Équations différentielles et systèmes dynamiques

M. Jean-Christophe YOCCOZ, membre de l'Institut
(Académie des Sciences), professeur

Itération de fractions rationnelles et de polynômes à coefficients *p*-adiques

1. Soit p un nombre premier. On désigne par $\mathbb{F}_p$ le corps à p éléments, par $\overline{\mathbb{F}}_p$ une clôture algébrique de $\mathbb{F}_p$, par $\mathbb{Q}_p$ le corps des nombres p-adiques, par $\overline{\mathbb{Q}}_p$ une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$, et par $\mathbb{C}_p$ la complétion de $\overline{\mathbb{Q}}_p$ pour la valeur absolue p-adique $|\ |$ normalisée par $|p| = p^{-1}$.

Lorsque $K = \mathbb{F}_p$, $\overline{\mathbb{F}}_p$, $\mathbb{Q}_p$, $\overline{\mathbb{Q}}_p$ ou $\mathbb{C}_p$, on désigne par $\mathbb{P}(K) = K \cup \{\infty\}$ l'espace projectif de dimension un sur K et par $Aut(\mathbb{P}(K))$ le groupe $PGL(2, K)$ des transformations projectives (fractions rationnelles de degré 1) de cet espace.

L'image de l'homomorphisme $z \to |z|$ est le groupe multiplicatif $|\mathbb{C}_p^*| = p^{\mathbb{Q}}$. Désignons par $\mathbb{B}$ la boule $\{|z| \leq 1\}$ de $\mathbb{C}_p$; c'est l'anneau des entiers ; son idéal maximal est la boule $\{|z| < 1\}$; le corps résiduel s'identifie à $\overline{\mathbb{F}}_p$; on notera $\pi : \mathbb{B} \to \overline{\mathbb{F}}_p$ la projection correspondante. On désignera par $B(\infty)$ le complémentaire de $\mathbb{B}$ dans $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$; on prolonge π en une application de $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ sur $\mathbb{P}(\overline{\mathbb{F}}_p)$ en posant $\pi(z) = \infty$ pour $z \in \mathbb{B}(\infty)$; on désigne par $B(\zeta)$, $\zeta \in \mathbb{P}(\overline{\mathbb{F}}_p)$, l'image inverse $\pi^{-1}(\zeta)$.

L'objet du cours en 2000-2001, ainsi que de celui qui le suivra en 2001-2002, est de discuter certains résultats de Juan Rivera-Letelier sur la dynamique des fractions rationnelles de degré ≥ 2 à coefficients dans $\mathbb{C}_p$, agissant sur $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$. Il s'agit dans un premier temps de préciser les fondements, tant géométriques qu'analytiques, de cette étude ; on abordera ensuite les phénomènes quasipériodiques.

2. Dans $\mathbb{C}_p$, on appelle boule ouverte (resp. fermée, resp. irrationnelle) une partie de la forme $\{|z - z_0| < r\}$, $r \in |\mathbb{C}_p^*|$ (resp. $\{|z - z_0| \leq r\}$, $r \in |\mathbb{C}_p^*|$, resp. $\{|z - z_0| \leq r\} = \{|z - z_0| < r\}$, $r \notin |\mathbb{C}_p^*|$).

Dans $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ on appelle boule ouverte (resp. fermée, resp. irrationnelle) une partie qui est soit une boule ouverte (resp. fermée, resp. irrationnelle) de $\mathbb{C}_p$, soit le complémentaire d'une boule fermée (resp. ouverte, resp. irrationnelle) de $\mathbb{C}_p$.

On appelle affinoïde connexe une partie non vide de $P(C_p)$ qui est intersection finie de boules de $P(C_p)$. On appelle espace analytique connexe une partie non vide de $P(C_p)$ qui est union d'une famille croissante d'affinoïdes connexes.

Soient U une partie ouverte de C_p, et $z_0 \in U$. L'union des espaces analytiques connexes contenant z_0 et contenus dans U est un espace analytique connexe appelé composante de z_0 dans U.

Une coupure irrationnelle est un ensemble $S = \{B, B'\}$ formé de deux boules irrationnelles de $P(C_p)$ complémentaires l'une de l'autre.

La coupure canonique est l'ensemble $S_{\mathrm{can}} = \{B(\zeta), \zeta \in P(\overline{F}_p)\}$ dont les éléments forment la partition dénombrable en boules ouvertes de $P(C_p)$ associée à π.

Une coupure rationnelle est un ensemble S de boules ouvertes (formant une partition de C_p) tel qu'il existe une transformation de Möbius $\varphi \in Aut(P(C_p))$ induisant une bijection de S_{can} sur S.

L'ensemble des coupures, désigné par B_p, est muni de la distance définie comme suit : soient S, S' deux coupures distinctes ; on peut alors trouver, de façon unique, $B \in S$ et $B' \in S'$ telles que $B \cup B'$ soit égal à $P(C_p)$; mais alors il existe $\varphi \in Aut(P(C_p))$ et un intervalle $J \subset R$ tel que $\varphi(B \cap B')$ soit la couronne standard

$$C(J) = \{z, \log_p |z| \in J\}.$$

De plus, la longueur $|J|$ de J ne dépend pas du choix de φ et est appelée module de la couronne $B \cap B'$; on pose

$$d(S, S') = mod(B \cap B').$$

L'espace métrique(B_p, d) est un arbre réel sur lequel $Aut(P(C))$ agit par isométries. C'est une version des arbres de Bruhat-Tits.

On dira qu'une coupure $S \in B_p$ sépare une partie $X \subset P(C_p)$ s'il existe au moins deux boules de S qui rencontrent X ; on désignera par $B_p(X)$ l'ensemble des coupures S qui séparent X.

Soient z, z' des points distincts de $P(C_p)$; l'ensemble $B_p(\{z, z'\})$ est appelé géodésique joignant z, z'.

Soient $z \in P(C_p)$, $S \in B_p$ et B la boule de S qui contient z ; les coupures qui séparent z de tout point n'appartenant pas à B forment la demi-géodésique issue de S d'extrémité z.

Soient S, S' deux coupures distinctes de B_p, B, B' les boules de S, S' respectivement telles que $B \cup B' = P(C_p)$. Une coupure S'' vérifie $d(S, S'') + d(S'', S') = d(S, S')$ si et seulement si elle sépare toute paire $\{z, z'\}$ avec $z \notin B$, $z' \notin B'$. Ces coupures forment le segment d'extrémités S, S', qui est isométrique à l'intervalle $[0, d(S, S')]$ de R.

On prendra garde que B_p n'est pas complet : soit en effet $(B_i)_{i \geq 0}$ une suite décroissante de boules (ouvertes ou irrationnelles) d'intersection vide ; notons S_i

la coupure qui contient B_i. Alors $(S_i)_{i\geq 0}$ est une suite de Cauchy qui n'a pas de limite dans B_p.

3. Soient X un espace analytique connexe, et S une coupure qui sépare X. Toutes les boules de S, sauf au plus un nombre fini, sont contenues dans X. On note $n_s(X)$ (resp.$m_s(X)$) le nombre de boules de S qui ne rencontrent pas X (resp. qui rencontrent X et son complémentaire).

On appelle arbre de X et on note $\mathscr{A}_X$ l'ensemble des coupures $S \in \mathrm{B}_p(X)$ telles que $n_s(X) > 0$ ou $m_s(X) \geq 2$. On appelle sommet de $\mathscr{A}_X$ une coupure $S \in \mathscr{A}_X$ telle que $n_s(X) > 0$ ou $m_s(X) \geq 3$. On note $\mathscr{S}_X$ l'ensemble des sommets de $\mathscr{A}_X$. Une coupure $S \in \mathscr{S}_X$ est toujours rationnelle.

On a $\mathscr{A}_X = \varnothing$ si et seulement si S est égal à $\mathrm{P}(\mathrm{C}_p)$, au complémentaire d'un point dans $\mathrm{P}(\mathrm{C}_p)$, ou à une boule ouverte ou irrationnelle.

Si X est une boule fermée, $\mathscr{A}_X = \mathscr{S}_X$ est constitué de la coupure qui contient la boule ouverte complémentaire de X. Dans tous les autres cas, $\mathscr{A}_X$ est constitué des coupures qui séparent à la fois X et son complémentaire.

Pour toute partie X de $\mathrm{P}(\mathrm{C}_p)$, l'ensemble $\mathrm{B}_p(X)$ est convexe. Donc l'arbre $\mathscr{A}_X$ d'un espace analytique connexe est convexe.

Soient X un espace analytique connexe, $S \in \mathscr{A}_X$ et $\tilde{B}_1, \ldots \tilde{B}_m$ les boules de S qui rencontrent X et son complémentaire. Alors $\mathscr{A}_X - \{S\}$ a m composantes connexes qui sont les arbres des intersections $X \cap \tilde{B}_i$, $1 \leq i \leq m$.

L'ensemble des sommets $\mathscr{S}_X$ est une partie fermée et discrète de $\mathscr{A}_X$.

Pour reconstruire l'espace analytique connexe X à partir de son arbre $\mathscr{A}_X$, il faut connaître pour chaque $S \in \mathscr{S}_X$ les boules $B_1, \ldots, B_{n_S}$ de S qui ne rencontrent pas X. On pose alors, pour chaque coupure rationnelle $S \in \mathscr{A}_X$

$$X_S = \mathrm{P}(\mathrm{C}_p) - \Big(\bigcup_{1\leq i\leq n_S} B_i \bigcup_{1\leq j\leq m_S} \tilde{B}_j\Big)$$

et on a

$$X = \bigcup_S X_S,$$

S décrivant l'ensemble des coupures rationnelles appartenant à $\mathscr{A}_X$.

On peut définir une autre décomposition de X en considérant les composantes connexes de $\mathscr{A}_X - \mathscr{S}_X$. A chaque composante T est associé une couronne X_T et on a

$$X = \bigcup_{S\in \mathscr{S}_X} X_S \bigcup_{T} X_T.$$

On notera qu'on a $\mathscr{A}_{X_S} = \{S\}$ et $\mathscr{A}_{X_T} = T$. Ces décompositions ne sont bien sûr valables que si $\mathscr{A}_X \neq \varnothing$.

Un espace analytique connexe X est un affinoïde connexe si et seulement si $\mathscr{A}_X$ est une partie bornée de B_p, et $\mathscr{S}_X$ est fini.

Considérons un affinoïde connexe

$$X = \mathrm{P}(\mathrm{C}_p) - \bigcup_{0\leq j\leq n} B_j$$

avec $\infty \in B_0$. Choisissons pour chaque $j > 0$ un point $z_j \in B_j$ et définissons, pour $z \in X$:

$$i(z) = (\log_p |z - z_j|)_{1 \leq j \leq n}.$$

C'est un point de $\mathbb{Q}^n$ qui ne dépend pas du choix des z_j. Soit S une coupure rationnelle dans $\mathscr{A}_X$ et $z \in S$; on a $i^{-1}(i(z)) = X_S$. Soit T une composante de $\mathscr{A}_X - \mathscr{S}_X$ et soient $S, S' \in T$; alors l'image $i(X_T)$ est l'intersection avec $\mathbb{Q}^n$ d'un segment rationnel de $\mathbb{R}^n$ et on a

$$\|i(X_S) - i(X_{S'})\|_\infty = d(S, S').$$

4. Soient X un affinoïde connexe. On dit que X est ouvert (resp. fermé) si X est intersection finie de boules ouvertes (resp. fermées).

Soit X un affinoïde connexe fermé. Une fonction $f : X \to \mathbb{C}_p$ est holomorphe si f est limite uniforme sur X de fractions rationnelles à pôles hors de X.

Soit X un espace analytique connexe. Une fonction $f : X \to \mathbb{C}_p$ est holomorphe si sa restriction à tout affinoïde connexe fermé contenu dans X l'est.

Soit X un affinoïde connexe fermé. Supposons d'abord que $\infty \in X$. On peut alors écrire

$$X = \mathbb{P}(\mathbb{C}_p) - \bigcup_{1 \leq i \leq s} B_i\,,$$

avec des boules ouvertes $B_i \subset \mathbb{C}_p$ dont on notera r_i le rayon et on choisira un point a_i. Les fonctions holomorphes f sur X sont exactement celles qui s'écrivent

$$f(z) = f_0 + \sum_{i=1}^{s} \sum_{n>0} f(i, n)(z - a_i)^{-n},$$

avec, pour chaque $1 \leq i \leq s$:

$$\lim_{n \to +\infty} |f(i, n)| r_i^{-n} = 0.$$

De plus, si on pose

$$|f| = \max_{i, n} |f(i, n)| r_i^{-n},$$

$$\|f\| = \max(|f_0|, |f|),$$

alors $\|f\| = \sup_z |f(z)|$ et ce supremum est atteint.

Lorsque $\infty \notin X$, on écrit

$$X = \{|z| \leq R\} - \bigcup_{1 \leq i \leq s} B_i$$

et la représentation de f est maintenant

$$f(x \to z) = f_0 + \sum_{n>0} f(0, n) z^n + \sum_{i=1}^{s} \sum_{n>0} f(i, n)(z - a_i)^{-n}$$

avec, pour $0 \leq i \leq s$, $r_0 = R^{-1}$:

$$\lim_{n \to +\infty} |f(i, n)| r_i^{-n} = 0.$$

Lorsque X est une boule fermée $\{|z - a| \leq R\}$ ou une couronne fermée $\{r_1 \leq |z - a| \leq r_2\}$, on retrouve les expressions usuelles en séries entières et séries de Laurent.

5. Les zéros d'une fonction holomorphe sont faciles à localiser.

5.1. Considérons un affinoïde connexe fermé X, une fonction f holomorphe non identiquement nulle dans X, et une coupure rationnelle $S \in \mathscr{A}_X$. Quitte à appliquer un automorphisme affine, on se ramène au cas $S = S_{\mathrm{can}}$. On supposera $\infty \in X_S$ (l'autre cas étant similaire) et on aura donc

$$X_S = \mathrm{P}(\mathrm{C}_p) - \bigcup_{1 \leq i \leq s} B(\zeta_i)$$

avec $\zeta_i, \ldots \zeta_s \in \overline{\mathrm{F}}_p$ et

$$f(z) = f_0 + \sum_{i=1}^{s} \sum_{n>0} f(i, n)(z - a_i)^{-n},$$

pour $z \in X_S$, avec $a_i \in B(\zeta_i)$ et

$$\lim_{n \to \infty} |f(i, n)| = 0.$$

Si $|f| < |f_0|$, alors f ne s'annule pas dans X_S. Si $|f| = \|f\|$, on se ramène à $\|f\| = 1$ et on pose pour $\overline{z} \in \overline{\mathrm{F}}_p$:

$$\overline{f}(\overline{z}) = \pi(f_0) + \sum_{i=1}^{s} \sum_{n>0} \pi(f(i, n)(\overline{z} - \zeta_i)^{-n}$$

ce qui définit une fraction rationnelle dans $\overline{\mathrm{F}}_p$ dont les poles sont parmi $\zeta_1, \ldots, \zeta_s$. Alors, le nombre des zéros de f dans une boule $B(\zeta) \subset X$ (c'est-à-dire que $\zeta \neq \zeta_i$), comptés avec multiplicité, est exactement la multiplicité de ζ comme zéro de $\overline{f}$.

5.2. Considérons une série de Laurent

$$f(z) = \sum_{n \in Z} f_n z^n$$

non identiquement nulle, convergeant dans une couronne $C = \{r_1 < |z| < r_2\}$. Soit $n \in \mathrm{Z}$ tel que $f_n \neq 0$; définissons dans R^2 le point $e_n = (n, \log_p |f_n|)$ et la demi-droite verticale $D_n = \{(n, t), t \leq \log_p |f_n|\}$ d'extrémité e_n. Le polynôme de Newton de f est l'enveloppe convexe dans R^2 de l'union des D_n. Ses points extrémaux sont certains des e_n. Pour chaque segment joignant deux points extrémaux consécutifs e_m et e_n, il y a $n - m$ zéros de f de norme R, où $-\log_p R$ est la pente du segment ; de plus, on obtient ainsi tous les zéros de f.

5.3. Soit X un affinoïde connexe fermé, et soit f une fonction holomorphe dans X.

Si f n'est pas identiquement nulle, f n'a qu'un nombre fini de zéros dans X.

Si f ne s'annule pas dans X, $|f|$ est minorée par une constante > 0, et f^{-1} est holomorphe dans X.

6. Soit X un espace analytique connexe. On désigne par $\mathscr{H}(X)$ l'anneau des fonctions holomorphes dans X et par $\mathscr{K}(X)$ son corps des fractions. Un élément de $\mathscr{K}(X)$ définit de façon unique une application, dite méromorphe, de X dans $\mathrm{P}(\mathrm{C}_p)$.

Si h est méromorphe sur X, $h^{-1}(\infty)$ rencontre tout affinoïde connexe fermé contenu dans X suivant une partie finie, et $X - h^{-1}(\infty)$ est un espace analytique connexe sur lequel h est holomorphe.

Soit B une boule ouverte ou irrationnelle ; appelons bout associé à B, et notons $\mathscr{P}_B$, la famille ordonnée par l'inclusion des couronnes de la forme $B - B'$ où B' est une boule strictement contenue dans B.

Une fonction h, méromorphe sur un espace analytique connexe X, agit sur l'arbre $\mathrm{B}_p(X)$ des coupures qui séparent X. Plus précisément, soit $S \in \mathrm{B}_p(X)$; il existe une (unique) coupure $h_*(S)$ et une (unique) application $h_S : S \to h_*(S)$ telles que :

(i) si $B \in S$ rencontre X, et $C \in \mathscr{P}_B$ est assez fine, alors $h(C)$ est une couronne de $\mathscr{P}_{h_S(B)}$;

(ii) lorsque S est rationnelle, $h_*(S)$ l'est aussi, et h_S est une fraction rationnelle sur $\mathrm{P}(\overline{\mathrm{F}}_p)$ lorsque S et $h_*(S)$ sont paramétrés par $\mathrm{P}(\overline{\mathrm{F}}_p)$.

De plus, l'application $h : C \to h(C)$ dans (i) a un degré indépendant de C qu'on note $\deg_{\mathscr{P}_B}(h)$. Lorsque S est irrationnelle, le degré est le même pour les deux bouts associés, et est noté $\deg_S(h)$. Lorsque S est rationnelle, on note $\deg_S(h)$ le degré de la fraction rationnelle h_S et on a, pour tout bout $\mathscr{P}'$ associé $h_*(S)$

$$\deg_S(h) = \sum_{h_S(\mathscr{P}) = \mathscr{P}'} \deg_{\mathscr{P}}(h).$$

Si $B \in S$ est contenue dans X, la conclusion de (i) peut être renforcée : il existe un entier $m \geq 0$ tel qu'un point $z \in \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ a m préimages par h dans B s'il n'appartient pas à $h_S(B)$, et $m + \deg_{\mathscr{P}_B}(h)$ s'il appartient à $h_S(B)$.

A titre d'exemple, considérons pour $p = 2$, $h(z) = z^2$ dans $X = \mathrm{P}(\mathrm{C}_p)$. Notons γ la géodésique de B_p qui joint 0 à ∞. Soit S une coupure dont une boule associée est $\{|z - a| < r\}$.

– Si $d(\gamma, S) \leq 1$, c'est-à-dire $r \geq \frac{1}{2}|a|$, on a $\deg_S h = 2$;

– Si $d(\gamma, S) > 1$, c'est-à-dire $r < \frac{1}{2}|a|$, on a $\deg_S h = 1$;

De plus, lorsque S est rationnelle et S, $h_*(S)$ sont paramétrées de façon appropriée, on a $h_S(\zeta) = \zeta^2$ si $d(\gamma, S) < 1$ et $h_S(\zeta) = \zeta + \zeta^2$ si $d(\gamma, S) = 1$.

7. Soit h une fonction méromorphe dans un espace analytique connexe X, soient $S \in \mathrm{B}_p(X)$, $B \in S$ et $\mathscr{P}$ le bout associé.

On dit que $\mathscr{P}$ est régulier si $B \subset X$ et h est un biholomorphisme de B sur $h_S(B) = h(B)$.

On dit que S est régulière si tous les bouts de S sauf au plus un sont réguliers. On dit que S est critique si S n'est pas régulière.

Lorsque S sépare $\mathrm{P}(\mathrm{C}_p) - X$, S est donc critique.

L'ensemble des coupures critiques est une partie convexe de $\mathrm{B}_p(X)$.

Si B contient un point critique de h, $\mathscr{P}_B$ est critique, mais l'inverse n'est pas toujours vrai, même lorsque $B \subset X$.

Cependant, lorsque B est contenue dans X et p ne divise pas $\deg_{\mathscr{P}_B}(h)$, B contient exactement $\deg_{\mathscr{P}_B}(h) + 2m - 1$ points critiques de h où m est l'entier considéré plus haut : pour $z \notin h_S(B)$, z a m préimages dans B.

8. Soit h une fonction méromorphe non constante sur un espace analytique connexe X. L'action de h sur $\mathrm{B}_p(X)$ peut être décrite semi-localement comme suit.

Soit S une coupure qui sépare X et soit $B \in S$ une boule qui rencontre X. On se contente ici d'évoquer le cas où S est rationnelle ; le cas irrationnel est similaire et plus simple.

Quitte à composer à droite et à gauche par des automorphismes, on se ramène au cas où $S = h*(S) = S_{\mathrm{can}}$ et $B = h_S(B) = \{|z| < 1\}$. Dans une couronne $C = \{r_0 < |z| < 1\}$, h s'écrit alors

$$h(z) = \sum_{n \in Z} h_n z^n,$$

avec $|h_d| = 1$, $|h_n| \leq 1$ pour $n > d$, $|h_n| < 1$ pour $n < d$, et $d = \deg_{\mathscr{P}B}(h) > 0$.

Posons $|d| = p^{-L}$ et définissons, pour $0 \leq \ell \leq L$:

$$|h|_\ell = \sup_{|n| \leq p^{-\ell}} |h_n|\ |n|\ p^\ell,$$

en appelant $n(\ell)$ le plus petit entier qui réalise le supremum.

Pour $0 \leq \ell \leq L$ et $s \geq 0$, notons $e_\ell(s)$ le point $(p^\ell, \log_p |h|_\ell - n(\ell)s)$ et $D_l(s)$ la demi-droite verticale dont $e_\ell(s)$ est l'extrémité supérieure. Il existe alors $s_0 > 0$ et des indices $i_0 = 0 < i_\ell < ... < i_k = L$ tels que pour $0 < s < s_0$, les points extrêmaux de l'enveloppe convexe de l'union des $D_\ell(s)$ soient exactement $e_{i_0}(s)$, ..., $e_{i_k}(s)$. Notons $u_m(s)$ la pente du segment joignant $e_{i_{m-1}}(s)$ et $e_{i_m}(s)$: on a $u_1(s) > u_2(s) > ... > u_k(s)$ pour $0 < s < s_0$.

L'image par h_* d'une coupure S^* séparant C est alors déterminée comme suit (C étant assez fine, c'est-à-dire r_0 assez voisin de 1) :

– si S^* contient une boule $\{|z| < r\}$, $r_0 < r < 1$, alors $h_*(S^*)$ est la coupure contenant $\{|z| < r^d\}$;

– si S^* contient une boule $\{|z - a| < r\}$, avec $r_0 < |a| < 1$ et $r < |a|$, alors $h_*(S^*)$ contient la boule $\{|z - h(a)| < R\}$, avec $|h(a)| = |a|^d$ et

$$R = |h|_{i_m}\ |a|^{n(i_m)}\ (r|a|^{-1})^{p^{i_m}}$$

pour $0 \leq m \leq k$, $p^{-u_m(s)} \leq r|a|^{-1} \leq p^{-u_{m+1}(s)}$, $s = \log(|a|^{-1})$, où on convient que $u_0(s) \equiv -\infty$ et $u_{k+1}(s) \equiv 0$. De plus, dans des coordonnées appropriées, on a

$$h_{S*}(\overline{z}) = \overline{z}^{\,p^{i_m}},$$

lorsque $p^{-u_m}(s) < r|a|^{-1} < p^{-u_{m+1}(s)}$ et

$$h_{S*}(\overline{z}) = \overline{z}^{\,p^{i_{m-1}}} + \sum_{\ell \in I(m)} \overline{h}(\ell)\overline{z}^{p^\ell} + \overline{z}^{p^{i_m}}$$

lorsque $r|a|^{-1} = p^{-u_m(s)}$, où $I(m)$ est l'ensemble des indices $j \in (i_{m-1}, i_m)$ tels que $e_j(s)$ est situé sur le segment joignant $e_{i_{m-1}}(s)$ et $e_{i_m}(s)$ (cet ensemble est indépendant de s).

9. Le groupe $Aut(B(0))$ des biholomorphismes de la boule $B(0) = \{|z| < 1\}$ est constitué des séries $f(z) = \sum_{n \geq 0} f_n z^n$ telles que $|f_0| < 1$, $|f_1| = 1$ et $|f_n| \leq 1$ pour $n > 1$.

Chaque $f \in Aut(B(0))$ est une isométrie de $B(0)$ et vérifie

$$|f'(z) - f_1| < 1$$

pour $|z| < 1$. L'application

$$\begin{aligned} \Pi : Aut(B(0)) &\to \overline{\mathrm{F}}_p^* \\ f &\mapsto \pi(f_1) \end{aligned}$$

est un homomorphisme sur $\overline{\mathrm{F}}_p^*$.

Le groupe $Aut(B(0))$ agit par isométries sur l'arbre $\mathrm{B}_p(B(0))$ des coupures séparant $B(0)$.

Pour $f \in Aut(B(0))$, définissons

$$\gamma(f) = \sup_{B(0)} |f(z) - z| \in [0, 1].$$

Pour $f, g \in Aut(B(0))$, on a

$$\gamma(g \circ f) \leq \max(\gamma(g), \gamma(f)),$$
$$\gamma(f^{-1}) = \gamma(f),$$
$$\gamma(g \circ f \circ g^{-1}) = \gamma(f),$$
$$\gamma(f) < 1 \Rightarrow \Pi(f) = 1.$$

En particulier, les conditions $\gamma(f) \leq \gamma_0$ ou $\gamma(f) < \gamma_0$ définissent des sous-groupes normaux de $Aut(B(0))$.

On a aussi

$$\gamma(f^p) \leq \gamma(f)^p \text{ si } 1 \geq \gamma(f) \geq p^{-\frac{1}{p-1}},$$
$$\gamma(f^p) = p^{-1}\gamma(f) \text{ si } \gamma(f) < p^{-\frac{1}{p-1}}.$$

Considérons les opérateurs

$$T_f(\varphi) = \varphi \circ f - \varphi,$$
$$U_f(\varphi) = \varphi \circ f,$$

définis sur l'espace $\mathscr{H}^\infty(B(0))$ des fonctions holomorphes bornées sur $B(0)$. On a

$$\|T_f\|_\infty = \gamma(f).$$

Supposons maintenant que $f \in Aut(B(0))$ vérifie $\gamma(f) < p^{-\frac{1}{p-1}}$. Alors

1) La série

$$\log U_f = \sum_{i \geq 1} (-1)^{i-1} \frac{T_f^i}{i}$$

converge dans $End(\mathscr{H}^\infty(B(0)))$.

2) Pour $w \in \mathbb{C}_p$, $|w| < (\gamma(f)p^{\frac{1}{p-1}})^{-1}$, la série

$$U_f^w = \sum_{i \geq 0} \binom{w}{i} T_f^i$$

converge dans $End(\mathscr{H}^\infty(B(0)))$.

3) Pour $0 < |w| \leq 1$, on a

$$\left\|\frac{U_f^w - 1}{w} - \log U_f\right\|_\infty \leq |w|\gamma(f)p^{\frac{1}{p-1}}$$

Pour $|w| < (\gamma(f)p^{\frac{1}{p-1}})^{-1}$, on définit alors

$$f^w(z) = U_f^w(\theta_0)(z),$$

où θ_0 est la fonction de $\mathscr{H}^\infty(B(0))$ définie par $\theta_0(z) = z$. L'application $w \to f^w$ est un homomorphisme de groupes, à valeurs dans $Ker\, \Pi \subset Aut(B(0))$.

Par ailleurs, si $g \in Aut(B(0))$, il existe un entier N tel que $f = g^N$ vérifie $\gamma(f) < p^{-\frac{1}{p-1}}$

10. Soit X un espace analytique connexe et h une fonction méromorphe dans X.

On appellera domaine de quasipériodicité, et on notera $\varepsilon(h)$, l'ensemble des point $z \in X$ tels qu'il existe une boule $B \ni z$ sur laquelle les itérés de h sont définis et une sous-suite converge uniformément vers l'identité.

Une conjugaison topologique entre fonctions méromorphes respecte les domaines de quasipériodicité.

La restriction de h à $\varepsilon(h)$ est injective, et on a $h(\varepsilon(h)) = \varepsilon(h)$ (mais en général on n'a pas $h^{-1}(\varepsilon(h)) = \varepsilon(h)$). L'ensemble $\varepsilon(h)$ est ouvert.

L'image par h d'une composante de $\varepsilon(h)$ en est aussi une, et chaque composante est préservée par un itéré de h.

Si $z \in \varepsilon(h)$, on peut bien sûr choisir la boule $B \ni z$ rationnelle ; soit $\varphi \in Aut(\mathrm{P}(\mathbb{C}_p))$ tel que $\varphi(B) = B(0)$; alors pour tout $\gamma \in (0, 1)$ il existe $N > 0$ tel que $\varphi f^N \varphi^{-1} = F$ soit un automorphisme de $B(0)$ vérifiant $\gamma(F) < \gamma$. Les considérations du numéro précédent s'appliquent ainsi à F, ce qui permet de décrire localement la dynamique dans le domaine de quasipériodicité.

11. Théorème (Rivera-Letelier)

Une composante du domaine de quasipériodicité d'une fonction rationnelle est un affinoïde connexe ouvert.

Indiquons les grandes lignes de la preuve.

11.1. On commence par montrer le résultat suivant : soient h une fraction rationnelle non constante, et $z \in \mathrm{P}(\mathbb{C}_p)$; il existe un affinoïde connexe ouvert $I(z)$, qui est le plus grand espace analytique connexe sur lequel h est injective. De plus, $I(z)$ est constitué des points z' tels que $\deg_s h = 1$ pour toute coupure S séparant z de z'.

11.2. Soient h une fonction rationnelle, et $z \in \mathcal{E}(h)$. On va alors montrer que la composante $C(z)$ de $\mathcal{E}(h)$ contenant z est une intersection finie $\bigcap_i B_i$ de boules ouvertes telles que

(i) $B_i \cup B_j = \mathrm{P}(\mathrm{C}_p)$ pour $i \neq j$;

(ii) h_* permute les coupures S_i associées aux B_i ; de plus, si $h_*(S_i) = S_j$, $h_{s_i}(B_i) = B_j$;

(iii) dans chaque cycle de h_*, il existe une coupure S_i telle que $\mathrm{P}(\mathrm{C}_p) - B_i$ soit une composante de $\mathrm{P}(\mathrm{C}_p) - I(z)$.

11.3. La construction de $C(z)$ repose sur le lemme suivant : soient $f_1, ..., f_N$ des fractions rationnelles qui fixent le bout associé à $\{|z| < 1\}$ et sont injectives dans la couronne $\{1 > |z| > p^{-\delta}\}$; soit S une coupure associée à une boule $\{|z - a| < r\}$, avec $|a| < 1$ et $1 > r \geq p^{-\delta}$. Alors S est périodique sous l'action de $(f_N \circ ... \circ f_1)$.

Le point crucial de la démonstration du lemme est de se ramener au cas où $f_1, ..., f_N$ sont injectives dans $\{|z| < 1\}$.

12. Soit h une fraction rationnelle à coefficients dans C_p, et soit C une composante du domaine de quasipériodicité de h. Quitte à remplacer h par un itéré, on suppose que h fixe C. On écrit $C = \cap B_i$, avec des boules ouvertes en nombre fini de complémentaires disjoints.

Les bouts $\mathscr{P}_i$ associés aux boules B_i sont permutés par l'action de h. De plus, si $h_*^{N_i}(\mathscr{P}_i) = \mathscr{P}_i$, on a

$$\deg_{\mathscr{P}_i} h^{N_i} > 1.$$

Par ailleurs, toute coupure séparant C est périodique sous l'action de h.

Soit Z un affinoïde connexe fermé contenu dans C ; soit N un entier tel que h^N fixe chacun des sommets de l'arbre $\mathscr{A}_Z$. Alors, h^N fixe chaque sous-disque ouvert maximal de Z ; de plus, si $\varphi \in Aut(\mathrm{P}(\mathrm{C}_p))$ envoie $B(0)$ sur un tel sous-disque, on a

$$\gamma(\varphi^{-1} \circ h^N \circ \varphi) \leq \gamma_Z < 1,$$

avec une constante γ_Z indépendante de φ.

Ceci permet de globaliser les résultats de la section 9 : quitte à remplacer h^N par un itéré F de façon à assurer $\gamma_Z < p^{-\frac{1}{p-1}}$, on définit

– les « itérés » F^w, $|w| \leq 1$ qui sont des automorphismes de Z,

– un champ de vecteur $X_F = \log U_F\ (\theta_0)$ dont les zéros dans Z sont exactement les points périodiques de F (ou h).

On aura, uniformément sur Z.

$$\lim_{|w| \to 0} \mathrm{F}^w_{/Z} = Id_{/Z}.$$

Sur la composante C toute entière, on a des automorphismes h^w, $w \in Z_p$ qui définissent une action de Z_p, et un générateur infinitésimal X_h, champ de vecteurs holomorphe sur C, pour cette action.

Les points périodiques de h sont les zéros de X_h, donc chaque affinoïde connexe fermé contenu dans C n'en contient qu'un nombre fini.

On peut compter le nombre de points fixes de h dans C grâce au théorème d'indice suivant : notons S_i la coupure contenant la boule B_i ; posons $n(s_i) = 0$ si s_i n'est pas fixée par h ; autrement, $n(s_i)$ désigne la multiplicité de $\underline{B_i}$ comme point fixe de h_{s_i} (qui peut être vu comme une fraction rationnelle sur $\overline{F}_p$). On a alors

$$\#Fix(h/C) - 2 = \sum_{i, n(s_i)>0} (n(s_i) - 2).$$

En particulier :

– si C est une boule $\#Fix(h/C) > 0$;

– C contient toujours une infinité de points périodiques.

Le cours en 2001-2002 poursuivra l'étude de la dynamique rationnelle p-adique : ensembles de Julia, bassins des orbites périodiques attractives et disques errants...

J.-C. Y.

Missions, Invitations, Conférences

8 juillet 2000 au 14 juillet 2000 : Conférence lors d'un Congrès à Edimburgh.

16 juillet 2000 au 5 août 2000 : Mission à l'Instituto de Matematica Pura e Aplicada (IMPA), à Rio de Janeiro, Participation à la Conférence internationale de Systèmes dynamiques à l'occasion des 60 ans de Jacob Palis et à la Première conférence latino-américaine de Mathématiques. Une conférence pendant chacune de ces réunions.

5/10 septembre 2000 : Conférence lors d'une réunion à Rome sur les systèmes hamiltoniens.

3/28 octobre 2000 : Mission à l'IMPA. Collaboration avec J. Palis et C.G. Moreira.

9 décembre 2000 : Conférence grand public « Le métier de chercheur » à Besançon.

26 janvier 2001 : Conférence lors d'une journée sur la dynamique des populations à Sophia Antipolis.

9/11 mars 2001 : Conférence lors d'une réunion à Stony Brook (USA) à l'occasion des 70 ans de John Milnor.

23 mars 2001 : 2 conférences à l'Université de Nantes.

29/30 mars 2001 : 1 conférence lors d'une réunion sur la dynamique holomorphe à Orléans.

7/12 avril 2001 : Réunion à l'IMPA à la mémoire de Michel Herman, 1 conférence.

24 avril/4 mai 2001 : Mission à Pise, collaboration avec S. Marmi et P. Moussa, 1 conférence.

8/11 mai 2001 : Mission à Chicago avec G. Charpak sur l'enseignement des mathématiques.

25 mai 2001 : 1 conférence à Edimburgh lors d'une journée à la mémoire de M. Herman et J. Moser.

14/15 juin 2001 : 1 conférence à Zurich lors d'un colloque à la mémoire de J. Moser.

25/27 juin 2001 : 1 conférence à Leiden pendant une réunion pour les 60 ans de F. Takens.

15/21 juillet 2001 : coorganisateur du colloque " Dynamical systems " à Oberwolfach.