Équations différentielles et systèmes dynamiques

M. Jean-Christophe Yoccoz, membre de l'Institut
(Académie des Sciences), professeur

Itération de fractions rationnelles et de polynômes à coefficients *p*-adiques (suite)

1. Soit p un nombre premier. On désigne par F_p le corps à p éléments, par $\overline{F}_p$ une clôture algébrique de F_p, par Q_p le corps des nombres p-adiques, par $\overline{Q}_p$ une clôture algébrique de Q_p, et par C_p la complétion de $\overline{Q}_p$ pour la valeur absolue p-adique $|\ |$ normalisée par $|p| = p^{-1}$.

Lorsque $K = F_p, \overline{F}_p, Q_p, \overline{Q}_p$ ou C_p, on désigne par $P(K) = K \cup \{\infty\}$ l'espace projectif de dimension un sur K, et par $Aut(P(K))$ le groupe $PGL(2, K)$ des transformations projectives (fractions rationnelles de degré 1) de cet espace.

L'image de l'homomorphisme $z \rightarrow |z|$ est le groupe multiplicatif $|\mathbf{C}_p^*| = p^{\mathbf{Q}}$. Désignons par B la boule $\{|z| \leq 1\}$ de C_p ; c'est l'anneau des entiers ; son idéal maximal est la boule $\{|z| < 1\}$; le corps résiduel s'identifie à $\overline{F}_p$; on notera $\pi : B \rightarrow \overline{F}_p$ la projection correspondante. On désignera par $B(\infty)$ le complémentaire de B dans $P(C_p)$; on prolonge π en une application de $P(C_p)$ sur $P(\overline{F}_p)$ en posant $\pi(z) = \infty$ pour $z \in B(\infty)$; on désigne par $B(\zeta)$, $\zeta \in P(\overline{F}_p)$, l'image inverse $\pi^{-1}(\zeta)$.

Le cours de cette année, dans la lignée de l'année précédente, se proposait de discuter certaines propriétés de la dynamique de polynômes ou fractions rationnelles à coefficients dans C_p. Il s'est appuyé sur les travaux de Juan Rivera-Letelier et de Rob Benedetto. Il a porté tout d'abord sur une analyse détaillée, entamée l'année précédente, des phénomènes quasipériodiques ; puis sur le problème des disques errants ; enfin, lorsque les coefficients sont dans $\overline{Q}_p$, quelques aspects élémentaires reliant théorie de Galois et dynamique ont été évoqués.

On renvoie au résumé du cours précédent pour la définition de nombreux outils et concepts qui apparaissent ci-dessous.

2. Soient X un espace analytique connexe, f une fonction méromorphe dans X, qu'on suppose non constante. Soit z_0 un point de X qui n'est pas critique pour f, c'est-à-dire un point en lequel le degré local de f est égal à 1.

Il existe alors un plus grand espace analytique connexe $I(z_0)$ qui contienne z_0, soit contenu dans X, et sur lequel f soit injective. De plus, $I(z_0)$ est caractérisé par la propriété suivante : soit z un point de X, distinct de z_0 ; alors z appartient à $I(z_0)$ si et seulement si le degré de f sur toute coupure S séparant z de z_0 est égal à 1.

Lorsque X est égal à $\mathrm{P}(\mathrm{C}_p)$ et f est une fraction rationnelle (non constante), chaque composante d'injectivité est en fait un affinoïde connexe ouvert.

3. Soient X et f comme ci-dessus. Rappelons qu'on appelle domaine de quasipériodicité, et qu'on note $\mathscr{E}(f)$, l'ensemble des $z \in X$ tels qu'il existe une boule $B \ni z$ sur laquelle les itérés de f sont définis et une sous-suite converge uniformément sur B vers l'identité.

Le domaine $\mathscr{E}(f)$ est ouvert, positivement invariant par f ; la restriction de f à $\mathscr{E}(f)$ est injective. Les composantes de $\mathscr{E}(f)$ sont permutées par l'action de f, et chaque composante de f est périodique sous cette action.

L'un des résultats principaux de Rivera-Letelier est le suivant. On suppose que $X = \mathrm{P}(\mathrm{C}_p)$ et f est une fraction rationnelle.

THÉORÈME (Rivera-Letelier) : Toute composante C de $\mathscr{E}(f)$ est un affinoïde connexe ouvert. De plus, si l'on écrit C comme intersection de boules ouvertes $B_1 ..., B_L$ dont les complémentaires sont disjoints, et qu'on note $\mathscr{P}_i$ (resp. S_i) le bout (resp. la coupure) associé à B_i, l'action de f_* permute les $\mathscr{P}_i$ et on a

$$\deg_{S_i} f^{N_i} > 1,$$

pour tout entier N_i tel que $f_*^{N_i}$ fixe S_i.

En particulier, pour chaque composante C (qui est un affinoïde connexe ouvert), la restriction d'un itéré de f à C est un automorphisme de C. Ceci suggère qu'on s'intéresse de façon plus systématique au groupe des automorphismes d'un affinoïde connexe ouvert.

4. Le cas du groupe des automorphismes d'une boule ouverte ou irrationnelle avait été abordé dans le cours précédent. Rappelons-en les points les plus saillants.

Soient $r > 0$ et $B = \{|z| < r\}$ une boule ouverte ou irrationnelle. Le groupe $\mathrm{Aut}(B)$ est constitué des séries $f(z) = \sum_{n \geq 0} f_n z^n$ telles que $|f_0| < r$, $|f_1| = 1$, et $|f_n| \leq r^{1-n}$ pour $n > 1$.

L'application

$$\begin{aligned} Aut(B) &\to \overline{\mathrm{F}}_p^* \\ f &\mapsto \overline{f_1} \end{aligned}$$

est un homomorphisme surjectif dont on note le noyau $Aut_0(B)$. Pour $f \in Aut(B)$, on définit :

$$\gamma(f) = r^{-1}\sup_B |f(z) - z| \in [0, 1].$$

On a alors les propriétés suivantes :

$$\gamma(g \circ f) \leq Max(\gamma(g), \gamma(f)),$$
$$\gamma(f^{-1}) = \gamma(f),$$
$$\gamma(h \circ f \circ h^{-1}) = \gamma(f),$$
$$\gamma(f^p) \begin{cases} = p^{-1}\gamma(f) & \text{si} \quad \gamma(f) < p^{-\frac{1}{p-1}} \\ \leq \gamma(f))^p & \text{si} \quad \gamma(f) \geq p^{-\frac{1}{p-1}}. \end{cases}$$

En particulier, les ensembles suivants sont des sous-groupes distingués de $Aut(B)$:

$$Aut_0^{+}(B) = \{f \in Aut(B), \ \gamma(f) < 1\},$$
$$Aut_0^{++}(B) = \{f \in Aut(B), \ \gamma(f) < p^{-\frac{1}{p-1}}\}.$$

Soit $f \in Aut_0^{++}(B)$; l'action de Z sur B induite par f s'étend en une action :

$$\{|w| < [p^{\frac{1}{p-1}} \ \gamma(f)]^{-1}\} \to Aut_0^{+}(B),$$
$$w \ \mapsto \ f^{w},$$

qui dépend de façon holomorphe de w. Le champ de vecteurs holomorphe associé :

$$X_f(z) = \lim_{w \to 0} w^{-1}(f^{w}(z) - z)$$

s'annule exactement aux points périodiques de f.

On se ramène de $Aut(B)$ à $Aut_0(B)$ et de $Aut_0^{+}(B)$ à $Aut_0^{++}(B)$ en remplaçant f par un itéré convenable. On se ramène de $Aut_0(B)$ à $Aut_0^{+}(B)$ en remplaçant f par sa restriction à une boule légèrement plus petite.

5. On a étudié ensuite le groupe des automorphismes biholomorphes d'une couronne, qu'on supposera pour simplifier de la forme

$$C = \{r < |z| < R\}.$$

On introduit l'ensemble $\mathscr{D}$ des fonctions f, holomorphes et non constantes dans C, qui vérifient les deux propriétés suivantes :

(i) pour tout $\rho \in (r, R)$, le degré de f en $S(\rho)$ est égal à 1 ;

(ii) pour tout $\rho \in (r, R)$ suffisamment voisin de R, $S(\rho)$ est fixé par f_*.

On peut caractériser les éléments de $\mathscr{D}$ par leur série de Laurent $f(z) = \sum_{n \in Z} f_n z^n$.

Pour que f appartienne à $\mathscr{D}$, il faut et il suffit qu'on ait $|f_0| < R$, $|f_1| = 1$, $|f_n| \leq R^{1-n}$ pour $n > 1$ et $|f_n| \leq r^{1-n}$ pour $n < 0$.

Notons B_R la boule $\{|z| < R\}$ et B_r la boule $\{|z| > r\} \cup \{\infty\}$. Pour $f \in \mathscr{D}$, posons

$$f^{\#}(z) = \sum_{n\geq 0} f_n z^n.$$

On définit ainsi une application :

$$\mathscr{D} \to Aut(B_R),$$
$$f \mapsto f^{\#}.$$

Inversement, un automorphisme de B_R définit par restriction à C un élément de $\mathscr{D}$. La propriété (élémentaire) suivante joue un rôle important dans la preuve du théorème de Rivera mentionné ci-dessus : si S est une coupure séparant B_R, dont la distance à $S(R)$ est au plus égale à celle de $S(r)$, les images de S par f_* et $f_*^{\#}$ sont égales.

Notons $Aut_*(C)$ le sous-groupe de $Aut(C)$ formé des automorphismes qui préservent chacun des bouts de C ; l'indice de $Aut_*(C)$ dans $Aut(C)$ est égal à 2 si $rR \in |\mathbb{C}_p^*|$, à 1 sinon.

On a montré que $Aut_*(C)$ est constitué des éléments $f \in \mathscr{D}$ tels que $f_0 \notin B_r$. De plus, chaque automorphisme $f \in Aut_*(C)$ se décompose de la façon suivante. Notons $Aut_1(B_R, 0)$ le groupe des automorphismes de B_R qui fixent 0 et dont la dérivée en 0 est égale à 1, et définissons de même $Aut_1(B_r, \infty)$. Pour $|\lambda| = 1$, notons R_λ la rotation $z \mapsto \lambda z$. Il existe un unique triplet (K, λ, H), avec $K \in Aut_1(B_r, \infty)$, $\lambda \in \mathscr{O}_p^*$, $H \in Aut_1(B_R, 0)$, tel que

$$f = K \circ R_\lambda \circ H$$

De plus, K, λ, H dépendent continument de f. Un ingrédient important dans la preuve de ce résultat est l'usage de la quantité suivante, qui mesure la distance d'un automorphisme à l'identité. Pour $f \in Aut_*(C)$ et $\rho \in [r, R]$, on pose

$$\gamma + (\rho, f) = Sup_{n>0} |f_{n+1}| \rho^n,$$
$$\gamma - (\rho, f) = Sup_{n<0} |f_{n+1}| \rho^n,$$
$$\gamma_0(f) = |f_1 - 1|,$$
$$\gamma(\rho, f) = Max(\gamma \pm (\rho, f), \gamma_0(f)).$$

Cette quantité possède l'interprétation géométrique suivante : notons γ_c le segment de B_p joignant $S(r)$ à $S(R)$; si S est une coupure qui sépare C, il existe un unique $\rho = \rho_S \in (r, R)$ tel que la distance de S à γ_c est réalisée par $S(\rho)$. On a alors

$$\gamma(\rho, f) = \inf_{\substack{\rho_S = \rho \\ f_*(S) \neq S}} \mathrm{d}(\mathrm{S}, \gamma_c)$$

6. Le cas des automorphismes d'une couronne est une étape décisive vers l'étude du groupe des automorphismes d'un affinoïde connexe ouvert général.

On écrira

$$X = \mathrm{P}(\mathbb{C}_p) - \bigsqcup_{0\leq i<N} \tilde{B}_i$$

ou

$$X = B_\infty - \coprod_{0 \leq i < N} \tilde{B}_i$$

suivant que $\infty \in X$ ou $\infty \notin X$. Les $\tilde{B}_i$ sont des boules fermées disjointes $\{|z - a_i| \leq r_i\}$, contenues dans $B_\infty = \{|z| < R\}$ dans le second cas. On notera $\mathscr{P}_i$ le bout et S_i la coupure associés au complémentaire B_i de $\tilde{B}_i$; lorsque $\infty \notin X$, on définit de même $\mathscr{P}_\infty$ et B_∞.

On désigne par $\mathscr{D}$ l'espace des fonctions f, méromorphes et non constantes dans X, qui vérifient :

a) f est de degré 1 en toute coupure séparant X ;

b) (si $\infty \in X$) $f(\infty) = \infty$ et $|f'(\infty)| = 1$;

b') (si $\infty \notin X$) f_* fixe $S(\rho)$ pour tout $\rho < R$ assez proche de R.

On peut à nouveau caractériser les éléments de $\mathscr{D}$ par leur développement en séries ; dans le cas où $\infty \in X$, on écrit

$$f(z) = f_0 + f_1 z + \sum_{i=0}^{N} \sum_{n>0} f_{i,n}(z - a_i)^{-n}$$

et les conditions nécessaires et suffisantes sont $|f_1| = 1$, $|f_{i,n}| \leq r_i^{1+n}$ pour $0 \leq i \leq N$, $n > 0$. Dans le cas où $\infty \notin X$, on écrit

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} f_n z^n + \sum_{0 \leq i < N} \sum_{n>0} f_{i,n}(z - a_i)^{-n}$$

et les conditions sont $|f_1| = 1$, $|f_0| < R$, $|f_n| \leq R^{1-n}$ pour $n > 1$, $|f_{i,n}| \leq r_i^{1+n}$ pour $0 \leq i < N$ et $n > 0$.

Pour $f \in \mathscr{D}$, on détermine aussi les bouts $\mathscr{P}'_i = f_*(\mathscr{P}_i)$; la boule ouverte associée à $\mathscr{P}'_i$ est le complémentaire de la boule fermée de rayon r_i qui contient le point a'_i défini par

$$a'_i = f_0 + f_1 a_i + \sum_{rj > ri} \sum_{n>0} f_{j,n}(a_i - a_j)^{-n},$$

ou

$$a'_i = \sum_{n \geq 0} f_n a_i^n + \sum_{rj > ri} \sum_{n>0} f_{j,n}(a_i - a_j)^{-n},$$

suivant que $\infty \in X$ ou $\infty \notin X$.

On notera $\mathscr{D}_0$ l'ensemble des $f \in \mathscr{D}$ tels que $|a'_i - a_i| \leq r_i$ pour tout i, c'est-à-dire tels que $f_*(\mathscr{P}_i) = \mathscr{P}_i$ pour tout i. On verra que $\mathscr{D}_0$ est un sous-groupe de $Aut(X)$ (distingué d'indice fini si $\infty \notin X$).

On dit que X est en position favorable si on a $\infty \notin X$, $a_0 = 0$ et $Rr_i \geq |a_i|^2$ pour $0 \leq i < N$; dans B_p, cette dernière inégalité se traduit par $d(S_0, S_i) \leq d(S_0, S_\infty)$; on peut donc toujours mettre X en position favorable par une transformation de Möbius appropriée.

Supposons que X est en position favorable et posons

$$Y = \mathrm{P}(\mathrm{C}_p) - \bigsqcup_{0 \le i < N} \tilde{B}_i.$$

Pour $f \in \mathscr{D}_0$ définissons

$$f^{\natural}(z) = z + \sum_{n>1} f_n z^n,$$

$$f^{\flat}(z) = f_0 + f_1 z + \sum_{0 \le i < N} \sum_{n>0} f_{i,n}(z - a_i)^{-n}.$$

Alors, $f^{\natural}$ est un automorphisme de B_∞ qui fixe 0, et $f^{\flat}$ est un automorphisme de Y qui fixe ∞. Par restriction, $f^{\natural}$ et $f^{\flat}$ définissent des automorphismes de X. De plus $f^{\natural}_*$ et $f^{\flat}_*$ fixent chacun des bouts de X. Il est ainsi naturel de considérer les groupes suivants :

— $Aut_*(X)$ est le sous-groupe distingué d'indice fini de $Aut(X)$ formé des automorphismes qui fixent chaque bout de X ; on montre qu'il est égal à $\mathscr{D}_0$.

— $Aut_*(Y,\infty)$ est le groupe des automorphismes de Y qui fixent ∞ et chacun des bouts de Y ; c'est aussi un sous-groupe de $Aut_*(X)$.

— $Aut_1(B_\infty, X)$ est le groupe des automorphismes de B_∞ qui fixent 0, sont tangents à l'identité en 0, et fixent aussi chaque $\mathscr{P}_i$; c'est encore un sous-groupe de $Aut_*(X)$

On montre que tout $f \in \mathscr{D}_0 = Aut_*(X)$ s'écrit de façon unique sous la forme

$$f = F^{\flat} \circ F^{\natural},$$

avec $F^{\natural} \in Aut_1(B_\infty, X)$, et $F^{\flat} \in Aut_*(Y,\infty)$.

La relation avec le cas des automorphismes d'une couronne est la suivante : Soit $R > r \ge \max(|a_i|)$;

Tout $f \in \mathscr{D}_0$ induit un automorphisme de la couronne $\{r < |z| < R\}$, donc possède une décomposition associée

$$f = K \circ R_\lambda \circ H.$$

Alors H est la restriction de $F^{\natural}$ à cette couronne et $K \circ R_\lambda$ est celle de $F^{\flat}$.

7. On avait dans le cours précédent décrit la dynamique d'une fraction rationnelle sur chaque composante du domaine de quasipériodicité (composante qu'on peut supposer fixée).

Les mêmes conclusions s'appliquent à la dynamique d'un automorphisme d'un affinoïde ouvert connexe X. En particulier, le domaine de quasipériodicité d'un tel automorphisme est toujours égal à X.

Notons N le nombre de composantes du complémentaire de X. On désigne comme ci-dessus par $Aut_*(X)$ (resp. $Aut_0(X)$) le sous-groupe de $Aut(X)$ formé des automorphismes qui fixent chaque coupure de l'arbre $\mathscr{A}_X$ de X (resp. qui induisent l'identité sur chacune de ces coupures).

Lorsque $N = 1$, X est une boule ouverte, on a $Aut(X) = Aut_*(X)$ et $Aut_*(X)$ / $Aut_0(X) = \overline{\mathrm{F}}_p^*$.

Lorsque $N = 2$, X est une couronne (ouverte), on a $Aut(X) / Aut_*(X) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $Aut_*(X) / Aut_0(X) = \overline{\mathbb{F}}_p^*$.

Lorsque $N \geq 3$, on a $Aut_*(X) = Aut_0(X)$ est un homomorphisme injectif

$$Aut(X) / Aut_*(X) \hookrightarrow S_N$$

dans le groupe de permutations des bouts de X.

La classification des affinoïdes ouverts connexes, à biholomorphisme près, semble un problème intéressant.

Le cas $N = 1$ est trivial. Lorsque $N = 2$ ou 3, la donnée de l'arbre $\mathscr{A}_X$, comme espace métrique, est un invariant complet : lorsque $N = 2$, il y a un paramètre rationnel, le module, qui est la longueur de $\mathscr{A}_X$; lorsque $N = 3$, il y a 3 paramètres rationnels.

Dès que $N \geq 4$, la donnée de $\mathscr{A}_X$ comme espace métrique ne suffit plus à caractériser le type biholomorphe de X. Par exemple, lorsque $N = 4$ et $\mathscr{A}_X$ a un seul point de ramification S, les quatre bouts de S associés à X définissent un birapport qui est un invariant biholomorphe. Une autre différence se produit lorsque $N \geq 4$: deux affinoïdes ouverts connexes peuvent être biholomorphes sans être équivalents par une transformation de Möbius.

8. La deuxième partie du cours a été consacrée plus spécifiquement à l'étude de la dynamique des polynômes.

Soit $P(z) = \sum_{0 \leq i \leq d} a_i z^i$ un polynôme de degré $d > 1$. On dit que P a bonne réduction si $|a_d| = 1$ et $|a_i| \leq 1$ pour $0 \leq i < d$, ce qui équivaut à ce que P_* fixe la coupure canonique S_{can} et que le degré de P en cette coupure soit égal à d. L'action de P_* sur S_{can} coïncide alors avec la réduction $\overline{P}$ de P.

Supposons que P a bonne réduction. Il y a lieu de distinguer le cas séparable ($\overline{P}' \not\equiv 0$) du cas inséparable ($\overline{P}' \equiv 0$). Toutes les orbites de $\overline{P}$ sont en effet prépériodiques ; mais, dans le cas séparable, il n'y a qu'un nombre fini d'orbites périodiques de $\overline{P}$ qui contiennent un point critique de $\overline{P}$.

Lorsqu'une orbite périodique de $\overline{P}$ contient (au moins) un point critique de $\overline{P}$, elle se relève en un cycle de disques constituant le bassin immédiat d'une (unique) orbite périodique attractive de P.

Lorsqu'une orbite périodique de $\overline{P}$ ne contient pas de point critique de $\overline{P}$, elle se relève en un cycle de disques dont chacun constitue une composante du domaine de quasipériodicité de P.

On notera que dans le cas inséparable, il y a toujours une infinité d'orbites périodiques attractives, et que seul un nombre fini d'entre elles peuvent contenir un point critique de P dans leur bassin.

9. On dira que P est simple si P est conjugué par un automorphisme affine de $\mathbb{C}_p$ à un polynôme ayant bonne réduction.

Lorsque P n'est pas simple, on peut conjuguer P par un automorphisme affine de façon à ce que la boule unité fermée soit la plus petite boule contenant les points fixes de P ; c'est alors aussi la plus petite boule contenant l'ensemble de Julia rempli $K(P)$, formé des points dont l'orbite est bornée. (Lorsque P a bonne réduction, la boule unité fermée est égale à $K(P)$).

Supposons que P n'est pas simple, et notons B la plus petite boule fermée contenant $K(P)$. Pour $n \geq 0$, désignons par $\sum_n$ l'ensemble des boules $\tilde{B}$ (nécessairement fermées) telles que $P^n(\tilde{B}) = B$. La relation d'inclusion induit une application i de $\sum_n$ dans $\sum_{n-1}$; l'application P induit une autre application P de $\sum_n$ dans $\sum_{n-1}$. De plus, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \sum_n & \xrightarrow{P} & \sum_{n-1} \\ \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow{\scriptstyle i} \\ \sum_{n-1} & \xrightarrow{P} & \sum_{n-2} \end{array}$$

On forme la limite projective

$$\textstyle\sum_\infty = \varprojlim \left(\sum_n \xrightarrow{i} \sum_{n-1}\right)$$

qui est munie d'une application encore notée P dans elle-même. On a une application canonique $j : K(P) \to \sum_\infty$; un point de $\sum_\infty$ est représenté par une suite décroissante $\tilde{B} = (\tilde{B}_n)_{n\geq 0}$, avec $\tilde{B}_n \in \sum_n$, et on a

$$j^{-1}(\tilde{B}) = \bigcap_{n\geq 0} \tilde{B}_n.$$

On posera

$$d(\tilde{B}) = \lim \operatorname{diam}(\tilde{B}_n).$$

Observons que $j^{-1}(\tilde{B})$ est un point lorsque $d(\tilde{B}) = 0$. Lorsque $d(\tilde{B}) > 0$, $j^{-1}(\tilde{B})$ peut a priori être vide ; sinon, c'est une boule fermée ou irrationnelle de diamètre $d(\tilde{B})$.

On notera $\deg(\tilde{B}_n)$ le degré de la restriction $P : \tilde{B}_n \to P(\tilde{B}_n)$, et on posera

$$deg(\tilde{B}) = \lim \deg(\tilde{B}_n).$$

On dira que $\tilde{B}$ est un point critique de $P : \sum_\infty \to \sum_\infty$ si $\deg(\tilde{B}) > 1$, un point critique sauvage si p divise $\deg(\tilde{B})$. On définit de même un point critique sauvage de $P : \mathbb{C}_p \to \mathbb{C}_p$.

10. Soit $\tilde{B} \in \sum_\infty$ un point périodique, de période minimale T, pour P. Notons D le degré de $\tilde{B}$ pour P^T.

Si $D = 1$, on a $d(\tilde{B}) = 0$ et $j^{-1}(\tilde{B})$ est un point périodique répulsif, de période T.

Si $D > 1$, on a $d(\tilde{B}) \in |\mathbb{C}_p^*|$, et $j^{-1}(\tilde{B})$ est une boule fermée ; quitte à conjuguer P^T par une application affine, on se ramène au cas où $j^{-1}(\tilde{B})$ est la boule unité fermée ; on a alors

$$P(z) = \sum_{0\leq i\leq D^T} b_i z^i,$$

avec $|b_D| = 1$, $|b_i| \leq 1$ pour $i < D$ et $|b_i| < 1$ pour $i > D$; la dynamique de P^T sur $j^{-1}(\tilde{B})$ est donc traitée comme celle des polynômes ayant bonne réduction. On prendra cependant garde, comme l'a observé Juan Rivera-Letelier, qu'il n'y a pas de théorème de rectification dans le cadre p-adique qui jouerait le rôle du théorème de Douady-Hubbard dans le cadre complexe.

11. Il est facile de voir que le polynôme P possède un disque non errant (non trivial, c'est-à-dire non contenu dans le bassin d'une orbite périodique attractive) si et seulement s'il existe un point $\tilde{B} \in \Sigma_\infty$ qui **n'est pas prépériodique** pour $P : \Sigma_\infty \to \Sigma_\infty$, et vérifie

$$d(\tilde{B}) > 0,\ j^{-1}(\tilde{B}) = \Phi$$

Ceci n'est possible d'après Rivera-Letelier que si on a

$$\liminf d(P^n(\tilde{B})) = 0,$$

et même

$$\lim d(P^n(\tilde{B})) = 0$$

dans le cas où les coefficients de P appartiennent à $\overline{\mathbb{Q}}_p$.

12. L'ensemble $Cr(\Sigma_\infty)$ des points critiques de P dans Σ_∞ est fermé.

Soit $\tilde{B} \in \Sigma_\infty$; si l'orbite positive de $\tilde{B}$ dans Σ_∞ ne s'accumule sur aucun point critique, $j^{-1}(\tilde{B})$ est réduit à un point.

On dira, suivant la terminologie classique, que P est hyperbolique, s'il existe $N \geq 1$, $C > 1$ tels qu'on ait $|(P^N)'(z)| > C$ pour tout $z \in K(P)$. On montre alors que P est hyperbolique si et seulement si P n'est pas simple, et $P : \Sigma_\infty \to \Sigma_\infty$ n'a pas de point critique. On peut alors, comme dans le cadre complexe, coder la dynamique de P sur $K(P)$ par un sous-décalage de type fini.

13. Un théorème de Benedetto affirme que si les coefficients de P sont algébriques, et si aucun point critique sauvage de P dans $\mathbb{C}_p$ n'est récurrent, alors P ne possède pas de disque errant.

On a illustré ce résultat en discutant la dynamique d'un polynôme spécifique : on prend $p = 2$ et on considère

$$P(z) = \frac{1}{2}(z^2 + z^3),$$

exemple déjà étudié par Rivera-Letelier.

La boule unité fermée B est la plus petite boule fermée contenant les points fixes $1, 0, -2$ de P ; ces points fixes sont respectivement répulsif, superattractif, attractif. L'ensemble Σ_1 est formé de la boule $B_0 = \{|z| \leq 2^{-1/2}\}$ et de la boule $B_1 = \{|z - 1| \leq 2^{-1}\}$. On notera P_i la restriction de P à B_i pour $i = 0, 1$. On a $\deg(B_0) = 2$ et $\deg(B_1) = 1$.

On posera aussi, pour $n \geq 0$,

$$r_n = 2^{-1+2^{-n}},$$

et on a $P_0^{-1}(\{|z| = r_n\}) = \{|z| = r_{n+1}\}$.

Soient $n \geq 0$ et $\hat{B}$ une boule fermée, de diamètre D, contenue dans $\{|z| = r_n\}$. Si $D \geq \frac{1}{2}\, r_n^2$, $P_0^{-1}(\hat{B})$ est une boule fermée de diamètre $\left(\frac{D}{2}\right)^{1/2}$, de degré 2 ; si par contre $D < \frac{1}{2}\, r_n^2$, $P_0^{-1}(\hat{B})$ est l'union de deux boules fermées disjointes, de diamètre Dr_n^{-1}, de degré 1.

À l'aide de P_0 et P_1, on définit une application naturelle $\pi : \Sigma_\infty \to \{0, 1\}^{\mathbf{N}}$, qui fait commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} \Sigma_\infty \arrow[r, "P"] \arrow[d, "\pi"'] & \Sigma_\infty \arrow[d, "\pi"'] \\ \{0, 1\}^{\mathbf{N}} \arrow[r, "\sigma"'] & \{0, 1\}^{\mathbf{N}} \end{tikzcd}$$

où σ désigne le décalage unilatéral.

La suite de boules $(\{|z| \leq r_n\})_{n \geq 0}$ est associée à un point fixe de $P : \Sigma_\infty \to \Sigma_\infty$ noté $\underline{0}$ qui vérifie $j^{-1}(\underline{0}) = \{|z| \leq \frac{1}{2}\}$ et est l'unique image inverse du point fixe correspondant de σ.

Soit $\tilde{B} \in \Sigma_\infty$ un point de Σ_∞ dont l'orbite par P ne contient pas $\underline{0}$; écrivons

$$\pi(\tilde{B}) = 0^{n_0} 1\ 0^{n_1}\ 1 \ldots$$

Il est facile de voir que, si $j^{-1}(\tilde{B})$ est un disque errant (non trivial) de P, alors la suite des entiers n_i est bornée.

À partir de là, on montre que P ne possède pas de disque errant de la façon suivante.

a. Le domaine de $P_1 P_0^n$ est une boule fermée $B(n)$ de diamètre $\frac{1}{2}$, de degré 2^n (pour tout $n \geq 0$).

b. Soient $n \geq 0$, $t > 0$, $\hat{B} \subset B$ une boule fermée de diamètre 2^{-t} ; soit j l'entier égal à n si $t > n - 1$, et vérifiant $j - 1 < t \leq j$ sinon. Soit φ_n la fonction numérique continue définie pour $t \geq 0$ par

$$\varphi_n(0) = 1,$$
$$D\varphi_n(t) = 2^{j-n} \quad \text{si} \quad j - 1 < t < j < n,$$
$$D\varphi_n(t) = 1 \quad \text{si} \quad t > n - 1.$$

On a $\varphi_n(t) = t + \mu_n$ pour $t \geq n - 1$, avec $\mu_n = 3 - n - 2^{1-n}$. Alors l'image inverse de $\hat{B}$ par $P_1 P_0^n$ est l'union disjointe de 2^j boules de diamètre commun $2^{-\varphi_n(t)}$ et de degré commun 2^{n-j}.

c. Soit $\tilde{B}$ un point de Σ_∞ dont l'orbite ne contient pas $\underline{0}$. On montre qu'on a $d(\tilde{B}) = 0$ si et seulement si on a

$$\sup_k \sum_{i=0}^{k} \mu_{n_i} = +\infty.$$

De plus, si on a, pour tout $k \geq 0$,

$$\sum_{i=0}^{k} \mu_{n_i} \leq 0$$

alors on a $d(\tilde{B}) \geq \frac{1}{4}$.

d. À partir de l'assertion précédente, on conclut à l'inexistence de disques errants : si $\tilde{B} \in \sum_\infty$ n'est pas prépériodique et $j^{-1}(\tilde{B})$ est un disque errant, on devrait avoir lim inf $d(P^n(\tilde{B})) > 0$, ce qui est impossible puisque les coefficients de P sont rationnels.

14. Le cours s'est conclu par quelques remarques sur les relations entre la dynamique des polynômes ou fractions rationnelles et l'action du groupe de Galois de $\overline{\mathrm{Q}}_p/\mathrm{Q}_p$. Il s'agit à l'évidence d'un sujet très riche qui pourrait faire l'objet d'un cours dans les années à venir.

J.-C. Y.

Missions, Invitations, Conférences

Du 28 juillet au 3 août 2001 : Codirecteur d'une École de Systèmes Dynamiques à l'ICTP de Trieste.

Du 5 août au 3 septembre 2001 : Mission à l'Instituto de Matematica Pura e Aplicada (IMPA) de Rio de Janeiro. Collaborations avec J. Palis et C.G. Moreira.

20 septembre 2001 : Conférence plénière au Congrès commun des Sociétés allemande et autrichienne de mathématiques à Vienne.

Du 30 septembre au 26 octobre 2001 : Mission à l'IMPA (Rio de Janeiro).

Du 27 octobre au 10 novembre 2001 : Mission à l'Instituto de Matematica de Ciencias Afins (IMCA) de Lima (Pérou). Minicours de 3 conférences.

Du 26 novembre au 3 décembre 2001 : Trois conférences à l'Université de Penn State (USA).

Du 16 février au 22 février 2002 : Deux conférences dans le cadre du trimestre dédié aux Systèmes Dynamiques au Centre Ennio de Giorgi de Pise.

Du 15 avril au 20 avril 2002 : Trois conférences dans le même cadre à Pise.

Du 21 avril au 26 avril 2002 : Trois conférences (minicours) à l'occasion d'un Colloque de Systèmes Dynamiques à Varsovie.

Du 1er juin au 8 juin 2002 : Une conférence lors du Congrès dédié au 50 ans de l'IMPA à Rio de Janeiro.