Équations différentielles et systèmes dynamiques

M. Jean-Christophe Yoccoz, membre de l'Institut
(Académie des Sciences), professeur

Cours : Échanges d'intervalles

1. En guise d'introduction à l'étude systématique des échanges d'intervalles, une classe de systèmes dynamiques qui comprend et généralise les rotations sur le cercle, on a rappelé les liens qui les relient aux billards polygonaux rationnels et aux surfaces de translation.

Un **billard polygonal** est un ouvert connexe borné U du plan dont le bord ∂U est union finie de segments rectilignes. Il est **rationnel** si les angles entre les directions des segments du bord sont des multiples rationnels de π.

Le flot du billard associé à U décrit le mouvement d'une particule se déplaçant dans U avec une vitesse uniforme et rebondissant élastiquement sur le bord de U ; on stoppe une trajectoire aboutissant à un sommet de U.

Une **surface de translation** est définie par :
— une surface topologique compacte connexe M ;
— une partie finie non vide Σ de M ;
— un atlas maximal de cartes de $M - \Sigma$ par des ouverts de $\mathbf{C}$, tel que les changements de cartes soient localement des translations.

On exige de plus qu'en chaque point q de Σ, il existe un revêtement ramifié d'un voisinage de q sur un voisinage de 0 dans $\mathbf{C}$ (de degré fini m_q) dont les sections locales soient des cartes de l'atlas.

Il revient au même de se donner une structure complexe sur M et une 1-forme holomorphe ne s'annulant pas hors de Σ. L'ordre du zéro de la 1-forme en $q \in \Sigma$ est $m_q - 1$.

Le genre de g est relié aux indices de ramification par la formule classique

$$2g - 2 = \sum_q (m_q - 1).$$

Étant donné un billard polygonal rationnel U, la façon la plus efficace d'étudier le flot associé est de construire une surface de translation M et d'y étudier les champs de vecteurs constants (dans l'atlas canonique). Soit G le sous-groupe fini de O (2, $\mathbf{R}$) engendré par les symétries par rapport aux segments du bord. On obtient M par une compactification appropriée de $U \times G$, les sommets de ∂U devenant les points de Σ. Les trajectoires dans U correspondent aux géodésiques de M (pour la métrique plate singulière définie par l'atlas canonique).

Si M est une surface de translation et g un élément de GL (2, $\mathbf{R}$), on obtient sur M une autre structure de surface de translation en composant par g (opérant sur $\mathbf{R}^2 = \mathbf{C}$) les cartes de l'atlas canonique.

On normalise en général l'orientation et l'aire totale ; on obtient alors une action de SL (2, $\mathbf{R}$) sur l'espace des modules pour les surfaces de translation (normalisées). La restriction au sous-groupe diagonal diag (e^t, e^{-t}) est appelée **flot de Teichmuller**.

Soit M une surface de translation ; pour chaque $q \in \Sigma$, il existe exactement m_q trajectoires du champ de vecteur vertical qui aboutissent en q (resp. émergent de q) ; on les appelle séparatrices entrantes (resp. sortantes).

Soit S un segment géodésique ouvert borné non vertical sur M ; l'application de premier retour T_S du champ de vecteurs vertical sur S est un **échange d'intervalles (linéaire)** : le domaine $D(T_S)$ (resp. l'image $I(T_S)$) est égal à S privé d'un nombre fini de points, et la restriction de T_S à chaque composante de $D(T_S)$ est une translation (dans la coordonnée naturelle du segment géodésique S).

Le nombre d de composantes de $D(T_S)$ (ou $I(T_S)$) est au plus égal au nombre $\Sigma\, m_q$ de séparatrices entrantes (ou sortantes) ; on a $d = \Sigma\, m_q$ si et seulement si chaque séparatrice entrante rencontre S.

2. Donnons maintenant une définition un peu plus précise des échanges d'intervalles.

Soit I un intervalle ouvert borné. Un échange d'intervalles (généralisé) est une bijection T d'un domaine $D(T) \subset I$ sur une image $I(T) \subset I$ tel que $I - D\,(T)$, $I - I(T)$ soient finis et la restriction de T à chaque composante de $D(T)$ est un homéomorphisme préservant l'orientation sur une composante de $I(T)$. On dit que T est affine (res. linéaire) si ces restrictions sont affines (resp. des translations). Un étiquetage pour T est la donnée d'un alphabet A et de bijections de A sur les ensembles de composantes connexes de $D(T)$ et $I(T)$, compatibles avec la dynamique. On notera en général $d = \# A$ le nombre de composantes connexes de $D(T)$ ou $I(T)$; on notera π_0 (resp. π_1) la bijection de A sur $\{1, ..., d\}$ qui indique l'ordre dans lequel sont rangées les composantes de $D(T)$ (resp. de $I(T)$). Le triplet (A, π_0, π_1) forme les **données combinatoires** de T. Lorsque T est linéaire, il suffit de connaître en outre le **vecteur des longueurs** $\lambda = (\lambda_\alpha)_{\alpha \in A}$ des composantes connexes de $D(T)$ ou $I(T)$.

On suppose en général que les données combinatoires sont **irréductibles** : pour $k < d$, π_0^{-1} ({1,..., k}) est distinct de π_1^{-1} ({1,..., k}) ; le cas général s'y ramène.

Pour un échange linéaire, le **vecteur de translation** $\delta = (\delta_\alpha)_{\alpha \in A}$ est formé des valeurs de l'application localement constance $x \mapsto T(x) - x$. Il est relié au vecteur des longueurs par la formule

$$\delta = \Omega\lambda$$

avec $\Omega_{\alpha\beta} = 1$ si $\pi_1\beta < \pi_1\alpha$ et $\pi_0\beta > \pi_0\alpha$, $\Omega_{\alpha\beta} = -1$ si $\pi_1\beta > \pi_1\alpha$ et $\pi_0\beta < \pi_0\alpha$, $\Omega_{\alpha\beta} = 0$ sinon.

Étant donné un échange d'intervalles linéaire T, on pourra construire par suspension une surface de translation si on se donne de surcroît des **données de suspension** : à savoir une complexification $\xi = \lambda + i\tau \in \mathbf{C}^A$ du vecteur des longueurs vérifiant pour tout $0 < k < d$

$$\sum_{\pi_0\,\beta \leq k} \tau_\beta > 0, \sum_{\pi_1\,\beta \leq k} \tau_\beta < 0.$$

Les composantes de $h = -\Omega\tau$ sont alors strictement positives. La surface de translation M est caractérisée par les propriétés suivantes : I s'injecte comme un segment horizontal de M ; T est l'application de retour du champ vertical sur ce segment horizontal ; le temps de retour est la composante appropriée du vecteur h ; l'extrémité gauche de I est un point de Σ ; enfin τ_α est la différence de hauteur entre le point de Σ à droite et le point de Σ à gauche de la bande verticale de nom α (de largeur λ_α, de hauteur h_α).

La construction fournit une base naturelle $([\xi_\alpha])_{\alpha\in A}$ pour le groupe d'homologie relative $H_1(M, \Sigma, \mathbf{Z})$ et une base naturelle $([\theta_\alpha])_{\alpha\in A}$ pour le groupe d'homologie $H_1(M - \Sigma, \mathbf{Z})$. Ces bases sont mises en dualité par la forme d'intersection.

Pour l'application canonique i :

$$H_1(M - \Sigma, \mathbf{Z}) \to H_1(M, \mathbf{Z}) \to H_1(M, \Sigma, \mathbf{Z}),$$

on a

$$i([\theta_\alpha]) = \sum \Omega_{\alpha\beta}[\xi_\beta].$$

On a des considérations analogues à propos des groupes de cohomologie.

3. Appelons singularités d'un échange d'intervalles généralisé T les points de $I - D(T)$ et singularités de T^{-1} ceux de $I - I(T)$.

Une **liaison** est un segment fini d'orbite de T qui commence par une singularité de T^{-1} et finit par une singularité de T.

Keane a montré qu'un échange d'intervalles linéaire sans liaison est minimal. Il a aussi montré qu'un échange d'intervalles linéaire est sans liaison dès que les longueurs λ_α sont rationnellement indépendantes.

4. Rauzy et Veech ont mis au point un algorithme de fraction continue pour les échanges d'intervalles qui joue le même rôle que l'algorithme usuel pour les homéomorphismes du cercle, correspondant au cas $d = 2$. Zorich a ensuite perfectionné cet algorithme.

Soit T un échange d'intervalles (généralisé) sans liaison sur un intervalle $I = (0, \lambda^*)$. Les singularités de T sont donc distinctes de celles de T^{-1}. Notons $\hat{\lambda}^*$ la singularité de T ou T^{-1} qui se trouve le plus à droite, et considérons l'application de premier retour $\hat{T}$ de T sur $\hat{I} := (0, \hat{\lambda}^*)$. C'est un échange d'intervalles sans liaison sur $\hat{I}$; le pas élémentaire de l'algorithme de Rauzy-Veech associe $\hat{T}$ à T.

On dit que ce pas est de type 0 (resp. de type 1) si $\hat{\lambda}^*$ est une singularité de T^{-1} (resp. de T). On peut étiqueter $\hat{T}$ de façon naturelle par le même alphabet A utilisé pour un étiquetage de T. Si le pas est de type $\varepsilon \in \{0, 1\}$ et les données combinatoires de T sont (π_0, π_1), on note $(\hat{\pi}_0, \hat{\pi}_1) = R_\varepsilon (\pi_0, \pi_1)$ celles de $\hat{T}$; on a $\hat{\pi}_\varepsilon = \pi_\varepsilon$. Lorsque T est linéaire, on note $\hat{\lambda}$ le vecteur des longueurs de $\hat{T}$; on a

$$\lambda = V_\varepsilon (\pi_0, \pi_1)\, \hat{\lambda},$$

où $V_\varepsilon (\pi_0, \pi_1)$ est la matrice de $SL(\mathbf{Z}^A)$ définie comme suit : en notant α_ε l'élément de A tel que $\pi_\varepsilon (\alpha_\varepsilon) = d$, $V_\varepsilon - \mathbf{1}$ est la matrice élémentaire $\mathbf{E}_{\alpha_\varepsilon \alpha_{1-\varepsilon}}$.

Considérons le graphe dont les sommets sont les données combinatoires irréductibles pour un alphabet A donné et dont les arêtes (de type 0 ou 1) joignent un sommet (π_0, π_1) à $R_0 (\pi_0, \pi_1)$ et $R_1 (\pi_0, \pi_1)$. Chaque sommet est alors aussi extrémité de deux arêtes. On appelle **diagramme** de Rauzy une composante connexe d'un tel graphe. On appelle **nom** (resp. **nom secondaire**) d'une arête de type ε la lettre α telle que $\pi_\varepsilon (\alpha) = d$ (resp. $\pi_{1-\varepsilon} (\alpha) = d$).

Le pas élémentaire de l'algorithme peut être défini au niveau des données de suspension, *via* la formule

$$\zeta = V_\varepsilon (\pi_0, \pi_1)\, \hat{\zeta}.$$

Les surfaces M et $\hat{M}$ construites à partir de (T, ζ) et $(\hat{T}, \hat{\zeta})$ sont canoniquement isomorphes.

5. Soit T un échange d'intervalles généralisé sans liaison, étiqueté par un alphabet A. Soit $\mathcal{D}$ le diagramme de Rauzy contenant les données combinatoires de T. En partant de $T = T^{(0)}$ et en itérant le pas élémentaire de l'algorithme de Rauzy-Veech, on obtient une suite d'échanges d'intervalles $(T^{(n)})_{n \geq 0}$ sur une suite décroissante d'intervalles $(I^{(n)})_{n \geq 0}$, $T^{(n)}$ étant l'application de premier retour sur $I^{(n)}$ de $T^{(m)}$ pour tous $m \leq n$.

Chaque $T^{(n)}$ est étiqueté par l'alphabet A ; le passage de $T^{(n)}$ à $T^{(n+1)}$ est associé à une arête $\gamma^{(n+1)}$ du diagramme de Rauzy $\mathcal{D}$.

On obtient un chemin infini $\bar{\gamma} = (\gamma^{(n)})_{n \geq 1}$ dans $\mathcal{D}$ issu du sommet représentant les données combinatoires de T.

À tout chemin fini γ dans $\mathcal{D}$ est associée une matrice $Q(\gamma) \in SL(\mathbf{Z}^A)$, produit des matrices V correspondant aux arêtes de γ. En particulier, lorsque T est linéaire, les vecteurs de longueurs $\lambda^{(n)}$ des $T^{(n)}$ sont reliés par des formules

$$\lambda^{(m)} = Q^{(m,n)}\,\lambda^{(n)},\ m \leq n.$$

Le coefficient $Q_{\alpha\beta}^{(m,n)}$ a l'interprétation dynamique suivante : c'est le temps passé, sous itération de $T^{(m)}$, par la composante $I_\beta^{(n)}$ de $D(T^{(n)})$ dans la composante $I_\alpha^{(m)}$ de $D(T^{(m)})$ avant retour dans $I^{(n)}$.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un chemin infini dans $\mathcal{D}$ soit associé à un échange d'intervalles linéaire sans liaison est qu'il soit **plein** : chaque nom de A est pris par une infinité d'arêtes du chemin. Pour un tel chemin, pour tout $m \geq 0$, on a $Q_{\alpha\beta}^{(m,n)} > 0$ pour tous $\alpha, \beta \in A$ dès que n est assez grand.

L'ensemble des vecteurs de longueurs correspondant à un chemin infini plein $\bar{\gamma}$ est un cône simplicial fermé de dimension $\leq g$ (g étant le genre d'une surface de translation construite par suspension ; il ne dépend que de $\mathcal{D}$) privé de l'origine. Ses points sont en correspondance biunivoque avec les mesures finies invariantes par l'un quelconque des échanges d'intervalles considérés (qui se déduisent les uns des autres par conjugaison topologique).

6. Soit T un échange d'intervalles généralisé sans liaison dont le chemin associé dans $\mathcal{D}$ est plein : soit T_0 un échange d'intervalles linéaire associé au même chemin. Il existe alors une semi-conjugaison de T sur T_0.

Cette semi-conjugaison n'est, en général, pas injective : une construction à la Denjoy permet d'éclater un ensemble dénombrable d'orbites en intervalles errants ; la même construction permet de considérer les échanges d'intervalles comme des homéomorphismes (sur des ensembles de Cantor obtenus par éclatement des orbites des singularités de T et T^{-1}.

7. Un échange d'intervalles généralisé ne possède pas plus de g mesures de probabilité invariantes ergodiques. Pour tout g, cette borne est optimale : il existe un échange d'intervalles dont la surface de suspension est de genre g et qui a exactement g mesures de probabilité invariantes ergodiques.

Cependant, Mazur et Veech ont montré que pour tout choix (irréductible) de donnée combinatoire, presque tout vecteur de longueurs produit un échange d'intervalles uniquement ergodique. Parmi les nombreuses démonstrations de ce résultat déjà classique, on a exposé celle qui est basée sur le fait suivant : pour presque tout choix de vecteurs de longueurs, il existe $N > 0$ tel qu'on ait $Q_{\alpha,\beta}^{(n,n+N)} > 0$ pour tous $\alpha, \beta \in A$ et des entiers n arbitrairement grands.

8. L'algorithme de Rauzy-Veech définit une dynamique de l'espace des paramètres Som $\mathcal{D} \times \mathbf{R}_+^A$ dans lui-même, telle que chaque point a 2 antécédents.

Complexifions l'espace des paramètres en y incluant les données de suspension, soumises aux contraintes mentionnées ci-dessus. Les formules définissant l'algorithme de Rauzy-Veech se prolongent à ce cadre, la dynamique dans l'espace des paramètres complexifié devenant inversible.

Comme la transformation des vecteurs ξ correspondants s'effectue au moyen de matrices unimodulaires, la mesure de Lebesgue sur l'espace des paramètres complexifié est invariante.

On restreint cette mesure aux paramètres correspondant à un intervalle de longueur 1 et à une surface d'aire 1, puis on projette sur l'espace des paramètres (normalisés) initial : on obtient, suivant Veech, une mesure équivalente à la mesure de Lebesgue, invariante par l'algorithme de Rauzy-Veech. Cependant, même dans le cas $d = 2$ des rotations sur le cercle, cette mesure est infinie.

Zorich a su contourner ce problème en accélérant le temps dans l'algorithme : on regroupe en une seule étape toutes les arêtes consécutives de même nom. Cela revient, au niveau de la dynamique dans l'espace des paramètres complexifié, à considérer l'application de retour sur une « moitié » appropriée de cet espace. Mais cela suffit pour que la mesure invariante (dans l'espace des paramètres initial) pour cet algorithme accéléré, équivalente à la mesure de Lebesgue, soit finie au lieu d'être infinie.

Les densités des mesures de Veech et de Zorich se présentent sous la même forme : une somme finie de termes de la forme $(\prod_{i=1}^{d} \varphi_i(\lambda))^{-1}$, où les φ_i sont des formes linéaires à coefficients positifs ou nuls. Pour contrôler ces densités près du bord, il faut savoir sur quelles facettes du cône simplicial $\{\lambda_\alpha > 0\}$ s'annulent les formes φ_i, ce qui repose sur de délicates considérations combinatoires. Pour la mesure de Zorich m sur l'espace des paramètres normalisés, cela conduit à l'estimation :

$$m\,(\{\min_\alpha \lambda_\alpha < \varepsilon\}) \leq C\,(\log \varepsilon^{-1})^{d-2}\,\varepsilon.$$

Les mesures construites par Veech et Zorich sont ergodiques pour les algorithmes correspondants : cela résulte d'un argument classique de distorsion bornée (pour les jacobiens des transformations considérées). On peut donc appliquer le théorème ergodique multiplicatif d'Oseledets au cocycle

$$X \times \mathbf{R}^{\mathcal{A}} \to X \times \mathbf{R}^{\mathcal{A}},$$

$$(x, v) \mapsto (\mathcal{Z}(x), {}^t Z_1(x) v).$$

On a désigné par X l'espace des paramètres normalisés, par $\mathcal{Z}$ la transformation associée au pas élémentaire de l'algorithme de Zorich, et par Z_1 la matrice de $SL(\mathbf{Z}^{\mathcal{A}})$ produit des matrices V correspondant aux arêtes constituant ce pas élémentaire.

Soient $\theta_1 \geq \theta_2 \geq \ldots \geq \theta_d$ les exposants de Lyapunov de ce cocycle. Comme le cocycle préserve le sous-espace égal à l'image de Ω, et que sa restriction à ce sous-espace est symplectique, on a $\theta_i + \theta_{d+1-i} = 0$ pour tout i et $\theta_i = 0$ pour $g < i \leq d - g$. Veech a montré, dans l'esprit du théorème de Perron-Frobenius, qu'on a $\theta_1 > \theta_2$. Forni a prouvé que $\theta_g > 0$; tout récemment, Avila et Viana ont montré qu'on a $\theta_i > \theta_{i+1}$ pour tout $1 \leq i \leq g$.

9. L'accélération de l'algorithme de Rauzy-Veech introduite par Zorich est suffisante, on l'a vu, pour obtenir une mesure finie invariante ergodique équivalente à la mesure de Lebesgue.

Pour d'autres problèmes, il est utile d'accélérer encore plus l'algorithme. Une façon commode de procéder est la suivante. Au lieu de découper, comme le fait Zorich, un chemin infini plein (dans un diagramme de Rauzy $\mathcal{D}$) en segments maximaux formés d'arêtes de même nom, on découpe ce chemin en segments maximaux formés d'arêtes ne prenant pas tous les noms de A.

La justification principale pour cette procédure est la suivante : si un chemin fini dans $\mathcal{D}$ est composé d'au moins $2\,d - 3$ tels segments (pour $d \geq 3$; lorsque $d = 2$, il faut 2 segments), la matrice de $SL\,(\mathbf{Z}^A)$ associée à ce chemin a tous ses coefficients strictement positifs.

Cette accélération de l'algorithme de Rauzy-Veech produit, à partir d'un échange d'intervalles linéaire sans liaison $T = T(0)$ sur un intervalle $I = I(0)$, une suite $(T(n))_{n \geq 0}$ d'échanges d'intervalles sur une suite décroissante $(I(n))_{n \geq 0}$. On note $Z(n)$ la matrice de $SL\,(\mathbf{Z}^A)$ qui relie les vecteurs de longueurs successifs par la formule

$$\lambda(n-1) = Z(n)\,\lambda(n).$$

On note $Q\,(m, n)$ le produit

$$Q\,(m, n) = Z(m+1)\,\ldots\,Z(n).$$

On a donc

$$Q_{\alpha\beta}(m, n) > 0$$

pour tous $\alpha, \beta \in A$, $n \geq m + 2d - 3$ ($n \geq m + 2$ si $d = 2$).

10. On s'est ensuite intéressé aux sommes de Birkhoff pour un échange d'intervalles linéaire sans liaison (ou pour un échange généralisé semi-conjugué à un tel échange linéaire).

Il est utile d'introduire et d'étudier des sommes de Birkhoff d'un type spécial étroitement relié à l'algorithme de fraction continue.

Soit φ une fonction sur l'intervalle $I(m)$ où agit $T(m)$. Pour tout $n \geq m$, on définit

$$S\,(m, n)\varphi(x) = \sum_{0 \leq i < Q_x(m,n)} \varphi \circ [T(m)]^i(x),$$

où $x \in I(n)$ et $Q_x(m, n)$ désigne le temps de retour de x dans $I(n)$ sous l'action de $T(m)$. On a, pour $x \in I_\beta(n)$

$$Q_x(m, n) = \sum_\alpha Q_{\alpha\beta}(m, n)$$

On notera $\Gamma(m)$ l'espace des fonctions φ sur $I(m)$ qui sont constantes sur chaque composante du domaine de $T(m)$. Il est clair que $S(m, n)$ envoie $\Gamma(m)$ dans $\Gamma(n)$. De plus, dans les bases canoniques de $\Gamma(m)$ et $\Gamma(n)$, la matrice de $S(m, n)$ n'est autre que la **transposée** de $Q(m, n)$.

Notons $BV(I(m))$ l'espace des fonctions φ définies sur le domaine de $T(m)$ et de variation bornée dans chaque composante de ce domaine ; posons

$$\operatorname{Var} \varphi = \Sigma_\alpha \operatorname*{Var}_{I_\alpha(m)} \varphi$$

(les éventuelles discontinuités de φ aux singularités de $T(m)$ n'entrent donc pas en compte dans le calcul de Var φ).

Soient $n \geq m$; pour $\varphi \in BV(I(m))$, on a $S(m, n)\, \varphi \in BV(I(n))$ avec

$$\operatorname{Var} S(m, n)\, \varphi \leq \operatorname{Var} \varphi.$$

Contrôler la valeur moyenne de $S(m, n)\, \varphi$ sur chaque composante du domaine de $T(n)$ est plus délicat. Le problème est le suivant : si φ est de moyenne nulle sur $I(m)$, alors $S(m, n)\, \varphi$ est de moyenne nulle sur $I(n)$. Par contre, lorsque φ est de moyenne nulle sur **chaque composante** du domaine de $T(m)$, il n'est en général pas vrai que $S(m, n)\, \varphi$ soit de moyenne nulle sur chaque composante du domaine de $T(n)$.

Pour obtenir un résultat de type Denjoy-Koksma, c'est-à-dire un contrôle C^0 des sommes de Birkhoff $S(0, n)\, \varphi$ pour une fonction $\varphi \in BV(I(0))$ de moyenne nulle, il nous faut supposer que les données combinatoires vérifient $d = 2g$, c'est-à-dire que la surface de translation associée a un seul point marqué. Sous une hypothèse diophantienne que nous ne détaillerons pas ici, on montre qu'il existe un opérateur linéaire p

$$BV(I(0)) \to \Gamma(0) / \Gamma_{cs}(0)$$

défini par les propriétés suivantes :

1. $\Gamma_{cs}(0)$ est le sous-espace de $\Gamma(0)$ constitué des fonctions χ vérifiant

$$\sup_{n \geq 0} \| S(0, n)\, \chi \|_\infty < +\infty\ ;$$

la restriction de p à $\Gamma(0)$ est alors la projection canonique ;

2. le noyau de p est constitué des fonctions φ vérifiant

$$\sup_{n \geq 0} \| S(0, n)\, \varphi \|_\infty < +\infty.$$

11. Des résultats plus significatifs, et d'une portée plus générale, sur les sommes de Birkhoff sont obtenus lorsqu'on exige plus de régularité de la fonction φ.

On a présenté un résultat obtenu en collaboration avec S. Marmi et P. Moussa, concernant l'équation cohomologique

$$\psi - \psi \circ T = \varphi.$$

Ce travail était motivé par la remarquable percée réalisée il y a quelques années par G. Forni ; il considère l'équation cohomologique en temps continu associée à un champ de vecteurs constant sur une surface de translation. Il résout, dans des espaces de Sobolev appropriés, l'équation cohomologique pour presque toute direction du champ de vecteurs. Nous souhaitions rendre explicite cet ensemble de mesure totale en le présentant sous la forme d'une condition diophantienne appropriée.

Dans l'équation cohomologique ci-dessus, la donnée φ appartient à l'espace $BV^1_0(I)$ défini comme suit : φ est absolument continue sur le domaine de T ; la dérivée $D\varphi$ est de variation bornée et de moyenne nulle sur ce domaine. La solution désirée ψ est bornée sur I.

Il y a trois conditions requises sur T ; les deux premières sont automatiquement satisfaites lorsque $d = 2$, mais pas lorsque $d > 2$.

(1) Notons $\Gamma_s(m)$ le sous-espace de $\Gamma(m)$ formé des fonctions φ telles qu'il existe $\sigma > 0$, $C > 0$ vérifiant

$$\| S(m, n)\ \varphi \| \leq C \| Q(m, n)\|^{-\sigma} \| \varphi \|$$

pour tout $n \geq m$.

L'opérateur $S(m, n)$ envoie $\Gamma_s(m)$ dans $\Gamma_s(n)$; notons $S^b(m, n)$ l'opérateur de $\Gamma(m) / \Gamma_s(m)$ dans $\Gamma(n) / \Gamma_s(n)$ déduit de $S(m, n)$ par passage aux quotients. On exige que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $C_\varepsilon > 0$ vérifiant, pour tous $m \leq n$:

$$\| S(m, n) / \Gamma_s(m) \| \leq C_\varepsilon \| Q(0, n) \|^\varepsilon,$$

$$\| [S^b(m, n)]^{-1} \| \leq C_\varepsilon \| Q(0, n) \|^\varepsilon.$$

(2) Notons $\Gamma_0(m)$ l'hyperplan de $\Gamma(m)$ formé des fonctions de moyenne globale nulle.

On exige qu'il existe $\theta > 0$, $C > 0$ tel qu'on ait

$$\| S(0, m)/\Gamma_0(0) \| \leq C \| Q(0, m) \|^{1-\theta}.$$

(3) La dernière condition dépend d'un paramètre supplémentaire τ qui doit être assez petit.

On exige d'avoir, pour tout $n \geq 0$

$$\| Z(n + 1) \| \leq C \| Q(0, n) \|^\tau.$$

Lorsque $d = 2$, on reconnaît la condition diophantienne usuelle. On dit que T est de type Roth si (1), (2) sont vérifiées pour des valeurs appropriées de σ et θ et (3) est vérifiée pour tout $\tau > 0$.

L'énoncé est donc le suivant.

Théorème [MMY] : Si T est de type Roth, il existe une application linéaire

$$p : BV^1_0(I) \to \Gamma(0) / \Gamma_s(0)$$

caractérisé par les propriétés suivantes :

a) la restriction de p à $\Gamma(0)$ est la projection canonique.

b) le noyau de p est constitué de fonctions φ pour lesquelles l'équation cohomologique à une solution bornée.

Un examen attentif de la démonstration permet d'étendre légèrement la classe d'échanges d'intervalles (linéaires, sans liaison) vérifiant les conclusions du théorème. Au lieu d'exiger que (3) soit satisfaite pour tout $\tau > 0$, il suffit de vérifier cette condition pour un réel τ vérifiant

$$\tau < (10\, d - 9 + 2\, \sigma^{-1})^{-1}\, \theta$$

(où $\theta > 0$, $\sigma > 0$ sont donnés par (1) et (2)).

Quant à la preuve du théorème, la stratégie en est la suivante.

Il résulte d'un théorème de Gottschalk et Hedlund que, pour obtenir une solution bornée de l'équation cohomologique, il suffit de voir que les sommes de Birkhoff de tous ordres de φ sont bornées. Pour ce faire, on décompose une somme de Birkhoff d'ordre quelconque en sommes de Birkhoff spéciales, et on est ramené à montrer que ces sommes de Birkhoff spéciales sont suffisamment petites. Or on dispose d'un contrôle de la variation des sommes de Birkhoff spéciales de $D\varphi$, et les conditions (2) et (3) permettent de contrôler les valeurs moyennes sur chaque composante de ces mêmes sommes de Birkhoff. Par intégration, on obtient un contrôle satisfaisant de l'oscillation des sommes de Birkhoff $S(0, n)\, \varphi$ sur chaque composante du domaine de $T(n)$. Il reste à contrôler les valeurs moyennes de ces sommes de Birkhoff $S(0, n)\, \varphi$ sur chaque composante ; la condition (1) intervient alors de façon déterminante.

On a aussi discuté comment obtenir par intégration des résultats sur l'équation cohomologique (pour des échanges d'intervalles de type Roth) en régularité supérieure ; la perte de différentiabilité reste la même mais la codimension de l'espace des fonctions pour lesquelles on obtient une solution ayant la régularité désirée augmente.

12. Pour que le théorème sur l'équation cohomologique ait une portée aussi générale que les résultats de Forni, il faut pouvoir garantir que presque tout échange d'intervalles linéaire sans liaison est de type Roth.

Or il résulte immédiatement du théorème ergodique multiplicatif d'Oseledets (par rapport à la mesure invariante de Zorich) que presque tout échange d'intervalles vérifie la condition (1). La condition (2) résulte du même théorème et du théorème de Veech ($\theta_2 < \theta_1$), pour presque tout échange d'intervalles.

La condition (3) est plus intéressante. Dans [MMY], un argument (trop) compliqué montre que cette condition est en effet de mesure totale. Une bien meilleure estimation a été obtenue postérieurement (avec A. Avila et S. Gouezel).

Théorème : Il existe des constantes $\omega = \omega\,(\mathrm{d})$, $C = C\,(d)$ telles qu'on ait, pour toutes données combinatoires (A, π_0, π_1) et tout $k \geq 0$

Leb $\{\lambda \in \mathbf{R}_+^A,\ \sum \lambda_\alpha = 1,\ \|\, Z\,(k)\,\| > T\} \leq CT^{-1}\,(\log T)^{\omega}$

Il résulte immédiatement de cette estimation que la condition (3) est de mesure totale. On n'a fait qu'esquisser dans un cas particulier la preuve de ce théorème, qui a plusieurs autres conséquences intéressantes. Celles-ci seront le sujet du cours en 2005-2006.

Missions, Invitations, Conférences

25/07-06/08/04 : Codirecteur de l'École d'été et de la Conférence de Systèmes dynamiques à l'ICTP, Trieste (Italie).

2/10-6/10/04 : Colloque franco-tunisien à Monastir (Tunisie) : minicours sur les fractales en théorie des systèmes dynamiques.

10/10-15/12/04 : Cours à l'ENS sur les billards.

16/12/04 : Conférence à l'occasion du 150e anniversaire de la naissance de Henri Poincaré à l'IHP.

4/04-11/04/05 : Mission à la Scuola Normale Superiore de Pise (Italie), une conférence.

13/04/05 : Conférence à la BNF : « Une erreur féconde du mathématicien Henri Poincaré ».

26/05/05 : Une conférence dans le cadre d'un colloque à l'IHP.

8/06-9/06/05 : Une conférence lors d'un colloque Topologie différentielle et Géométrie Symplectique à l'Université de Nantes.

13/06-16/06/05 : Colloque au CIRM (Luminy) en l'honneur de J. Hubbard ; une conférence.

21/06-23/06/05 : Minicours (4 conférences) dans le cadre de l'École « Maths et Cerveau ».

24/06-25/06/05 : Conférence à l'Université de Bordeaux.