

Théorie des nombres

M. Don ZAGIER, professeur

COURS : TOPOLOGIE, COMBINATOIRE ET FORMES MODULAIRES (SUITE)

Le cours de cette année était la continuation du précédent dans lequel on avait surtout traité des liens entre les formes modulaires et la géométrie algébrique provenant de la théorie des équations différentielles de type Picard-Fuchs, mais où on avait abordé également la discussion des liens entre l'arithmétique et la topologie qui se manifestent au travers des invariants quantiques des variétés hyperboliques en dimension 3 et des nœuds. Ce deuxième thème a été l'un des deux sujets traités cette année. L'autre, qui lui est étroitement lié dans son idée de base, mais très différent au niveau des objets étudiés et des méthodes employées, était la relation entre les formes modulaires, les fonctions q -hypergéométriques, et la K -théorie algébrique. La découverte de cette relation, très surprenante, est due au physicien Werner Nahm, qui a formulé dans un contexte très particulier une conjecture précise. Les deux sujets sont liés par la présence dans les deux cas du groupe de Bloch de $\overline{\mathbb{Q}}$ (isomorphe au groupe $K_3(\overline{\mathbb{Q}})$) et de la fonction dilogarithme, que nous rappelons d'abord.

Dilogarithmes, groupe de Bloch, et variétés hyperboliques

On sait d'après A. Borel que les valeurs $\zeta_F(m)$ de la fonction zêta de Dedekind d'un corps de nombres F en $s = m \in \mathbb{Z}_{>1}$ sont liées à la K -théorie algébrique (plus précisément, au groupe $K_{2m-1}(F)$), et des conjectures que j'ai énoncées il y a quelques années expriment cette relation de façon plus précise en termes des valeurs d'une version convenablement modifiée $D_m(z)$ de la fonction polylogarithme

classique $\text{Li}_m(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^m}$ (voir le résumé de cours de l'année 2007-2008). Dans

le cas $m = 2$ la fonction $D_2(z)$ est le *dilogarithme de Bloch-Wigner*

$$D(z) := \Im[\text{Li}_2(z) + \log|z| \log(1-z)] \quad (z \in \mathbb{C})$$

et il y a un lien avec la géométrie hyperbolique en dimension 3 : la fonction $D(z)$ donne le volume hyperbolique $\text{Vol}(\Delta)$ d'un tétraèdre idéal $\Delta \subset \mathbb{H}^3$ (= espace hyperbolique de Lobachevsky en dimension 3) dont le birapport des sommets $P_1, \dots, P_4 \in \partial(\mathbb{H}^3) = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est égal à z . D'autre part, on sait d'après Thurston que la classe de variétés essentielle pour comprendre la topologie en dimension 3 est celle des variétés hyperboliques, et qu'une telle variété M possède toujours une triangulation $M = \Delta_1 \cup \dots \cup \Delta_N$ en tétraèdres idéaux. Le volume de M est alors donné par $\text{Vol}(M) = \sum_i D(z_i)$, où z_i ($i = 1, \dots, N$) est le birapport des sommets de Δ_i , mais on a aussi un élément

$$\xi_M = [z_1] + \dots + [z_N]$$

qui appartient au *groupe de Bloch* $B(\overline{\mathbb{Q}})$ et qui est indépendant de la triangulation choisie. Ce groupe de Bloch, dont on sait d'après les travaux de Suslin *et al.* qu'il est isomorphe à $K_3(\overline{\mathbb{Q}})$, est défini comme un sous-quotient du groupe abélien libre $\mathbb{Z}[\overline{\mathbb{Q}}]$, à savoir, le quotient du groupe

$$\{[x_1] + \dots + [x_r] \in \mathbb{Z}[\overline{\mathbb{Q}}] \mid (x_1) \wedge (1-x_1) + \dots + (x_r) \wedge (1-x_r) = 0\}$$

(avec $(x_i) \wedge (1-x_i) \in \Lambda^2(\overline{\mathbb{Q}}^\times)$) par le sous-groupe engendré par la *relation à 5 termes*

$$[x] + [y] + \left[\frac{1-xy}{1-x} \right] + [1-xy] + \left[\frac{1-xy}{1-y} \right] \quad (x, y \in \overline{\mathbb{Q}}) ,$$

définition motivée par l'équation fonctionnelle

$$D(x) + D(y) + D\left(\frac{1-xy}{1-x}\right) + D(1-xy) + D\left(\frac{1-xy}{1-y}\right) = 0$$

bien connue de la fonction $D(z)$.

Il s'avère que cette notion est la clef pour comprendre beaucoup des aspects de la relation entre la topologie en dimension 3 et la théorie des nombres, notamment les questions concernant les invariants quantiques et la modularité (voir ci-dessous). On l'a donc discutée en détail dans le cours, ainsi que d'autres notions qui sont définies à partir des triangulations des variétés en dimension 3 telles que les coordonnées de Neumann-Zagier, le « A -polynôme » d'un nœud, et l'invariant de Hikami.

Modularité et conjecture de Nahm

On rappelle qu'une fonction q -hypergéométrique est une fonction donnée par une série de la forme $F(q) = \sum A_n(q)$ avec $A_0(q) = 1$ et $A_n(q) = R(q, q^n)A_{n-1}(q)$ pour une fonction rationnelle $R(q, y)$ fixée. Ces fonctions, qui ont été beaucoup étudiées, ont quelquefois, mais très rarement, des propriétés modulaires. Un exemple est donné par les deux *identités de Rogers-Ramanujan*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)} = \prod_{n \equiv \pm 1 \pmod{5}} \frac{1}{1-q^n} ,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2+n}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)} = \prod_{n \equiv \pm 2 \pmod{5}} \frac{1}{1-q^n} ,$$

qui comptent parmi les formules les plus belles et les plus connues en mathématique : ici, les membres de gauche sont des fonctions q -hypergéométriques et les expressions à droite, multipliées respectivement par $q^{-1/60}$ et $q^{11/60}$, s'expriment comme des quotients de séries thêta de Jacobi par la fonction êta de Dedekind et sont donc des fonctions modulaires. On peut poser la question de prédire quand ce phénomène a lieu, c'est-à-dire, quand une fonction q -hypergéométrique est une forme (ou une fonction) modulaire.

La réponse, même conjecturale, n'est pas connue et sera certainement très difficile, mais le physicien Werner Nahm a proposé une réponse partielle qui fait intervenir de façon totalement inattendue le groupe de Bloch et donc la K -théorie algébrique. Il donne une conjecture précise pour une famille d'exemples particuliers qui généralise les deux exemples de Rogers et Ramanujan. Pour des nombres rationnels A, B, C donnés ($A > 0$) on regarde la série

$$f_{A,B,C}(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{\frac{1}{2}An^2+Bn+C}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)} ,$$

où $q = e^{2i\pi\tau}$ comme d'habitude, et on demande quand elle définit une fonction modulaire de τ . (Les exemples de Rogers-Ramanujan correspondent donc aux cas $(A,B,C) = (2,0, -\frac{1}{60})$ et $(2,1, \frac{11}{60})$.) Plus généralement, on prend $A = (a_{ij}) \in M_r(\mathbb{Q})$ une matrice symétrique définie positive, $B \in \mathbb{Q}^r$ un vecteur de la même taille et $C \in \mathbb{Q}$ et on définit $f_{A,B,C}(\tau)$ en remplaçant dans l'expression ci-dessus l'exposant $\frac{1}{2}An^2 + Bn + C$ par $\frac{1}{2}nAn^t + Bn^t + C$ et le dénominateur $(1-q)\cdots(1-q^n)$ par $\prod_{i=1}^r (1-q)\cdots(1-q^{n_i})$, où $n = (n_1, \dots, n_r)$ parcourt les r -tuples d'entiers positifs. Alors Nahm conjecture que, pour une matrice A donnée, il existera des choix de B et C tels que la fonction $f_{A,B,C}$ soit modulaire si et seulement si les éléments

$$\xi = [x_1] + \cdots + [x_r] \in \mathbb{Z}[\overline{\mathbb{Q}}] ,$$

où $(x_1, \dots, x_r) \in \overline{\mathbb{Q}}^r$ sont les solutions du système d'équations algébriques

$$1-x_i = \prod_{j=1}^r x_j^{a_{ij}} \quad (i = 1, \dots, r) ,$$

s'annulent dans le groupe de Bloch de $\overline{\mathbb{Q}}$.

Dans le cours, on a discuté en détail cette conjecture, les idées qui la motivent, et les résultats connus. Dans le cas $r = 1$ il y a une réponse complète, due à M. Terhoeven (dans le cas $B = 0$) et moi-même (dans le cas général) : les seuls

triples (A, B, C) pour lesquels $f_{A, B, C}$ est modulaire sont $(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{40})$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{40})$, $(1, 0, -\frac{1}{48})$, $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{24})$, $(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{24})$, $(2, 0, -\frac{1}{60})$ et $(2, 1, \frac{11}{60})$ (les 7 identités q -hypergéométriques-modulaires étant classiques), et les seules valeurs de $A \in \mathbb{Q}_{>0}$ pour laquelle l'équation de Nahm $1 - x = x^A$ donne un élément $\xi = [x]$ nul dans le groupe de Bloch sont $\frac{1}{2}$, 1 et 2. La conjecture de Nahm est donc vraie dans ce cas. Pour $r > 1$ la conjecture n'est pas résolue mais il y a de nombreux exemples qui la soutiennent. Par exemple, pour $r = 3$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

satisfait à la condition de Nahm et on trouve 6 valeurs

$$B = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

pour le vecteur B (et 6 valeurs correspondantes $C = \frac{1}{12}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{24}, 0, \frac{1}{3}, \frac{11}{24}$ pour le scalaire C) pour lesquelles la q -série $f_{A, B, C}$ définit une forme modulaire. On a également expliqué les méthodes asymptotiques qui permettent d'étudier le comportement analytique de $f_{A, B, C}(\tau)$ pour $\tau \rightarrow 0$ et donc de classifier les solutions modulaires dans le cas $r = 1$ et de les décrire au moins partiellement dans le cas général.

L'invariant de Kashaev et ses propriétés de modularité

Ces notions ont été discutées en détail dans le résumé du cours de 2008-2009 et on sera très bref ici. On associe à un nœud une suite de polynômes de Laurent $J_N(q)$ ($N = 1, 2, \dots$) appelés les « polynômes de Jones colorés » et à partir de ces polynômes un invariant J_0 qui associe à une racine d'unité q la valeur de $J_N(q)$ pour un entier N tel que $q^N = 1$. Cet invariant, qui coïncide avec un invariant défini antérieurement par Kashaev, a conjecturalement des propriétés modulaires d'un type nouveau (« forme modulaire quantique ») qu'on peut résumer en disant que la différence des valeurs de la fonction

$$f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(x) := \log J_0(e^{2i\pi x})$$

en x et $\gamma(x) = (ax + b)/(cx + d)$ pour une matrice $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ est une fonction continue, ou du moins « beaucoup plus continue que la fonction f elle-même » de la variable $x \in \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Dans le résumé du cours de l'année précédente, cette notion a été élucidée de façon graphique. Pour une analyse plus fine, telle qu'on l'a donnée cette année-ci, ceci ne suffit pas et on doit décrire la presque-modularité de la fonction $f(x)$ en termes des propriétés arithmétiques des coefficients de certains développements asymptotiques. L'énoncé-clé est la conjecture suivante :

Conjecture. Soit $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{C}$ l'invariant de Kashaev d'un nœud. Alors pour chaque nombre rationnel α le comportement asymptotique de $f(x)$ quand x tend vers α est donné par

$$f(\gamma(X)) - f(X) \sim \frac{C}{\varepsilon} + \frac{\delta}{2} \log \frac{1}{\varepsilon} + s_0(\alpha) + s_1(\alpha)\varepsilon + \dots \quad \left(\varepsilon = \frac{2i\pi}{X - \gamma^{-1}(\infty)} \right)$$

avec des coefficients $C \in \mathbb{C}$ et $\delta \in \mathbb{Z}$ indépendants de α et $s_n(\alpha) \in \mathbb{C}$ qui ne dépendent que de α modulo 1, où γ est un élément quelconque de $SL(2, \mathbb{Z})$ avec $\gamma(\infty) = \alpha$ et X tend vers $+\infty$ dans une suite de nombres rationnels à dénominateur borné. Les nombres $\exp(s_0(\alpha))$ et $s_n(\alpha)$ ($n \geq 1$) appartiennent à $\overline{\mathbb{Q}}$.

Le coefficient C dans cette conjecture est le « volume complexifié » du nœud (défini comme i fois le volume de M plus l'invariant de Chern-Simons de M dans le cas où le complément M du nœud en S^3 est une variété hyperbolique, et comme 0 sinon), et le premier terme C/ε de la formule dans la conjecture dans le cas spécial où $\alpha = 0$ et X ne prend que des valeurs entières est la conjecture de volume célèbre de Kashaev-Hikami. Les propriétés arithmétiques des coefficients $s_n(\alpha)$ dans le même cas spécial étaient conjecturées dans un article de l'auteur avec Dimofte, Gukov et Lenells en 2009 ; la nouveauté ici est la façon dont le comportement asymptotique dépend du nombre rationnel α .

Dans le cours, on a donné des tables des valeurs (conjecturales !) des coefficients C , δ et $s_n(\alpha)$ pour les nœuds les plus simples, basées sur des calculs asymptotiques numériques à haute précision. Les valeurs trouvées ont des propriétés arithmétiques subtiles pour lesquelles on n'a pas d'explication. Par exemple, dans le cas du « nœud de huit » tous les premiers coefficients $s_n(\alpha)$ pour $\alpha \in \frac{1}{5}\mathbb{Z}$ sont dans le corps $\mathbb{Q}(\zeta_{15})$ et contiennent dans leurs dénominateurs des puissances d'un nombre premier de norme 29 dans ce corps.

Méthodes asymptotiques

Pour les calculs concernant l'invariant de Kashaev et d'autres invariants quantiques des variétés, il est essentiel de disposer de méthodes d'extrapolation numériques efficaces. Quelques-unes de ces méthodes ont été expliquées dans le cours et illustrées par plusieurs exemples, et pas seulement ceux venant des invariants topologiques. Nous en mentionnons un, plutôt compliqué, ici.

Dans la théorie des « spin networks » on associe à tel « network » (qui consiste en un graphe trivalent Γ avec un ordre cyclique fixé pour les trois arêtes aboutissant à chaque sommet et d'une fonction γ qui associe à chaque arête un entier positif) à l'aide des symboles $3j$ et $6j$ quantiques un certain invariant $\langle \Gamma, \gamma \rangle^P \in \mathbb{Z}$ dont on veut connaître surtout le comportement quand γ est remplacé par $n\gamma$ avec $n \rightarrow \infty$. Dans le cas où Γ est le 1-squelette d'un cube (avec 8 sommets et 12 arêtes) et γ associe à chaque arête le nombre 2, la valeur du nombre $a_n = \langle \Gamma, n\gamma \rangle^P$ a été calculé par S. Garoufalidis et R. van der Veen : elle est donnée par la formule

$$a_n = \sum_{k=0}^{2n} (2k+1) \left(\sum_j (-1)^j \binom{k}{j-3n}^2 \binom{2n-k}{4n-j} \binom{j+1}{2n+k+1} \right)^4.$$

Ces nombres sont d'une croissance extrêmement rapide :

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 6144, \quad \dots, \quad a_5 = 3685480142898164744060928, \quad \dots$$

et il s'agissait d'en trouver la description exacte. Les méthodes expliquées dans le cours ont permis de trouver (de façon expérimentale) :

(i) la récurrence à laquelle satisfont les a_n , et dont l'existence est assurée par la théorie générale, a la forme

$$p_0(n)a_n + \dots + p_4(n)a_{n+4} = 0 \quad \text{pour tout } n \geq 0$$

avec des polynômes p_0, \dots, p_4 de degré 61 à coefficients rationnels compliqués, par exemple,

$$p_0(n) = 3^{48} n^{61} + \dots + \frac{2^{23} \cdot 3^{13} \cdot 5^{10} \cdot 7^7 \cdot 11 \cdot 4348366910153117885287}{23^5 \cdot 47} ;$$

(ii) le comportement asymptotique des a_n est donné par

$$a_n = C_1 \cdot \frac{3^{12n}}{n^4} \left[(\log n + c) \left(1 - \frac{14}{9n} + \frac{419}{324n^2} - \frac{5659}{8748n^3} + \dots \right) \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{2n} - \frac{689}{864n^2} + \frac{4771}{7776n^3} - \dots \right) \right] \\ + \Re \left[C_2 \frac{(1 + \sqrt{-2})^{24n}}{n^{9/2}} \left(1 - \frac{2080 - 43\sqrt{-2}}{1152n} + \frac{1985023 - 114208\sqrt{-2}}{1327104n^2} + \dots \right) \right]$$

avec

$$C_1 = 0,01579745237568 \dots \stackrel{?}{=} \frac{3^5}{2^4 \pi^6} ,$$

$$C_2 = 0,008389085 \dots - 0,002753758 \dots i \stackrel{?}{=} \frac{(1+i)(1+\sqrt{-2})^{12}}{2^{31/4} \pi^{11/2}} ,$$

$$c = 2,88883551954954 \dots \stackrel{?}{=} \gamma + \frac{7}{4} \log 2 + \log 3 .$$

On a présenté aussi quelques exemples (moins compliqués !) provenant d'autres domaines de la topologie ou de la combinatoire.

COURS À L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE : « BOUILLON MATHÉMATIQUE »

Le cours de cette année portait sur la réduction des formes quadratiques binaires, tant définies qu'indéfinies. Ce sujet classique, qui remonte aux *Disquisitiones Arithmeticae* de Gauss, reste central dans la théorie des nombres. Dans le cas des formes définies, la théorie est liée à l'opération du groupe modulaire $SL(2, \mathbb{Z})$ sur le demi-plan de Poincaré et donc aussi à la théorie des formes modulaires. Dans

le cas des formes indéfinies, la théorie est étroitement liée à celle des fractions continues et possède des aspects qui relèvent de la géométrie et de la théorie des systèmes dynamiques.

CONFÉRENCES INVITÉES

Bonn, Allemagne, septembre 2009, journée « Aktionstag », Hausdorff Center for Mathematics : *Diophantische Gleichungen : ein Rätsel seit 2000 Jahren*.

Dublin, Irlande, novembre 2009, conférence « Advances in Theoretical Physics », Institute of Advanced Studies: *Differential equations and modular forms*.

Bruxelles, Belgique, décembre 2009, colloque spécial, Institut des Hautes Études, Université libre de Bruxelles : *Courbes elliptiques : un problème du millenium*.

Oxford, Angleterre, janvier 2010, colloque, Oxford University: *Modular forms, K-theory and knots*.

Cambridge, Angleterre, janvier 2010, colloque spécial, Center for Mathematical Sciences, Cambridge University: *Special values of L-functions – an Ariadne's thread in number theory*.

Amsterdam, Pays-Bas, février 2010, conférence « Stieltjes day », Vrije Universiteit Amsterdam: *q-series, modular forms, and the Bloch group*.

Pasadena, California, États-Unis, mars 2010, « 2010 De Prima Memorial Undergraduate Lecture », California Institute of Technology: *Zeta functions, periods and Diophantine equations*.

Pasadena, California, États-Unis, mars 2010, Physics and Geometry Seminar, California Institute of Technology: *Quantum black holes and mock modular forms*.

Pasadena, California, États-Unis, mars 2010, Number Theory Seminar, California Institute of Technology: *Taylor coefficients of modular forms and an unusual $U(1,3)$ automorphic form*.

Palo Alto, California, États-Unis, mars 2010, Workshop « Mock modular forms in combinatorics and arithmetic geometry », American Institute of Mathematics: *q-series, modular forms, and K-theory*.

Bordeaux, mars 2010, séminaire, Université de Bordeaux 1 : *Les fausses formes modulaires, de Ramanujan à Sander Zwegers*.

Bonn, Allemagne, avril-mai 2010, cours pour les étudiants de l'école doctorale IMPRS, Max-Planck-Institut für Mathematik, *Modular forms and their liftings* (2 conférences).

Cologne, Allemagne, mai 2010, Aachen-Köln-Lille-Siegburg Seminar on Automorphic Forms: *Teichmüller curves and their modular forms*.

Zürich, Suisse, mai 2010, Workshop « Rational points – Theory and Experiment », Eidgenössische Technische Hochschule Zürich : *Rational points and special L-values*.

Utrecht, Pays-Bas, mai 2010, séminaire, Institute for Theoretical Physics: *Mock modular forms and quantum black holes*.

Boston, Massachusetts, États-Unis, juin 2010, Conférence Internationale « Number Theory and Representation Theory », Harvard University: *Teichmüller curves on Hilbert modular surfaces*.

Saclay, juin 2010, conférence « XV^e Rencontres Itzykson 2010: New trends in quantum Integrability », Institut de Physique theorique de Saclay : *Quantum modular forms*.

Cargèse, Corse, juin-juillet 2010, Workshop « String Theory: Formal Developments and Applications », Institut d'Études scientifiques de Cargèse : *Mock modular forms and black holes* (2 conférences).

Dublin, Irlande, juillet 2010, Conférence internationale « Prospects in q-series and modular forms », University College Dublin: *Mock modular forms of small order*.

Vienne, Autriche, juillet 2010, Workshop « Topological Strings, Modularity and Non-perturbative Physics », Erwin Schrödinger International Institute for Mathematical Physics: *Properties of modular forms and their asymptotics* (5 conférences).

Hsinchu, Taiwan, août 2010, Distinguished Lecture Series, National Center for Theoretical Sciences, National Tsing Hua University: *Modular forms, mock theta functions, and black holes* (4 conférences).

Xi'an, Chine, août 2010, International Conference on the History of Modern Mathematics: 1800-1930, Department of Mathematics, Northwest University: *Mathematics by thought and by hand, today and in the past*.

Trento, Italie, septembre 2010, conférence « Prospettive Future sugli Studi e sulle Ricerche Matematiche/Prospects in Mathematics », Centro Internazionale per la Ricerca Matematica: *Arithmetic of 3-manifolds*.

Schiermonnikoog, Pays-Bas, septembre 2010, Workshop « Geometry and Arithmetic »: *Mock theta functions*.

AUTRES MISSIONS ET ACTIVITÉS

Oberwolfach, Allemagne, octobre 2009 : Wissenschaftsrat (Comité scientifique) du Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach.

Toulouse, octobre 2009 : Membre du jury du Prix Format.

Bures-sur-Yvette, janvier 2010 : Membre du comité de sélection de l'IPDE (Institut postdoctoral européen pour les sciences mathématiques).

Amsterdam, Pays-Bas, mai 2010 : International Advisory Committee du Center for Advanced Mathematical Sciences, American University of Beirut.

Vienne, Autriche, juin-août 2010 : Co-organisateur du programme « Topological String Theory, Modularity and Non-perturbative Physics », Erwin Schrödinger International Institute for Mathematical Physics.

Oberwolfach, Allemagne, août 2010 : Co-organisateur du Workshop « Low-Dimensional Topology and Number Theory », Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach.

Trento, Italie, septembre 2010 : Comitato Direttivo, Centro Internazionale per la Ricerca Matematica.

PUBLICATIONS ET PRÉPUBLICATIONS

Zagier D., « Ramanujan's mock theta functions and their applications » [d'après Zwegers and Bringmann-Ono], Séminaire Bourbaki, 60^e année, 2007-2008, n° 986, *Astérisque*, 326, 2009, Soc. Math. de France, 143-164.

Zagier D., « Integral solutions of Apéry-like recurrence equations », in *Groups and Symmetries: From the Neolithic Scots to John McKay*, CRM Proceedings and Lecture Notes, vol. 47 (2009), *Amer. Math. Society*, 349-366.

Zagier D., « On Harder's $Sl(2, \mathbb{R})$ - $Sl(3, \mathbb{R})$ identity », Appendice à l'article « Arithmetic aspects of rank one Eisenstein cohomology » de G. Harder dans *Cycles, Motives and Shimura Varieties*, V. Srinivas (ed.), *Tata Institute*, 2010, 423-425.

Zagier D., « Ramanujan an Hardy: vom ersten bis zum letzten Brief », *Jahresbericht du Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach*, 2008, 27-42 ; réédition dans les *Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 18, 2010, 21-18.