Traitements du temps en automatique

Juliette Leblond

Sophia Antipolis, équipe APICS

juliette.leblond@inria.fr

http://www-sop.inria.fr/members/Juliette.Leblond/

L'automatique et le temps

Automatique ("control theory") :
étude des systèmes dynamiques, qui évoluent avec le temps

Étymologie : automate, du latin automatus, "qui se meut soi-même", 1532

L'automatique

- Modèles dynamiques, comportement de quantités / signaux (physique, biologie, économie, sciences humaines et sociales, ...)

- Études et algorithmes de calcul de solutions (mathématiques, calcul scientifique)

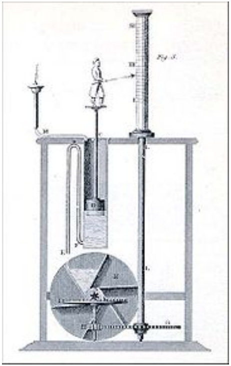
- Implémentation numérique (informatique)

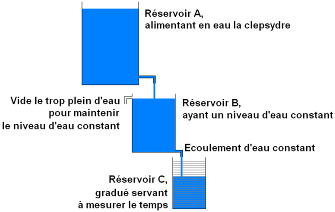
Automatique, systèmes d'évolution :

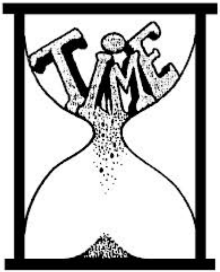
modélisation, identification, commande, régulation, stabilisation, filtrage, analyse du comportement

L'automatique dans / et le temps

Brève, et ancienne, histoire :
≈ -270, antiquité : régulateur (rétroaction) pour horloge à eau (clepsydre), Ktesibios (ingénieur, Alexandrie)



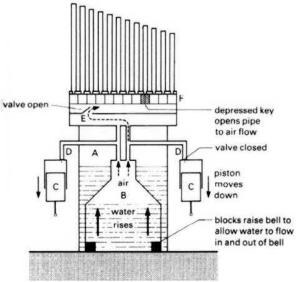




(vases communicants, valves)

Brève histoire

Ktesibios a aussi inventé l'orgue à eau (hydraule)



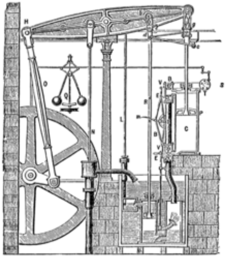
et d'autres dispositifs (hydrauliques, mécaniques)

Brève histoire

$\approx$ 1600–1700 : régulateurs (thermostats, ...)

$\approx$ 1700–1800, révolution industrielle, machine à vapeur, besoins d'automatisation $\nearrow$

James Watt (ingénieur mécanicien, Écosse, $\approx$ 1790)

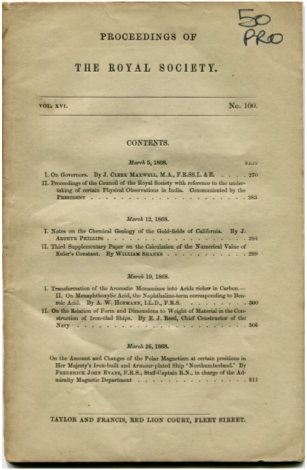


régulateur de vitesse

Brève histoire

≈ 1870 : “On governors”

James Clerk Maxwell (mathématicien physicien, Écosse)



50
PRO

PROCEEDINGS OF

THE ROYAL SOCIETY.

VOL. XVI. No. 100.

CONTENTS.

TAYLOR AND FRANCIS, RED LION COURT, FLEET STREET.

Brève histoire

$\approx$ 1900–1930 : stabilisation, rétroaction

(équations différentielles ordinaires, EDO, A. Lyapunov)

$\approx$ 1940–1970 : développement des systèmes de navigation et des calculateurs, électroniques, temps réel, microprocesseurs
$\rightsquigarrow$ commande optimale, adaptative, rejet de perturbations, filtrage

(H.S. Black, H. Nyquist, R. Bellman, A. Kolmogorov, N. Wiener, L. Pontryagin, $\cdots$)

$\approx$ 1980–2000 : commande robuste, optimale, systèmes embarqués

- non-linéaires (linéarisation)
- de dimension infinie (distribués en espace, équations aux dérivées partielles, EDP)
- systèmes hybrides, plusieurs échelles de temps, d'espace

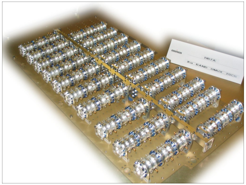
(discrets–EDO–EDP, ou lents–rapides)

- ...

Exemples

Domaines d'applications :

physique, ingénierie, manufacture, aéronautique, spatial, transport, santé, neurosciences, biologie, économie, ...



Exemples

Domaines de la physique :

mécanique, électricité, éléctromagnétique, optique, acoustique, thermique, nucléaire, quantique, ...

Problèmes d'automatique, systèmes dynamiques :

commande, synthèse, asservissements, régulation, stabilisation, identification, observabilité, traitement de signaux, estimation, filtrage, modélisation, discrétisation, analyse de comportement

Exemples

Signaux :

position, vitesse, débit, volume, mécaniques, électriques, magnétiques, thermiques, acoustiques, . . .

entrées $\longrightarrow$ $\boxed{\text{système}}$ $\longrightarrow$ sorties

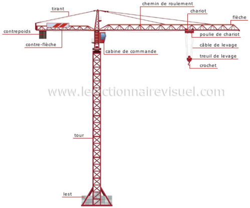
commandes, contrôles | (modèle) | mesures, observations

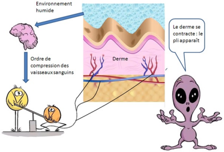
+ perturbations | | + erreurs (instruments)

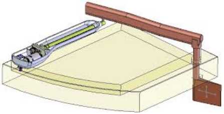
Exemples

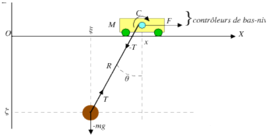
Dispositifs, systèmes $\rightsquigarrow$ modèles :

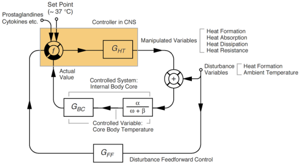
pilote automatique de bateau, chariot de grue, mammifère











position barre $\rightsquigarrow$ cap

commandes grue, cable $\rightsquigarrow$ position chariot

humidité $\rightsquigarrow$ tension thermorégulation

Les temps de l'automatique

Temps réel : traitement instantané de l'information, du calcul des transformations

Temps continu, physique, $t \in \mathbb{R}$ réel... fini / infini

Temps discret, informatique, $t = kT$, $k \in \mathbb{Z}$ entier, T pas de temps fixé

Temps mathématique : une variable comme une autre (espace), mise en valeur dans les systèmes dynamiques

Temps caché (disparu) $\rightsquigarrow$ fréquence

Systèmes dynamiques commandés

Relation d'entrée / sortie, description externe :

entrées (commandes) temps passé : causalité	$\rightsquigarrow$	sorties (mesures, observations) instant présent
$u(\tau),\ \tau \leq t$	$\rightsquigarrow$	$y(t),\ t \in \mathbb{R}$
$u_i = u(i\,T),\ i \leq k$	$\rightsquigarrow$	$y_k = y(k\,T),\ k \in \mathbb{Z}$ pas de temps T fixe

vecteurs $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$

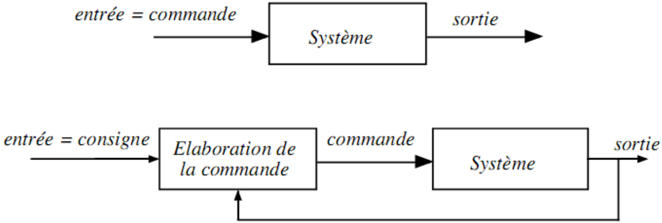
Régulation, boucle fermée

Système dynamique, causal, temps t (continu, déterministe)

Relation entrée / sortie :

entre la sortie $y(t)$ à l'instant présent t,

et l'entrée $u(\tau)$ aux temps $\tau \leq t$ passés



Feedback (retour de sortie) :

la commande $u(\tau)$ est fonction de la sortie $y(\tau)$ en temps réel

et de la consigne $y_c(\tau)$ calculée à l'avance

Causalité

Vue par Le Sar Rabindranath Duval, Pierre Dac et Francis Blanche

- Quel est son caractère ?
- Impulsif, parallèle et simultané.
- Quel est son avenir ?
- Monsieur a son avenir devant lui, mais il l'aura dans le dos chaque fois qu'il fera demi-tour.
- Il est vraiment extraordinaire !

Dérivée

$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}(t)$ dérivée (variation) en t

$$\frac{dx}{dt}(t) = \lim_{\tau \to 0} \frac{x(t+\tau) - x(t)}{\tau}$$

calcul infinitésimal, des variations

Discrétisation, linéarisation, τ petit fixé :

développement limité

$$x(t+\tau) \simeq x(t) + \dot{x}(\tau)\,(t-\tau)$$

Exemples

Relations d'entrée / sortie, modèles :

équations différentielles ordinaires (EDO) linéaires à coefficients constants

Physique : lois de Newton, Ohm, Maxwell, lois de conservation, . . .

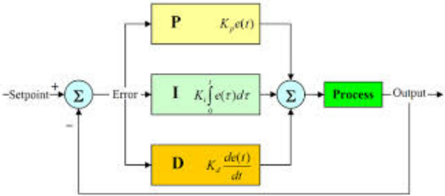
$y = h * u$ convolution

$\ddot{y}(t) = u(t)$

$\ddot{y}(t) + \alpha\, \dot{y}(t) + \beta\, y(t) = u(t)$

Régulation, feedbacks : $u(t) = -K_1\,(y(t) - y_c) - K_2\,\dot{y}(t)$

proportionnel dérivé



Autres modèles, exemples

- système à retard $\approx$ constante de temps $\approx$ EDO

$$y(t+\alpha) = u(t) \approx y(t) + \alpha\,\dot{y}(t) \text{ (erreur } \leq 5 \times 10^{-2} \text{ for } t \geq 3\,\alpha)$$

- temps discret $t \rightsquigarrow k\,T$

- évènements discrets (automate, nombre fini de valeurs de l'état)

- stochastiques

- non linéaires pilote automatique : $\ddot{y}(t) + \alpha\,\dot{y}(t) = \sin u(t)$, y cap, u safran

$$\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + y^2(t) = u(t)$$

- non stationnaires (coefficients variables en t)

$$\dot{y}(t) + t\,y^2(t) = u(t)$$

Autres modèles, exemples

- dimension infinie, équations aux dérivées partielles (EDP)

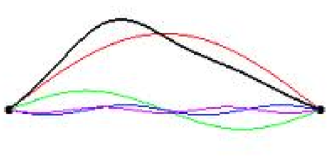
$$\frac{\partial y}{\partial t}(r,t) + \frac{\partial y}{\partial r}(r,t) + y(r,t) = u(r,t) \quad r \in \mathbb{R}$$

équation de Schrödinger $\qquad$ ψ fonction d'onde, $r \in \mathbb{R}^3$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(\mathbf{r},t) + V(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r},t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{r},t)$$

cable du chariot de la grue, longueur $r \in \mathbb{R}$ $\qquad$ structures flexibles

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(r,t) - \frac{\partial^2 y}{\partial r^2}(r,t) = 0\,, \quad y(r_0,t) = u(t)$$



vecteurs $\rightsquigarrow$ fonctions des variables d'espace, matrices $\rightsquigarrow$ opérateurs, cadre fonctionnel

Questions d'automatiques

- commande, stabilisation (boucle ouverte, fermée, commande optimale)
- estimation (observabilité, filtrage)
- discrétisation, en temps
- identification (fonction de transfert)

Commande et stabilisation

- Commande, régulation
- Stabilisation, robustesse

Dans diverses classes de modèles
(EDO, EDP, linéaires ou non, stationnaires ou non)

Aujourd'hui : $\ddot{y}(t) = u(t),\ t \geq 0$

EDO (équations différentielles ordinaires) linéaires stationnaires

Systèmes différentiels linéaires

causals (ou causaux)

stationnaires, invariants dans le temps : $(0, t) \leftrightarrow (t_0, t + t_0)$

$\rightsquigarrow$ coefficients constants, matrices A, B, C et temps $t \geq 0$

Description interne, état $x(t)$: permet de résumer le passé

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t) \\ y(t) = C\,x(t)\,, \;\; x(0) = 0 \end{cases}$$

vecteurs $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^p$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$

single input / single output $(m = p = 1)$: SISO; multiple input / multiple output: MIMO

Systèmes différentiels linéaires

Relation entrée / sortie : convolution

$$y(t) = \int_0^t C\, e^{A(t-\tau)}\, B\, u(\tau)\, d\tau$$

Stabilité $\Rightarrow$ $y(t)$ se comporte bien lorsque $t \nearrow$

u, x, y d'énergie finie, système stable $\rightsquigarrow$ analyse du comportement en temps

dépend de la dynamique A et de e^{At} (valeurs propres de A)

Systèmes différentiels linéaires

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t)\,, \quad t \geq 0 \\ y(t) = C\,x(t)\,, \quad x(0) = 0\,, \quad y_c = C\,x_c \text{ consignes} \end{cases}$$

Lois de commande $u(t)$ pour amener le système à l'état x_c (ou à la sortie y_c), de consigne

critères de commandabilité / observabilité — critères de rang

- synthèse en boucle ouverte — déconvolution, commande optimale

trouver une loi de commande de référence $u_c(t)$

inconvénient : manque de robustesse aux perturbations, pas de garantie de stabilité

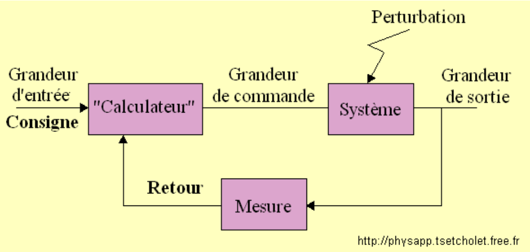
Systèmes différentiels linéaires

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t)\,, & t \geq 0 \\ y(t) = C\,x(t)\,, & x(0) = 0 \end{cases}$$

Loi de commande $u(t)$ pour amener le système à la sortie y_c

- régulation en boucle fermée, u retour de sortie y :

$$u(t) = -K\,(y(t) - y_c)$$



Systèmes différentiels linéaires

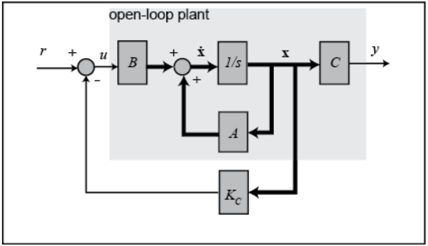
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t)\,, & t \geq 0 \\ y(t) = C\,x(t)\,, & x(0) = 0\,, \quad y_c = C\,x_c \text{ consignes} \end{cases}$$

Loi de commande $u(t)$ pour amener le système à l'état x_c

- régulation en boucle fermée $u(t) = -K\,(x(t) - x_c)$ (par exemple PID)

feedback d'état linéaire schémas robustes, stables

$$\dot{x}(t) = (A - B\,K)\,x(t) - B\,K\,x_c$$



on régle la nouvelle dynamique $A - B\,K$ avec la matrice de gain K, valeurs propres à parties réelles négatives ;

Exemples, commande

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t)\,, \ \ t \geq 0 \\ y(t) = C\,x(t)\,, \ \ x(0) = 0\,, \quad y(t) = \int_0^t C\, e^{A(t-\tau)}\, B\, u(\tau)\, d\tau \end{cases}$$

Entrée–sortie : $\ddot{y}(t) = u(t)$, $y(0) = \dot{y}(0) = 0$, u force, y position

Représentation d'état du 1er ordre avec :

$$x = \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix}\,,\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\,,\ B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\,,\ C = (1\ 0)$$

$$y(t) = \int_0^t (t-\tau)\, u(\tau)\, d\tau$$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{y} \\ \ddot{y} \end{pmatrix}\,,\ e^{A\,t} = I + A\,t$$

Exemples, commande

$$y(t) = \int_0^t (t-\tau)\, u(\tau)\, d\tau\,, \quad \ddot{y}(t) = u(t)$$

Objectif : $y(t) \approx y_c$ à partir d'un certain t

En boucle ouverte $\leadsto$ instable, non robuste aux perturbations

- commande constante (échelon)

$$u(t) = u_c = \frac{2\, y_c}{T^2}\,, \;\; t \in [0, T]\,, \;\; y(t) = y_c\, \frac{t^2}{T^2}\,, \;\; y(T) = y_c$$

- commande optimale (critères : énergie, coût, temps)

$|u(t)| \leq C$ $\leadsto$ commande bang-bang $u(t) = \pm C$, temps minimum

principe du maximum, L. Pontryagin, 1956

Exemples, commande

$$y(t) = \int_0^t (t-\tau)\, u(\tau)\, d\tau\,, \quad \ddot{y}(t) = u(t)$$

En boucle fermée, gain $K > 0$ $\rightsquigarrow$ stable, robuste

- retour de sortie (commande proportionnelle)

$$u(t) = -K^2\,(y(t) - y_c)\,, \quad y(t) = y_c - y_c \cos K\, t$$

- retour d'état (commande proportionnelle dérivée $\rightsquigarrow$ PID)

$$u(t) = -K^2\,(y(t) - y_c) - K\,\dot{y}(t)\,, \quad y(t) = y_c - y_c\, e^{-K\,t}\,(K\,t + 1)$$

commande optimale, boucle fermée, programmation dynamique Hamilton-Jacobi-Bellman

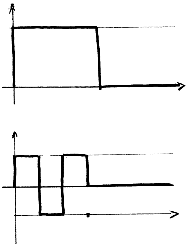
Illustrations

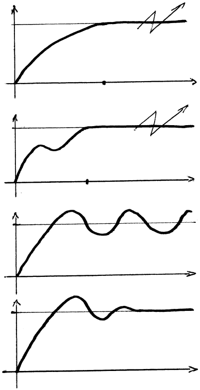
Comportement en t de différentes entrées / sorties $\qquad \ddot{y}(t) = u(t)$

$u(t)$: boucle ouverte, échelon (1), bang–bang (2) ; feedback de sortie (3), feedback d'état (4)

$\rightsquigarrow$ $y(t)$: commandée instable (1,2) ; régulée (3), stabilisée (4)

$u(t)$, (1), (2) $\qquad$ $y(t)$, (1), (2), (3), (3) $\qquad$ (simulations analogiques)



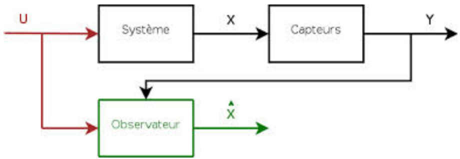


Observabilité, estimation, filtrage

Pour estimer l'état x depuis la mesure y

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t)\,, & t \geq 0 \\ y(t) = C\,x(t)\,, & x(0) = 0 \end{cases}$$

observateur (dual, similaire au régulateur)



$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\,\hat{x}(t) + K\,(y(t) - C\,\hat{x}(t)) + B\,u(t) \\ y(t) = C\,x(t) \end{cases}$$

réglage de K pour que $x(t) - \hat{x}(t) \to 0$ quand $t \nearrow$

observateur–régulateur : $u(t) = -C\,\hat{x}(t)$

Discrétisation en temps, échantillonnage

$t = k\,T,\ k$ entier, tic–tac (1er ordre, vecteurs à valeurs constantes entre $k\,T$ et $(k+1)\,T$)

Equations d'état, récurrence : vecteurs, matrices

$$\left\{\begin{array}{l} x_{k+1} = A\,x_k + B\,u_k \\ y_k = C\,x_k\ ,\ \ x_0\ ,\ \ k \in \mathbb{N} \end{array}\right.$$

Les propriétés de commandabilité, observabilité, se transposent

$$x_k = A^k\,x_0 + \sum_{p=1}^{k} A^{k-p}\,B^p\,u_p\ ,\ \ k \in \mathbb{N}$$

$\rightsquigarrow$ formalisme des langages synchrones :

tous les k, faire le calcul $k \longrightarrow k+1$

Dynamique A du système : stable si les valeurs propres sont de module < 1

(disque unité $\{|s| < 1\} \subset \mathbb{C}$ remplace demi–plan gauche $\{\mathrm{Re}\, s < 0\}$)

Discrétisation en temps, échantillonnage

$t = k\,T$, K entier, tic–tac

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{k+1} = A\,x_k + B\,u_k \\ y_k = C\,x_k \ , \ \ x_0 \ , \ \ k \in \mathbb{N} \end{array} \right.$$

Précautions nécessaires :

- choix du pas de temps T, période d'échantillonnage, éventuellement très petit

critère de Nyquist–Shannon, analyse de Fourier en fréquences, principe d'incertitude

- analyse et traitements préliminaires

en temps continu ; filtrage, par exemple

- choix du modèle : hypothèses physiques et mathématiques, compromis complexité / précision

approximation, critères, signaux à énergie finie

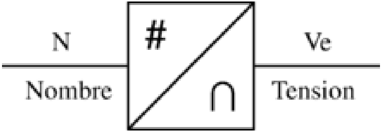
- discrétisation en espace : quantification, écrêtage des signaux

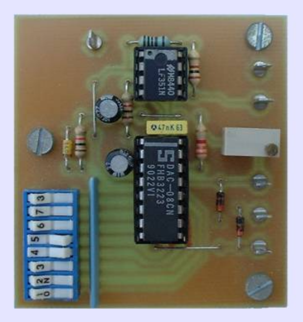
crucial aussi pour les modèles EDP

Discrétisation en temps, échantillonnage

Dispositifs physiques : convertisseur numérique / analogique (N/A), analogique / numérique (A/N)

nombre $\leftrightarrow$ tension électrique





convertisseur N/A : régulé !

Machine gratuite universelle

Claude Elwood Shannon

(ingénieur mathématicien, USA, 1916–2001)

on $\rightsquigarrow$ off

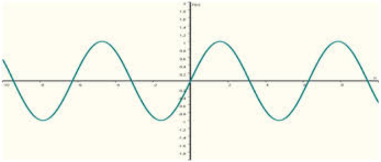
Identification

$\leadsto$ temps continu problèmes mathématiques plus abordables

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t)\,, & t \geq 0 \\ y(t) = C\,x(t)\,, & x(0) = 0 \end{cases}$$

Après la modélisation, réglage des paramètres A, B, C du modèle, étant données des mesures de $u(t)$ et de $y(t)$ (problème inverse)

Identification harmonique : entrée $u(t) = \sin\, w_k\, t$, fréquence w_k



Identification

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t)\,, \;\; t \geq 0 \\ y(t) = C\,x(t)\,, \;\; x(0) = 0\,, \quad y(t) = \int_0^t C\, e^{A(t-\tau)}\, B\, u(\tau)\, d\tau \end{cases}$$

Si H est la fonction de transfert du système stable (matrice)

$$H(s) = C\,(s\,I - A)^{-1}\,B\,, \;\; s \in \mathbb{C}\,, \;\; \mathrm{Re}\, s > 0$$

identification fréquentielle :

$$u(t) = \sin\; w_k\, t \;\;\Rightarrow\;\; y(t) \simeq |H(i\,w_k)|\, \sin\left(w_k\, t + \arg H(i\,w_k)\right)$$

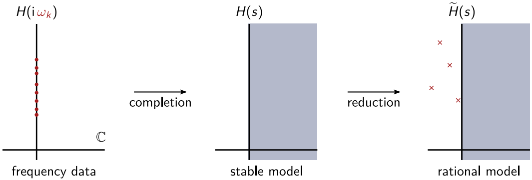
pour t assez grand, après un régime transitoire on prend le temps

Identification

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t)\,, \;\; t \geq 0 \\ y(t) = C\,x(t)\,, \;\; x(0) = 0\,, \quad H(s) = C\,(s\,I - A)^{-1}\,B \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ valeurs (complexes) de $H(i\,w_k)$

$\rightsquigarrow$ $H(s)$ fonction holomorphe de s dans le $1/2$ plan droit



puis réduction de l'ordre du modèle $\tilde{H} \simeq H$ et réalisation $\rightsquigarrow$ $A,\ B,\ C$

Systèmes différentiels linéaires

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t)\,, & t \geq 0 \\ y(t) = C\,x(t)\,, & x(0) = 0 \end{cases}$$

Réponse impulsionnelle $h(t)$, convolution $\quad y = h * u$

$$h(t) = C\,e^{A\,t}\,B\,, \quad t \geq 0$$

$$y(t) = \int_0^t h(t-\tau)\,u(\tau)\,d\tau\,, \qquad h(t) = C\,e^{At}\,B$$

Causalité $\Rightarrow$ $h(t) = 0$ for $t < 0$ (fonction créneau de Heaviside)

Stabilité $\Rightarrow$ $h(t) \to 0$ as $t \to \infty$ (comment ? sinon ?)

Dans l'exemple $\ddot{y}(t) = u(t)$, on a $h(t) = t$

Fonction de transfert, réponse impulsionnelle

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t)\,, & t \geq 0 \\ y(t) = C\,x(t) \end{cases} \qquad H(s) = C\,(s\,I - A)^{-1}\,B\,, \quad h(t) = C\,e^{At}\,B$$

Fonction (matrice) de transfert :
transformée de Laplace $H(s)$ de la réponse impulsionnelle $h(t)$

$$H(s) = \int_0^t h(t)\,e^{-s\,t}\,dt\,,\ \operatorname{Re} s > 0$$

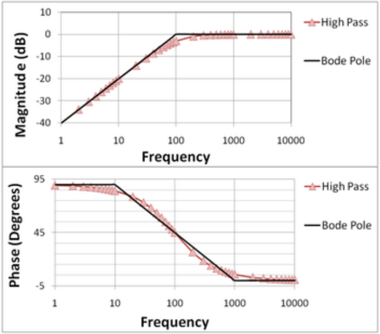
si Y, U transformées de Laplace de y, u :

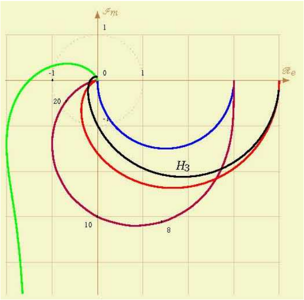
$$Y(s) = H(s)\,U(s)$$

analyse complexe, harmonique (transformation de Fourier–Laplace, en z pour les systèmes discrets)

Fonction de transfert

Critères de stabilité, représentations de $H(i\,w)$ à valeurs complexes, diagrammes de Nyquist, Bode, ...





$H(s)$ fonction rationnelle holomorphe de s dans le demi–plan complexe droit, si système stable

Dans l'exemple $\ddot{y}(t) = u(t)$, on a $h(t) = t$, $H(s) = 1/s^2$ pour le système en boucle ouverte, et après la régulation $H(s) = 1/(s+K)^2$

Plus généralement

- Systèmes différentiels ordinaires (dimension finie en espace, structures rigides), non linéaires, non stationnaires

description interne / externe, état $x(t)$, $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \mathcal{A}(x(t), u(\tau), \tau)\,, & \tau \leq t \\ y(t) = \mathcal{H}(x(t), u(\tau), \tau)\,, & y(t) = \mathcal{C}(u(\tau), \tau) \end{cases}$$

feedback d'état : $u(t) = \mathcal{K}(x(t), t)$

fonction de transition $x(t_0) \to x(t)$

- Équations aux dérivées partielles (EDP), dimension infinie en espace, structures flexibles

semi–groupe

$$u(r,t),\ x(r,t),\ y(r,t),\ r \in \mathbb{R}^3$$

$\rightsquigarrow$ équilibre, linéarisation, discrétisation

Conclusion

$\simeq$ 2000–2014–. . . : automatique des systèmes complexes

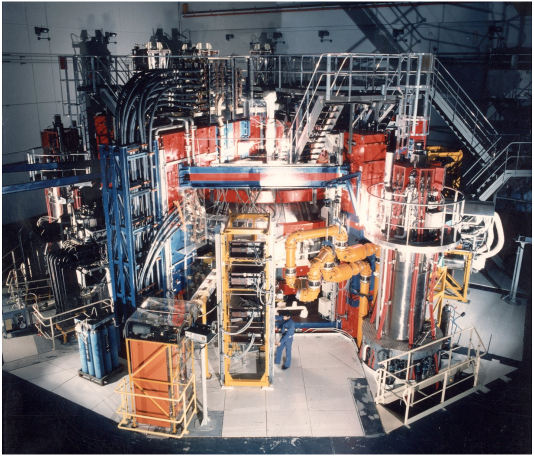
- EDP, EDO non linéaires, systèmes hybrides
- modélisation, synthèse, identification
- analyse mathématique, traitements algorithmiques, numériques
- masses de données hétérogènes
- commande optimale, transport optimal
- contrôle par rétroaction de systèmes quantiques en temps réel
- renverser le temps

- . . . capacités de traitement $\nearrow$

Conclusion

- contrôle du plasma dans les tokamaks

(Tore Supra, CEA-IRFM, confinement magnétique, gaz ionisé, contrôler température, pression)



Bibliographie

- P. Faurre, M. Robin, Elements d'automatique (1984)

- T. Başar, P. Bernhard, H^{∞} optimal control and related minimax design problems (1995)

- ouèbe (Wikipédia, . . .)

- . . .

- B. Bonnard, D. Sugny, Optimal control with applications in space and quantum dynamics (2014)

- . . .

Cybernétique

$\approx$ 1948, Norbert Wiener

(mathématicien cybernéticien, USA, 1894–1964)

Cybernétique :

du grec, utilisé par Platon pour désigner le pilotage d'un navire

$\rightsquigarrow$ gouvernail (gouverner)