4 LA DÉMONSTRATION

Wittgenstein et la diversité des raisonnements mathématiques

Dans le plan du cours, toujours provisoire, nous avons annoncé cette leçon ainsi :

> *Démonstration et calcul.* Les mathématiques ne sont pas unitaires. Comme Wittgenstein, je suis enclin à penser que « les mathématiques sont une mixture BIGARRÉE de techniques de preuve. » En particulier il faut distinguer d'une part les démonstrations qui déduisent des conclusions à partir de postulats, et d'autre part le calcul.

Vous pourriez trouver curieux ou surprenant que j'introduise le nom de Ludwig Wittgenstein aussi tôt dans la discussion sur les mathématiques. Sa réputation comme philosophe des mathématiques n'est pas glorieuse même parmi les wittgensteinophiles les plus fervents. À mon avis il a fait des observations remarquables sur ce que c'est que faire des mathématiques – sur les mathématiques en action, si vous voulez. La philosophie des mathématiques, de presque tous les autres auteurs, sauf Imre Lakatos[1], s'adresse aux mathématiques achevées, complètes, sous forme de démonstrations réussies et publiées dans les manuels. Pour cette raison, j'ai donné en 2004 un séminaire sur le thème : *Lire Wittgenstein, Lire Lakatos*,.

Wittgenstein n'a pas publié un mot sur les mathématiques, après son *Tractatus*. Nos sources sur ses idées dans ce domaine proviennent de quelques cahiers de remarques et des notes de ses auditeurs – tout cela autour de 1940[2]. Je ne propose pas une « interprétation » de Wittgenstein. Je cite de temps en temps quelques-unes de ces observations succinctes qui nous font ouvrir les yeux sur les faits qui sont simplement devant nous.

Sa technique n'est pas de discuter des aspects ésotériques, difficiles ou obscurs des mathématiques. On pourrait dire qu'il n'était pas respectueux des mathématiques : il prend des exemples infantiles. Je pense qu'il avait raison, parce que les questions philosophiques traditionnelles sont elles-mêmes un peu puériles. Il faut examiner les expériences les plus

---

[1] Imre Lakatos, *Proofs and Refutations*, Cambridge, 1976. Traduction. fr. *Preuves et réfutations : essai sur la logique de la découverte mathématique*, Hermann, 1984.

[2] *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*, Oxford, 1956; Suhrkamp Taschenbuch, 1984. Tr. fr. Ludwig Wittgenstein, *Remarques sur les fondements des mathématiques*, Gallimard, 1983.

Cf. aussi *Cours sur les fondements des mathématiques, Cambridge, 1939*. Mauzevin : Éditions T.E.R., 1995. (Chicago, 1975, Cora Diamond, ed.)

simples, celles qui ont le moins l'allure de réflexions sophistiquées, pour comprendre l'essentiel.

Je ne dis pas que les remarques de Wittgenstein sont toujours justes ou profondes. Il y en a qui me paraissent ignorantes ou banales, il y en a qui omettent certains aspects des mathématiques qui sont essentiels à la compréhension. Wittgenstein est énervant, frustrant, agaçant. Bref, un philosophe remarquable.

Des objets mathématiques

Notre concept le plus général est le concept de *style de pensée*. Les styles sont distingués par leurs *objets* et leurs *méthodes*. La méthode des mathématiques, en bref, c'est la démonstration. Pour les objets mathématiques, commençons par les exemples les plus traditionnels et (croit-on) les plus simples : les objets géométriques comme la sphère ou le carré. Personne ne doute qu'il y ait des sphères et des carrés empiriques, approximatifs, matériels, dans le monde. Il y en a beaucoup plus du fait des activités humaines. Nous fabriquons des tables carrées, des roulements à billes. Mais nous disons que ces billes ne sont pas des sphères parfaites. La sphère la plus parfaite dans tout l'univers tourne en ce moment autour de la terre : elle sert de gyroscope dans un petit satellite placé en orbite polaire. Voici une photo de cette sphère. **Transparent** Elle est en quartz du Brésil, elle a été produite dans une usine allemande, et polie dans un laboratoire en Arizona. Elle est utilisée dans une expérience visant à tester la théorie générale de la relativité. Elle représente ce que la science et l'ingénierie d'aujourd'hui peuvent faire de mieux. Mais cela ne correspond pas à notre conception d'une sphère parfaite. Cette idée n'a de sens que dans le contexte d'un style de pensée géométrique.

Cette sphère dont vous voyez la photo, la sphère la plus parfaite dans l'univers, je l'ai vue en réalité. Probablement, plus personne ne la verra dans le futur, sauf si le satellite où elle se trouve était récupéré par une station spatiale et qu'on la rapporte à terre. En principe, bien sûr, cela reste possible.

Il est impossible de photographier une sphère parfaite – une sphère mathématique, l'idée de la sphère chez Platon. Voici sur le **transparent** une photo d'une installation créée par Vladimir Skoda, un artiste tchèque qui vit à Paris. C'est une belle représentation des solides parfaits de Platon, de Kepler. Mais ces solides parfaits, il est impossible de les voir « eux-mêmes » comme j'ai vu la sphère presque-parfaite du gyroscope. C'est impossible en pratique et c'est impossible en principe, parce que ce sont des objets abstraits introduits dans le discours, et dans l'esprit, par le style de pensée mathématique.

La sphère sert de paradigme d'un objet mathématique qui a toujours été au cœur de débats ontologiques, des débats qui d'ailleurs ne changent rien aux mathématiques elles-mêmes. Longtemps, nous sommes passés des exemples géométriques aux nombres où le débat a un tour moins dramatique. On peut montrer une photo de la sphère la plus parfaite de l'univers, et affirmer que ce n'est pas une sphère géométrique parfaite. C'est une sphère imparfaite. On ne peut pas faire la même chose pour le nombre quatre. On peut montrer un plat de quatre huîtres. Je crois que même des gens qui ont une formation philosophique ne diraient pas que ce nombre quatre est imparfait. Peut-être ai-je tort – la formation philosophique peut conduire à des affirmations bizarres.

Des énoncés mathématiques

Chaque style introduit de nouveaux types d'objets, mais il introduit aussi de nouveaux types de propositions. Je commence par donner une version positiviste de cette idée. C. G. Hempel en donne une formulation très claire. Il faut distinguer, dit Hempel, la proposition arithmétique 2+3=5 d'une proposition d'arithmétique appliquée qui s'applique à des ensembles de choses.

J'ai deux pièces d'un euro dans la main gauche, et trois dans la main gauche. Je les place sur la table. Voilà, cinq : deux pièces plus trois pièces font cinq. Le monde marche comme cela. Mais cela marche moins bien avec les lapins. J'ai deux lapins mâles dans une cage, et trois lapines dans une autre. Je les mets dans le jardin. Après quelques jours, il y aura 37 lapins. Les euros ne sont pas comme les lapins, c'est un fait empirique. À la laverie automatique, il y à une machine qui change un billet de 5 euros en cinq pièces d'un euro. Il serait assez facile de construire une machine qui rende un billet de 5 euros pour mes 2 euros dans la main gauche plus mes 3 euros dans la main droite. Voilà des exemples triviaux d'addition empirique, où deux et trois font cinq, en général. Mais pas toujours.

Hempel soutient qu'il y a une proposition de l'addition empirique qui est distincte de l'arithmétique pure. La distinction de Hempel ne repose pas sur l'usage ordinaire des mots au moyen desquels on exprime les idées mathématiques. Ordinairement, nous ne faisons pas de distinction entre '2+3=5' en tant qu'énoncé arithmétique et en tant qu'énoncé portant sur des ensembles d'objets comme des pièces, des lapins ou des pommes.

De même, dit Hempel, il faut distinguer les propositions de géométrie des propositions portant sur des objets matériels. J'ai dit que c'était une approche positiviste : Hempel l'exprime en termes de phrases. La phrase « 2 et 3 font 5 » est équivoque. Elle peut signifier deux propositions : l'addition empirique ou l'énoncé arithmétique. Même chose pour la phrase « tous les points situés sur la surface d'une sphère sont équidistants du centre ». On peut le dire de la sphère gyroscopique, mais pas dans le même sens qu'un énoncé ou une définition de géométrie. Il reste une question sur l'application des mathématiques de la sphère à la sphère de quartz dans le satellite, qui sert de gyroscope. Si je trouve le temps dans ce cours, je voudrais parler de cette importante question de l'application des mathématiques au monde réel.

Chez Hempel, dans sa formulation positiviste, il est question de mots et de phrases. Mais on avait exprimé la même idée dans l'Antiquité. Proclus, le philosophe néo-platonicien, a dit vers l'an 450 que les sphères de la géométrie ne sont pas la même chose que des billes ou d'autres sphères empiriques. Il a dit aussi que les énoncés sur les sphères géométriques sont d'une autre nature que les affirmations concernant les billes sur la table.

Au Moyen Âge, on a soutenu que les propositions des mathématiques étaient éternelles. Je ne rejette pas cette croyance, mais je ne la reprends pas non plus à mon compte. Je ne la rejette pas parce que les propositions de l'arithmétique ne parlent jamais du temps réel. La question du temps, et donc de l'éternité, est absente. Les vérités mathématiques ne sont pas des vérités éternelles, au sens des auteurs scolastiques, parce qu'elles ne concernent pas du tout le temps, fini ou éternel.

Dans la perspective qui nous occupe, le style mathématique a introduit de nouvelles propositions. Pour les platoniciens, ces propositions existent au dehors du temps. Je suis absolument neutre à l'égard de ces thèses en tant que telles. J'affirme seulement un fait incontestable : il n'est possible de dire ces vérités que dans le contexte d'un style de pensée, avec ses méthodes de raisonnement démonstratives. Mais on peut faire des affirmations empiriques – deux euros dans la main gauche et trois dans la main droite font cinq sur la table

– sans référence à un style de pensée scientifique. L'analyse de Proclus et de Hempel, selon laquelle la proposition empirique diffère de la proposition d'arithmétique, est donc essentielle. Il est essentiel également de rappeler nos analyses sur ce que c'est que « dire la vérité », et sur la véracité.

Véracité

Le premier schéma (*) que nous avons tiré de Bernard Williams fait référence à

(*) Un changement de conception de ce que c'est que dire la vérité sur X.

Pour nous, dans ce cours, la vérité est un concept absolument formel, sans histoire, sans généalogie. Mais les possibilités de dire le vrai évoluent dans l'histoire, parce que la conception de ce que c'est que dire la vérité a connu des changements. Les méthodes de démonstration en mathématiques nous fournissent un exemple très clair. Il y a eu des changements dans la manière dont on conçoit ce que c'est que dire la vérité sur les rapports géométriques. On est passé de propositions empiriques confirmées par la mesure à des rapports établis par la démonstration. La véracité – le fait de dire la vérité – a pris un sens nouveau après la découverte de la possibilité des démonstrations.

Dans cette formulation, rien n'est dit sur ce que c'est que la vérité. Cela me plaît, parce que je prends la vérité comme un concept formel, avec des règles pour la manipulation du mot « vrai », mais sans assomptions – les formules d'Aristote et de Tarski n'impliquent aucune assomption.

Quand dit-on la vérité ? Les critères sont fournis par la nouvelle conception de ce que c'est que dire la vérité. Dans le cas des mathématiques, le critère est la démonstration. Dire la vérité en mathématique, c'est dire quelque chose qui est démontrable.

Ceci n'est pas un critère de la vérité elle-même. Selon nous, les conditions de la vérité sont formelles, sans contenu. Dans la version de Tarski, la phrase « deux fois deux font quatre » est vraie si et seulement si deux fois deux font quatre – et c'est la même chose pour les énoncés les plus subtils de la topologie ou du calcul différentiel. La phrase « p » et vraie si et seulement si la proposition *p* – ce que la phrase « p » exprime – est vrai. Plusieurs philosophes – en particulier Donald Davidson, le plus célèbre d'entre eux – ont dit que la formule de Tarski exprime les conditions dans lesquelles une affirmation est vraie. Mais ces conditions n'ont pas de contenu.

Une objection née d'un malentendu à propos du premier théorème de Kurt Gödel

Mon collègue Jacques Bouveresse a donné un cours entier sur les théorèmes de Gödel de 1931. Ils figurent parmi les plus beaux résultats de la logique du 20^{e} siècle. Ce sont *les plus beaux*, si vous voulez, et ils ont des conséquences extraordinaires pour la logique, la philosophie des mathématiques, et pour les programmes de recherche sur les fondements des mathématiques.

L'axiomatisation des mathématiques, même de l'arithmétique élémentaire, est impossible. C'est à dire qu'il n'existe pas un ensemble récursif des postulats vrais qui soit adéquat pour la démonstration de toutes les vérités de l'arithmétique.

Un résultat étonnant – il y a trois-quarts de siècle. Aujourd'hui, quelque chose de normal, un fait familier, merveilleux, riche encore de conséquences, mais qui a cessé de nous surprendre. C'est un peu comme le fait qu'un électron soit à la fois une particule localisée dans un point de l'espace *et* une onde qui s'étend dans tout l'espace. Impensable, il y a trois-quarts de siècle. Aujourd'hui, le quotidien des physiciens.

Quelqu'un objectera :

« Mais le résultat de Gödel prouve que vous avez tort. La démonstration n'épuise pas les vérités mathématiques. La vérité est quelque chose de *plus* que la démonstration ! Quelque chose de plus que les affirmations qu'on peut faire à partir d'un style de pensée. »

Réponse (1) – La vérité est quelque chose de différent de la démonstration *des postulats.* Mais chaque proposition gödelienne est démontrable par les métamathématiques.

Réponse (2) – Je ne dis pas que la vérité est la démonstration. Je ne dis jamais que la vérité est quoi que ce soit de positif. Je dis seulement que dire la vérité en mathématiques, c'est dire quelque chose de démontrable.

Les styles de pensée se justifient-ils ?

On ne peut pas dire qu'un style de pensée (ou une méthode de raisonnement) est bon *parce qu*'il nous aide à découvrir la vérité. Ce n'est pas le fait qu'il permette de découvrir la vérité qui établit sa validité. C'est lui-même, en effet, qui détermine ce que c'est que dire la vérité dans son domaine.

Chaque style introduit de nouveaux types de propositions. Ces propositions ne peuvent prétendre être vraies ou fausses que dans le contexte du style en question. Nous déterminons si elles sont vraies ou fausses en raisonnant en fonction de ce style. Dans un sens un peu déformé, on peut être tenté de dire que les styles de pensée « s'auto-justifient ». Bien sûr, ces styles sont faillibles : en raisonnant selon un style, il est toujours possible de faire des erreurs. Mais c'est dans le cadre du même style qu'on doit découvrir et corriger ces erreurs. Les styles de pensée sont « auto-justificateurs » seulement dans le sens où les énoncés propres à un style de pensée scientifique ne sont susceptibles d'être vrais ou faux que dans le contexte de ce style.

Cette affirmation donne une impression gênante de circularité. Serait-ce une forme de relativisme ? Pour moi, l'expression classique du relativisme moral se trouve dans une remarque sardonique d'Hamlet. « Il n'est rien de bon ou de mauvais qui ne le soit parce que nous le pensons tel. » (*There is nothing either good or bad but thinking makes it so*. Hamlet, II, 2, 237).

Je ne remplace jamais ce mot de bon ou de mauvais par le vrai ou le faux. Je ne dis pas « Il n'est rien de vrai ou de faux qui ne le soit parce que nous le pensons tel ». Ou, pour parodier Shakespeare exactement, *There is nothing either true or false but thinking makes it so*.

Je ne dis pas « Il n'est rien de vrai ou de faux qui ne le soit parce qu'un style de raisonnement le rend tel. » Je soutiendrais plutôt quelque chose comme : « Il n'est pas d'énoncé introduit par un style de raisonnement et susceptible d'être vrai ou faux, qui ne le soit parce qu'un style de raisonnement le rend tel. » Et cela n'est pas relativiste du tout.

Le constructionnisme

L'idée un peu ironique de l'auto-justification des styles se distingue également des idées constructionnistes sur la découverte scientifique. Il y a par exemple l'idée de la construction sociale : en effet les faits se trouvent construits-en-tant-que-faits au cours d'un processus de recherche et de négociation. Avant qu'il ait été construit, il n'y avait pas de fait « déjà là » à découvrir. Ma position n'a rien à voir avec ce type de doctrines. Elles sont à mettre dans le même panier que le platonisme, qui attribue un temps aux choses qui n'ont pas de temps.

Il y a aussi le constructivisme mathématique. L'intuitionnisme de Brouwer en est une première manifestation, au début du vingtième siècle. Une proposition n'est pas une vérité avant d'avoir été construite, un objet mathématique n'existe qu'après avoir été construit. Ma thèse est neutre vis-à-vis du constructivisme et de l'intuitionnisme. Si on insiste sur le sens intuitionniste de la démonstration, on peut dire exactement ce que j'ai dit sur le style de raisonnement mathématique – en reprenant le sens intuitionniste du mot « démonstration ».

Géométrie et algèbre

Au-delà des questions philosophiques, venons-en à la démonstration elle-même. Crombie donne une description courte du premier style de pensée scientifique :

1. La méthode par postulats et dérivation des conséquences en mathématiques.

Mais il y a aussi une version longue, plus informative :

> La méthode par postulats illustrée par les sciences mathématiques grecques a pris naissance dans le cadre d'une recherche commune, chez les Grecs, de principes rationnels, aussi bien dans le monde perceptible que dans le raisonnement humain. Tel était le style ancien principal, qui exploitait le pouvoir démonstratif de la géométrie et de l'arithmétique pour réunir toutes les sciences mathématiques et les techniques qui en dépendent, de l'astronomie, de l'optique et de la cartographie à la mécanique et à la musique, sous une forme commune de démonstration.[3]

Je suis peut-être partiellement responsable de l'insistance sur la démonstration dans cette élaboration du premier style. Le dernier texte que j'ai cité date de 1994. En 1991, Crombie avait lu mon article qui insistait, à l'encontre de ses propres idées – celles du Crombie d'avant 1991 – sur l'importance de la démonstration comme caractère essentiel des mathématiques grecques[4]. Chaque style de pensée scientifique introduit un nouveau type d'objets et une nouvelle méthode de raisonnement. La nouvelle méthode des mathématiques grecques, c'est la démonstration, et leurs nouveaux objets sont des objets abstraits, par exemple les triangles isocèles « idéaux ».

Les mathématiques ne s'arrêtent pas avec la géométrie grecque. Diophante, membre de l'école d'Alexandrie vers 250, a écrit les *Arithmétiques*, apogée de l'algèbre grecque. Si l'on dit qu'il n'y a qu'un style de pensée qu'on doit appeler mathématique, alors il faut dire qu'il y a plusieurs méthodes de raisonnement mathématique. Le texte attribué à Diophante a considérablement influencé les mathématiques arabes, et il a inspiré les algébristes de la Renaissance.

Par un heureux concours de circonstances, la géométrie et l'algèbre se sont établies de façons différentes dans les différents lieux où elles ont pris racine, parmi des peuples différents. Bien entendu, il y a eu une science des nombres chez les Grecs alexandrins, notamment dans l'œuvre de Diophante. Elle n'existait pas du temps d'Euclide, trois siècles avant notre ère. Diophante a probablement vécu au III^e^ siècle de notre ère – mais même le siècle n'est pas certain. Disons probablement six siècles après Euclide. Si on lit Diophante

---

[3] Crombie, *Styles*, vol. I, page 84.

[4] Ian Hacking, « 'Style' for Historians and Philosophers » *Studies in History and Philosophy of Science* 23 (1992), 1-20, sur page 6.

avec des yeux modernes, formés à l'algèbre géométrique, on n'est pas dépaysé par son œuvre ou par ce qui nous en est parvenu, à savoir trois livres en langue grecque et quatre autres en arabe. On le lit comme l'algèbre géométrique. (Voir la leçon inaugurale de mon collègue Don Zavier !) Les experts assurent que cette lecture, cette interprétation, est anachronique. Je cite Roshdi Rashed. Il est l'expert attitré : c'est lui qui a découvert au Caire quatre volumes de Diophante en arabe.

> Les *Arithmétiques* ne sont cependant pas un traité d'algèbre. Il s'agit bien, en effet, d'un livre d'arithmétique, non pas dans l'anneau des entiers relatifs, mais dans le *demi-corps* des rationnels positifs ; et c'est au cadre relativement étroit de ce demi-corps que, semble-t-il, il faut imputer la principale responsabilité du développement des techniques algébriques, qui furent sans aucun doute d'un précieux secours aux algébristes arabes.[5]

Je pense qu'il y a une autre méthode de raisonnement fondamentale en mathématiques, que j'appelle non pas algébrique, mais combinatoire ou algorithmique. Elle a son origine dans les études diophantienne. Son histoire nous emmène en Asie, plus précisément en Inde, et surtout dans le monde arabe.

J'aime ce qualificatif d'« algorithmique » parce que j'aime les mythes de l'origine. L'algèbre est de conception arabe. L'algorithme, le plus combinatoire des concepts, tire son nom d'un mathématicien du dixième siècle, dont le nom, européanisé, est Al Khawarizmi. Résident de la Maison de la Sagesse à Bagdad, il a participé à la traduction de nombreux manuscrits scientifiques grecs. Son traité principal est considéré comme le premier manuel d'algèbre. Le mot « algèbre » lui-même vient du titre de cet ouvrage, *Hisab* ***al-jabr*** *w'al-muqabala*. Il a présenté de vrais algorithmes en exposant une méthode de calcul de la racine carrée d'un nombre. Après les succès extraordinaires des mathématiciens arabes, nous attribuons la combinaison de la géométrie et de l'algèbre en Europe à François Viète (1540-1603). Et ensuite à la *Géométrie* de Descartes. Traditionnellement, parmi les sciences mathématiques, on distingue l'algèbre, la topologie, la théorie des nombres etc., chaque branche ayant ses méthodes et ses objets particuliers, mais chacune étant liée aux autres de plusieurs façons.

Plus simple que la géométrie ou que l'algèbre, il y a le calcul, les opérations élémentaires sur les nombres : l'addition, la multiplication. La théorie des nombres, ce qu'on appelle l'arithmétique, est élémentaire, en un sens. Pourtant, les problèmes non résolus sont nombreux. Chaque nombre pair est-il la somme de deux nombres premiers ? Nous ne le savons pas. Nous savons qu'il est impossible de construire un algorithme pour décider de la vérité de chaque proposition élémentaire de la théorie des nombres. Mais qu'en est-il du calcul des enfants ou des épiciers. Un calcul bref n'est pas une démonstration. Dire 5 + 7 font 12 n'est pas un calcul du tout. Mais diviser 471 par 9, c'est un vrai calcul. Après quelques instants on trouve le résultat, 52 1/3. C'est un vrai calcul, mais ce n'est pas une vraie démonstration. Ce n'est rien de plus qu'un calcul, une opération mécanique.

Je reviendrai à ces observations sur le caractère mixte des techniques de démonstration, mais pour l'instant, je voudrais aborder quelques sujets préliminaires.

Mathématiques et sciences

Évidemment, je suis content que dans la langue courante on parle *des* mathématiques, au pluriel. À l'origine, on parlait de *la* mathématique : le pluriel est devenu courant au XVI^e^

[5] Roshdi Rashed, « Diophante d'Alexandrie », *Encyclopédie Universalis* 8.

siècle. Auguste Comte, et des auteurs plus récents qui voulaient un système unifié des mathématiques, ont essayé de restaurer le singulier, mais sans succès. C'est une bonne chose. Wittgenstein m'a appris à mettre l'accent sur la diversité des pratiques mathématiques.

Je suis également content que Crombie ait inclu les mathématiques parmi les sciences. Les mathématiques sont l'ensemble des sciences qui ont pour objet la quantité et l'ordre, l'étude du nombre, de la figure, de la fonction etc. Il n'y a que dans un cours de philosophie qu'on soit obligé de dire cela. Pour la plupart des gens, c'est évident. Mais il y a des philosophes des sciences, surtout des philosophes analytiques, qui ont tendance à parler des mathématiques comme de quelque chose d'autre que les sciences. Par science, ils entendent les sciences de la nature, ou les sciences empiriques, ou peut-être les sciences inductives.

La raison pour laquelle ils excluent les mathématiques des sciences est l'existence de questions philosophiques qui sont tout à fait spécifiques aux mathématiques. C'est surtout vrai dans la perspective de la métaphysique ou de la théorie de la connaissance. Oui, il y a beaucoup de distinctions à faire. Les philosophes ne manquent pas de ressources, en matière de distinctions. Kant a traité des mathématiques dans l'*Esthétique transcendantale*, et de la science de Galilée et de Newton dans l'*Analytique transcendantale*. Du Moyen Âge au temps de Descartes et de Leibniz, on parle de vérités éternelles. On peut aussi lire Wittgenstein et conclure que les théorèmes de mathématiques ne sont pas du tout des vérités ! Mais il a ses raisons.

À mon avis l'attitude la plus saine est de classer les mathématiques parmi les sciences. Après cela, on peut faire toutes les distinctions et regroupements que l'on veut. Les sciences physiques, si l'on veut, les sciences de la vie, les sciences humaines, les sciences mathématiques.

J'ai indiqué dans la deuxième leçon qu'on ne doit pas confondre les styles de pensée chez Crombie avec des sciences particulières. En général, les sciences et leurs différentes branches emploient plusieurs styles de pensée. La biochimie emploie à la fois le style du laboratoire, le style statistique, le style mathématique, et même peut-être le style de la taxinomie hiérarchique.

C'est un peu différent dans le cas des mathématiques elles-mêmes. À la différence des autres sciences, il est naturel de penser que le seul style de pensée qui soit employé dans les sciences mathématiques est mathématique. Ainsi, le style de pensée mathématique semble être l'essence de la mathématique. J'admets volontiers que le style de pensée mathématique est plus intrinsèque aux mathématiques que ce n'est le cas pour d'autres styles dans d'autres sciences particulières.

Crombie, quand il parle des sciences anciennes, parle du « pouvoir démonstratif de la géométrie et de l'arithmétique pour réunir toutes les sciences mathématiques et les techniques qui en dépendent, de l'astronomie, de l'optique et de la cartographie à la mécanique et à la musique, sous une forme commune de démonstration. » Une forme commune de démonstration, oui, mais le choix des sujets est plus généreux que d'habitude. L'idée est pertinente pour les origines grecques, mais elle reflète une perspective qui a changé depuis la Renaissance. Nous considérons l'astronomie, l'optique géométrique et la cartographie comme des sciences qui appliquent les mathématiques, des sciences dont les propositions sont empiriques, vraies ou fausses selon la structure du monde. En revanche, comme disent les philosophes, les découvertes des mathématiciens sont *a priori* : elles sont certaines, indépendantes du monde réel, vraies dans tous les mondes possibles – et je vous épargne toute la gamme des métaphores puissantes, captivantes, séduisantes, traditionnelles. Les métaphores qui expriment la perplexité des philosophes traditionnels face aux triomphes des mathématiques.

Démonstration et preuve

Crombie dit *démonstration*, et moi aussi je dis démonstration, mais souvent on peut aussi dire preuve. Les usages habituels des mots « démonstration » et « preuve » sont proches. Démonstration a l’air plus formel : raisonnement montrant la vérité d’une proposition par une démarche logico-déductive, à partir de prémisses, soit démontrées, soit tenues pour évidentes. De plus en plus, en philosophie des mathématiques, on dit « preuve » dans ce sens précis. On parle de la théorie des preuves, une sous-discipline de la logique mathématique. Cette modification modeste et graduelle de l’usage a, sans doute, été influencée par l’analogie avec l'anglais « proof » et la branche de la logique et des métamathématiques qui se nomme « proof theory ». En français, on lit « théorie des démonstrations » dans des textes de référence comme les articles de l’encyclopédie *Universalis*, mais dans les articles des logiciens, on parle de « théorie des preuves ». Par exemple, Jean-Yves Girard est l’auteur d’un article intitulé « Théorie des démonstrations » dans l’*Encycopédia Universalis*, mais quand il publie les résultats de ses recherches dans des revues spécialisées, il parle toujours de la théorie des preuves.

Pour ma part, je me conformerai à la tradition et je parlerai de démonstration. Je n’utilise le mot « preuve » que dans certaines occasions. Par exemple lorsque je cite Wittgenstein, parce que le mot allemand *Beweis* est rendu par « preuve » dans les traductions. Je cite les traductions non pas parce qu’elles sont exactes, mais parce que je m’aligne sur la convention des traducteurs. Wittgenstein travaillait à Cambridge en Angleterre, il écrivait en allemand et il a été traduit en anglais longtemps avant d’être publié en français. En anglais, on traduit toujours *Beweis* par « proof », et je considère que les traducteurs français ont été influencés par ce fait. (Même chose pour Lakatos, dont le livre *Proofs and Refutations* est traduit *Preuves et réfutations*.)

Voici une autre occasion d’employer le mot « preuve ». Selon une tradition qui remonte à l’Antiquité, le but des mathématiciens est de résoudre des problèmes : ils recherchent une démonstration de la solution, la démonstration d’un théorème. De nos jours, et bien sûr à Paris, beaucoup de mathématiciens disent que les grands mathématiciens ne sont pas grands parce qu’ils ont démontré un théorème, mais parce qu’ils ont introduit de nouvelles idées mathématiques qui ont apporté de nouvelles manières de faire des démonstrations.

Ils parlent souvent des idées nouvelles à utiliser dans les démonstrations, des idées qu’on peut appliquer à une gamme de problèmes ouverts, ou pour une analyse plus profonde de structures déjà connues. En faisant cela, on ne parle pas de la démonstration d’*un* théorème, et on ne vise pas l’idée qui est au fond de *cette* démonstration particulière. On parle d’une idée pour faire des démonstrations. Et dans ce cas les mathématiciens préfèrent employer le mot « preuve ». J’adopte cette façon de parler, et cette notion de la découverte de l’idée d’une preuve, ou simplement d’une idée-de-preuve. Beaucoup de démonstrations, concernant une gamme de théorèmes très variés, peuvent utiliser la même idée-de-preuve. La variété des applications d’une idée-de-preuve est une mesure de la richesse de l’idée, et donc de la grandeur de son inventeur.

Qu’est ce que « Thalès » a découvert ?

On a une réaction instinctive quand on comprend une démonstration, quand on voit *pourquoi* un énoncé doit être un théorème. Dans le mythe que j’affectionne, notre Thalès imaginaire a fait cette expérience. C’est l’expérience classique de la découverte, celle que fait l’esclave du *Ménon*, chez Platon. Socrate pose le problème de la duplication du carré. Il s’agit de construire un carré dont l'aire est double de celle d'un carré donné. Pour moi c'est le paradigme, non pas de la démonstration, mais de l'expérience de la découverte mathématique. Socrate soutient qu'il ne fait que poser des questions. Il dit que le garçon connaissait la solution depuis toujours. Peut-être la connaissait-il depuis une vie antérieure. Platon trouvait la possibilité de la démonstration *si* extraordinaire qu'il en fait un argument en faveur de l'immortalité de l'âme.

Beaucoup de commentateurs disent que c'est un truc. Socrate fournit à l'esclave plus de renseignements qu'il ne veut bien l'admettre. Pour moi, c'est sans importance. Que ce soit grâce aux questions et aux suggestions implicites de Socrate, ou par ses propres inférences, le garçon a compris la solution du problème. Il a produit et compris le squelette d'une démonstration. Il sait comment construire la duplication du carré, oui. Mais il a appris plus que cela. Il comprend pourquoi le carré construit sur la diagonale est le double du carré donné.

Le *Ménon* nous sert à illustrer ce qui a troublé Bertrand Russell en 1912, et qui lui fait dire que « le pouvoir apparent de prévoir des faits concernant des choses dont nous n'avons aucune expérience est certainement surprenant ».[6] Ce qui surprenait Russell, nous l'appelons « connaissance *a priori* ». L'exemple classique de la connaissance *a priori* se trouve dans le *Ménon*. En apparence, le jeune serviteur apprend à faire un carré d'une surface double de celle d'un carré donné par un simple processus de pensée et de questionnement judicieux. Il a déjà découvert un fait qui peut être confirmé par un géomètre. Par le questionnement et le tâtonnement intellectuel, le garçon est capable de prévoir un fait sur un sujet dont il n'a aucune expérience.

Wittgenstein : Une démonstration mathématique doit être synoptique

Wittgenstein a fait des remarques utiles sur des démonstrations de ce genre. En général, j'aurai plutôt à l'esprit le type de démonstrations que Wittgenstein qualifie d'*übersichtlich* – qu'on traduit par « synoptique ». Il emploie aussi le mot *übersehbar,* qui signifie « ce qu'on peut embrasser du regard, qui se prête à une vision synoptique ». Dans une de ses remarques sur les fondements des mathématiques, il s'est servi des guillemets pour appeler l'attention sur une idée qu'il jugeait très importante pour la phénoménologie des démonstrations :

> « Une preuve mathématique doit être synoptique ». (*übersichtlich.*) Nous appelons « preuve» uniquement une structure dont la reproduction est un exercice facile à résoudre. (*Remarques* III-§1, p. 137.)
>
> On doit pouvoir avoir une vue synoptique de la preuve. [Der Beweis muß übersehbar sein]. (*Remarques* III-§55, p. 170)

Voici les deux mots côte à côte :

> À la preuve appartient le caractère synoptique. Si le processus grâce auquel j'obtiens le résultat ne pouvait être dominé, je pourrais certes notifier le résultat qui nous donne ce nombre – quel fait cela doit-il me confirmer ? Je ne sais pas « ce que nous *devons* obtenir ». (*Remarques* I-§154, p. 91)
>
> [Zum Beweis gehört Übersichtlichkeit. Wäre der Prozeß, durch den ich das Resultat erhalte, unübersehbar, so könnte ich zwar das Ergebnis, daβ diese Zahl herauskommt, vermerken – welche Tatsache aber soll es mir bestätigen? Ich weiß nicht: „was herauskommen *soll*".]

6 Bertrand Russell, *Les Problèmes de la philosophie*, Alcan, 1923, v.o. 1912.

Il utilise un autre mot, *anschaulich*, traduit par « *évident* » :

> La preuve doit être un processus évident. Ou bien également : la preuve est le processus *évident*. » (*Remarques* III-§42, p. 159).

Le fait que nous puissions voir non seulement qu'un théorème est vrai, mais aussi pourquoi il doit être vrai, est l'un des phénomènes essentiels de *certaines* démonstrations. De certains types de démonstrations et de certains seulement. On a l'impression que « ça y est », qu'on a trouvé. Cette impression, nous le savons bien, peut se révéler illusoire. Tous ceux qui ont soi-disant trouvé une démonstration ont fait l'expérience de ces faux « eurêka ». Platon n'ignorait pas cela dans son exposition de la démonstration dans *Ménon*. La fermeté de la réflexion et la capacité de récapituler le raisonnement avec discernement sont des facteurs essentiels pour saisir la démonstration.

Mon hypothèse est qu'au sixième siècle avant JC les savants ioniens ont découvert la possibilité des démonstrations synoptiques. C'est le cœur du style démonstratif. L'autre aspect de ce style est la formalisation du raisonnement comme un processus qui commence avec des choses évidentes : les axiomes, les postulats de Crombie. Nous avons choisi la géométrie d'Euclide comme l'exposé le plus pur de cette méthode par axiomes et par démonstration. Selon les chercheurs qui ont fait l'histoire de ce texte, il présente une accumulation de méthodes particulières de démonstration. Nous pouvons déduire l'ordre chronologique de composition des parties du texte à partir de la densité et de la complexité des idées-de-preuve qu'on trouve dans la démonstration.

L'évidence en-soi

Je voudrais répéter une remarque de la première leçon. Quand il est question de « dire la vérité », cela suppose qu'il y ait des gens qui parlent. La véracité a donc deux aspects presque indépendants. Premièrement, la véracité requiert que la personne qui parle donne des informations exactes – entièrement conformes à la réalité. Deuxièmement, qu'il soit sincère, qu'il dise ce qu'il croit être vrai. Un des aspects concerne le contenu du discours, l'autre concerne l'intention du locuteur. La véracité est une vertu qui a deux vertus associées : l'exactitude et la sincérité. D'un côté on a l'exactitude, la justesse, les idées de ce genre. De l'autre côte, on a la sincérité et la fiabilité.

Il est évident que la démonstration introduit de nouveaux critères d'exactitude. Mais ce qui est plus intéressant, c'est qu'elle diminue la pression sur la sincérité. En effet, les preuves sont publiques, elles sont accessibles à tous ceux qui peuvent les comprendre. Thalès a fait une nouvelle démonstration, mais ses collègues doivent pouvoir la vérifier eux-mêmes – sinon, ce n'est pas une démonstration. L'une des conditions de la véracité, la sincérité, est remplacée par l'évidence, l'évidence en-soi. Je ne pense pas ici à l'évidence des postulats, mais à l'évidence des démonstrations qui sont synoptiques. Notons que, par contraste avec les démonstrations synoptiques, les calculs longs n'ont pas cette sorte d'évidence en-soi. Il faut répéter le calcul, ou utiliser deux personnes pour faire le même calcul, ou utiliser des astuces comme la comptabilité en partie double, brillante invention du quinzième siècle.

La « conclusion » de cette leçon est reportée à mardi prochain…

Dans le plan du cours, toujours provisoire, nous avons annoncé le titre de cette leçon comme *Démonstration et calcul*, et nous avons fait référence à la remarque de Wittgenstein,

« les mathématiques sont une mixture BIGARRÉE de techniques de preuve. »[7] Je n'ai que dit quelques mots sur le calcul. Je dois en dire plus sur la diversité des mathématiques. Il faut distinguer d'une part les démonstrations qui déduisent des conclusions à partir de postulats, et d'autre part le calcul. J'ai l'intention de montrer que, si on « rend compte de la bigarrure des mathématiques »[8], on peut éviter certaines questions traditionnelles concernant la connaissance *a priori* et la nécessité logique. Sinon éviter, au moins modifier. Il faut maintenant terminer cette leçon, mais je recommencerai mardi prochain avec la diversité des mathématiques et ses implications philosophiques.

[7] *Remarques* III-§46, p. 161, où mixture BIGARÉE = *BUNTES Gemisch*, majuscules dans l'original.
[8] *Remarques* III-§48, p. 166, où bigarrure = *Buntheit*.