Équations différentielles et systèmes dynamiques

M. Jean-Christophe Yoccoz, membre de l'Institut
(Académie des sciences), professeur

Cours : Échanges d'intervalles affines

Le cours portait cette année sur des résultats sur les échanges d'intervalles affines obtenus en collaboration avec Stefano Marmi, de la Scuola normale Superiore de Pisa, et Pierre Moussa (CEA, Saclay).

1. Soit $\mathcal{A}$ un alphabet fini, de cardinal $d \geq 2$ et soient

$$I = \bigsqcup_{\mathcal{A}} I^t_\alpha = \bigsqcup_{\mathcal{A}} I^b_\alpha$$

deux partitions *mod.*0 en intervalles ouverts non vides d'un intervalle ouvert borné I.

Un *échange d'intervalles standard* (resp. *affine*, resp. *généralisé*) est une transformation T définie sur $\sqcup_{\mathcal{A}} I^t_\alpha$ et dont la restriction I^t_α envoie cet intervalle sur I^b_α par une translation (resp. par une transformation affine préservant l'orientation, resp. par un homéomorphisme préservant l'orientation). On dit que T est normalisé si $I = (0,1)$.

L'ordre dans lequel apparaissent les intervalles dans les deux partitions est codé par deux applications π_t, $\pi_b : \mathcal{A} \to \{1 \,\ldots\, d\}$. La paire $\pi = (\pi_t, \pi_b)$ est la *donnée combinatoire* de T. On suppose toujours que cette donnée est *irréductible* :

$$\pi_t(\{1 \,\ldots\, k\}) \neq \pi_b(\{1 \,\ldots\, k\}) \qquad \forall 1 \leq k < d.$$

Les points $u^t_1 < \ldots < u^t_{d-1}$ qui séparent les I^t_α sont les *singularités* de T, les points $u^b_1 < \ldots < u^b_{d-1}$ qui séparent les I^b_α sont les singularités de T^{-1}. Une relation

$$T^m(u^b_i) = u^t_j, \qquad m \geq 0,\ 1 \leq i, j < d$$

est une *connexion*.

Lorsque $d = 2$, un échange d'intervalles standard normalisé s'identifie à une rotation sur le cercle $\mathbf{T} = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$; cette rotation est irrationnelle si et seulement si l'échange d'intervalles est sans connexion. Plus généralement, Keane a montré qu'un échange d'intervalles standard sans connexion est minimal.

2. Soit T un échange d'intervalles généralisé sans connexion, agissant sur un intervalle $I = (0, \ell)$. Posons $\widehat{\ell} = \max(u^t_{d-1}, u^b_{d-1}), \widehat{I} = (0, \widehat{\ell})$.

L'application de premier retour $\widehat{T}$ de T sur $\widehat{I}$ est un échange d'intervalles généralisé dont la donnée combinatoire $\widehat{\pi}$ s'écrit naturellement avec le même alphabet $\mathcal{A}$ que celle de π : on a $\widehat{\pi}_t = \pi_t$ si $u^t_{d-1} < u^b_{d-1}$, $\widehat{\pi}_b = \pi_b$ si $u^b_{d-1} < u^t_{d-1}$.

L'échange d'intervalles $\widehat{T}$ est aussi sans connexion. Il est standard si T est standard, affine si T est affine.

L'itération du processus $T \to \widehat{T}$ constitue l'algorithme de Rauzy-Veech. On pose $\widehat{\pi} =: R_t(\pi)$ pour $u^t_{d-1} < u^b_{d-1}$, $\widehat{\pi} =: R_b(\pi)$ pour $u^b_{d-1} < u^t_{d-1}$. Une *classe de Rauzy* est un ensemble de données combinatoires stable par R_t, R_b et minimal pour cette propriété. Le diagramme de Rauzy associé a pour sommets les éléments de la classe de Rauzy ; ses flèches (de types respectifs *top* et *bottom*) joignent un sommet π à $R_t(\pi)$ et $R_b(\pi)$.

Pour une donnée combinatoire π, on définit une matrice antisymétrique $\Omega = \Omega_\pi$ par

$$\Omega_{\alpha,\beta} = \begin{cases} 1 \text{ si } \pi_t(\alpha) < \pi_t(\beta) \text{ et } \pi_b(\alpha) > \pi_b(\beta), \\ -1 \text{ si } \pi_t(\alpha) > \pi_t(\beta) \text{ et } \pi_b(\alpha) < \pi_b(\beta), \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

L'entier $g \geq 1$ tel que $2g$ soit le rang de Ω_π est appelé genre de π. C'est le même pour tous les éléments d'une classe de Rauzy. C'est aussi le genre de la surface obtenue par suspension d'un échange d'intervalles standard ayant π pour donnée combinatoire.

3. Soit $\gamma : \pi \to \widehat{\pi}$ une flèche de type top (resp. bottom) et soient α_t, α_b les éléments tels que $\pi_t(\alpha_t) = \pi_b(\alpha_b) = d$. Le *gagnant* de γ est α_t (resp. α_b), et le *perdant* est α_b (resp. α_t).

Un chemin (fini) dans un diagramme de Rauzy est *complet* si chaque lettre de $\mathcal{A}$ est le gagnant d'au moins une flèche du chemin. Un chemin infini est ∞-*complet* s'il peut être écrit comme la concaténation d'une suite infinie de chemins complets : en d'autres termes, chaque lettre est le gagnant d'un nombre infini de flèches.

Pour chaque échange d'intervalles généralisé sans connexion T, de donnée combinatoire π, l'itération de l'algorithme de Rauzy-Veech produit un chemin infini γ_T issu de π dans le diagramme de Rauzy de π.

On rappelle que les chemins ∞-complets sont exactement les chemins γ_T obtenus par ce procédé à partir d'un échange d'intervalles **standard** sans connexion.

On dit qu'un échange d'intervalles généralisé sans connexion T est *irrationnel* (ou a un nombre de rotation irrationnel) si γ_T est ∞-complet. Le résultat suivant avait été démontré dans un cours antérieur.

Proposition *Soit T un échange d'intervalles généralisé irrationnel, et soit T_0 un échange standard tel que $\gamma_T = \gamma_{T_0}$. Alors T est semiconjugué à T_0 : il existe une application monotone croissante, continue, surjective h telle que*

$$h \circ T = T_0 \circ h.$$

Lorsque h n'est pas un homéomorphisme, il existe des points x tels que $h^{-1}(x)$ est un *intervalle errant* disjoint de ses itérés par T.

Rappelons que dans le cadre de la proposition, l'ensemble des échanges d'intervalles standard normalisés T_1 tels que $\gamma_{T_1} = \gamma_{T_0}$ est un simplexe de dimension $\leq g-1$ s'identifiant canoniquement à celui des mesures de probabilité T_0-invariantes.

Rappelons aussi que d'après le théorème de Masur et Veech, presque tout T_0 est uniquement ergodique.

4. Soit $\mathcal{D}$ un diagramme de Rauzy. Le *cocycle de Kontsevich-Zorich* au-dessus de la dynamique engendrée par l'algorithme de Rauzy-Veech est défini ainsi : à une flèche γ de $\mathcal{D}$, de gagnant α et de perdant β, on associe la matrice $B_\gamma := \mathbf{1} + E_{\beta,\alpha} \in SL(\mathbf{Z}^{\mathcal{A}})$; à un chemin $\underline{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, on associe le produit $B_{\underline{\gamma}} = B_{\gamma_n} \ldots B_{\gamma_1}$.

Soit T un échange d'intervalles généralisé sans connexion agissant sur un intervalle $I = \sqcup I^t_\alpha$; soit $\widetilde{T}$ un échange d'intervalles déduit de T par un certain nombre d'étapes de l'algorithme de Rauzy-Veech, correspondant à un chemin $\underline{\gamma}$ de $\mathcal{D}$; notons $\widetilde{I} = \sqcup \widetilde{I}^t_\alpha \subset I$ l'intervalle de définition de $\widetilde{T}$. Alors, le coefficient $B_{\underline{\gamma},\alpha\beta}$ est égal au temps passé par $\widetilde{I}^t_\alpha$ dans I^t_β avant son retour dans $\widetilde{I}$.

En particulier, supposons T (et donc aussi $\widetilde{T}$) affine ; soient w, $\widetilde{w} \in \mathbf{R}^{\mathcal{A}}$ les vecteurs tels que

$$|I^b_\alpha| = \exp w_\alpha \, |I^t_\alpha| , \qquad |\widetilde{I}^b_\alpha| = \exp \widetilde{w}_\alpha \, |\widetilde{I}^t_\alpha|$$

On a alors

$$\widetilde{w} = B_{\underline{\gamma}} \, w$$

Soit $\underline{\gamma}$ un chemin d'origine π, d'extrémité $\widetilde{\pi}$; on a

$$\Omega_{\widetilde{\pi}} = B_{\underline{\gamma}} \, \Omega_\pi \, {}^t B_{\underline{\gamma}} \, .$$

Cela signifie que les images $Im\ \Omega_\pi$ forment une famille de sous-espaces invariants par le cocycle de Kontsevich-Zorich, et que la restriction du cocycle à cette famille est symplectique pour la structure induite par les Ω_π. L'action du cocycle sur les quotients $\mathbf{R}^{\mathcal{A}} / Im\ \Omega_\pi$ est triviale (dans des bases convenables).

Avila et Viana ont montré que le spectre du cocycle restreint de Kontsevich-Zorich est **simple** : ses exposants sont donc, après normalisation appropriée du temps, de la forme

$$1 = \theta_1 > \ldots > \theta_g > \theta_{g+1} = -\theta_g > \ldots > \theta_{2g} = -1.$$

En particulier, le cocycle restreint est hyperbolique, un résultat auparavant démontré par Forni.

Pour presque tout échange standard T_0 et $0 < i \leq g$, on définit

$$E_i(T_0) = \{w \in \mathbf{R}^{\mathcal{A}}\,;\ \lim_{|\underline{\gamma}| \to +\infty} \frac{\log \| B_{\underline{\gamma}} w \|}{\log \| B_{\underline{\gamma}} \|} < \theta_i\}$$

où $\underline{\gamma}$ est une partie initiale de γ_{T_0}. C'est un sous-espace de codimension i ; l'hyperplan $E_1(T_0)$ s'identifie à l'espace des fonctions de moyenne nulle qui sont constantes sur chacun des $I_\alpha^t(T_0)$.

5. Soit $\mathcal{D}$ un diagramme de Rauzy, et soit γ un chemin ∞-complet dans $\mathcal{D}$. Pour $w \in \mathbf{R}^{\mathcal{A}}$, notons $Aff^{(1)}(\gamma, w)$ l'ensemble des échanges d'intervalles affines normalisés T tels que $\gamma_T = \gamma$ et

$$|I_\alpha^b| = \exp w_\alpha\, |I_\alpha^t|.$$

Nous montrons que $Aff^{(1)}(\gamma, w)$ n'est pas vide si et seulement si il existe un échange d'intervalles standard (normalisé) T_0 tel que $\gamma_{T_0} = \gamma$ et $\sum_\alpha \lambda_\alpha\, w_\alpha = 0$, où les λ_α sont les longueurs des intervalles I_α pour T_0. Dans le cas uniquement ergodique où T_0 est uniquement défini par la condition $\gamma_{T_0} = \gamma$, on a donc $Aff^{(1)}(\gamma, w) \neq \emptyset$ si et seulement si $w \in E_1(T_0)$.

Nous montrons aussi que $Aff^{(1)}(\gamma, w)$, lorsqu'il n'est pas vide, est un simplexe de dimension $< d$ qu'on peut décrire naturellement de la façon suivante.

Soit T^* un échange d'intervalles affine normalisé qui appartient à l'intérieur intrinsèque de $Aff^{(1)}(\gamma, w)$. Notons $\mathcal{T}(T^*)$ l'espace des fonctions $\mu \in L^\infty([0,1])$ qui sont T^*-invariantes et constantes sur chaque intervalle errant de T^*. L'espace tangent à $Aff^{(1)}(\gamma, w)$ en T^* s'identifie canoniquement à l'hyperplan $\mathcal{T}_0(T^*)$ des fonctions dans $\mathcal{T}(T^*)$ de moyenne nulle.

Plus précisément, soit $(T_{(s)})_{s \in [0,1]}$ un segment affine dans $Aff^{(1)}(\gamma, w)$ tel que $T_{(0)} = T^*$. Pour $s \in [0,1]$, posons

$$Z_s = \{T_{(s)}^m(u_i^b(s)), T_{(s)}^n(u_j^t(s))\,;\, m \geq 0, n \leq 0, 1 \leq i, j < d\}$$

où les $u_j^t(s)$, $u_i^b(s)$ sont les singularités de $T_{(s)}$, $T_{(s)}^{-1}$ respectivement.

Les points de Z_s sont des fonctions affines $z(s)$ de s, qui prennent des valeurs distinctes pour tout $s \in [0,1]$. On peut donc écrire

$$z(s) = z(0) + s\, v(z(0)),$$

où la fonction $v : Z_0 \to \mathbf{R}$ vérifie $v(z_1) - v(z_0) > z_0 - z_1$ pour tous $z_1 > z_0$ dans Z_0. Comme T^* appartient à l'intérieur de $Aff^{(1)}(\gamma, w)$, v est Lipschitzienne.

On étend v par continuité à $\overline{Z}_0$, puis à $[0, 1]$ tout entier par interpolation linéaire. On définit alors, pour $x, s \in [0, 1]$

$$h_s(x) = x + s\, v(x).$$

Pour $s \in [0, 1)$, h_s est un homéomorphisme vérifiant $h_s \circ T^* = T_{(s)} \circ h_s$. La dérivée distributionnelle μ de v appartient à $\mathcal{T}_0\,(T^*)$ et vérifie $\mu \geq -1$.

Inversement, une fonction $\mu \in \mathcal{T}_0\,(T^*)$ vérifiant $\mu \geq -1$ permet de construire en inversant les opérations précédentes un segment affine $(T_{(s)})_{s \in [0,1]} \subset Aff^{(1)}(\gamma, w)$ avec $T_{(0)} = T^*$.

L'espace $\mathcal{T}(T^*)$ se décompose naturellement en somme directe $\mathcal{T}(T^*) = \mathcal{T}_c \oplus \mathcal{T}_d$ où $\mathcal{T}_c$ (resp. $\mathcal{T}_d$) est le sous-espace formé des fonctions $\mu \in \mathcal{T}(T^*)$ s'annulant sur $[0, 1] - \overline{Z}_0$ (resp. sur $\overline{Z}_0$). La dimension r_d de $\mathcal{T}_d$ est le nombre d'orbites d'intervalles errants maximaux pour T^*. La dimension r_c de $\mathcal{T}_c$ est le nombre d'atomes dans la tribu (finie) des parties T^*-invariantes de $\overline{Z}_0$ mod.0. La dimension de $Aff^{(1)}(\gamma, w)$ est $r_d + r_c - 1$.

6. D'après le théorème de Denjoy, un difféomorphisme de classe C^2 du cercle dont le nombre de rotation est irrationnel n'a pas d'intervalle errant, et est donc topologiquement conjugué à une rotation. Ce résultat est encore vrai pour des homéomorphismes du cercle qui sont des difféomorphismes de classe C^2 par morceaux, et en particulier pour des homéomorphismes affines par morceaux.

Il est facile d'en déduire qu'un échange d'intervalles généralisé irrationnel, dont la donnée combinatoire est de genre 1, et dont la restriction à chaque I_α^t est un difféomorphisme de classe C^2, n'a pas d'intervalle errant ; un tel échange d'intervalles est donc topologiquement conjugué à un échange d'intervalles standard.

Katok et Herman ont montré qu'un difféomorphisme de classe C^2 du cercle dont le nombre de rotation est irrationnel (et plus généralement un homéomorphisme du cercle de nombre de rotation irrationnel qui est un difféomorphisme de classe C^2 par morceaux) est ergodique pour la mesure de Lebesgue.

Soit γ un chemin ∞-complet dans un diagramme de Rauzy de genre 1 ; dans ce cas, il existe un unique échange d'intervalles standard (normalisé) T_0 tel que $\gamma_{T_0} = \gamma$, et T_0 est uniquement ergodique. Soit $w \in \mathbf{R}^{\mathcal{A}}$ un vecteur tel que $Aff^{(1)}(\gamma, w)$ n'est pas vide, c'est-à-dire tel que $\sum_\alpha \lambda_\alpha\, w_\alpha = 0$, où les λ_α sont les longueurs des intervalles I_α pour T_0. D'après le résultat de Herman et Katok, il existe un unique élément $T^* \in Aff^{(1)}(\gamma, w)$, et on a dans le cadre de la section précédente $r_c = 1$, $r_d = 0$.

7. Soit π une donnée combinatoire de genre $g \geq 2$. Pour presque tout échange d'intervalles standard normalisé T_0 de donnée combinatoire π, les espaces $E_i(T_0) \subset \mathbf{R}^{\mathcal{A}}$, $0 < i \leq g$, associés au cocycle de Kontsevich-Zorich sont définis. Le résultat principal présenté dans le cours a été le suivant :

Théorème (Marmi-Moussa-Y.) *Pour presque tout échange d'intervalles standard normalisé T_0 de donnée combinatoire π, pour tout vecteur $w \in E_1(T_0) - E_2(T_0)$, pour tout échange d'intervalles affine $T^* \in Aff^{(1)}(\gamma_{T_0}, w)$, l'ensemble non-errant de T^* est de mesure de Lebesgue nulle : l'union des intervalles non-errants pour T^* est donc de mesure totale.*

Dans le cadre de la section 5, on a donc $r_c = 0$. Il n'est pas difficile de déduire de la démonstration du théorème et de l'ergodicité de la dynamique induite par l'algorithme de Rauzy-Veech que r_d prend la même valeur, indépendante de $w \in E_1(T_0) - E_2(T_0)$, pour presque tout T_0. Cette valeur est très probablement 1 (ce qui veut dire que $Aff^{(1)}(\gamma_{T_0}, w)$ est réduit à un point), mais nous ne savons pas le démontrer.

Levitt a construit il y a plus de vingt ans un exemple d'échange d'intervalles affine irrationnel ayant un intervalle errant. L'échange d'intervalles standard normalisé auquel l'exemple de Levitt est semiconjugué n'est pas uniquement ergodique.

Camelier et Gutierrez ont ensuite construit un exemple d'échange d'intervalles affine irrationnel ayant un intervalle errant pour lequel le chemin γ est le chemin périodique complet le plus simple dans l'unique diagramme de Rauzy avec $d = 4$, $g = 2$. Cet exemple a été étudié de façon plus approfondie par Cobo.

Plus récemment, Bressaud, Hubert et Maass ont généralisé l'exemple de Camelier-Gutierrez : les chemins ∞-complets γ pour lesquels ils construisent des échanges d'intervalles affines ayant un intervalle errant sont encore périodiques, la seule restriction étant la suivante : la matrice de Kontsevich-Zorich B associée à une période de γ a une valeur propre **réelle** $\theta_2 > 1$ qui est algébriquement conjuguée à la valeur propre de Perron-Frobenius θ_1 $(> \theta_2)$.

8. Soit T_0 un échange d'intervalles standard normalisé. Identifions $\mathbf{R}^{\mathcal{A}}$ à l'espace des fonctions sur $(0, 1)$ qui sont constantes sur chacun des I_α^t. Pour $n \in \mathbf{Z}$, $w \in \mathbf{R}^{\mathcal{A}}$ et $x \in (0, 1)$, notons $S_n\, w(x)$ la somme de Birkhoff

$$S_n\, w(x) = \begin{cases} \sum_0^{n-1} w(T_0^\ell(x)) & \text{si } n > 0, \\ -\sum_n^{-1} w(T_0^\ell(x)) & \text{si } n < 0, \\ 0 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

La démonstration du théorème dépend du résultat suivant.

Proposition *Pour presque tout échange d'intervalles standard normalisé T_0 de donnée combinatoire π, pour tout vecteur $w \in E_1(T_0) - E_2(T_0)$, il existe un point $x^* \in (0, 1)$ (n'appartenant pas à l'orbite des singularités de $T_0^{\pm 1}$) et, pour tout $\varepsilon > 0$, une constante $C(\varepsilon)$ tels qu'on ait, pour tout $n \in \mathbf{Z}$*

$$S_n\, w(x^*) \leq C(\varepsilon) - |n|^{\theta_2 - \varepsilon}.$$

L'estimation de la proposition permet de construire « à la Denjoy » un échange d'intervalles affine $T^* \in Aff^{(1)}\,(\gamma_{T_0}, w)$ ayant un intervalle errant, image inverse de x^* par la semiconjugaison reliant T^* à T_0. Pour obtenir la conclusion complète du théorème, il faut examiner de plus près la démonstration de la proposition.

9. Nous indiquons maintenant quelques éléments de la preuve de la proposition.

La dynamique associée à l'algorithme de Rauzy-Veech dans un diagramme de Rauzy $\mathcal{D}$ est définie sur des paires (π, λ), où π est un sommet de $\mathcal{D}$ et λ appartient au simplexe unité Δ de $\mathbf{R}^{\mathcal{A}}$. Son extension naturelle est définie sur des triplets (π, λ, τ), où τ appartient au polyèdre convexe

$$\Theta_\pi := \{\tau \in \mathbf{R}^{\mathcal{A}}\, ;\, \textstyle\sum_{\pi_t(\alpha) < k} \tau_\alpha > 0, \quad \sum_{\pi_b(\alpha) < k} \tau_\alpha < 0, \quad 1 < k \leq d\}.$$

La dynamique étant maintenant inversible, le théorème d'Oseledets associe à chacun des exposants simples θ_i du spectre de Lyapunov du cocycle de Kontsevich-Zorich un sous-espace $F_i(\pi, \lambda, \tau) \subset Im(\Omega_\pi) \subset \mathbf{R}^{\mathcal{A}}$ (pour presque tout (π, λ, τ)). Pour $0 < i \leq g$, on a (avec $E_0 = \mathbf{R}^{\mathcal{A}}$)

$$E_{i-1}\,(\pi, \lambda) = E_i(\pi, \lambda) \oplus F_i(\pi, \lambda, \tau).$$

Notons aussi que les sous-espaces $\oplus_1^k F_i$, pour $1 \leq k \leq g$, ne dépendent que de (π, τ) et pas de λ. En particulier, le vecteur unitaire positif $q(\pi, \tau)$ qui engendre F_1 ne dépend pas de λ. De même, il existe, au signe près, un unique vecteur unitaire $v(\pi, \tau)$, orthogonal à $q(\pi, \tau)$, tel que v et q engendrent $F_1 \oplus F_2$.

Soit $w = w(\pi, \lambda, \tau)$ le vecteur de la forme $w = v - tq$ qui engendre F_2. Comme $w \in E_1$, on a $< \lambda, w > = 0$, d'où

$$t = t(\pi,\lambda,\tau) = \frac{<\lambda, v(\pi,\tau)>}{<\lambda, q(\pi,\tau)>}\cdot$$

Il est facile de voir qu'il suffit de démontrer l'estimation de la proposition pour le vecteur $w(\pi, \lambda, \tau)$ (pour presque tout (π, λ, τ)), ou plutôt pour chacun des deux choix de ce vecteur, qui sont opposés l'un de l'autre.

10. Pour presque tout $(\pi,\ \tau)$, et tout $\alpha \in \mathcal{A}$, on construit une fonction $V_\alpha(x) = V_\alpha(\pi,\ \tau\ ;\ x)$ de la façon suivante.

Notons $(q^{(n)}\ (\pi,\ \tau))_{n\leq 0}$, $(v^{(n)}\ (\pi,\ \tau))_{n\leq 0}$ les orbites en temps négatif de $q(\pi,\ \tau)$, $v(\pi,\ \tau)$ sous l'action du cocycle de Kontsevich-Zorich ; pour $\alpha \in \mathcal{A}$ et $n \leq 0$, posons $u_\alpha^{(n)}(\pi,\tau) = (q_\alpha^{(n)}(\pi,\tau), v_\alpha^{(n)}(\pi,\tau))$.

Notons $(\pi^{(n)},\ \tau^{(n)})_{n\leq 0}$ l'orbite négative de $(\pi,\ \tau)$ sous l'extension naturelle de l'algorithme de Rauzy-Veech et $\gamma^{(n)} : \pi^{(n-1)} \to \pi^{(n)}$ les flèches associées.

Choisissons une suite $(T^{(n)})_{n\leq 0}$ d'échanges d'intervalles standard agissant sur des intervalles $I(n) = \sqcup I_\alpha^t(n)$ tels que $T^{(n)}$ se déduise de $T^{(n-1)}$ par un pas élémentaire de l'algorithme de Rauzy-Veech de flèche associée $\gamma^{(n)}$.

Notons $\Gamma_\alpha^{(n)}$ la ligne brisée dans $\mathbf{R}^2$ issue de 0 obtenue par concaténation des segments $u_{\beta_i}^{(n)}\ (\pi,\ \tau)$, où β_i est défini par

$$[T^{(n)}]^i(I_\alpha^t(0)) \subset I_{\beta_i}^t(n),$$

l'entier i variant entre 0 et le temps de retour de $I_\alpha^t(0)$ dans $I(0)$.

Comme les $q_\beta^{(n)}\ (\pi,\ \tau)$ sont strictement positifs, $\Gamma_\alpha^{(n)}$ est le graphe d'une fonction $V_\alpha^{(n)}(\pi,\ \tau)$. La définition du cocycle de Kontsevich-Zorich implique que les $(V_\alpha^{(n)}(\pi,\ \tau))_{n\leq 0}$ sont définis sur le même intervalle $[0,\ q_\alpha(\pi,\ \tau)]$ et vérifient $V_\alpha^{(n)}(\pi,\ \tau\ ;\ 0) = 0$, $V_\alpha^{(n)}(\pi,\ \tau\ ;\ q_\alpha(\pi,\ \tau)) = v_\alpha(\pi,\ \tau)$.

Il est facile de voir que la suite $(V_\alpha^{(n)}(\pi,\ \tau\ ;\ x))_{n\leq 0}$ converge uniformément en x, lorsque n tend vers $-\infty$, vers une limite $V_\alpha(\pi,\ \tau\ ;\ x)$. Cette fonction est höldérienne sur $[0,\ q_\alpha(\pi,\ \tau)]$.

Quand on effectue la même construction à partir de $w(\pi,\ \lambda,\ \tau)$ (au lieu de $v(\pi,\ \tau)$), on obtient une fonction $W_\alpha(\pi,\ \lambda,\ \tau\ ;\ x)$ reliée à la précédente par

$$W_\alpha(\pi,\ \lambda,\ \tau\ ;\ x) = V_\alpha(\pi,\ \tau\ ;\ x) - t(\pi,\ \lambda,\ \tau)x.$$

La relation entre ces fonctions et les sommes de Birkhoff considérées dans la proposition est la suivante. Notons comme précédemment β_0, β_1, … l'itinéraire de $I_\alpha^t(0)$ dans $I(n)$ pour $\mathrm{T}^{(n)}$ jusqu'à son retour dans $I(0)$. Pour i inférieur au temps de retour, posons

$$S_\alpha q^{(n)}(i) = \sum_0^{i-1} q_{\beta_j}^{(n)}(\pi,\tau)\,,$$

$$S_\alpha w^{(n)}(i) = \sum_0^{i-1} w_{\beta_j}^{(n)}(\pi,\lambda,\tau)\,.$$

On a alors

$$S_\alpha w^{(n)}\ (i) = W_\alpha(\pi,\ \lambda,\ \tau\ ;\ S_\alpha q^{(n)}(i)).$$

Il est donc important de comprendre les propriétés des fonctions $W_\alpha(\pi, \lambda, \tau\,; x)$, pour presque tout (π, λ, τ). Nous montrons par exemple que ces fonctions prennent leur valeur maximale en un unique point de leur intervalle de définition $[0, q_\alpha(\pi, \tau)]$. C'est cette propriété (en fait, une version quantitative plus précise de cette propriété) qui est à la base de la construction du point x^* de l'énoncé de la proposition, puis de la preuve de l'estimation annoncée par la proposition.

Conférences, Missions

21-23 octobre 2008 : Mission à Pise.

27-31 octobre 2008 : Mission à Brasilia.

3-7 novembre 2008 : Mission et Conférence à la City University of Hong-Kong.

13 novembre 2008 : Conférence à Brest.

4-30 janvier 2009 : Cours à l'Insriruro de Matematica Pura e Aplicada de Rio de Janeiro : 12 conférences de 2 heures.

6-12 mars 2009 : Mission à Sienne et Pise. Une conférence à l'Université de Sienne.

12 mai 2009 : Conférence à l'Université de Lille.

25-29 mai 2009 : Distinguished Lecture Series au Fields Institute à Toronto (3 conférences).

8-12 juin 2009 : Une conférence lors d'un congrès à l'Université de Stony Brook (New York).

22-25 juin 2009 : Une conférence lors d'un colloque à Luminy (Marseille).

6-10 juillet 2009 : Coorganisateur d'un colloque de Systèmes Dynamiques à Oberwolfach.

Publications

– Avec S. Marmi et P. Moussa, Affine interval exchange maps with a wandering interval. Accepté aux Proceedings of the London Math. Soc.

– Avec A. Avila et J. Bochi, Uniformly hyperbolic finite-valued SL (2, **R** - cocycles. Accepté aux Commentarii Math. Helv.