit Methods in Number Theory".

Dublin, Irlande, septembre 2007 : Rapporteur et membre du jury, thèse de Sinéad Keegan ("Algebraic K-theory and partition functions in conformal field theory"), University College Dublin.

Maynooth, Irlande, septembre 2007 : Rapporteur et membre du jury, thèse de Ciarán Mac an Bhaird ("Gauss's method for the determination of cyclotomic numbers"), National University of Ireland.

Trento, Italie, septembre 2007 : Comitativo Direttivo, Centro Internazionale per la Ricerca Matematica.

Publications et Prépublications

The equivalence of the two sets of relations.
Appendice à "Cycle relations on Jacobian varieties" par A. Kouvidakis et G. van der Geer.
Compositio Math. **143** (2007), 905–907.

A proof of (2.40).
Appendice à "Liouville field, modular forms and elliptic genera" par T. Eguchi, Y. Sugawara et A. Taormina.
J. of High Energy Physics (2007), 119, 17–19.

A geometric property of parallelograms inscribed in ellipses (avec A. Connes).
Amer. Math. Monthly **114** (2007), 909–914.

Finite projective planes, Fermat curves, and Gaussian periods (avec K. Thas).
J. Eur. Math. Soc. **10** (2008) 173–190.

Elliptic modular forms and their applications
A paraître dans *The 1–2–3 of Modular Forms : Lectures at a Summer School in Nordfjordeid, Norway*, K. Ranestad (éd.), Universitext, Springer-Verlag, Berlin (2007), 1–103.