Théorie des nombres

M. DON ZAGIER, professeur

COURS : VALEURS ZÊTAS MULTIPLES (PARIS, NOVEMBRE 2011)

Les « valeurs zêta multiples » (appelées aussi « sommes d'Euler » ou quelquefois même « sommes d'Euler-Zagier ») sont les nombres définis par l'expression

$$\zeta(k_1,\ldots,k_s) = \sum_{0<m_1<\cdots<m_s} \frac{1}{m_1^{k_1}\cdots m_s^{k_s}} \ , \tag{1}$$

où les k_i sont des entiers strictement positifs avec $k_s \geq 2$. Elles ont été déjà traitées dans le cas $s = 2$ (valeurs zêta doubles) dans le cours de 2005-2006 en rapport avec les périodes des formes modulaires. Dans les dernières années l'étude de ces nombres remarquables a fait des progrès dans plusieurs directions différentes, dont certaines ont été traitées dans le cours de cette année. En particulier, très récemment Francis Brown a démontré, avec une contribution par l'auteur, deux énoncés fondamentaux sur les valeurs zêta multiples qui avaient été conjecturés depuis longtemps et qui mèneront certainement à des développements importants de la théorie.

Les relations entre les valeurs zêta multiples

Les deux propriétés-clés des valeurs zêta multiples (VZM) sont :

i) Il y a beaucoup de relations linéaires entre elles ;

ii) Elles forment un anneau.

On discutera de la première propriété ici, et de la deuxième dans la section suivante.

Notons par $\zeta(\mathbf{k})$ le nombre (1), où $\mathbf{k} = (k_1,\ldots,k_s)$ est un *indice admissible*, c'est-à-dire un tuple d'entiers strictements positifs dont le dernier est au moins 2. La somme des k_i s'appelle le *poids* de l'indice $\mathbf{k}$ ou de la VZM $\zeta(\mathbf{k})$. Pour un entier $k > 2$ donné, il y a 2^{k-2} VMZ de poids k, mais on constate vite qu'elles ne sont pas du tout linéairement indépendantes sur $\mathbb{Q}$; par exemple, pour $k = 3$ et $k = 4$ on a

$$\zeta(1,2) = \zeta(3) \ , \tag{2}$$

$$\zeta(1,1,2) = \zeta(4)\ , \qquad \zeta(1,3) = \frac{1}{4}\zeta(4)\ , \qquad \zeta(2,2) = \frac{3}{4}\zeta(4)\ , \tag{3}$$

de façon que la dimension d_k de l'espace vectoriel $\mathfrak{Z}_k$ sur $\mathbb{Q}$ engendré par les VZM de poids k vaut 1 pour ces deux valeurs de k. Des calculs numériques faits par l'auteur il y a plusieurs années donnaient les valeurs conjecturales

k :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
d_k :	0	1	1	1	2	2	3	4	5	7	9	12

pour ces dimensions jusqu'à $k = 12$ et l'ont mené à proposer la formule recursive conjecturale

$$d_k \stackrel{?}{=} d_{k-2} + d_{k-3} \qquad (k \geq 4) \tag{4}$$

ou, ce qui est équivalent, la fonction génératrice

$$\sum_{k=0}^{\infty} d_k\, x^k \ \stackrel{?}{=}\ \frac{1}{1-x^2-x^3}\ . \tag{5}$$

Il a été démontré par Terasoma et indépendamment par Goncharov que les vraies valeurs de d_k sont majorées par les valeurs conjecturales données par (4) ou (5), et les résultats de Brown dont on parlera ci-dessous en donnent une autre démonstration, mais dans l'autre direction on ne sait même pas que les d_k tendent vers l'infini, et on ne peut même pas exclure qu'on a $d_k = 1$ pour tout $k \geq 2$ et que, par exemple, toutes les VZM de poids k ne seraient que des multiples rationnels de π^k. On ne sait pas non plus que la somme $\mathfrak{Z} = \sum_k \mathfrak{Z}_k \subset \mathbb{R}$ est directe, c'est-à-dire, qu'il n'y a pas de relations linéaires entre des VZM de poids différents, mais toute l'évidence théorique et numérique l'indique.

Avant de donner des exemples explicites des relations $\mathbb{Q}$-linéaires entre les VZM, on indique comment les calculer numériquement, la série définitrice (1) convergeant beaucoup trop lentement pour être utilisable à ce but. Pour $M \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ on définit $\zeta_M(\mathbf{k})$ par la même série (1) mais avec la sommation sur $M < m_1 < \cdots < m_s$, de façon qu'on a $\zeta_0(\mathbf{k}) = \zeta(\mathbf{k})$. La formule recursive évidente

$$\zeta_{M-1}(k_1,\ldots,k_s) - \zeta_M(k_1,\ldots,k_s) = M^{-k_1}\zeta_M(k_2,\ldots,k_s)$$

(où $\zeta_M(\emptyset) := 1$) permet de calculer la valeur du vecteur

$$\vec{\zeta}_M(\mathbf{k}) = (\zeta_M(\emptyset),\ \zeta_M(k_s),\ \zeta_M(k_{s-1},k_s),\ldots,\zeta_M(k_2,\ldots,k_s),\ \zeta_M(\mathbf{k}))$$

pour un M donné en O(s) opérations à partir de sa valeur pour $M+1$. Il suffit donc de pouvoir calculer $\zeta_M(\mathbf{k})$ à haute précision pour M grand (disons, $M = 10^4$), ce qui se fait aisément à l'aide de la formule asymptotique

$$\zeta_M(\mathbf{k}) \sim A_{\mathbf{k}}(1/M) \qquad (M \to \infty)\ ,$$

où $A_{\mathbf{k}}(x) \in \mathbb{Q}[[x]]$ est la série formelle définie inductivement par

$$A_{\emptyset}(x) = 1 \quad , \qquad A_{\mathbf{k}}(x/(1-x)) - A_{\mathbf{k}}(x) = x^{k_1} A_{k_2,\ldots,k_s}(x) \quad .$$

(Par exemple, dans le cas $s = 1$, $\mathbf{k} = (k)$ avec $k \geq 2$, on a la formule explicite

$$A_k(x) \;=\; \frac{1}{k-1} \sum_{r=0}^{\infty} \binom{k+r-2}{r} B_r \, x^{r+k-1} \quad ,$$

où B_r est le r-ième nombre de Bernoulli.) Ceci permet de calculer les nombres $\zeta(\mathbf{k})$ très vite avec une précision de plusieurs centaines de chiffres et donc de pouvoir chercher de façon numérique les relations entre eux par un algorithme standard (algorithme LLL). Mais la méthode est purement numérique et quand on dit, par exemple, que les calculs donnent la valeur $d_{12} = 12$, on ne sait ni que les $2^{10} - 12 = 1012$ relations qu'on a trouvées à haute précision resteraient vraies si on calculait plus de chiffres, ni qu'il n'existe pas d'autres relations $\mathbb{Q}$-linéaires entre les 2^{10} VZM de poids 12 ayant des coefficients trop compliqués pour être détectés par les calculs.

Parmi les relations qu'on trouve entre les VZM, il y en a des systématiques et des sporadiques. Nous en donnons ici plusieurs exemples, en omettant les démonstrations, qui ont été données dans le cours.

Valeurs zêta doubles. Euler, qui a déjà introduit les VZM dans le cas $s = 2$ en 1776, a démontré (du moins pour $k \leq 13$, mais sa méthode est générale) que dans le cas de k impair ces valeurs s'écrivaient toujours comme des combinaisons $\mathbb{Q}$-linéaires de $\zeta(k)$ et des produits $\zeta(a)\zeta(k-a)$ des valeurs de la fonction ζ « de Riemann », par exemple

$$\big(\zeta(1,4),\, \zeta(2)\zeta(3),\, \zeta(3,2)\big) = \big(\zeta(5),\, \zeta(2)\zeta(3)\big) \begin{pmatrix} 2 & -11/2 & 9/2 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

dans le cas $k = 5$ (ou bien sûr équation (2) dans le cas $k = 3$).

Dualité de Hoffman. Il a été conjecturé par Hoffman qu'on a toujours $\zeta(\mathbf{k}^*) = \zeta(\mathbf{k})$, où $\mathbf{k} \mapsto \mathbf{k}^*$ est l'involution sur l'ensemble des indices admissibles de poids donné qui envoit

$$\mathbf{k} = (\underbrace{1,\ldots,1}_{a_1-1},\; b_1+1,\; \underbrace{1,\ldots,1}_{a_2-1}, b_2+1, \ldots, \underbrace{1,\ldots,1}_{a_r-1}, b_r+1)$$

(où $r \geq 1$ et $a_1, b_1, \ldots, a_r, b_r \geq 1$) à

$$\mathbf{k}^* = (\underbrace{1,\ldots,1}_{b_r-1}, a_r+1, \underbrace{1,\ldots,1}_{b_{r-1}-1}, a_{r-1}+1, \ldots, \underbrace{1,\ldots,1}_{b_1-1}, a_1+1) \quad .$$

Cet énoncé est une conséquence immédiate de la relation entre les VZM et les intégrales de Drinfel'd décrite ci-dessous.

Relation de somme. Il a été conjecturé par Hoffman, et démontré (indépendamment) par Granville et l'auteur, que la somme de toutes les valeurs zêta multiples de longueur s et poids k donnés ($0 < s < k$) vaut toujours $\zeta(k)$, indépendamment de la valeur de s, ce qu'on peut vérifier dans les cas $k = 3$ et $k = 4$ à l'aide des équations (2) et (3). Une généralisation de ce théorème due à Ohno et l'auteur dit que la somme des VZM avec k, s, et $h := \#\{i \mid k_i = 1\}$ fixés s'exprime toujours comme un polynôme à coefficients rationnels dans les valeurs aux arguments entiers de la fonction ζ de Riemann.

VZM aux arguments répétés. Il n'est pas difficile de montrer que les nombres $\zeta(\mathbf{k})$ dans le cas spécial où tous les k_i ont la même valeur $k_1 = \cdots = k_s = p$ est un polynôme à coefficients rationnels en $\zeta(p)$, $\zeta(2p)$, ... , un cas typique étant

$$\zeta(p,p,p) = \frac{1}{6}\zeta(p)^3 - \frac{1}{2}\zeta(p)\zeta(2p) + \frac{1}{3}\zeta(3p) \ .$$

Dans le cas où p est pair, le théorème d'Euler exprimant $\zeta(2n)$ comme multiple rationnel de π^{2n} implique que $\zeta(k)$ sera un multiple rationnel de π^k, où $k = sp$ est le poids de $\mathbf{k}$, et dans ce cas spécial on peut donner des formules explicites assez amusantes comme

$$\zeta\underbrace{(8,\ldots,8)}_{s} = 2^{6p+2}\frac{(\sqrt{2}+1)^{4p+2}+(\sqrt{2}-1)^{4p+2}}{(8p+4)!}\pi^{8p} \ .$$

Une relation bien plus difficile est l'identité

$$\zeta\underbrace{(1,3,1,3,\ldots,1,3)}_{n\text{ fois}} = \frac{2\pi^{4n}}{(4n+2)!}$$

conjecturée par l'auteur et démontrée quelques années plus tard par Broadhurst à l'aide d'un calcul surprenant qui utilise les fonctions hypergéométriques.

Identité de Brown-Zagier. Enfin, il y a une formule explicite pour les VZM avec $\mathbf{k}$ de la forme $(2,\ldots,2,3,2,\ldots,2)$ qui joue un rôle central dans les résultats de Brown mentionnés ci-dessus et qui sera discutée plus tard.

Intégrale de Drinfel'd et relations de mélange

Comme on l'a déjà mentionné, le produit de deux VZM est une combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{Z}$ d'autres VZM (dont le poids est toujours la somme des poids des deux valeurs de départ), de façon que le $\mathbb{Z}$-module engendré par toutes les VZM est un anneau et l'espace vectoriel $\mathfrak{Z} \subset \mathbb{R}$ une $\mathbb{Q}$-algèbre, conjecturalement graduée par le poids. Ceci se voit par un calcul direct, un exemple typique étant

$$\begin{aligned}\zeta(3)\ \zeta(2,1,5) = \zeta(3,2,1,5) + \zeta(2,3,1,5) + \zeta(2,1,3,5) + \zeta(2,1,5,3) \\ + \zeta(5,1,5) + \zeta(2,4,5) + \zeta(2,1,8)\,,\end{aligned}$$

ce qui se vérifie en écrivant $\zeta(3)=\sum\limits_{0<m}\dfrac{1}{m^3}$ et $\zeta(2,1,5)=\sum\limits_{0<a<b<c}\dfrac{1}{a^2bc^5}$ et en distinguant les quadruples (m,a,b,c) dans le produit de ces deux sommes d'après qu'on a $m<a$, $a<m<b$, $b<m<c$, $c<m$, $m=a$, $m=b$, ou $m=c$. Plus généralement, le produit $\zeta(\mathbf{k}')\,\zeta(\mathbf{k}'')$ de deux VZM s'exprime comme la somme de toutes les VZM $\zeta(\mathbf{k})$ de longueur $s=s'+s''$ obtenues en *mélangeant* $\mathbf{k}'$ et $\mathbf{k}''$ (c'est-à-dire en prenant l'union des éléments de $\mathbf{k}'$ et $\mathbf{k}''$ dans tous les ordres possibles qui respectent l'ordre des k_i' et des k_j'', comme on mélange les deux moitiés d'un jeu de cartes), plus la somme des valeurs $\zeta(\mathbf{k})$ de longueur $s<s'+s''$ obtenues en permettant l'addition de certaines des indices k_i' et k_j''.

La richesse de la théorie provient du fait qu'il y a une deuxième façon d'exprimer le produit de deux VZM comme une combinaison d'autres VZM. C'est une conséqence de l'observation (faite pour la première fois, à ma connaissance, par Maxim Kontsevich dans une conversation en 1991) que chaque VZM est égale à une *intégrale de Drinfel'd*. Ces intégrales sont données par

$$I(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k)=\int\cdots\int_{0\le t_1\le\cdots\le t_k\le 1}\frac{dt_1}{A_{\varepsilon_1}(t_1)}\cdots\frac{dt_k}{A_{\varepsilon_k}(t_k)}\ ,$$

où $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k\in\{0,1\}$ avec $\varepsilon_1=1$, $\varepsilon_k=0$, et un calcul facile donne l'identité

$$\zeta(k)=I(1,\underbrace{0,\ldots,0}_{k_1-1},1,\underbrace{0,\ldots,0}_{k_2-1},\ldots,1,\underbrace{0,\ldots,0}_{k_s-1}) \tag{6}$$

pour tout indice $\mathbf{k}=(k_1,\ldots,k_s)$ admissible. Le produit $I(\varepsilon')\,I(\varepsilon'')$ de deux intégrales de Drinfel'd est une combinaison $\mathbb{Z}$-linéaire d'autres intégrales du même type (et de dimension $k'+k''$) par un calcul tout à fait analogue à celui qu'on a fait pour les sommes, à la différence près que cette fois on n'a que les mélanges purs, les produits de dimension inférieures provenant des cas où l'une des variables t_i' coïncide avec une des variables t_j'' donnant une contribution nulle parce qu'ils correspondent à des intégrations sur des sous-variétés de mesure nulle. Une conséquence immédiate de l'égalité (6) est la dualité de Hoffman, puisque la substitution $t_i\mapsto 1-t_{k+1-i}$ donne immédiatement la relation de symétrie $I\,(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k)=I\,(1-\varepsilon_k,\ldots,1-\varepsilon_1)$ pour les intégrales de Drinfel'd.

Les deux méthodes pour calculer $\zeta(\mathbf{k}')\,\zeta(\mathbf{k}'')$ donnent en général des formules différentes dont l'égalité représente une identité $\mathbb{Z}$-linéaire entre des VZM du même poids. Ce sont les *relations de double mélange*. On peut déduire d'autres relations en étendant les définitions des VZM et des intégrales de Drinfel'd au cas divergent où $k_s=1$ ou, ce qui revient à la même chose, où $\varepsilon_k=1$; cette extension, qui n'est pas tout à fait évidente, a été expliquée en détail dans le cours. La conjecture centrale de la théorie dit que ces relations de double mélange étendues suffisent pour donner toutes les relations sur $\mathbb{Q}$ des VZM (et donc conjecturalement de réduire la dimension de $\mathfrak{Z}_k$ de 2^{k-2} à la valeur donnée par (5)). Elle est très loin d'être démontrée ; même pour la plupart des relations explicites données dans le paragraphe précédent on ne sait pas comment les obtenir à partir des relations de mélange.

Une partie du cours concernait l'étude de ces relations de double mélange à l'aide d'une certaine algébre de polynômes à deux variables non-commutatives introduite par Hoffman et des dérivations de cette algèbre. On en omet la description ici, renvoyant pour cela à l'article « Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values » de K. Ihara, M. Kaneko et l'auteur (Compositio Math. **142**, 2006, 307-338) et aux références données dans cet article.

Les résultats de Francis Brown et les nombres $\zeta(2,\ldots,2,3,2,\ldots,2)$

Les deux résultats récents de Brown mentionnés dans l'introduction étaient :

i) la démonstration de la conjecture que les périodes des « motifs de Tate mixtes » s'expriment tous comme des polynômes dans les VZM à coefficients dans $\mathbb{Q}[1/2i\pi]$. (Le fait que les VZM elles-mêmes sont de telles périodes était déjà connu et joue un rôle central dans la théorie) ;

ii) la démonstration d'une conjecture due à Hoffman que l'espace $\mathfrak{Z}$ est engendré par les VZM spéciales dans lesquelles chaque k_i dans (1) a la valeur 2 ou 3 (et donc que ces valeurs spéciales forment une base de $\mathfrak{Z}$ si la conjecture (4) est vraie).

Pour un exposé détaillé de ces résultats on renvoie à la conférence donnée cette année par Pierre Deligne au Séminaire Bourbaki. L'argument donné par Brown s'appuyait sur une induction ingénieuse qui avait comme point de départ un certain énoncé sur les éléments spéciaux

$$H(a,b) := \zeta(\underbrace{2,\ldots,2}_{a},3,\underbrace{2,\ldots,2}_{b}) \qquad (a,\, b \geq 0)$$

de la base conjecturale de Hoffman. Sa démonstration montrait que ces nombres sont toujours des combinaisons linéaires à coefficients rationnels des produits $\pi^{2m}\zeta(2n+1)$ avec $2m+2n+1=2a+2b+3$, mais pour faire fonctionner l'induction il était nécessaire d'avoir une formule précise et de pouvoir vérifier certaines conditions 2-adiques sur les coefficients. Dans le cours on a décrit comment une telle formule a été trouvée et démontrée. Cette démonstration est assez subtile : on montre l'égalité entre les fonctions génératrices des nombres $H(a,\,b)$ et des nombres donnés par la formule cherchée par une voie très indirecte, en vérifiant que les deux sont des fonctions analytiques à deux variables ayant beaucoup de valeurs en commun et une croissance suffisamment lente pour que ces coïncidences de valeurs impliquent leur égalité. Encore une fois on omet les détails ici, renvoyant pour cela à la publication citée à la fin de ce résumé.

Les valeurs zêta multiples modulo p

La dernière partie du cours portait sur les VZM (mod p), p étant un nombre premier. Ces nombres sont définis par

$$\zeta^{(p)}(k_1,\ldots,k_s) = \sum_{0<m_1<\cdots<m_s<p} \frac{1}{m_1^{k_1}\cdots m_s^{k_s}} \pmod{p} \quad ,$$

mais l'aspect intéressant n'est pas l'étude de leurs valeurs individuelles, mais plutôt de l'*ensemble* des valeurs $\zeta^R(\mathbf{k}) = \{\zeta^{(p)}(\mathbf{k})\}_p$ comme élément de l'anneau

$$R = \Big(\prod_{p \text{ premier}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\Big)\Big/\Big(\bigoplus_{p \text{ premier}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\Big) .$$

Par exemple, si on note par $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ le n-ième « nombre harmonique », alors on a pour tout nombre premier p suffisamment grand la congruence

$$V_{5,4}^{(p)} := \sum_{n=1}^{p-1} n^5 \, H_n^4 \equiv \frac{59}{2250} (\mathrm{mod}\, p) \ ,$$

et cette congruence dit que le nombre $V_{5,4}^{R} := \{V_{5,4}^{(p)}\}_p \in R$ (qui peut s'exprimer comme une combinaison linéaires des valeurs $\zeta^R(\mathbf{k})$) appartient au sous-anneau $\mathbb{Q}$ de R. On a discuté de nombreux autres exemples de relations entre les nombres $\zeta^R(\mathbf{k})$ et des conjectures sur la structure du sous-anneau de R qu'ils engendrent (notamment, qu'il est isomorphe au quotient de l'anneau $\mathfrak{Z}$ par l'idéal engendré par π^2).

Cours : Mock Modular Forms and Mock Jacobi Forms [Pohan, Corée, avril 2012]

Ce cours de 10 heures avait comme but de donner un exposé de la théorie relativement nouvelle des « fausses formes modulaires » (mock modular forms) et de leurs applications en mathématiques et physique. Cette classe de fonctions a été introduite par Zwegers en 2002 pour expliquer les propriétés des « fausses séries thêta » (mock theta functions) qui avaient été découvertes par Ramanujan en 1920 mais dont on n'avait jamais pu trouver une définition mathématique rigoureuse. Elle a déjà été traitée plus brièvement dans les cours de 2004-2005 et 2005-2006, mais la théorie a beaucoup avancé depuis cette date et a trouvé de nombreuses applications, la plus sensationnelle étant la découverte par Eguchi, Ooguri et Tachikawa en 2010 que les coefficients de certaines fausses formes modulaires sont des dimensions de représentations du groupe fini sporadique de Mathieu M_{24}, exactement analogue à la célèbre théorie « moonshine » qui a relié les coefficients de certaines formes modulaires classiques aux représentations du groupe fini « monstre ». Le thème central du cours en Corée était le lien entre les fausses formes modulaires et les formes de Jacobi, le résultat clé (basé sur des résultats antérieurs de Zwegers, mais beaucoup plus précis) étant une décomposition canonique de certaines formes de Jacobi méromorphes en deux parties, dont l'une est complètement déterminée par les pôles et l'autre est une combinaison de séries thêta et de fausses formes modulaires. Ce résultat s'applique en particulier aux coefficients de la fonction de partition pour les états $\frac{1}{4}$-BPS dyoniques dans la théorie des cordes pour les trous noirs (pour la compactification de type II sur le produit d'une surface $K3$ et d'une courbe elliptique). L'étude approfondie de ces coefficients a mené à l'introduction de deux familles de fausses formes modulaires ayant des propriétés mathématiques particulièrement belles et contenant la plupart des exemples spéciaux étudiés auparavant. On n'en donne pas une description détaillée ici, renvoyant pour cela au long article de A. Dabholkar, S. Murthy et l'auteur paru cette année et cité dans la bibliographie ci-dessous, puisque une continuation de ces même thèmes, qui ira bien plus loin du côté théorique, fera l'objet de l'enseignement de l'année prochaine et sera présentée dans le résumé de ce cours-là.

Conférences invitées

Moscou, Russie, octobre 2011 : *From number theory to black holes*, Musée polytechnique, Conférence publique dans le cadre de l'Université Ouverte de Skolkovo.

Moscou, Russie, octobre 2011 : *Arithmetic properties of quantum invariants of manifolds*, Institut de Mathématiques de l'Académie des Sciences Russe, A.N. Tyurin Annual Memorial Conference.

Moscou, Russie, octobre 2011 : *The arithmetic of multiple zeta values*, École Supérieure d'Économie, séminaire « Homological and homotopical methods in geometry ».

Moscou, Russie, octobre 2011 : *Teichmüller curves on Hilbert modular surfaces*, Université Indépendante de Moscou, Conference on Global Fields.

Moscou, Russie, octobre 2011 : *Integrality, Modularity, and Differential Equations*, Université Indépendante de Moscou, Globus seminar.

Munich, Allemagne, novembre 2011 : *The arithmetic of Euler sums*, Universität München, Number Theory Symposium.

Lille, décembre 2011 : *Autour du groupe de Bloch*, Colloque, Université de Lille 1.

Bonn, Allemagne, janvier 2012 : *The Eichler-Selberg trace formula* (2 conférences). Cours pour les étudiants de l'école doctorale IMPRS, Max-Planck-Institut für Mathematik.

Genève, Suisse, janvier 2012 : *Higher spherical polynomials*, Séminaire sur les systèmes intégrables, Université de Genève.

Genève, Suisse, janvier 2012 : *Arithmetic aspects of quantum invariants*, Séminaire de Théorie des Noeuds, Université de Genève.

Paris, janvier 2012 : *Hyperbolique*, Fondation Cartier, conférence publique dans le cadre des « Nuits de l'Incertitude » (avec E. Ghys).

Utrecht, Pays-Bas, février 2012 : *Multiple zeta numbers*, Monna Lecture (Conférence annuelle), Universiteit Utrecht.

Cologne, Allemagne, février 2012 : *Special mock modular forms*, Symposium « Modular Forms, Mock Theta Functions, and Applications », Universität Köln.

Lausanne, Suisse, mars 2012 : *Les valeurs zêta multiples et leurs applications*, Colloque de Mathématiques, École Polytechnique Fédérale de Lausanne.

Lausanne, Suisse, mars 2012 : *Teichmüller curves and theta series*, Séminaire, École Polytechnique Fédérale de Lausanne.

Pohan, Corée, avril 2012 : *Diophantine equations: ancient questions and modern answers*, Awon Lecture (conférence annuelle pour étudiants en mathématiques), Pohan University of Science and Technology.

Pohan, Corée, avril 2012 : *Euler's multiple zeta sums: from number theory to Feynman diagrams*, POSTECH and IES/Physics Joint Colloquium, Pohan University of Science and Technology.

Séoul, Corée, avril 2012 : *Teichmüller curves on Hilbert modular surfaces*, Colloque, Seoul National University.

Séoul, Corée, avril 2012 : *The dilogarithm in number theory and geometry*, Symposium on Geometry and Topology, Institute for Basic Science.

Séoul, Corée, avril 2012 : *Quantum invariants of knots and number theory,* Conférence plénière, Spring meeting of the Korean Mathematical Society.

Fukuoka, Japon, mai 2012 : *Modular properties of quantum invariants*, Workshop on Automorphic Forms, Université de Kyushu.

Fukuoka, Japon, mai 2012 : *Multiple zeta values, Feynman diagrams, mixed Tate motives, and mod p multiple zeta values*, Algebra Seminar, Université de Kyushu.

Bures-sur-Yvette, juin 2012 : *Topologie quantique : entre les formes modulaires et la K-théorie algébrique*, Dialogues autour de l'algèbre, la géométrie et les fonctions multizêtas (Colloque à l'occasion des 80 ans de Pierre Cartier), IHES.

Trieste, Italie, juin 2012 : *Modular forms, the Bloch group, and Nahm's conjecture* Colloque, International Center for Theoretical Physics.

Münster, Allemagne, juillet 2012 : *Between number theory, topology, and quantum field theory*, von Neumann Lecture, Université de Münster.

Bonn, Allemagne, juillet 2012 : *Mock Modularity and Applications*, String-Math, Universität Bonn.

Düsseldorf, Allemagne, juillet 2012 : *Nachruf Friedrich Hirzebruch* Nordrhein-Westfälische Akademie der Wissenschaften und der Künste.

Aix-la-Chapelle, Allemagne, août 2012 : *Theta Blocks* (3 conférences), Building Bridges: First EU-US conference on Automorphic Forms and related topics, Universität Aachen.

Lyon, août 2012 : *The magic of generating functions* (2 conférences), International Summer School of Mathematics for Young Students, ENS Lyon.

Bad Honnef, Allemagne, août 2012 : *Mock modular forms and black holes* (2 conférences), Conference on Algebraic-Geometric Methods in Fundamental Physics, Physikzentrum Bad Honnef.

Potsdam, Allemagne, septembre 2012 : *The mathematics of mock modular forms*, Workshop on Black Holes in Supergravity and M/Superstring Theory, MPI für Gravitationsphysik (Einstein-Institut).

Potsdam, Allemagne, septembre 2012 : *Arithmetical properties of quantum invariants of 3-manifolds*, Colloque, MPI für Gravitationsphysik (Einstein-Institut).

Saarbrücken, Allemagne, septembre 2012 : *Zu Person und Werk von Friedrich Hirzebruch*, Jahrestagung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.

Autres missions et activités

Bonn, Allemagne, octobre 2011 : Membre du jury, soutenance de thèse de mon élève doctoral Khosro Monsef Shokri (« The Zinger deformation of differential equations with maximal unipotent monodromy »), Université de Bonn.

Trento, Italie, octobre 2011 : Comitato Direttivo, Centro Internazionale per la Ricerca Matematica.

Oberwolfach, Allemagne, octobre 2011 : Wissenschaftsrat (Comité scientifique) du Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach.

Paris, octobre 2011-mars 2012 : Participation dans l'exhibition « Mathématiques : un dépaysement soudain » de la Fondation Cartier pour l'art contemporain.

Moscou, octobre 2011 : Président, Comité de consultation de l'Université Ouverte et la Fondation Skolkovo.

Paris, janvier 2012 : Participation à la table ronde du colloque à l'UNESCO « Mathématiques pour tous ? ».

Seoul, Corée, avril 2012 : Membre, Comité de Sélection pour le directeur d'un institut IBS en mathématiques.

Bonn, Allemagne, juin 2012 : Membre du jury, soutenance de thèse de mon élève doctoral Martin Raum (« Dual Weights in the Theory of Harmonic Siegel Modular Forms »), Université de Bonn.

Dublin, Irlande, juin 2012 : Advisory Board, Dublin Institute of Advanced Science.

Trieste, Italie, juin 2012 : Membre, Workshop on Hypergeometric Motives, American Institute of Mathematics and International Center for Theoretical Physics.

Bonn, Allemagne, juillet 2012 : Co-organisateur de la conférence internationale String-Math 2012.

Oberwolfach, Allemagne, juillet 2012 : Co-organisateur (avec P. Gunnells, W. Neumann, et A. Sikora) du Workshop « Low-Dimensional Topology and Number Theory », Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach.

Publications et prépublications

Evaluation of the multiple zeta values $\zeta(2,\ldots,2,\,3,2,\ldots,2)$, *Annals of Math.*, **175** (2012), p. 977-1000.

(avec A. Dabholkar et S. Murthy) Quantum Black Holes, Wall Crossing, and Mock Modular Forms, Prépublication, 150 pages. arXiv:1208.4074.

(avec A. Malter et D. Schleicher) New Looks at Old Number Theory, *Amer. Math. Monthly*, **120** (2013), 243-264.

(avec L. Weng) Higher rank zeta functions and Riemann hypothesis for elliptic curves, Prépublication, 18 pages.