COLLÈGE DE FRANCE
1530

Algorithmes quantiques

Récapitulatif des notations (cours 1-2)

05-05-2021

Frédéric Magniez

Professeur invité sur la chaire Informatique et sciences numériques

En partenariat avec Inria

Année académique 2020-2021

frederic.magniez@college-de-france.fr

Superposition : état, mesure, transformation unitaire

Superposition

- S : ensemble d'états classiques
  S={0,1}, S=$\{0,1\}^n$, S={1,…,N}
- Superposition sur S
  Vecteur à |S| coordonnées complexes $(\alpha_x)_{x\in S}$
- Notation Dirac
  $|\psi\rangle = \sum_{x\in S} \alpha_x |x\rangle, \quad \alpha_x = \langle x|\psi\rangle$

Mesures

- Base de calcul
  $\sum_{x\in S} \alpha_x|x\rangle \longrightarrow \boxed{\text{Mesure}} \xrightarrow{|\alpha_x|^2 \text{ “x”}} |x\rangle$
- Base orthonormée $(|\psi_x\rangle)_{x\in S}$
  $|\psi\rangle \longrightarrow \boxed{\text{Mesure } (|\psi_x\rangle)_{x\in S}} \xrightarrow{|\langle\psi_x|\psi\rangle|^2 \text{ “x”}} |\psi_x\rangle$

Transformations unitaires

- Rotations et symétries G
  $|x\rangle \dashrightarrow \boxed{G} \dashrightarrow |\psi_x\rangle$
  $\sum_{x\in S}\alpha_x|x\rangle \dashrightarrow \boxed{G} \dashrightarrow \sum_{x\in S}\alpha_x|\psi_x\rangle$
  avec $(|\psi_x\rangle)_{x\in S}$ base orthonormée
- Notation matricielle
  $G = \left(|\psi_x\rangle\right)_{x\in S} = \left(\langle x|\psi_y\rangle\right)_{x,y\in S}$
  avec G unitaire : $G^* = ({}^t\overline{G}) = G^{-1}$
  $|\psi\rangle \dashrightarrow \boxed{G} \dashrightarrow G|\psi\rangle$

Registres multiples : produit tensoriel

Vision multi-registre

- A,B : ensembles d'états classiques
- S=AxB={(x,y): x∈A,y∈B} ensemble des états combinés
- Superposition sur AxB
  Vecteur $(\gamma_{x,y})_{x\in A, y\in B}$
- Notation Dirac
  $|\psi\rangle = \sum_{x\in A, y\in B} \gamma_{x,y}|x,y\rangle$

Vision équivalente !

Vision produit tensoriel

- Superposition sur A
  Vecteur $(\alpha_x)_{x\in A}$
  $|\psi_1\rangle_A = \sum_{x\in A}\alpha_x|x\rangle_A$
- Superposition sur B
  Vecteur $(\beta_y)_{y\in B}$
  $|\psi_2\rangle_B = \sum_{y\in B}\beta_y|y\rangle_B$
- Superposition produit sur AxB
  $|\psi_1\rangle_A \otimes |\psi_2\rangle_B = \sum_{x\in A, y\in B} \alpha_x\beta_y|x\rangle_A \otimes |y\rangle_B$
- Superposition générale
  $|\psi\rangle_{AB} = \sum_{x\in A, y\in B}\gamma_{x,y}|x\rangle_A \otimes |y\rangle_B$
  Si non produit, alors enchevêtrée (ou intriquée)

Registres multiples : transformations/mesures partielles

Transformations unitaires

- G_A une transformation unitaire sur (les superpositions) de A
- G_B une transformation unitaire sur (les superpositions) de B
- $G_A\otimes G_B$ est défini sur les états séparés
  $(G_A\otimes G_B)(|\psi_1\rangle_A \otimes |\psi_2\rangle_B) = G_A(|\psi_1\rangle_A)\otimes G_B(|\psi_2\rangle_B)$
  et étendu par linéarité
  $(G_A\otimes G_B)\left(\sum_{xy}\gamma_{xy}|x,y\rangle_{AB}\right) = \sum_{xy}\gamma_{xy}G_A(|x\rangle_A)\otimes G_B(|y\rangle_B)$

Mesures partielles (sur A)

- Se ramener à une décomposition sur la base de A
  $\sum_{x\in A}\alpha_x|x\rangle_A|\psi_x\rangle_B \longrightarrow \boxed{\text{Mesure A}} \xrightarrow{|\alpha_x|^2 \text{ “x”}} |x\rangle_A|\psi_x\rangle_B$

Remarques

- Faire une transformation G_A revient à faire $G_A\otimes Id_B$ sur tout le système
- Les transformations/mesures sur A commutent avec celles sur B
- Mesurer sur A puis B, est identique à tout mesurer