Équations différentielles et systèmes dynamiques

M. Jean-Christophe YOCCOZ, membre de l'Institut
(Acédémie des sciences), professeur

QUELQUES ASPECTS DE LA THÉORIE DES SYSTÈMES DYNAMIQUES HYPERBOLIQUES [a]

0. Le cours cette année était divisé en quatre parties :
- systèmes dynamiques uniformément hyperboliques ;
- formalisme thermodynamique ;
- entropies et exposants de Lyapunov ;
- systèmes dynamiques non-uniformément hyperboliques.

1. Un automorphisme linéaire T d'un espace de Banach E est *hyperbolique* si son spectre ne rencontre pas le cercle unité. Ceci permet de décomposer E en un espace *stable* E_s contracté par T et un espace *instable* E_u contracté par T^{-1}.

Un point x^* fixé par une application f de classe C^1 est *hyperbolique* si l'application tangente de f en x^* est hyperbolique. D'après le théorème de Hartman-Grobman, f est topologiquement conjuguée à cette application tangente au voisinage de x^*.

Lorsque E est de dimension finie, que f est de classe C^∞, et que $T_{x^*} f$ est semi-simple et non-résonante, la conjugaison peut être prise de classe C^∞ (Sternberg).

Le *théorème de la variété stable* décrit, pour un point fixe hyperbolique x^* d'une application f de classe C^r, l'ensemble $W^s(x^*)$ des points dont l'orbite positive converge vers x^* : c'est localement le graphe d'une application de classe C^r de E_s dans E_u, après identification d'un voisinage de x^* dans E à un voisinage de 0 dans $E_s \times E_u$.

La notion qui est au cœur de la théorie uniformément hyperbolique est celle de *compact invariant hyperbolique* : étant donnée une variété M, une partie ouverte U de M, et une immersion $f : U \to M$ de classe C^1, on dit qu'une partie compacte $K \subset U$ invariante par f est *hyperbolique* si l'application tangente $T f_{|K}$ induit un automorphisme hyperbolique de l'espace des sections continues du fibré vectoriel $T M_{|K}$. Il revient au même de demander que ce fibré vectoriel se scinde en un sous-fibré *stable* contracté par $T f_{|K}$ et un sous-fibré *instable* contracté par $Tf_{|K}^{-1}$.

a. Les cours sont disponibles en vidéo sur le site internet du Collège de France: http://www.college-de-france.fr/site/jean-christophe-yoccoz/course-2014-2015.htm [NdÉ].

Le *critère des champs de cônes* est un moyen effectif de vérifier l'hyperbolicité de certaines parties compactes invariantes dans de nombreuses situations concrètes.

On a présenté quelques exemples classiques de parties compactes invariantes hyperboliques : pour les *difféomorphismes d'Anosov* des tores $\mathbb{T}^d$, la variété tout entière est hyperbolique ; le *solénoïde*, contenu dans un tore plein $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{D}^2$, est le prototype d'un *attracteur* non périodique ; la famille de Hénon est une famille à deux paramètres de difféomorphismes quadratiques du plan ; dans certaines régions de l'espace des paramètres, l'ensemble des orbites bornées est un *fer à cheval*.

On a ensuite rappelé les propriétés fondamentales d'un ensemble compact K invariant et hyperbolique pour une immersion $f : U \to M$:

• La restriction $f_{|K}$ est *expansive* : il existe $\varepsilon > 0$ telle que deux orbites distinctes de f dans K ne peuvent rester constamment à distance inférieure à ε.

• *Continuation hyperbolique* : Si g est suffisamment C^1 – proche de f, il existe une partie compacte K_g, proche de K, invariante et hyperbolique pour g, telle que les restrictions $g_{|K_g}$ et $f_{|K}$ soient topologiquement conjuguées.

• *Lemme de poursuite* : toute pseudo-orbite de $f_{|K}$ est uniformément approchée par une orbite de f dans U.

On dit qu'une partie compacte K, invariante par une transformation f, est *localement maximale* s'il existe un voisinage W de K tel que K soit la plus grande partie invariante contenue dans W.

Une partie compacte invariante K qui est hyperbolique et localement maximale possède une *structure de produit local* : si x, y sont deux points assez proches de K, l'intersection de la variété stable locale de x et de la variété instable locale de y appartient aussi à K.

Le *théorème de décomposition spectrale* de Smale précise la structure des ensembles compacts invariants hyperboliques localement maximaux qui sont *récurrents par chaînes* : un tel ensemble s'écrit comme union finie disjointe de parties *transitives* ayant les mêmes propriétés ; ces parties transitives peuvent être elle-mêmes décomposées en sous-ensembles compacts disjoints cycliquement permutés par f ; la restriction à chaque sous-ensemble de l'itéré approprié de f est topologiquement mélangeante.

Un *ensemble basique* est une partie compacte, invariante, hyperbolique, transitive et localement maximale. Une telle partie est un *attracteur* si son ensemble stable est ouvert, un *répulseur* si son ensemble instable est ouvert, et est de type selle sinon.

Un difféomorphisme f d'une variété compacte M est (uniformément) hyperbolique si son ensemble récurrent par chaînes $R(f)$ est hyperbolique. On peut alors décomposer $R(f)$ en un nombre fini de pièces basiques. La variété M est l'union disjointe des ensembles stables de ces pièces et aussi l'union disjointe des ensembles instables de ces pièces. L'intersection entre ensembles stables et instables de ces pièces basiques définit un ordre partiel sur l'ensemble des pièces pour lequel les attracteurs (resp. répulseurs) sont les éléments minimaux (resp. maximaux).

2. On a ensuite rappelé quelques notions fondamentales de dynamique symbolique : décalages complets sur un alphabet fini, sous-décalages de type fini, graphes et matrices de transfert associés à un sous-décalage de type fini, conditions pour la transitivité et le mélange topologique d'un sous-décalage de type fini.

Les décalages transitifs de type fini sont des modèles, à conjugaison topologique près, pour les ensembles basiques totalement discontinus. Une source particulièrement importante de tels ensembles basiques est l'étude des *intersections homoclines transverses*.

Un ensemble basique totalement discontinu est nécessairement de type selle. Pour étudier les ensembles basiques en toute généralité, les *partitions de Markov* sont un outil puissant permettant de recourir aux méthodes de la dynamique symbolique.

Une partition de Markov pour un ensemble basique K est une collection finie de *rectangles* recouvrant K et satisfaisant à certains axiomes que je ne rappellerai pas ici. Elle permet de construire une *semi-conjugaison h* entre un décalage transitif de type fini et la dynamique de f sur K. Lorsque K n'est pas totalement discontinu, h ne peut être injective. Néanmoins, les points de K ont un nombre borné d'antécédents sous h, et la plupart n'en ont qu'un.

Soit f un homéomorphisme d'un espace métrique compact X. La fonction ζ_f introduite par Artin-Mazur compte les points périodiques de f :

$$\xi_f(z) := \exp\Big(\sum_{m \geqslant 1} \#Fix(f^m)\frac{z^m}{m}\Big) = \prod_{\pi \in P_f} (1 - z^{d(\pi)})^{-1}.$$

Ici, P_f est l'ensemble des orbites périodiques de f et $d(\pi)$ est la période minimale de l'orbite périodique π.

Lorsque f est la restriction d'un difféomorphisme à un ensemble basique K, la fonction zeta est une fonction rationnelle. Ce résultat remarquable est le fruit des contributions de nombreux auteurs (Smale, Guckenheimer, Manning, Bowen, Fried).

On peut aussi considérer des fonctions zeta à poids : pour une fonction $\Phi : X \to \mathbb{R}^*$ on définit

$$\zeta_{f,\Phi}(z) := \exp\Big(\sum_{m \geqslant 1} \sum_{f^m(x)=x} \prod_{0}^{m-1} \Phi(f^j(x))\frac{z^m}{m}\Big) = \prod_{\pi \in P_f} (1 - z^{d(\pi)}\Phi(\pi))^{-1},$$

avec $\Phi(\pi) := \prod_{x \in \pi} \Phi(x)$.

Supposons que X soit un ensemble basique et que $\Phi = \exp \varphi$ soit l'exponentielle d'une fonction hölderienne. Ruelle a montré que le rayon de convergence de $\zeta_{f,\Phi}$ est égal à $\exp(-P(\varphi))$, et qu'un pôle simple en $\exp(-P(\varphi))$ est l'unique singularité de $\zeta_{f,\Phi}$ sur le cercle de convergence. La quantité $P(\varphi)$ est la *pression* de φ.

La théorie spectrale des *opérateurs de transfert* est l'objet d'étude principal du formalisme thermodynamique. Considérons un sous-décalage unilatéral de type fini topologiquement mélangeant σ sur un espace Σ_B^+ et une fonction hölderienne φ^+ sur Σ_B^+. L'opérateur de transfert associé est défini par

$$\mathcal{L}_{\varphi^+}(\psi)(x) = \sum_{\sigma(y)=x} \exp\varphi^+(y)\, \psi(y).$$

Formellement, on a

$$\zeta_{\sigma,\exp\varphi^+}(z) = \det(1 - z\mathcal{L}_{\varphi^+})^{-1}.$$

L'opérateur $\mathcal{L}_{\varphi^+}$ est positif. Le résultat central le concernant, dû à Ruelle, est une généralisation profonde du célèbre théorème de Perron-Frobenius sur les matrices à coefficients positifs. On fait opérer $\mathcal{L}_{\varphi^+}$ sur un espace E de fonctions hölderiennes. Il existe alors une valeur propre simple $\lambda > 0$, une fonction propre associée $h > 0$, et une mesure de probabilité μ ayant les propriétés suivantes :

- $\int \mathcal{L}_{\varphi^+}(\psi) d\mu = \lambda \int \psi \, d\mu, \forall \psi \in C(\Sigma_{\mathcal{B}}^+)$;
- $\lim_{n \to +\infty} \lambda^{-n} \mathcal{L}^n_{\varphi^+}(\psi) = (\int \psi \, d\mu) h, \forall \psi \in E$;
- $\lambda = \exp\,(P(\varphi+)$;
- la mesure de probabilité $\nu := h\mu$ est σ-invariante et ergodique ;
- pour tout borélien A sur lequel σ est injective, on a

$$\mu(\sigma(A)) = \lambda \int_A \exp(-\varphi^+) d\mu \,.$$

On a terminé cette partie du cours en présentant deux applications du formalisme thermodynamique.

En général, un difféomorphisme d'Anosov f du tore $\mathbb{T}^d$ ne préserve aucune mesure de probabilité qui soit absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Cependant, Sinai a montré qu'il existe toujours une mesure de probabilité f-invariante μ^+ qui représente les moyennes de Birkhoff en temps positif de toute fonction continue sur $\mathbb{T}^d$. Il existe de même une mesure de probabilité f-invariante μ^- qui représente les moyennes de Birkhoff en temps négatif. En général, ces mesures de probabilité sont distinctes.

Les opérateurs de transfert permettent dans de nombreuses circonstances de contrôler les dimensions de Hausdorff transverses de feuilletages stables et instables, et en particulier de montrer que ces dimensions dépendent analytiquement des paramètres.

3. L'*entropie topologique* $h(f)$ d'une application continue f d'un espace compact X dans lui-même mesure le taux de croissance exponentiel de l'information nécessaire pour décrire toutes les orbites de f, avec une certaine précision, entre les temps 0 et n.

Lorsque μ est une mesure de probabilité f-invariante sur X, l'*entropie métrique* $h_\mu(f)$ mesure le taux de croissance exponentiel de l'information nécessaire pour décrire μ-presque toute orbite de f, avec une certaine précision, entre les temps 0 et n. Lorsque μ est ergodique, le théorème de Shannon-Breiman-McMillan (et sa version métrique par Mañé-Brin-Katok) exprime l'entropie comme le taux de décroissance de la mesure des points ayant essentiellement la même orbite entre les temps 0 et n.

Le *principe variationnel* relie les deux types d'entropie : pour toute fonction continue sur X

$$P(\varphi) = \sup_{f_* \mu = \mu} (h_\mu(f) + \int \varphi \, d\mu).$$

Lorsque $\varphi = 0$, la pression $P(0)$ est en effet l'entropie topologique de f.

Le théorème ergodique multiplicatif d'Oseledets est un des principaux outils de la théorie des systèmes dynamiques différentiables. Dans le cas d'une mesure invariante ergodique, auquel on peut souvent se ramener, il permet d'associer à un difféomorphisme des *exposants de Lyapunov* constants presque partout et une décomposition mesurable invariante du fibré tangent.

La théorie de Pesin permet de traduire le comportement infinitésimal du théorème d'Oseledets en un contrôle local de la dynamique. En particulier, on peut définir variétés stables et instables en presque tout point. Si le difféomorphisme f est de classe C^s avec $s > 1$, et si la mesure invariante μ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, la *formule de l'entropie* relie l'entropie métrique aux exposants de Lyapunov θ_i :

$$h_u(f) = \int \sum_{\theta_i(x)>0} m_i(x)\theta_i(x)\, d\mu,$$

où $m_i(x)$ est la *multiplicité* de l'exposant $\theta_i\,(x)$.

Dans le cas où la mesure invariante n'est pas absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, Ledrappier et Young ont établi une formule pour l'entropie qui généralise celle de Pesin. Cette formule fait intervenir la dimension de certaines mesures conditionnelles obtenues par désintégration de la mesure invariante.

4. On dit qu'un difféomorphisme f de classe C^s est *C^s-structurellement stable* si tout difféomorphisme C^s-proche de f est topologiquement conjugué à f. Robbin et Robinson ont montré qu'un difféomorphisme hyperbolique, tel que chaque variété stable $W_s(x)$ est transverse à chaque variété instable $W_u(y)$, est C^1-structurellement stable. La réciproque, beaucoup plus délicate, a été établie par Mañe.

Le point de départ de la preuve de Mañe est le *closing lemma* de Pugh : si x est un point non-errant pour un difféomorphisme f, et $\mathcal{U}$ est un voisinage de f dans la C^1-topologie, il existe $g \in \mathcal{U}$ tel que x soit périodique pour g. Hayashi, puis Bonatti-Crovisier, ont amélioré le résultat de Pugh. Cependant, aucun résultat significatif n'est encore connu dans la C^2-topologie.

Seul le cas du cercle est complètement éclairci : pour tout $s \geq 1$, un difféomorphisme est C^s-structurellement stable si et seulement si le nombre de rotation est rationnel et les orbites périodiques (en nombre fini) sont hyperboliques. Ces difféomorphismes constituent une partie ouverte et dense dans le groupe des difféomorphismes de classe C^s.

Le cas des fractions rationnelles est particulièrement intéressant. D'après un célèbre théorème de Mañe-Sad-Sullivan, pour tout $d > 1$, les fractions rationnelles structurellement stables forment une partie ouverte et dense dans l'ensemble des fractions rationnelles de degré d. Cependant on ne sait pas si une fraction rationnelle structurellement stable est nécessairement hyperbolique ! Cela résulterait d'une conjecture formulée il y a un siècle par Fatou.

On connaît deux obstructions à la densité de l'hyperbolicité dans le groupe des difféomorphismes de classe C^r d'une variété M de dimension > 1 :

- les *tangences homoclines* en dimension ≥ 2, lorsque $r > 1$;
- les *cycles hétérodimensionnels* en dimension ≥ 3, lorsque $r \geq 1$.

Notons qu'on ne sait toujours pas si les difféomorphismes hyperboliques forment une partie dense dans le groupe des difféomorphismes de classe C^1 d'une surface M.

Un difféomorphisme présentant une tangence homocline ou un cycle hétérodimensionnel n'est pas hyperbolique car il possède des points récurrents par chaînes dont les variétés stables et instables ne sont pas transverses. Or dans les cas considérés ($r > 1$, dim $M \geq 2$ ou $r \geq 1$, dim $M \geq 3$), il est possible de construire des parties ouvertes dans le groupe des difféomorphismes exhibant cette propriété de façon persistante. L'hyperbolicité ne peut donc être dense.

Hall a défini l'*épaisseur* d'un ensemble de Cantor contenu dans la droite réelle. Il a montré que, si le produit des épaisseurs de deux ensembles de Cantor disjoints est strictement plus grand que 1, l'un des ensembles de Cantor est contenu dans une composante connexe du complémentaire de l'autre. Ce résultat permet de construire un ouvert non vide dans $\mathrm{Diff}^r(M)$ (r >1, dim $M \geq 2$) où les tangences homoclines sont persistantes.

En dimension au moins égale à 3, la persistance de cycles hétérodimensionnels est basée sur la notion de *mélangeurs* : ce sont des ensembles basiques de type selle dont la direction instable est de dimension 1 mais le feuilletage instable est de codimension < 1.

L'étude des bifurcations homoclines, pour les difféomorphismes des surfaces, a suscité de nombreux travaux. Le contexte est le suivant. On part d'un difféomorphisme f d'une surface M qui possède un point fixe hyperbolique p et une tangence quadratique homocline en un point q entre les variétés stables et instables de p. L'ensemble $\Lambda(f) := \{p\} \cup O(q)$ est fermé, invariant ; on suppose qu'il est localement maximal. Étant donné un petit voisinage U de $\Lambda(f)$, on souhaite comprendre, lorsque g est proche de f, la géométrie et la dynamique de l'ensemble maximal invariant $\Lambda(g)$ de g dans U. En déployant l'intersection quadratique en q, on partage le voisinage $\mathcal{U}$ de f en trois parties :

- une hypersurface $\mathcal{U}_0$ le long de laquelle on a encore pour g une tangence quadratique homocline ;
- un demi-voisinage $\mathcal{U}_-$ pour lequel $W^s(p(g))$ et $W^u(p(g))$ ne se rencontrent pas au voisinage de q ;
- un demi-voisinage $\mathcal{U}_+$ pour lequel $W^s(p(g))$ et $W^u(p(g))$ se rencontrent deux fois au voisinage de q.

On a $\Lambda(g) = \{p(g)\}$ pour $g \in \mathcal{U}_-$ et $\Lambda(g) = \{p(g)\} \cup O(q(g))$ pour $g \in \mathcal{U}_0$. Dans $\mathcal{U}_+$, la situation est plus intéressante. Supposons que le jacobien de f en p soit < 1. Newhouse a montré qu'il existe une partie $\mathcal{N}$, G_δ-dense dans un ouvert $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}_+$, et rencontrant toute famille à un paramètre transverse à $\mathcal{U}_0$, telle que $\Lambda(g)$ contienne une infinité d'orbites périodiques attractives lorsque $g \in \mathcal{N}$. Cependant, Newhouse-Palis-Takens ont établi que $\Lambda(g)$ est le plus souvent (i.e avec une probabilité qui se rapproche de 1 lorsque g se rapproche de $\mathcal{U}_0$) un ensemble basique de type selle.

Une application analytique f définie sur un intervalle compact, à valeurs réelles, est (uniformément) hyperbolique s'il existe une décomposition de I en des ensembles E, F, J ayant les propriétés suivantes :

- l'ensemble ouvert E est formé des points dont l'orbite s'échappe de I ;
- l'ensemble ouvert invariant F est formé des points dont l'orbite converge vers une orbite périodique attractive ; celles-ci sont en nombre fini ;
- l'ensemble de Julia J est compact et invariant ; les dérivées des itérés de f croissent exponentiellement vite sur J.

Lorsque f est une application polynomiale, on choisit l'intervalle I suffisamment grand pour contenir toutes les orbites bornées de f.

Kozlovski, Shen et Van Strien ont montré que les applications hyperboliques forment une partie ouverte et dense dans l'espace des applications polynomiales de degré fixé $d > 1$. Le cas $d = 2$ avait été résolu auparavant par Graczyk-Swiatek et Lyubich.

Considérons le polynôme quadratique $P_c(x) = x^2 + c$. Cette application est hyperbolique pour $c < -2$ et $c > 1/4$. Dans ces deux cas, l'ensemble de Fatou F est vide. Lorsque $c \in [-2, 1/4]$, l'application P_c est hyperbolique si et seulement si elle a une orbite périodique attractive, et cela se produit pour une partie ouverte et dense $\mathcal{R}$ de [–2, 1/4].

Cependant $\mathcal{R}$ n'est pas de mesure pleine ! Jakobson a en effet montré qu'il existe un ensemble de mesure de Lebesgue positive $E \subset [-2, 1/4]$, tel que, pour $c \in E$, l'application P_c possède une mesure invariante absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. De plus, l'exposant de Lyapunov de P_c associé à cette mesure est strictement positif.

Lyubich a amélioré considérablement le résultat de Jakobson. Il montre que, pour presque tout $c \in \mathbb{R}$, l'application P_c satisfait aux conclusions du théorème de Jakobson si elle n'est pas uniformément hyperbolique.

M. Rees a démontré pour les fractions rationnelles agissant sur la sphère de Riemann un résultat dans l'esprit de celui de Jakobson. Dans l'espace des fonctions rationnelles de degré $d > 1$, un ensemble de mesure de Lebesgue positive est formé d'applications qui admettent une mesure de probabilité invariante équivalente à la mesure de Lebesgue, et dont l'exposant de Lyapunov est strictement positif.

Les résultats de Jakobson et Rees mettent en évidence une dynamique de type « non-uniformément hyperbolique » pour des applications non-inversibles en dimension un (réelle et complexe respectivement).

La famille de Hénon est constituée des difféomorphismes quadratiques du plan

$$H_{b,c}\,(x,y) = (x^2 + c - by,\, x).$$

Hénon a observé numériquement dans les années 1970 que, pour les valeurs $b_* = -0.4$, $c_* = -1.3$, de nombreuses orbites convergeaient vers un « attracteur étrange » égal à l'adhérence de la variété instable de l'un des deux points fixes de H_{b_*,c_*}.

On ne dispose aujourd'hui, pour ces valeurs des paramètres, d'aucun résultat rigoureux. Par contre, lorsque le jacobien b est suffisamment petit, des progrès importants ont été réalisés. On considère des valeurs de c proches de –2 mais > –2. Il est facile de construire une partie ouverte bornée $B = B_{b,c}$ de $\mathbb{R}^2$ envoyée dans elle-même par $H_{b,c}$ et contenant un point fixe hyperbolique α de type selle. Avec probabilité positive sur c (b étant fixé), l'application $H_{b,c}$ possède les propriétés suivantes :

- (Benedicks-Carleson) Toute orbite de B converge vers l'adhérence Λ de la variété instable de α. La restriction de $H_{b,c}$ à Λ a une orbite dense. En particulier, B ne contient pas d'orbite périodique attractive.
- (Benedicks-Young) L'attracteur Λ est le support d'une *mesure physique*, c'est-à-dire une mesure de probabilité invariante μ qui gouverne le comportement des orbites pour en ensemble de conditions initiales de mesure de Lebesgue positive.
- (Benedicks-Viana) Presque toute orbite dans B est distribuée suivant l'unique mesure physique μ.

La *famille standard* est une famille à un paramètre de difféomorphismes du tore préservant les aires définie par

$$F_k(x,y) = (2x - y + k \sin 2\pi x,\, x).$$

Elle a été étudiée numériquement de façon intensive mais les résultats rigoureux sont très peu nombreux. Lorsque k est petit, la théorie KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser) garantit l'existence d'un ensemble de mesure positive constitué de courbes invariantes diophantiennes.

On suspecte que l'entropie métrique de F_k est strictement positive dès que k est non nul, mais on ne sait pas montrer qu'il existe au moins un paramètre ayant cette propriété ! On pense que F_k est ergodique pour un ensemble de mesure positive de valeurs de k. À nouveau, on ne sait pas même pas montrer qu'il existe un paramètre k tel que F_k soit ergodique.

Dans la dernière partie du cours, on a présenté des résultats supplémentaires concernant l'étude des bifurcations homoclines pour les difféomorphismes des surfaces.

La situation initiale est la suivante. On considère un difféomorphisme f d'une surface M, un ensemble basique K pour f, non trivial et de type selle, et deux points périodiques p_s, $p_u \in K$ dont les orbites sont distinctes. On suppose que $W^s(p_s)$ et $W^u(p_u)$ ont en un point $q \in M$ une tangence quadratique, telle que l'ensemble compact invariant $K \coprod O(q)$ soit localement maximal. On choisit des voisinages ouverts V de K et U de $O(q)$ tels que K (resp. $K \coprod O(q)$) soit l'ensemble maximal invariant dans V (resp. $U \cup V$). Il s'agit de comprendre, lorsque g est un difféomorphisme proche de f, la géométrie et la dynamique de l'ensemble maximal invariant Λ_g dans $U \cup V$.

Comme précédemment, on peut diviser un voisinage $\mathcal{U}$ de f en des parties $\mathcal{U}_0$, $\mathcal{U}_-$, $\mathcal{U}_+$ telles que

- $\mathcal{U}_0$ est une sous-variété de codimension 1 de $\mathcal{U}$ le long de laquelle $W^s(p_s)$ et $W^u(p_u)$ maintiennent une tangence quadratique au voisinage de q ; l'ensemble maximal invariant Λ_g est égal à $K_g \coprod O(q_g)$.
- $\mathcal{U}_-$ est le demi-voisinage ouvert de f, bordé par $\mathcal{U}_0$, dans lequel $W^s(p_s)$ et $W^u(p_u)$ n'ont pas d'intersection au voisinage de q ; l'ensemble maximal invariant Λ_g est égal à K_g.
- $\mathcal{U}_+$ est le demi-voisinage ouvert de f, bordé par $\mathcal{U}_0$, dans lequel $W^s(p_s)$ et $W^u(p_u)$ ont deux intersections primaires au voisinage de q.

Lorsque la dimension de Hausdorff de K est strictement inférieure à 1, Palis-Takens ont amélioré le résultat de Newhouse-Palis-Takens : lorsque g décrit un ensemble de densité totale dans $\mathcal{U}_+$, l'ensemble maximal invariant Λ_g est un ensemble basique de g.

Lorsque la dimension de Hausdorff de K est strictement supérieure à 1, Moreira-Yoccoz ont montré l'existence de tangences robustes en densité positive entre les feuilletages stables et instables de K_g. Dans ce cas, Λ_g ne peut-être un ensemble basique.

Rappelons que la dimension de Hausdorff de K est la somme d'une dimension stable transverse d_s et d'une dimension instable transverse d_u. Lorsque d_s, d_u vérifient $d_s + d_u > 1$ mais

$$(d_s + d_u)^2 + (\max(d_s, d_u))^2 < d_s + d_u + \max(d_s, d_u),$$

Palis-Yoccoz montrent que l'ensemble maximal invariant Λ_g est, pour un ensemble de densité totale dans $\mathcal{U}_+$, un *fer à cheval non uniformément hyperbolique*. Quelques propriétés dynamiques et géométriques de ces ensembles ont été détaillées dans le cours.

En conclusion, on dispose d'un certain parallélisme entre la théorie uniformément hyperbolique, essentiellement complète, et la théorie non-uniformément hyperbolique, encore largement incomplète. Aux applications uniformément expansives telles que le doublement d'angles sur le cercle ou la restriction d'une fraction rationnelle hyperbolique à son ensemble de Julia correspondent les applications non-uniformément hyperboliques identifiées par M. Jakobson et M. Rees. Aux attracteurs uniformément hyperboliques tels que le solénoïde correspondent les attracteurs de Hénon identifiés par Benedicks-Carleson. Aux fers à cheval uniformément hyperboliques de Smale correspondent les fers à cheval non uniformément hyperboliques partiellement décrits par Palis-Yoccoz.

Dans cette analogie, quels systèmes non-uniformément hyperboliques correspondent aux difféomorphismes d'Anosov ? On s'attend à ce que la famille standard fournisse de nombreux exemples, mais tout reste à faire dans cette direction.

Publication

MATHEUS C., YOCCOZ J.-C. et ZMIAIKOU D., « Homology of origamis with symmetries », *Annales de l'institut Fourier*, vol. 64, n° 3, 2014, 1131-1176.

Missions, invitations, conférences

20-24 octobre 2014 : Mission à l'université de Bristol (Grande-Bretagne) pour collaboration avec S. Marmi et C. Ulcigrai.

10-14 novembre 2014 : Participation à un colloque à Cargese dans le cadre du projet ANR DynPDE.

28 avril 2015 : Une conférence lors de la conférence « Astronomie et dynamique » organisée à l'Observatoire en l'honneur de J. Laskar.

20 mai 2015 : Une conférence lors de la « Journée plate » à l'université Paris 13.

1er juin 2015 : Une conférence à l'IHP lors des journées organisées à l'occasion du cinquantenaire du centre Laurent Schwartz de l'École polytechnique.

2 juin 2015 : Une conférence lors du colloque franco-mexicain à l'Académie des sciences.

15-19 juin 2015 : Participation à la troisième conférence Palis-Balzan à l'IHP.

6-10 juillet 2015 : Participation à la rencontre « Dynamique et géométrie dans l'espace de Teichmüller » au CIRM (Luminy).

20-24 juillet 2015 : Codirection du colloque « Systèmes dynamiques » à Oberwolfach (Allemagne).

27-31 juillet 2015 : Codirection de l'école et conférence sur les systèmes dynamiques à l'ICTP (Trieste, Italie).