

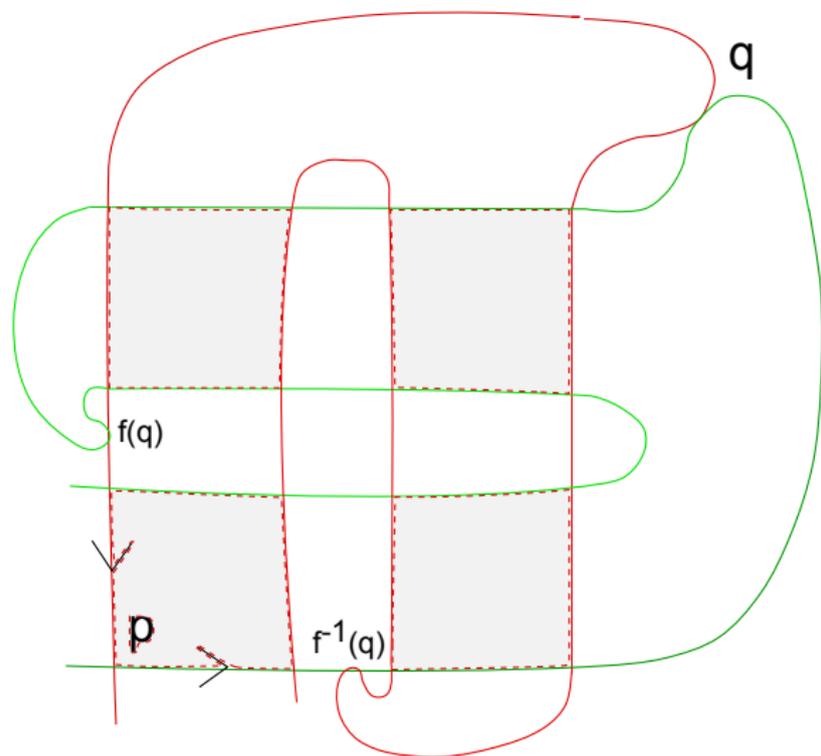
# Quelques aspects de la théorie des systèmes dynamiques hyperboliques (7)

Jean-Christophe Yoccoz

Collège de France

4 mars 2015

# Exemple de tangences homoclines robustes





Soit  $M$  une **surface** connexe compacte, et soit  $f \in \text{Diff}^2(M)$  un difféomorphisme.

Soit  $M$  une **surface** connexe compacte, et soit  $f \in \text{Diff}^2(M)$  un difféomorphisme. On suppose que  $f$  admet un **ensemble basique (infini) de type selle**  $K$

Soit  $M$  une **surface** connexe compacte, et soit  $f \in \text{Diff}^2(M)$  un difféomorphisme. On suppose que  $f$  admet un **ensemble basique (infini) de type selle**  $K$  et un point fixe  $p \in K$  tel que les variétés stables et instables de  $p$  soient **quadratiquement tangentes** en un point  $q \in M \setminus K$ .

Soit  $M$  une **surface** connexe compacte, et soit  $f \in \text{Diff}^2(M)$  un difféomorphisme. On suppose que  $f$  admet un **ensemble basique (infini) de type selle**  $K$  et un point fixe  $p \in K$  tel que les variétés stables et instables de  $p$  soient **quadratiquement tangentes** en un point  $q \in M \setminus K$ . Notons  $\tau_s$  (resp.  $\tau_u$ ) la borne supérieure des **épaisseurs** des ensembles de Cantor obtenus par intersection de  $K$  avec un voisinage de  $p$  dans  $W^u(p)$  (resp.  $W^s(p)$ ).

Soit  $M$  une **surface** connexe compacte, et soit  $f \in \text{Diff}^2(M)$  un difféomorphisme. On suppose que  $f$  admet un **ensemble basique (infini) de type selle**  $K$  et un point fixe  $p \in K$  tel que les variétés stables et instables de  $p$  soient **quadratiquement tangentes** en un point  $q \in M \setminus K$ . Notons  $\tau_s$  (resp.  $\tau_u$ ) la borne supérieure des **épaisseurs** des ensembles de Cantor obtenus par intersection de  $K$  avec un voisinage de  $p$  dans  $W^u(p)$  (resp.  $W^s(p)$ ).

**Proposition** (Newhouse) Supposons qu'on ait  $\tau_s \tau_u > 1$ .

Soit  $M$  une **surface** connexe compacte, et soit  $f \in \text{Diff}^2(M)$  un difféomorphisme. On suppose que  $f$  admet un **ensemble basique (infini) de type selle**  $K$  et un point fixe  $p \in K$  tel que les variétés stables et instables de  $p$  soient **quadratiquement tangentes** en un point  $q \in M \setminus K$ . Notons  $\tau_s$  (resp.  $\tau_u$ ) la borne supérieure des **épaisseurs** des ensembles de Cantor obtenus par intersection de  $K$  avec un voisinage de  $p$  dans  $W^u(p)$  (resp.  $W^s(p)$ ).

**Proposition** (Newhouse) Supposons qu'on ait  $\tau_s \tau_u > 1$ . Alors il existe un **ouvert**  $\mathcal{U} \subset \text{Diff}^2(M)$  tel que  $f$  appartienne à l'adhérence de  $\mathcal{U}$

Soit  $M$  une **surface** connexe compacte, et soit  $f \in \text{Diff}^2(M)$  un difféomorphisme. On suppose que  $f$  admet un **ensemble basique (infini) de type selle**  $K$  et un point fixe  $p \in K$  tel que les variétés stables et instables de  $p$  soient **quadratiquement tangentes** en un point  $q \in M \setminus K$ . Notons  $\tau_s$  (resp.  $\tau_u$ ) la borne supérieure des **épaisseurs** des ensembles de Cantor obtenus par intersection de  $K$  avec un voisinage de  $p$  dans  $W^u(p)$  (resp.  $W^s(p)$ ).

**Proposition** (Newhouse) Supposons qu'on ait  $\tau_s \tau_u > 1$ . Alors il existe un **ouvert**  $\mathcal{U} \subset \text{Diff}^2(M)$  tel que  $f$  appartienne à l'adhérence de  $\mathcal{U}$  et que, pour tout  $g \in \mathcal{U}$ , les laminations  $W^s(K_g)$  et  $W^u(K_g)$  aient une **tangence quadratique** au voisinage de  $q$ .

Nous donnons un exemple en illustrant le principe.

Nous donnons un exemple en illustrant le principe.

Dans le cube  $C := [0, 1]^3$ , posons

$$C_0 := \{((x, y, z) \in C \mid z \in [0, \frac{1}{3}])\}, \quad C_1 := \{((x, y, z) \in C \mid z \in [\frac{2}{3}, 1])\}.$$

Nous donnons un exemple en illustrant le principe.

Dans le cube  $C := [0, 1]^3$ , posons

$$C_0 := \{(x, y, z) \in C \mid z \in [0, \frac{1}{3}]\}, \quad C_1 := \{(x, y, z) \in C \mid z \in [\frac{2}{3}, 1]\}.$$

Définissons  $F : C_0 \cup C_1 \rightarrow C$  by

$$F(x, y, z) = \begin{cases} (2x/3, y/3, 3z) & \text{pour } 0 \leq z \leq \frac{1}{3} \\ (1, 1, 1) + (2(x-1)/3, (y-1)/3, 3(z-1)) & \text{pour } \frac{2}{3} \leq z \leq 1 \end{cases}$$

Nous donnons un exemple en illustrant le principe.

Dans le cube  $C := [0, 1]^3$ , posons

$$C_0 := \{(x, y, z) \in C \mid z \in [0, \frac{1}{3}]\}, \quad C_1 := \{(x, y, z) \in C \mid z \in [\frac{2}{3}, 1]\}.$$

Définissons  $F : C_0 \cup C_1 \rightarrow C$  by

$$F(x, y, z) = \begin{cases} (2x/3, y/3, 3z) & \text{pour } 0 \leq z \leq \frac{1}{3} \\ (1, 1, 1) + (2(x-1)/3, (y-1)/3, 3(z-1)) & \text{pour } \frac{2}{3} \leq z \leq 1 \end{cases}$$

Soit  $K := \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} F^{-n}(C_0 \cup C_1)$  l'ensemble maximal invariant dans  $C_0 \cup C_1$ .

Nous donnons un exemple en illustrant le principe.

Dans le cube  $C := [0, 1]^3$ , posons

$$C_0 := \{(x, y, z) \in C \mid z \in [0, \frac{1}{3}]\}, \quad C_1 := \{(x, y, z) \in C \mid z \in [\frac{2}{3}, 1]\}.$$

Définissons  $F : C_0 \cup C_1 \rightarrow C$  by

$$F(x, y, z) = \begin{cases} (2x/3, y/3, 3z) & \text{pour } 0 \leq z \leq \frac{1}{3} \\ (1, 1, 1) + (2(x-1)/3, (y-1)/3, 3(z-1)) & \text{pour } \frac{2}{3} \leq z \leq 1 \end{cases}$$

Soit  $K := \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} F^{-n}(C_0 \cup C_1)$  l'ensemble maximal invariant dans  $C_0 \cup C_1$ .  
C'est un ensemble basique de type selle.

Nous donnons un exemple en illustrant le principe.

Dans le cube  $C := [0, 1]^3$ , posons

$$C_0 := \{(x, y, z) \in C \mid z \in [0, \frac{1}{3}]\}, \quad C_1 := \{(x, y, z) \in C \mid z \in [\frac{2}{3}, 1]\}.$$

Définissons  $F : C_0 \cup C_1 \rightarrow C$  by

$$F(x, y, z) = \begin{cases} (2x/3, y/3, 3z) & \text{pour } 0 \leq z \leq \frac{1}{3} \\ (1, 1, 1) + (2(x-1)/3, (y-1)/3, 3(z-1)) & \text{pour } \frac{2}{3} \leq z \leq 1 \end{cases}$$

Soit  $K := \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} F^{-n}(C_0 \cup C_1)$  l'ensemble maximal invariant dans  $C_0 \cup C_1$ .  
C'est un ensemble basique de type selle. La dynamique de  $F|_K$  est conjuguée au décalage complet sur deux symboles.

Nous donnons un exemple en illustrant le principe.

Dans le cube  $C := [0, 1]^3$ , posons

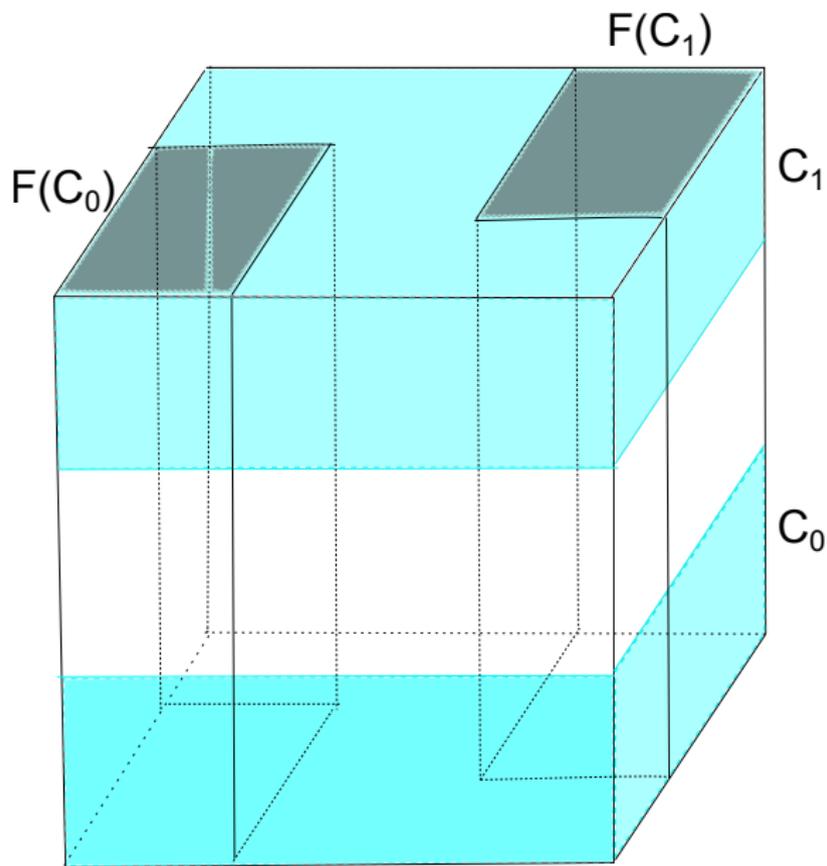
$$C_0 := \{(x, y, z) \in C \mid z \in [0, \frac{1}{3}]\}, \quad C_1 := \{(x, y, z) \in C \mid z \in [\frac{2}{3}, 1]\}.$$

Définissons  $F : C_0 \cup C_1 \rightarrow C$  by

$$F(x, y, z) = \begin{cases} (2x/3, y/3, 3z) & \text{pour } 0 \leq z \leq \frac{1}{3} \\ (1, 1, 1) + (2(x-1)/3, (y-1)/3, 3(z-1)) & \text{pour } \frac{2}{3} \leq z \leq 1 \end{cases}$$

Soit  $K := \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} F^{-n}(C_0 \cup C_1)$  l'ensemble maximal invariant dans  $C_0 \cup C_1$ .  
C'est un ensemble basique de type selle. La dynamique de  $F|_K$  est conjuguée au décalage complet sur deux symboles.

La propriété cruciale pour les applications est que **l'image de l'ensemble de Cantor  $K$  par la projection  $(x, y, z) \mapsto x$  est l'intervalle  $[0, 1]$  tout entier.**



Pour tout point  $m \in K$ , le segment vertical  $W^u(m, C)$  traversant  $C$  et passant par  $m$  est la composante connexe de  $m$  dans la variété instable de  $m$ .

Pour tout point  $m \in K$ , le segment vertical  $W^u(m, C)$  traversant  $C$  et passant par  $m$  est la composante connexe de  $m$  dans la variété instable de  $m$ .

Considérons d'autre part le segment horizontal

$$H := \{(x, y, z) \in C \mid x = z = 1/2\}.$$

Pour tout point  $m \in K$ , le segment vertical  $W^u(m, C)$  traversant  $C$  et passant par  $m$  est la composante connexe de  $m$  dans la variété instable de  $m$ .

Considérons d'autre part le segment horizontal

$$H := \{(x, y, z) \in C \mid x = z = 1/2\}.$$

**Proposition** Pour toute perturbation  $G$  de  $F$  dans la  $C^1$ -topologie,

Pour tout point  $m \in K$ , le segment vertical  $W^u(m, C)$  traversant  $C$  et passant par  $m$  est la composante connexe de  $m$  dans la variété instable de  $m$ .

Considérons d'autre part le segment horizontal

$$H := \{(x, y, z) \in C \mid x = z = 1/2\}.$$

**Proposition** Pour toute perturbation  $G$  de  $F$  dans la  $C^1$ -topologie, il existe un point  $m$  de la continuation hyperbolique  $K_G$  de  $K$  tel que  $H$  rencontre la variété instable  $W_G^u(m, C)$ .

Pour tout point  $m \in K$ , le segment vertical  $W^u(m, C)$  traversant  $C$  et passant par  $m$  est la composante connexe de  $m$  dans la variété instable de  $m$ .

Considérons d'autre part le segment horizontal

$$H := \{(x, y, z) \in C \mid x = z = 1/2\}.$$

**Proposition** Pour toute perturbation  $G$  de  $F$  dans la  $C^1$ -topologie, il existe un point  $m$  de la continuation hyperbolique  $K_G$  de  $K$  tel que  $H$  rencontre la variété instable  $W_G^u(m, C)$ .

Pour obtenir un cycle hétérodimensionnel robuste,

Pour tout point  $m \in K$ , le segment vertical  $W^u(m, C)$  traversant  $C$  et passant par  $m$  est la composante connexe de  $m$  dans la variété instable de  $m$ .

Considérons d'autre part le segment horizontal

$$H := \{(x, y, z) \in C \mid x = z = 1/2\}.$$

**Proposition** Pour toute perturbation  $G$  de  $F$  dans la  $C^1$ -topologie, il existe un point  $m$  de la continuation hyperbolique  $K_G$  de  $K$  tel que  $H$  rencontre la variété instable  $W_G^u(m, C)$ .

Pour obtenir un cycle hétérodimensionnel robuste, il suffit de plonger  $C$  dans une variété compacte connexe  $M$  de dimension 3,

Pour tout point  $m \in K$ , le segment vertical  $W^u(m, C)$  traversant  $C$  et passant par  $m$  est la composante connexe de  $m$  dans la variété instable de  $m$ .

Considérons d'autre part le segment horizontal

$$H := \{(x, y, z) \in C \mid x = z = 1/2\}.$$

**Proposition** Pour toute perturbation  $G$  de  $F$  dans la  $C^1$ -topologie, il existe un point  $m$  de la continuation hyperbolique  $K_G$  de  $K$  tel que  $H$  rencontre la variété instable  $W_G^u(m, C)$ .

Pour obtenir un cycle hétérodimensionnel robuste, il suffit de plonger  $C$  dans une variété compacte connexe  $M$  de dimension 3, de façon que  $F$  soit la restriction d'un difféomorphisme  $f \in \text{Diff}^\infty(M)$ .

Pour tout point  $m \in K$ , le segment vertical  $W^u(m, C)$  traversant  $C$  et passant par  $m$  est la composante connexe de  $m$  dans la variété instable de  $m$ .

Considérons d'autre part le segment horizontal

$$H := \{(x, y, z) \in C \mid x = z = 1/2\}.$$

**Proposition** Pour toute perturbation  $G$  de  $F$  dans la  $C^1$ -topologie, il existe un point  $m$  de la continuation hyperbolique  $K_G$  de  $K$  tel que  $H$  rencontre la variété instable  $W_G^u(m, C)$ .

Pour obtenir un cycle hétérodimensionnel robuste, il suffit de plonger  $C$  dans une variété compacte connexe  $M$  de dimension 3, de façon que  $F$  soit la restriction d'un difféomorphisme  $f \in \text{Diff}^\infty(M)$ . On s'arrange pour que

- ▶  $f$  possède hors de  $C$  un point fixe hyperbolique  $q$  dont la variété stable est de dimension 1;

Pour tout point  $m \in K$ , le segment vertical  $W^u(m, C)$  traversant  $C$  et passant par  $m$  est la composante connexe de  $m$  dans la variété instable de  $m$ .

Considérons d'autre part le segment horizontal

$$H := \{(x, y, z) \in C \mid x = z = 1/2\}.$$

**Proposition** Pour toute perturbation  $G$  de  $F$  dans la  $C^1$ -topologie, il existe un point  $m$  de la continuation hyperbolique  $K_G$  de  $K$  tel que  $H$  rencontre la variété instable  $W_G^u(m, C)$ .

Pour obtenir un cycle hétérodimensionnel robuste, il suffit de plonger  $C$  dans une variété compacte connexe  $M$  de dimension 3, de façon que  $F$  soit la restriction d'un difféomorphisme  $f \in \text{Diff}^\infty(M)$ . On s'arrange pour que

- ▶  $f$  possède hors de  $C$  un point fixe hyperbolique  $q$  dont la variété stable est de dimension 1;
- ▶ la variété stable du point fixe  $p = (0, 0, 0) \in C$  et la variété instable  $W^u(q)$  (toutes deux de dimension 2) se rencontrent transversalement de façon non triviale;

Pour tout point  $m \in K$ , le segment vertical  $W^u(m, C)$  traversant  $C$  et passant par  $m$  est la composante connexe de  $m$  dans la variété instable de  $m$ .

Considérons d'autre part le segment horizontal

$$H := \{(x, y, z) \in C \mid x = z = 1/2\}.$$

**Proposition** Pour toute perturbation  $G$  de  $F$  dans la  $C^1$ -topologie, il existe un point  $m$  de la continuation hyperbolique  $K_G$  de  $K$  tel que  $H$  rencontre la variété instable  $W_G^u(m, C)$ .

Pour obtenir un cycle hétérodimensionnel robuste, il suffit de plonger  $C$  dans une variété compacte connexe  $M$  de dimension 3, de façon que  $F$  soit la restriction d'un difféomorphisme  $f \in \text{Diff}^\infty(M)$ . On s'arrange pour que

- ▶  $f$  possède hors de  $C$  un point fixe hyperbolique  $q$  dont la variété stable est de dimension 1;
- ▶ la variété stable du point fixe  $p = (0, 0, 0) \in C$  et la variété instable  $W^u(q)$  (toutes deux de dimension 2) se rencontrent transversalement de façon non triviale;
- ▶ la variété stable  $W^s(q)$  contienne  $H$ .

Pour tout point  $m \in K$ , le segment vertical  $W^u(m, C)$  traversant  $C$  et passant par  $m$  est la composante connexe de  $m$  dans la variété instable de  $m$ .

Considérons d'autre part le segment horizontal

$$H := \{(x, y, z) \in C \mid x = z = 1/2\}.$$

**Proposition** Pour toute perturbation  $G$  de  $F$  dans la  $C^1$ -topologie, il existe un point  $m$  de la continuation hyperbolique  $K_G$  de  $K$  tel que  $H$  rencontre la variété instable  $W_G^u(m, C)$ .

Pour obtenir un cycle hétérodimensionnel robuste, il suffit de plonger  $C$  dans une variété compacte connexe  $M$  de dimension 3, de façon que  $F$  soit la restriction d'un difféomorphisme  $f \in \text{Diff}^\infty(M)$ . On s'arrange pour que

- ▶  $f$  possède hors de  $C$  un point fixe hyperbolique  $q$  dont la variété stable est de dimension 1;
- ▶ la variété stable du point fixe  $p = (0, 0, 0) \in C$  et la variété instable  $W^u(q)$  (toutes deux de dimension 2) se rencontrent transversalement de façon non triviale;
- ▶ la variété stable  $W^s(q)$  contienne  $H$ .

D'après la proposition, pour tout difféomorphisme  $g$   $C^1$ -proche de  $f$ ,  $W^s(q_g)$  rencontre  $W^u(K_g)$ .

# Bifurcations homoclines

Soit  $f$  un difféomorphisme de classe  $C^\infty$  d'une surface  $M$ .

# Bifurcations homoclines

Soit  $f$  un difféomorphisme de classe  $C^\infty$  d'une surface  $M$ . On suppose que  $f$  possède un point périodique hyperbolique  $p$ ,

# Bifurcations homoclines

Soit  $f$  un difféomorphisme de classe  $C^\infty$  d'une surface  $M$ . On suppose que  $f$  possède un point périodique hyperbolique  $p$ , et qu'il existe un point  $q$ , homocline à  $p$ , en lequel  $W^s(p)$  et  $W^u(p)$  ont une tangence quadratique.

# Bifurcations homoclines

Soit  $f$  un difféomorphisme de classe  $C^\infty$  d'une surface  $M$ . On suppose que  $f$  possède un point périodique hyperbolique  $p$ , et qu'il existe un point  $q$ , homocline à  $p$ , en lequel  $W^s(p)$  et  $W^u(p)$  ont une tangence quadratique. Notons  $\Lambda_f$  l'union de  $p$  et de l'orbite  $o(q)$  de  $q$ .

# Bifurcations homoclines

Soit  $f$  un difféomorphisme de classe  $C^\infty$  d'une surface  $M$ . On suppose que  $f$  possède un point périodique hyperbolique  $p$ , et qu'il existe un point  $q$ , homocline à  $p$ , en lequel  $W^s(p)$  et  $W^u(p)$  ont une tangence quadratique. Notons  $\Lambda_f$  l'union de  $p$  et de l'orbite  $o(q)$  de  $q$ . C'est un ensemble fermé, invariant par  $f$ , transitif (mais pas hyperbolique!).

# Bifurcations homoclines

Soit  $f$  un difféomorphisme de classe  $C^\infty$  d'une surface  $M$ . On suppose que  $f$  possède un point périodique hyperbolique  $p$ , et qu'il existe un point  $q$ , homocline à  $p$ , en lequel  $W^s(p)$  et  $W^u(p)$  ont une tangence quadratique.

Notons  $\Lambda_f$  l'union de  $p$  et de l'orbite  $o(q)$  de  $q$ . C'est un ensemble fermé, invariant par  $f$ , transitif (mais pas hyperbolique!). On suppose que  $\Lambda_f$  est localement maximal: il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $\Lambda_f$  tel qu'on ait

$$\Lambda_f = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^{-n}(U).$$

# Bifurcations homoclines

Soit  $f$  un difféomorphisme de classe  $C^\infty$  d'une surface  $M$ . On suppose que  $f$  possède un point périodique hyperbolique  $p$ , et qu'il existe un point  $q$ , homocline à  $p$ , en lequel  $W^s(p)$  et  $W^u(p)$  ont une tangence quadratique.

Notons  $\Lambda_f$  l'union de  $p$  et de l'orbite  $o(q)$  de  $q$ . C'est un ensemble fermé, invariant par  $f$ , transitif (mais pas hyperbolique!). On suppose que  $\Lambda_f$  est localement maximal: il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $\Lambda_f$  tel qu'on ait

$$\Lambda_f = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^{-n}(U).$$

# Bifurcations homoclines

Soit  $f$  un difféomorphisme de classe  $C^\infty$  d'une surface  $M$ . On suppose que  $f$  possède un point périodique hyperbolique  $p$ , et qu'il existe un point  $q$ , homocline à  $p$ , en lequel  $W^s(p)$  et  $W^u(p)$  ont une tangence quadratique.

Notons  $\Lambda_f$  l'union de  $p$  et de l'orbite  $o(q)$  de  $q$ . C'est un ensemble fermé, invariant par  $f$ , transitif (mais pas hyperbolique!). On suppose que  $\Lambda_f$  est localement maximal: il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $\Lambda_f$  tel qu'on ait

$$\Lambda_f = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^{-n}(U).$$

Pour  $g$  appartenant à un voisinage ouvert  $\mathcal{U}$  de  $f$  dans  $\text{Diff}^\infty(M)$ , on définit

$$\Lambda_g := \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} g^{-n}(U).$$

# Bifurcations homoclines

Soit  $f$  un difféomorphisme de classe  $C^\infty$  d'une surface  $M$ . On suppose que  $f$  possède un point périodique hyperbolique  $p$ , et qu'il existe un point  $q$ , homocline à  $p$ , en lequel  $W^s(p)$  et  $W^u(p)$  ont une tangence quadratique.

Notons  $\Lambda_f$  l'union de  $p$  et de l'orbite  $o(q)$  de  $q$ . C'est un ensemble fermé, invariant par  $f$ , transitif (mais pas hyperbolique!). On suppose que  $\Lambda_f$  est localement maximal: il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $\Lambda_f$  tel qu'on ait

$$\Lambda_f = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^{-n}(U).$$

Pour  $g$  appartenant à un voisinage ouvert  $\mathcal{U}$  de  $f$  dans  $\text{Diff}^\infty(M)$ , on définit

$$\Lambda_g := \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} g^{-n}(U).$$

Si  $U, \mathcal{U}$  sont choisis de façon appropriée,  $\Lambda_g$  est une partie compacte de  $U$ .

# Bifurcations homoclines

Soit  $f$  un difféomorphisme de classe  $C^\infty$  d'une surface  $M$ . On suppose que  $f$  possède un point périodique hyperbolique  $p$ , et qu'il existe un point  $q$ , homocline à  $p$ , en lequel  $W^s(p)$  et  $W^u(p)$  ont une tangence quadratique.

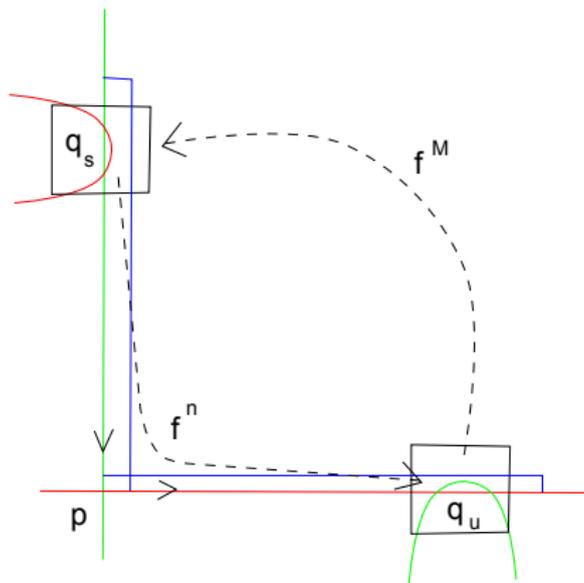
Notons  $\Lambda_f$  l'union de  $p$  et de l'orbite  $o(q)$  de  $q$ . C'est un ensemble fermé, invariant par  $f$ , transitif (mais pas hyperbolique!). On suppose que  $\Lambda_f$  est localement maximal: il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $\Lambda_f$  tel qu'on ait

$$\Lambda_f = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^{-n}(U).$$

Pour  $g$  appartenant à un voisinage ouvert  $\mathcal{U}$  de  $f$  dans  $\text{Diff}^\infty(M)$ , on définit

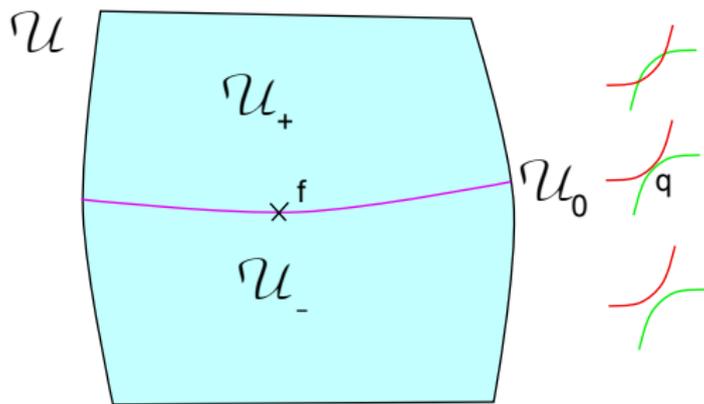
$$\Lambda_g := \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} g^{-n}(U).$$

Si  $U, \mathcal{U}$  sont choisis de façon appropriée,  $\Lambda_g$  est une partie compacte de  $U$ . C'est alors une partie fermée, invariante par  $g$  et localement maximale.

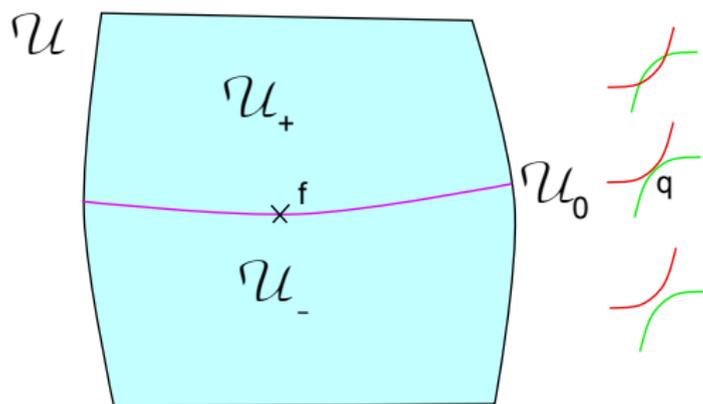


**Problème:** Comprendre, pour tout  $g \in \mathcal{U}$ , la **géométrie** de l'ensemble  $\Lambda_g$  et la **dynamique** de  $g$  sur  $\Lambda_g$ .

**Problème:** Comprendre, pour tout  $g \in \mathcal{U}$ , la **géométrie** de l'ensemble  $\Lambda_g$  et la **dynamique** de  $g$  sur  $\Lambda_g$ .

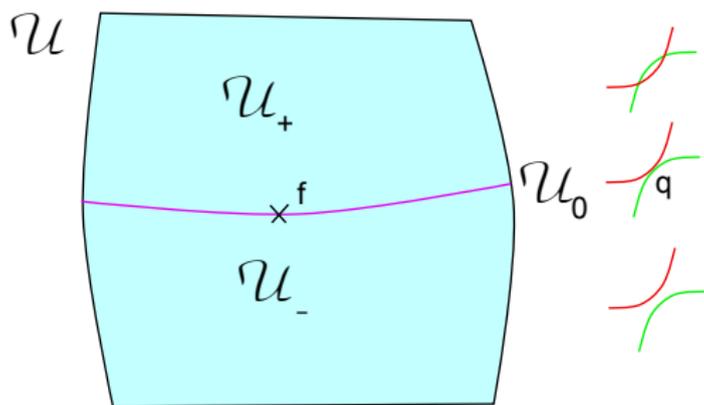


**Problème:** Comprendre, pour tout  $g \in \mathcal{U}$ , la **géométrie** de l'ensemble  $\Lambda_g$  et la **dynamique** de  $g$  sur  $\Lambda_g$ .



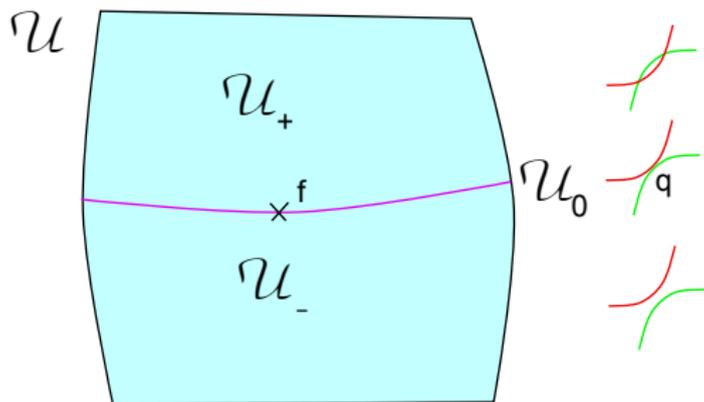
Le point fixe  $p$  de  $f$  possède une continuation  $p(g)$  dans  $\mathcal{U}$ .

**Problème:** Comprendre, pour tout  $g \in \mathcal{U}$ , la **géométrie** de l'ensemble  $\Lambda_g$  et la **dynamique** de  $g$  sur  $\Lambda_g$ .



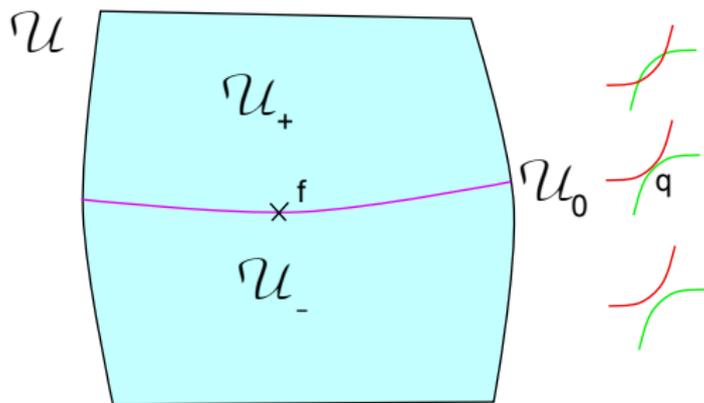
Le point fixe  $p$  de  $f$  possède une continuation  $p(g)$  dans  $\mathcal{U}$ . Il existe une **hypersurface lisse**  $\mathcal{U}_0$  dans  $\mathcal{U}$ , passant par  $f$ , le long de laquelle  $W^s(p(g))$  et  $W^u(p(g))$  ont une **tangence quadratique** en un point  $q(g)$  proche de  $q$ .

**Problème:** Comprendre, pour tout  $g \in \mathcal{U}$ , la **géométrie** de l'ensemble  $\Lambda_g$  et la **dynamique** de  $g$  sur  $\Lambda_g$ .



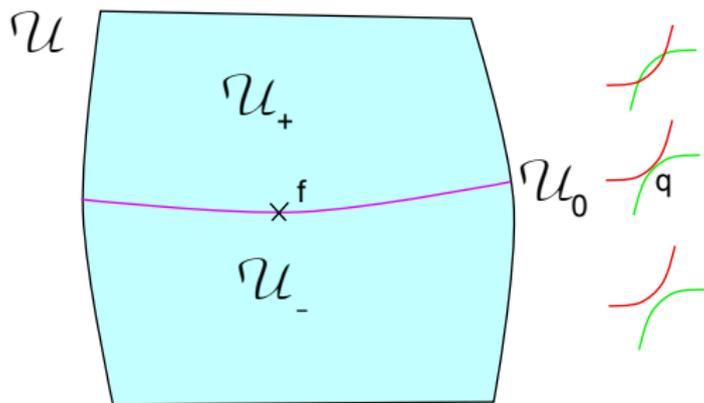
Le point fixe  $p$  de  $f$  possède une continuation  $p(g)$  dans  $\mathcal{U}$ . Il existe une **hypersurface lisse**  $\mathcal{U}_0$  dans  $\mathcal{U}$ , passant par  $f$ , le long de laquelle  $W^s(p(g))$  et  $W^u(p(g))$  ont une **tangence quadratique** en un point  $q(g)$  proche de  $q$ . L'hypersurface  $\mathcal{U}_0$  sépare  $\mathcal{U}$  en deux composantes  $\mathcal{U}_-$  et  $\mathcal{U}_+$ .

**Problème:** Comprendre, pour tout  $g \in \mathcal{U}$ , la **géométrie** de l'ensemble  $\Lambda_g$  et la **dynamique** de  $g$  sur  $\Lambda_g$ .



Le point fixe  $p$  de  $f$  possède une continuation  $p(g)$  dans  $\mathcal{U}$ . Il existe une **hypersurface lisse**  $\mathcal{U}_0$  dans  $\mathcal{U}$ , passant par  $f$ , le long de laquelle  $W^s(p(g))$  et  $W^u(p(g))$  ont une **tangence quadratique** en un point  $q(g)$  proche de  $q$ . L'hypersurface  $\mathcal{U}_0$  sépare  $\mathcal{U}$  en deux composantes  $\mathcal{U}_-$  et  $\mathcal{U}_+$ . Pour  $g \in \mathcal{U}_-$ , on a  $\Lambda_g = \{p(g)\}$ .

**Problème:** Comprendre, pour tout  $g \in \mathcal{U}$ , la **géométrie** de l'ensemble  $\Lambda_g$  et la **dynamique** de  $g$  sur  $\Lambda_g$ .



Le point fixe  $p$  de  $f$  possède une continuation  $p(g)$  dans  $\mathcal{U}$ . Il existe une **hypersurface lisse**  $\mathcal{U}_0$  dans  $\mathcal{U}$ , passant par  $f$ , le long de laquelle  $W^s(p(g))$  et  $W^u(p(g))$  ont une **tangence quadratique** en un point  $q(g)$  proche de  $q$ . L'hypersurface  $\mathcal{U}_0$  sépare  $\mathcal{U}$  en deux composantes  $\mathcal{U}_-$  et  $\mathcal{U}_+$ . Pour  $g \in \mathcal{U}_-$ , on a  $\Lambda_g = \{p(g)\}$ . Pour  $g \in \mathcal{U}_0$ , on a  $\Lambda_g = \{p(g)\} \cup o(q(g))$ .

# Le phénomène de Newhouse

# Le phénomène de Newhouse

**Théorème** (Newhouse) Supposons que le Jacobien de  $f$  en  $p$  soit  $< 1$ .

**Théorème** (Newhouse) Supposons que le Jacobien de  $f$  en  $p$  soit  $< 1$ . Il existe alors une partie  $\mathcal{G} \subset \mathcal{U}_+$ ,  $G_\delta$ -dense dans un ouvert  $\mathcal{N} \subset \mathcal{U}_+$ ,

**Théorème** (Newhouse) Supposons que le Jacobien de  $f$  en  $p$  soit  $< 1$ . Il existe alors une partie  $\mathcal{G} \subset \mathcal{U}_+$ ,  $G_\delta$ -dense dans un ouvert  $\mathcal{N} \subset \mathcal{U}_+$ , qui rencontre toute famille transverse à  $\mathcal{U}_0$  arbitrairement proche de  $\mathcal{U}_0$ ,

# Le phénomène de Newhouse

**Théorème** (Newhouse) Supposons que le Jacobien de  $f$  en  $p$  soit  $< 1$ . Il existe alors une partie  $\mathcal{G} \subset \mathcal{U}_+$ ,  $G_\delta$ -dense dans un ouvert  $\mathcal{N} \subset \mathcal{U}_+$ , qui rencontre toute famille transverse à  $\mathcal{U}_0$  arbitrairement proche de  $\mathcal{U}_0$ , et telle que tout  $g \in \mathcal{G}$  possède dans  $\Lambda_g$  une **infinité d'orbites périodiques attractives**.

# Le phénomène de Newhouse

**Théorème** (Newhouse) Supposons que le Jacobien de  $f$  en  $p$  soit  $< 1$ . Il existe alors une partie  $\mathcal{G} \subset \mathcal{U}_+$ ,  **$G_\delta$ -dense dans un ouvert  $\mathcal{N} \subset \mathcal{U}_+$** , qui rencontre toute famille transverse à  $\mathcal{U}_0$  arbitrairement proche de  $\mathcal{U}_0$ , et telle que tout  $g \in \mathcal{G}$  possède dans  $\Lambda_g$  une **infinité d'orbites périodiques attractives**.

Pour  $g \in \mathcal{N}$ ,  $\Lambda_g$  n'est donc **pas hyperbolique**.

# Le phénomène de Newhouse

**Théorème** (Newhouse) Supposons que le Jacobien de  $f$  en  $p$  soit  $< 1$ . Il existe alors une partie  $\mathcal{G} \subset \mathcal{U}_+$ ,  **$G_\delta$ -dense dans un ouvert  $\mathcal{N} \subset \mathcal{U}_+$** , qui rencontre toute famille transverse à  $\mathcal{U}_0$  arbitrairement proche de  $\mathcal{U}_0$ , et telle que tout  $g \in \mathcal{G}$  possède dans  $\Lambda_g$  une **infinité d'orbites périodiques attractives**.

Pour  $g \in \mathcal{N}$ ,  $\Lambda_g$  n'est donc **pas hyperbolique**.

Il n'y a donc pas vraiment d'espoir de comprendre la géométrie et la dynamique de  $\Lambda_g$  pour **tout**  $g \in \mathcal{U}_+$ !

# Densité totale de l'hyperbolicité

On va se contenter de comprendre  $\Lambda_g$  pour **la plupart** des  $g \in \mathcal{U}_+$ , dans le sens suivant.

# Densité totale de l'hyperbolicité

On va se contenter de comprendre  $\Lambda_g$  pour **la plupart** des  $g \in \mathcal{U}_+$ , dans le sens suivant.

**Définition** Une propriété  $\mathcal{P}$  de  $\Lambda_g$  est de **densité totale**

# Densité totale de l'hyperbolicité

On va se contenter de comprendre  $\Lambda_g$  pour **la plupart** des  $g \in \mathcal{U}_+$ , dans le sens suivant.

**Définition** Une propriété  $\mathcal{P}$  de  $\Lambda_g$  est de **densité totale** si, pour toute famille lisse à un paramètre  $(g_t) \subset \mathcal{U}$ , transverse à  $\mathcal{U}_0$  en  $t = 0$ , (avec  $g_t \in \mathcal{U}_+$  pour  $t > 0$ ), on a

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} |\{t \in [0, \tau] \mid \Lambda_{g_t} \text{ satisfies } \mathcal{P}\}| = 1.$$

# Densité totale de l'hyperbolicité

On va se contenter de comprendre  $\Lambda_g$  pour **la plupart** des  $g \in \mathcal{U}_+$ , dans le sens suivant.

**Définition** Une propriété  $\mathcal{P}$  de  $\Lambda_g$  est de **densité totale** si, pour toute famille lisse à un paramètre  $(g_t) \subset \mathcal{U}$ , transverse à  $\mathcal{U}_0$  en  $t = 0$ , (avec  $g_t \in \mathcal{U}_+$  pour  $t > 0$ ), on a

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} |\{t \in [0, \tau] \mid \Lambda_{g_t} \text{ satisfies } \mathcal{P}\}| = 1.$$

**Théorème** (Newhouse-Palis-Takens) Le compact invariant  $\Lambda_g$  est un **ensemble basique** avec densité totale dans  $\mathcal{U}_+$ .

# Densité totale de l'hyperbolicité

On va se contenter de comprendre  $\Lambda_g$  pour **la plupart** des  $g \in \mathcal{U}_+$ , dans le sens suivant.

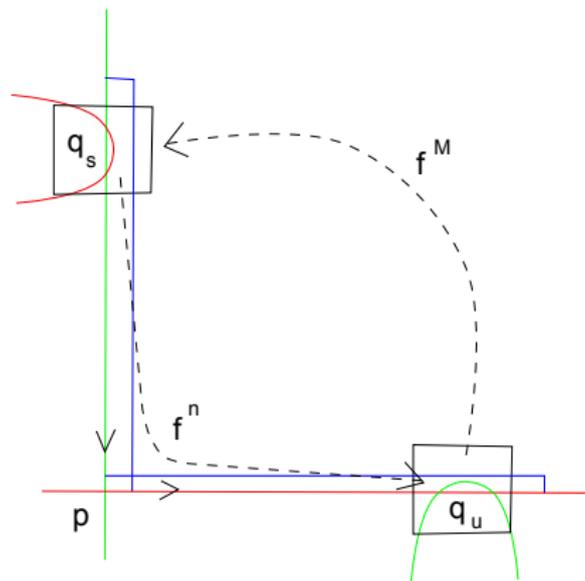
**Définition** Une propriété  $\mathcal{P}$  de  $\Lambda_g$  est de **densité totale** si, pour toute famille lisse à un paramètre  $(g_t) \subset \mathcal{U}$ , transverse à  $\mathcal{U}_0$  en  $t = 0$ , (avec  $g_t \in \mathcal{U}_+$  pour  $t > 0$ ), on a

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} |\{t \in [0, \tau] \mid \Lambda_{g_t} \text{ satisfie } \mathcal{P}\}| = 1.$$

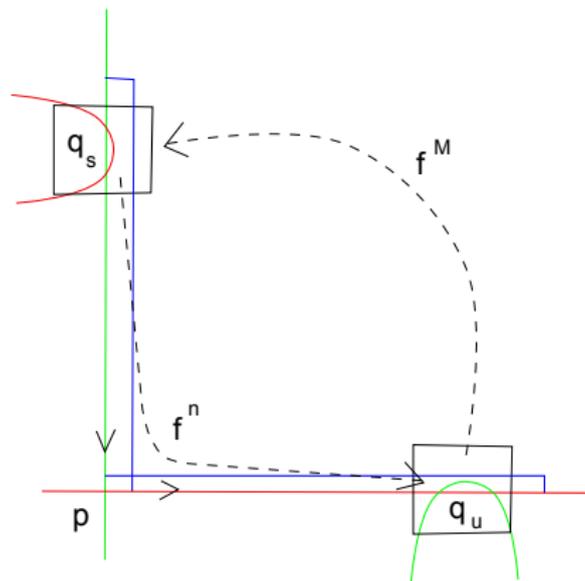
**Théorème** (Newhouse-Palis-Takens) Le compact invariant  $\Lambda_g$  est un **ensemble basique** avec densité totale dans  $\mathcal{U}_+$ .

En particulier le phénomène de Newhouse est de **densité évanescence**.

# Bifurcations homoclines et famille de Hénon



# Bifurcations homoclines et famille de Hénon



On suppose que les valeurs propres  $0 < \lambda < 1 < \mu$  de  $Tg(p)$  sont positives et que  $\lambda\mu = Jg(p) \leq 1$ .

Soient  $(x_s, y_s)$ ,  $(x_u, y_u)$  des systèmes de coordonnées centrés en  $q_s$ ,  $q_u$  respectivement.

Soient  $(x_s, y_s), (x_u, y_u)$  des systèmes de coordonnées centrés en  $q_s, q_u$  respectivement. Considérons le modèle **simplifié** pour lequel  $g^n, g^M$  sont donnés par

$$\begin{aligned} g^n : (x_s, y_s) &\mapsto (x_u = \mu^n x_s - 1, & y_u = \lambda^n (1 + y_s)), \\ g^M : (x_u, y_u) &\mapsto (x_s = t(g) - y_u - x_u^2, & y_s = x_u). \end{aligned}$$

Soient  $(x_s, y_s), (x_u, y_u)$  des systèmes de coordonnées centrés en  $q_s, q_u$  respectivement. Considérons le modèle **simplifié** pour lequel  $g^n, g^M$  sont donnés par

$$\begin{aligned} g^n : (x_s, y_s) &\mapsto (x_u = \mu^n x_s - 1, & y_u = \lambda^n (1 + y_s)), \\ g^M : (x_u, y_u) &\mapsto (x_s = t(g) - y_u - x_u^2, & y_s = x_u). \end{aligned}$$

Le paramètre  $t(g) > 0$  est de l'ordre de **la distance de  $g$  à  $\mathcal{U}_0$** .

Soient  $(x_s, y_s), (x_u, y_u)$  des systèmes de coordonnées centrés en  $q_s, q_u$  respectivement. Considérons le modèle **simplifié** pour lequel  $g^n, g^M$  sont donnés par

$$\begin{aligned} g^n : (x_s, y_s) &\mapsto (x_u = \mu^n x_s - 1, & y_u = \lambda^n (1 + y_s)), \\ g^M : (x_u, y_u) &\mapsto (x_s = t(g) - y_u - x_u^2, & y_s = x_u). \end{aligned}$$

Le paramètre  $t(g) > 0$  est de l'ordre de **la distance de  $g$  à  $\mathcal{U}_0$** .

Pour rester dans  $U$ , il faut avoir

$$0 \leq x_s \leq t(g) - y_s^2, \quad 0 \leq y_u \leq t(g) - x_u^2,$$

Soient  $(x_s, y_s), (x_u, y_u)$  des systèmes de coordonnées centrés en  $q_s, q_u$  respectivement. Considérons le modèle **simplifié** pour lequel  $g^n, g^M$  sont donnés par

$$\begin{aligned} g^n &: (x_s, y_s) \mapsto (x_u = \mu^n x_s - 1, & y_u = \lambda^n (1 + y_s)), \\ g^M &: (x_u, y_u) \mapsto (x_s = t(g) - y_u - x_u^2, & y_s = x_u). \end{aligned}$$

Le paramètre  $t(g) > 0$  est de l'ordre de **la distance de  $g$  à  $\mathcal{U}_0$** .

Pour rester dans  $U$ , il faut avoir

$$0 \leq x_s \leq t(g) - y_s^2, \quad 0 \leq y_u \leq t(g) - x_u^2,$$

ce qui implique

Soient  $(x_s, y_s), (x_u, y_u)$  des systèmes de coordonnées centrés en  $q_s, q_u$  respectivement. Considérons le modèle **simplifié** pour lequel  $g^n, g^M$  sont donnés par

$$\begin{aligned} g^n : (x_s, y_s) &\mapsto (x_u = \mu^n x_s - 1, & y_u = \lambda^n (1 + y_s)), \\ g^M : (x_u, y_u) &\mapsto (x_s = t(g) - y_u - x_u^2, & y_s = x_u). \end{aligned}$$

Le paramètre  $t(g) > 0$  est de l'ordre de **la distance de  $g$  à  $\mathcal{U}_0$** .

Pour rester dans  $U$ , il faut avoir

$$0 \leq x_s \leq t(g) - y_s^2, \quad 0 \leq y_u \leq t(g) - x_u^2,$$

ce qui implique

$$0 \leq x_s \leq t(g), \quad |y_s| \leq (t(g))^{1/2}, \quad 0 \leq y_u \leq t(g), \quad |x_u| \leq (t(g))^{1/2}.$$

Soient  $(x_s, y_s), (x_u, y_u)$  des systèmes de coordonnées centrés en  $q_s, q_u$  respectivement. Considérons le modèle **simplifié** pour lequel  $g^n, g^M$  sont donnés par

$$\begin{aligned} g^n &: (x_s, y_s) \mapsto (x_u = \mu^n x_s - 1, & y_u = \lambda^n (1 + y_s)), \\ g^M &: (x_u, y_u) \mapsto (x_s = t(g) - y_u - x_u^2, & y_s = x_u). \end{aligned}$$

Le paramètre  $t(g) > 0$  est de l'ordre de **la distance de  $g$  à  $\mathcal{U}_0$** .

Pour rester dans  $U$ , il faut avoir

$$0 \leq x_s \leq t(g) - y_s^2, \quad 0 \leq y_u \leq t(g) - x_u^2,$$

ce qui implique

$$0 \leq x_s \leq t(g), \quad |y_s| \leq (t(g))^{1/2}, \quad 0 \leq y_u \leq t(g), \quad |x_u| \leq (t(g))^{1/2}.$$

Seules les valeurs de  $n$  pour lesquelles  $\mu^{-n} \lesssim t(g)$  (ce qui implique  $\lambda^n \gtrsim t(g)$ ) sont donc pertinentes.

Soient  $(x_s, y_s), (x_u, y_u)$  des systèmes de coordonnées centrés en  $q_s, q_u$  respectivement. Considérons le modèle **simplifié** pour lequel  $g^n, g^M$  sont donnés par

$$\begin{aligned} g^n &: (x_s, y_s) \mapsto (x_u = \mu^n x_s - 1, & y_u = \lambda^n (1 + y_s)), \\ g^M &: (x_u, y_u) \mapsto (x_s = t(g) - y_u - x_u^2, & y_s = x_u). \end{aligned}$$

Le paramètre  $t(g) > 0$  est de l'ordre de **la distance de  $g$  à  $\mathcal{U}_0$** .

Pour rester dans  $U$ , il faut avoir

$$0 \leq x_s \leq t(g) - y_s^2, \quad 0 \leq y_u \leq t(g) - x_u^2,$$

ce qui implique

$$0 \leq x_s \leq t(g), \quad |y_s| \leq (t(g))^{1/2}, \quad 0 \leq y_u \leq t(g), \quad |x_u| \leq (t(g))^{1/2}.$$

Seules les valeurs de  $n$  pour lesquelles  $\mu^{-n} \lesssim t(g)$  (ce qui implique  $\lambda^n \lesssim t(g)$ ) sont donc pertinentes. L'application de retour au voisinage de  $q_s$  est donnée par

$$g^{M+n} : (x_s, y_s) \mapsto (t(g) - \lambda^n (1 + y_s) - (\mu^n x_s - 1)^2, \mu^n x_s - 1).$$

Rappelons que la **famille de Hénon** est définie par

$$H_{b,c}(x, y) = (x^2 + c - by, x).$$

Rappelons que la **famille de Hénon** est définie par

$$H_{b,c}(x, y) = (x^2 + c - by, x).$$

A un changement de coordonnées affine près, l'application de retour  $g^{M+n}$  coïncide donc avec l'application de Hénon pour les paramètres

$$b_n = (\lambda\mu)^n \leq 1, \quad c_n = \mu^{2n}(\lambda^n + \mu^{-n} - t(g)).$$

Rappelons que la **famille de Hénon** est définie par

$$H_{b,c}(x, y) = (x^2 + c - by, x).$$

A un changement de coordonnées affine près, l'application de retour  $g^{M+n}$  coïncide donc avec l'application de Hénon pour les paramètres

$$b_n = (\lambda\mu)^n \leq 1, \quad c_n = \mu^{2n}(\lambda^n + \mu^{-n} - t(g)).$$

Supposons qu'on ait

$$|t(g) - \mu^{-n}(1 + (\lambda\mu)^n)| > 10\mu^{-2n},$$

Rappelons que la **famille de Hénon** est définie par

$$H_{b,c}(x, y) = (x^2 + c - by, x).$$

A un changement de coordonnées affine près, l'application de retour  $g^{M+n}$  coïncide donc avec l'application de Hénon pour les paramètres

$$b_n = (\lambda\mu)^n \leq 1, \quad c_n = \mu^{2n}(\lambda^n + \mu^{-n} - t(g)).$$

Supposons qu'on ait

$$|t(g) - \mu^{-n}(1 + (\lambda\mu)^n)| > 10\mu^{-2n},$$

c'est à dire  $|c_n| > 10$  pour tout entier  $n$  tel que  $\mu^{-n} \lesssim t(g)$ .

Rappelons que la **famille de Hénon** est définie par

$$H_{b,c}(x, y) = (x^2 + c - by, x).$$

A un changement de coordonnées affine près, l'application de retour  $g^{M+n}$  coïncide donc avec l'application de Hénon pour les paramètres

$$b_n = (\lambda\mu)^n \leq 1, \quad c_n = \mu^{2n}(\lambda^n + \mu^{-n} - t(g)).$$

Supposons qu'on ait

$$|t(g) - \mu^{-n}(1 + (\lambda\mu)^n)| > 10\mu^{-2n},$$

c'est à dire  $|c_n| > 10$  pour tout entier  $n$  tel que  $\mu^{-n} \lesssim t(g)$ . Alors une application du **critère de champs de cônes** permet de conclure que  $\Lambda_c$  est **hyperbolique**.

Rappelons que la **famille de Hénon** est définie par

$$H_{b,c}(x, y) = (x^2 + c - by, x).$$

A un changement de coordonnées affine près, l'application de retour  $g^{M+n}$  coïncide donc avec l'application de Hénon pour les paramètres

$$b_n = (\lambda\mu)^n \leq 1, \quad c_n = \mu^{2n}(\lambda^n + \mu^{-n} - t(g)).$$

Supposons qu'on ait

$$|t(g) - \mu^{-n}(1 + (\lambda\mu)^n)| > 10\mu^{-2n},$$

c'est à dire  $|c_n| > 10$  pour tout entier  $n$  tel que  $\mu^{-n} \lesssim t(g)$ . Alors une application du **critère de champs de cônes** permet de conclure que  $\Lambda_c$  est **hyperbolique**. Il est facile de voir que  $\Lambda_g$  est aussi **transitif** pour ces valeurs de  $t(g)$ .

Rappelons que la **famille de Hénon** est définie par

$$H_{b,c}(x, y) = (x^2 + c - by, x).$$

A un changement de coordonnées affine près, l'application de retour  $g^{M+n}$  coïncide donc avec l'application de Hénon pour les paramètres

$$b_n = (\lambda\mu)^n \leq 1, \quad c_n = \mu^{2n}(\lambda^n + \mu^{-n} - t(g)).$$

Supposons qu'on ait

$$|t(g) - \mu^{-n}(1 + (\lambda\mu)^n)| > 10\mu^{-2n},$$

c'est à dire  $|c_n| > 10$  pour tout entier  $n$  tel que  $\mu^{-n} \lesssim t(g)$ . Alors une application du **critère de champs de cônes** permet de conclure que  $\Lambda_c$  est **hyperbolique**. Il est facile de voir que  $\Lambda_g$  est aussi **transitif** pour ces valeurs de  $t(g)$ . Ceci donne (pour le modèle simplifié!) le théorème de Newhouse-Palis-Takens.

# Bifurcation selle-noeud dans la famille de Hénon

# Bifurcation selle-noeud dans la famille de Hénon

Un des ingrédients de la démonstration du théorème de Newhouse est la création d'orbites périodiques attractives (si  $\lambda\mu < 1$ ) après une bifurcation homocline.

# Bifurcation selle-noeud dans la famille de Hénon

Un des ingrédients de la démonstration du théorème de Newhouse est la création d'orbites périodiques attractives (si  $\lambda\mu < 1$ ) après une bifurcation homocline. Ceci correspond à la création d'une paire de points fixes, dont l'un est attractif, dans la famille de Hénon.

# Bifurcation selle-noeud dans la famille de Hénon

Un des ingrédients de la démonstration du théorème de Newhouse est la création d'orbites périodiques attractives (si  $\lambda\mu < 1$ ) après une bifurcation homocline. Ceci correspond à la création d'une paire de points fixes, dont l'un est attractif, dans la famille de Hénon.

**Exercice:** Pour  $c > (\frac{1+b}{2})^2$ ,  $H_{b,c}$  ne possède aucune orbite bornée.

# Bifurcation selle-noeud dans la famille de Hénon

Un des ingrédients de la démonstration du théorème de Newhouse est la création d'orbites périodiques attractives (si  $\lambda\mu < 1$ ) après une bifurcation homocline. Ceci correspond à la création d'une paire de points fixes, dont l'un est attractif, dans la famille de Hénon.

**Exercice:** Pour  $c > (\frac{1+b}{2})^2$ ,  $H_{b,c}$  ne possède aucune orbite bornée.

**Exercice:** Pour  $c = (\frac{1+b}{2})^2$ ,  $H_{b,c}$  possède une seule orbite bornée, qui est l'unique point fixe de  $H_{b,c}$ .

# Bifurcation selle-noeud dans la famille de Hénon

Un des ingrédients de la démonstration du théorème de Newhouse est la création d'orbites périodiques attractives (si  $\lambda\mu < 1$ ) après une bifurcation homocline. Ceci correspond à la création d'une paire de points fixes, dont l'un est attractif, dans la famille de Hénon.

**Exercice:** Pour  $c > (\frac{1+b}{2})^2$ ,  $H_{b,c}$  ne possède aucune orbite bornée.

**Exercice:** Pour  $c = (\frac{1+b}{2})^2$ ,  $H_{b,c}$  possède une seule orbite bornée, qui est l'unique point fixe de  $H_{b,c}$ . Les valeurs propres de l'application tangente en ce point fixe sont 1 et  $b$ .

# Bifurcation selle-noeud dans la famille de Hénon

Un des ingrédients de la démonstration du théorème de Newhouse est la création d'orbites périodiques attractives (si  $\lambda\mu < 1$ ) après une bifurcation homocline. Ceci correspond à la création d'une paire de points fixes, dont l'un est attractif, dans la famille de Hénon.

**Exercice:** Pour  $c > (\frac{1+b}{2})^2$ ,  $H_{b,c}$  ne possède aucune orbite bornée.

**Exercice:** Pour  $c = (\frac{1+b}{2})^2$ ,  $H_{b,c}$  possède une seule orbite bornée, qui est l'unique point fixe de  $H_{b,c}$ . Les valeurs propres de l'application tangente en ce point fixe sont 1 et  $b$ .

**Exercice:** Pour  $0 < b < 1$  et  $-3(\frac{1+b}{2})^2 < c < (\frac{1+b}{2})^2$ ,  $H_{b,c}$  possède deux points fixes, l'un attractif et l'autre de type selle.

# Bifurcation selle-noeud dans la famille de Hénon

Un des ingrédients de la démonstration du théorème de Newhouse est la création d'orbites périodiques attractives (si  $\lambda\mu < 1$ ) après une bifurcation homocline. Ceci correspond à la création d'une paire de points fixes, dont l'un est attractif, dans la famille de Hénon.

**Exercice:** Pour  $c > (\frac{1+b}{2})^2$ ,  $H_{b,c}$  ne possède aucune orbite bornée.

**Exercice:** Pour  $c = (\frac{1+b}{2})^2$ ,  $H_{b,c}$  possède une seule orbite bornée, qui est l'unique point fixe de  $H_{b,c}$ . Les valeurs propres de l'application tangente en ce point fixe sont 1 et  $b$ .

**Exercice:** Pour  $0 < b < 1$  et  $-3(\frac{1+b}{2})^2 < c < (\frac{1+b}{2})^2$ ,  $H_{b,c}$  possède deux points fixes, l'un attractif et l'autre de type selle.

**Exercice:** Pour  $0 < b < 1$  et  $c < -3(\frac{1+b}{2})^2$ ,  $H_{b,c}$  possède deux points fixes de type selle.

# Hyperbolicité non-uniforme en dimension 1

# Hyperbolicité non-uniforme en dimension 1

Soit  $f$  une application analytique définie sur un intervalle compact  $I$ , à valeurs réelles, en général non-inversible.

# Hyperbolicité non-uniforme en dimension 1

Soit  $f$  une application analytique définie sur un intervalle compact  $I$ , à valeurs réelles, en général non-inversible.

**Définition:** L'application  $f$  est **(uniformément) hyperbolique** s'il existe une décomposition  $I = E \sqcup F \sqcup J$  telle que  $E, F, J$  aient les propriétés suivantes:

# Hyperbolicité non-uniforme en dimension 1

Soit  $f$  une application analytique définie sur un intervalle compact  $I$ , à valeurs réelles, en général non-inversible.

**Définition:** L'application  $f$  est **(uniformément) hyperbolique** s'il existe une décomposition  $I = E \sqcup F \sqcup J$  telle que  $E, F, J$  aient les propriétés suivantes:

- ▶  $E$  est l'ensemble **ouvert** formé des points dont l'orbite s'échappe de  $I$ ;

# Hyperbolicité non-uniforme en dimension 1

Soit  $f$  une application analytique définie sur un intervalle compact  $I$ , à valeurs réelles, en général non-inversible.

**Définition:** L'application  $f$  est **(uniformément) hyperbolique** s'il existe une décomposition  $I = E \sqcup F \sqcup J$  telle que  $E, F, J$  aient les propriétés suivantes:

- ▶  $E$  est l'ensemble **ouvert** formé des points dont l'orbite s'échappe de  $I$ ;
- ▶ l'ensemble de **Fatou**  $F$  est **ouvert, invariant**,

# Hyperbolicité non-uniforme en dimension 1

Soit  $f$  une application analytique définie sur un intervalle compact  $I$ , à valeurs réelles, en général non-inversible.

**Définition:** L'application  $f$  est (uniformément) hyperbolique s'il existe une décomposition  $I = E \sqcup F \sqcup J$  telle que  $E, F, J$  aient les propriétés suivantes:

- ▶  $E$  est l'ensemble ouvert formé des points dont l'orbite s'échappe de  $I$ ;
- ▶ l'ensemble de Fatou  $F$  est ouvert, invariant, et toute orbite de  $f$  converge vers une des orbites périodiques attractives de  $f$ , qui sont en nombre fini;

# Hyperbolicité non-uniforme en dimension 1

Soit  $f$  une application analytique définie sur un intervalle compact  $I$ , à valeurs réelles, en général non-inversible.

**Définition:** L'application  $f$  est (uniformément) hyperbolique s'il existe une décomposition  $I = E \sqcup F \sqcup J$  telle que  $E, F, J$  aient les propriétés suivantes:

- ▶  $E$  est l'ensemble ouvert formé des points dont l'orbite s'échappe de  $I$ ;
- ▶ l'ensemble de Fatou  $F$  est ouvert, invariant, et toute orbite de  $f$  converge vers une des orbites périodiques attractives de  $f$ , qui sont en nombre fini;
- ▶ l'ensemble de Julia  $J$  est compact et invariant;

# Hyperbolicité non-uniforme en dimension 1

Soit  $f$  une application analytique définie sur un intervalle compact  $I$ , à valeurs réelles, en général non-inversible.

**Définition:** L'application  $f$  est (uniformément) hyperbolique s'il existe une décomposition  $I = E \sqcup F \sqcup J$  telle que  $E, F, J$  aient les propriétés suivantes:

- ▶  $E$  est l'ensemble ouvert formé des points dont l'orbite s'échappe de  $I$ ;
- ▶ l'ensemble de Fatou  $F$  est ouvert, invariant, et toute orbite de  $f$  converge vers une des orbites périodiques attractives de  $f$ , qui sont en nombre fini;
- ▶ l'ensemble de Julia  $J$  est compact et invariant; de plus, il existe  $C > 0, \lambda > 1$  tel qu'on ait

$$|Df^n(x)| \geq C\lambda^n, \quad \forall x \in J, n \geq 1.$$

# Densité de l'hyperbolicité uniforme

Lorsque  $f$  est une application polynomiale (de degré  $> 1$ ), on choisit pour  $I$  un intervalle suffisamment grand pour contenir toutes les orbites bornées de  $f$ .

# Densité de l'hyperbolicité uniforme

Lorsque  $f$  est une application polynomiale (de degré  $> 1$ ), on choisit pour  $I$  un intervalle suffisamment grand pour contenir toutes les orbites bornées de  $f$ . Les ensembles  $F$  et  $J$  sont alors **indépendants** du choix de  $I$ .

# Densité de l'hyperbolicité uniforme

Lorsque  $f$  est une application polynomiale (de degré  $> 1$ ), on choisit pour  $I$  un intervalle suffisamment grand pour contenir toutes les orbites bornées de  $f$ . Les ensembles  $F$  et  $J$  sont alors **indépendants** du choix de  $I$ .

**Théorème:** (Kozlovski-Shen-Van Strien) Toute application polynomiale de degré  $> 1$  peut être approchée par une application polynomiale **hyperbolique** de même degré.

# Densité de l'hyperbolicité uniforme

Lorsque  $f$  est une application polynomiale (de degré  $> 1$ ), on choisit pour  $I$  un intervalle suffisamment grand pour contenir toutes les orbites bornées de  $f$ . Les ensembles  $F$  et  $J$  sont alors **indépendants** du choix de  $I$ .

**Théorème:** (Kozlovski-Shen-Van Strien) Toute application polynomiale de degré  $> 1$  peut être approchée par une application polynomiale **hyperbolique** de même degré.

La topologie est celle des coefficients.

# Densité de l'hyperbolicité uniforme

Lorsque  $f$  est une application polynomiale (de degré  $> 1$ ), on choisit pour  $I$  un intervalle suffisamment grand pour contenir toutes les orbites bornées de  $f$ . Les ensembles  $F$  et  $J$  sont alors **indépendants** du choix de  $I$ .

**Théorème:** (Kozlovski-Shen-Van Strien) Toute application polynomiale de degré  $> 1$  peut être approchée par une application polynomiale **hyperbolique** de même degré.

La topologie est celle des coefficients.

Le cas des polynômes **quadratiques** avait été résolu auparavant par Graczyk-Swiatek et Lyubich.

# L'hyperbolicité uniforme n'est pas presque sûre

# L'hyperbolicité uniforme n'est pas presque sûre

Considérons la famille  $P_c(x) := x^2 + c$ ,  $c \in [-2, 1/4]$ , des polynômes quadratiques réels.

# L'hyperbolicité uniforme n'est pas presque sûre

Considérons la famille  $P_c(x) := x^2 + c$ ,  $c \in [-2, 1/4]$ , des polynômes quadratiques réels.

Pour  $c > 1/4$ , toutes les orbites s'échappent à l'infini.

# L'hyperbolicité uniforme n'est pas presque sûre

Considérons la famille  $P_c(x) := x^2 + c$ ,  $c \in [-2, 1/4]$ , des polynômes quadratiques réels.

Pour  $c > 1/4$ , toutes les orbites s'échappent à l'infini. Pour  $c < -2$ , le point critique s'échappe à l'infini et  $P_c$  est **uniformément hyperbolique**, avec  $F(P_c) = \emptyset$ .

# L'hyperbolicité uniforme n'est pas presque sûre

Considérons la famille  $P_c(x) := x^2 + c$ ,  $c \in [-2, 1/4]$ , des polynômes quadratiques réels.

Pour  $c > 1/4$ , toutes les orbites s'échappent à l'infini. Pour  $c < -2$ , le point critique s'échappe à l'infini et  $P_c$  est **uniformément hyperbolique**, avec  $F(P_c) = \emptyset$ .

**Théorème:** (Jakobson, 1981) Il existe un ensemble de paramètres  $E \subset [-2, 1/4]$ , de **densité totale** en  $-2$ ,

# L'hyperbolicité uniforme n'est pas presque sûre

Considérons la famille  $P_c(x) := x^2 + c$ ,  $c \in [-2, 1/4]$ , des polynômes quadratiques réels.

Pour  $c > 1/4$ , toutes les orbites s'échappent à l'infini. Pour  $c < -2$ , le point critique s'échappe à l'infini et  $P_c$  est **uniformément hyperbolique**, avec  $F(P_c) = \emptyset$ .

**Théorème:** (Jakobson, 1981) Il existe un ensemble de paramètres  $E \subset [-2, 1/4]$ , de **densité totale** en  $-2$ , tel que, pour tout  $c \in E$ ,  $P_c$  possède une mesure de probabilité invariante ergodique qui est **absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue**

# L'hyperbolicité uniforme n'est pas presque sûre

Considérons la famille  $P_c(x) := x^2 + c$ ,  $c \in [-2, 1/4]$ , des polynômes quadratiques réels.

Pour  $c > 1/4$ , toutes les orbites s'échappent à l'infini. Pour  $c < -2$ , le point critique s'échappe à l'infini et  $P_c$  est **uniformément hyperbolique**, avec  $F(P_c) = \emptyset$ .

**Théorème:** (Jakobson, 1981) Il existe un ensemble de paramètres  $E \subset [-2, 1/4]$ , de **densité totale** en  $-2$ , tel que, pour tout  $c \in E$ ,  $P_c$  possède une mesure de probabilité invariante ergodique qui est **absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue** et a un **exposant de Lyapunov strictement positif**.

# L'hyperbolicité uniforme n'est pas presque sûre

Considérons la famille  $P_c(x) := x^2 + c$ ,  $c \in [-2, 1/4]$ , des polynômes quadratiques réels.

Pour  $c > 1/4$ , toutes les orbites s'échappent à l'infini. Pour  $c < -2$ , le point critique s'échappe à l'infini et  $P_c$  est **uniformément hyperbolique**, avec  $F(P_c) = \emptyset$ .

**Théorème:** (Jakobson, 1981) Il existe un ensemble de paramètres  $E \subset [-2, 1/4]$ , de **densité totale** en  $-2$ , tel que, pour tout  $c \in E$ ,  $P_c$  possède une mesure de probabilité invariante ergodique qui est **absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue** et a un **exposant de Lyapunov strictement positif**.

Pour  $c \in E$ , le support de la mesure invariante du théorème est l'intervalle  $[P_c(0), P_c^2(0)]$ , qui contient le point critique 0 de  $P_c$ .

# L'hyperbolicité uniforme n'est pas presque sûre

Considérons la famille  $P_c(x) := x^2 + c$ ,  $c \in [-2, 1/4]$ , des polynômes quadratiques réels.

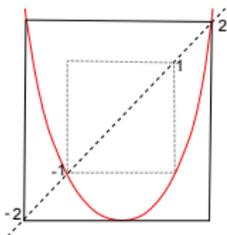
Pour  $c > 1/4$ , toutes les orbites s'échappent à l'infini. Pour  $c < -2$ , le point critique s'échappe à l'infini et  $P_c$  est **uniformément hyperbolique**, avec  $F(P_c) = \emptyset$ .

**Théorème:** (Jakobson, 1981) Il existe un ensemble de paramètres  $E \subset [-2, 1/4]$ , de **densité totale** en  $-2$ , tel que, pour tout  $c \in E$ ,  $P_c$  possède une mesure de probabilité invariante ergodique qui est **absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue** et a un **exposant de Lyapunov strictement positif**.

Pour  $c \in E$ , le support de la mesure invariante du théorème est l'intervalle  $[P_c(0), P_c^2(0)]$ , qui contient le point critique 0 de  $P_c$ . L'application  $P_c$  n'est donc **pas uniformément hyperbolique**.

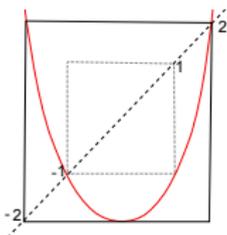
On construit  $E \subset [-2, c_0]$ , avec  $c_0$  proche de  $-2$ .

On construit  $E \subset [-2, c_0]$ , avec  $c_0$  proche de  $-2$ .



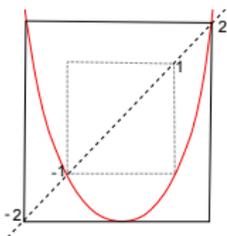
$P_{-2}$  est un polynôme de Chebyshev:  $P_{-2}(2 \cos \theta) = 2 \cos 2\theta$ .

On construit  $E \subset [-2, c_0]$ , avec  $c_0$  proche de  $-2$ .



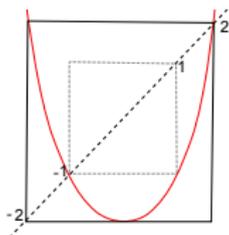
$P_{-2}$  est un polynôme de Chebyshev:  $P_{-2}(2 \cos \theta) = 2 \cos 2\theta$ . L'orbite du point critique pour  $P_{-2}$  est  $0 \rightarrow -2 \rightarrow 2$ , qui est un point fixe **répulsif**.

On construit  $E \subset [-2, c_0]$ , avec  $c_0$  proche de  $-2$ .

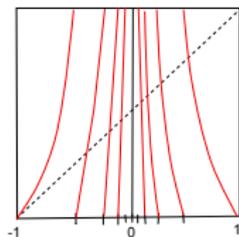


$P_{-2}$  est un polynôme de Chebyshev:  $P_{-2}(2 \cos \theta) = 2 \cos 2\theta$ . L'orbite du point critique pour  $P_{-2}$  est  $0 \rightarrow -2 \rightarrow 2$ , qui est un point fixe **répulsif**. L'autre point fixe (également répulsif) est  $-1$ .

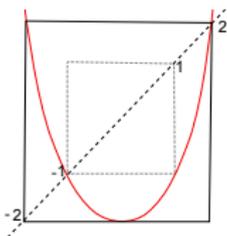
On construit  $E \subset [-2, c_0]$ , avec  $c_0$  proche de  $-2$ .



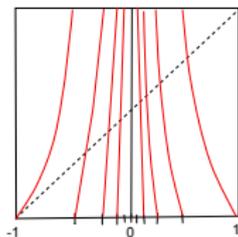
$P_{-2}$  est un polynôme de Chebyshev:  $P_{-2}(2 \cos \theta) = 2 \cos 2\theta$ . L'orbite du point critique pour  $P_{-2}$  est  $0 \rightarrow -2 \rightarrow 2$ , qui est un point fixe **répulsif**. L'autre point fixe (également répulsif) est  $-1$ . L'application de retour de  $P_{-2}$  dans  $(-1, 1)$



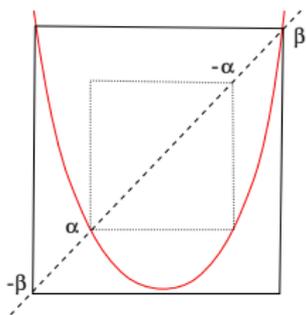
On construit  $E \subset [-2, c_0]$ , avec  $c_0$  proche de  $-2$ .

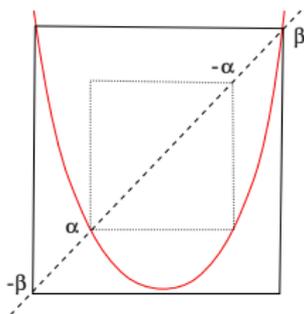


$P_{-2}$  est un polynôme de Chebyshev:  $P_{-2}(2 \cos \theta) = 2 \cos 2\theta$ . L'orbite du point critique pour  $P_{-2}$  est  $0 \rightarrow -2 \rightarrow 2$ , qui est un point fixe **répulsif**. L'autre point fixe (également répulsif) est  $-1$ . L'application de retour de  $P_{-2}$  dans  $(-1, 1)$

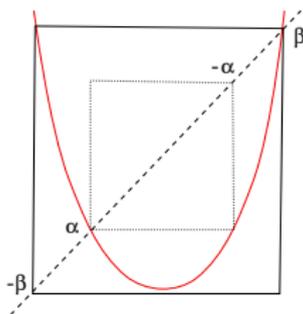


est constituée d'une infinité de branches **dilatantes surjectives**, deux pour chaque temps de retour  $\geq 2$ .

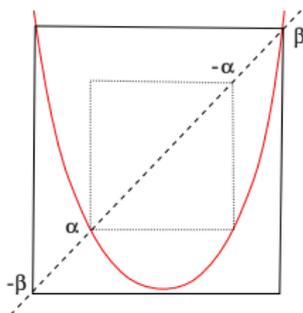




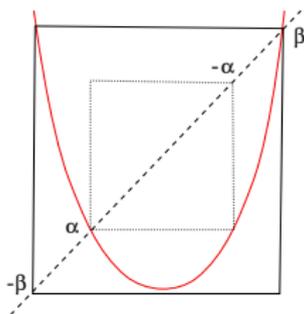
Pour  $c \in (-2, c_0)$ ,  $P_c$  a deux points fixes répulsifs  $\beta$  (proche de 2) et  $\alpha$  (proche de  $-1$ ).



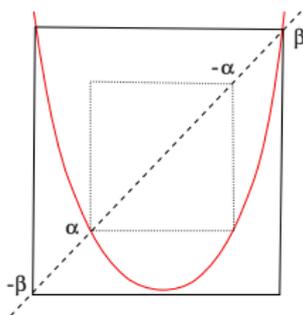
Pour  $c \in (-2, c_0)$ ,  $P_c$  a deux points fixes répulsifs  $\beta$  (proche de 2) et  $\alpha$  (proche de  $-1$ ). Comme  $P_c^2(0)$  est proche de  $\beta$ , le **temps de retour  $M$**  dans  $J := (-\alpha, \alpha)$  est grand.



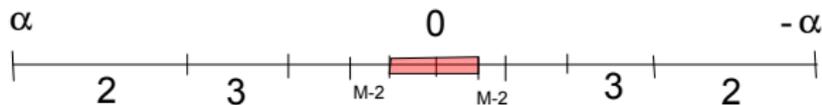
Pour  $c \in (-2, c_0)$ ,  $P_c$  a deux points fixes répulsifs  $\beta$  (proche de 2) et  $\alpha$  (proche de  $-1$ ). Comme  $P_c^2(0)$  est proche de  $\beta$ , le **temps de retour  $M$**  dans  $J := (-\alpha, \alpha)$  est grand. Les branches de l'application de retour dans  $J$  avec temps de retour  $< M - 1$  sont encore **dilatantes et surjectives**.



Pour  $c \in (-2, c_0)$ ,  $P_c$  a deux points fixes répulsifs  $\beta$  (proche de 2) et  $\alpha$  (proche de  $-1$ ). Comme  $P_c^2(0)$  est proche de  $\beta$ , le **temps de retour  $M$**  dans  $J := (-\alpha, \alpha)$  est grand. Les branches de l'application de retour dans  $J$  avec temps de retour  $< M - 1$  sont encore **dilatantes et surjectives**. Le complément (dans  $J$ ) de l'union des domaines de ces branches est un intervalle centré en 0 **de longueur  $\approx 2^{-M}$** .



Pour  $c \in (-2, c_0)$ ,  $P_c$  a deux points fixes répulsifs  $\beta$  (proche de 2) et  $\alpha$  (proche de  $-1$ ). Comme  $P_c^2(0)$  est proche de  $\beta$ , le **temps de retour  $M$**  dans  $J := (-\alpha, \alpha)$  est grand. Les branches de l'application de retour dans  $J$  avec temps de retour  $< M - 1$  sont encore **dilatantes et surjectives**. Le complément (dans  $J$ ) de l'union des domaines de ces branches est un intervalle centré en 0 **de longueur  $\approx 2^{-M}$** .





Les paramètres  $c \in E$  ont la propriété cruciale suivante:

Les paramètres  $c \in E$  ont la propriété cruciale suivante: il existe une famille **dénombrable**  $(J_\alpha) \subset J$  d'intervalles ouverts disjoints et des entiers  $n_\alpha$  tels que:

Les paramètres  $c \in E$  ont la propriété cruciale suivante: il existe une famille **dénombrable**  $(J_\alpha) \subset J$  d'intervalles ouverts disjoints et des entiers  $n_\alpha$  tels que:

1. la restriction à  $J_\alpha$  de  $P_c^{n_\alpha}$  soit **dilatante et surjective** sur  $J$ , avec une distortion **uniformément bornée**;

Les paramètres  $c \in E$  ont la propriété cruciale suivante: il existe une famille **dénombrable**  $(J_\alpha) \subset J$  d'intervalles ouverts disjoints et des entiers  $n_\alpha$  tels que:

1. la restriction à  $J_\alpha$  de  $P_c^{n_\alpha}$  soit **dilatante et surjective** sur  $J$ , avec une distortion **uniformément bornée**;
2. pour tout  $n > 0$ , on ait

$$\text{Leb}(J - \bigcup_{n_\alpha \leq n} J_\alpha) \leq C2^{-\frac{n}{2}}.$$

Les paramètres  $c \in E$  ont la propriété cruciale suivante: il existe une famille **dénombrable**  $(J_\alpha) \subset J$  d'intervalles ouverts disjoints et des entiers  $n_\alpha$  tels que:

1. la restriction à  $J_\alpha$  de  $P_c^{n_\alpha}$  soit **dilatante et surjective** sur  $J$ , avec une distortion **uniformément bornée**;
2. pour tout  $n > 0$ , on ait

$$\text{Leb}(J - \bigcup_{n_\alpha \leq n} J_\alpha) \leq C 2^{-\frac{n}{2}}.$$

La **distortion** d'un difféomorphisme  $F$  défini sur un intervalle  $I$  est la quantité  $NF := \max_I |D \log |DF||$ .

Les paramètres  $c \in E$  ont la propriété cruciale suivante: il existe une famille **dénombrable**  $(J_\alpha) \subset J$  d'intervalles ouverts disjoints et des entiers  $n_\alpha$  tels que:

1. la restriction à  $J_\alpha$  de  $P_c^{n_\alpha}$  soit **dilatante et surjective** sur  $J$ , avec une distortion **uniformément bornée**;
2. pour tout  $n > 0$ , on ait

$$\text{Leb}(J - \bigcup_{n_\alpha \leq n} J_\alpha) \leq C2^{-\frac{n}{2}}.$$

La **distortion** d'un difféomorphisme  $F$  défini sur un intervalle  $I$  est la quantité  $NF := \max_I |D \log |DF||$ . Elle est nulle si et seulement si  $F$  est **affine**.

Les paramètres  $c \in E$  ont la propriété cruciale suivante: il existe une famille **dénombrable**  $(J_\alpha) \subset J$  d'intervalles ouverts disjoints et des entiers  $n_\alpha$  tels que:

1. la restriction à  $J_\alpha$  de  $P_c^{n_\alpha}$  soit **dilatante et surjective** sur  $J$ , avec une distortion **uniformément bornée**;
2. pour tout  $n > 0$ , on ait

$$\text{Leb}(J - \bigcup_{n_\alpha \leq n} J_\alpha) \leq C 2^{-\frac{n}{2}}.$$

La **distortion** d'un difféomorphisme  $F$  défini sur un intervalle  $I$  est la quantité  $NF := \max_I |D \log |DF||$ . Elle est nulle si et seulement si  $F$  est **affine**.

La deuxième propriété implique que  $\bigcup_\alpha J_\alpha$  est de mesure totale dans  $J$ .

Les paramètres  $c \in E$  ont la propriété cruciale suivante: il existe une famille **dénombrable**  $(J_\alpha) \subset J$  d'intervalles ouverts disjoints et des entiers  $n_\alpha$  tels que:

1. la restriction à  $J_\alpha$  de  $P_c^{n_\alpha}$  soit **dilatante et surjective** sur  $J$ , avec une **distortion uniformément bornée**;
2. pour tout  $n > 0$ , on ait

$$\text{Leb}(J - \bigcup_{n_\alpha \leq n} J_\alpha) \leq C2^{-\frac{n}{2}}.$$

La **distortion** d'un difféomorphisme  $F$  défini sur un intervalle  $I$  est la quantité  $NF := \max_I |D \log |DF||$ . Elle est nulle si et seulement si  $F$  est **affine**.

La deuxième propriété implique que  $\bigcup_\alpha J_\alpha$  est de mesure totale dans  $J$ . Notons  $f : \bigcup_\alpha J_\alpha \rightarrow J$  l'application qui coïncide avec  $P_c^{n_\alpha}$  sur  $J_\alpha$ .

Les paramètres  $c \in E$  ont la propriété cruciale suivante: il existe une famille **dénombrable**  $(J_\alpha) \subset J$  d'intervalles ouverts disjoints et des entiers  $n_\alpha$  tels que:

1. la restriction à  $J_\alpha$  de  $P_c^{n_\alpha}$  soit **dilatante et surjective** sur  $J$ , avec une distortion **uniformément bornée**;
2. pour tout  $n > 0$ , on ait

$$\text{Leb}(J - \bigcup_{n_\alpha \leq n} J_\alpha) \leq C2^{-\frac{n}{2}}.$$

La **distortion** d'un difféomorphisme  $F$  défini sur un intervalle  $I$  est la quantité  $NF := \max_I |D \log |DF||$ . Elle est nulle si et seulement si  $F$  est **affine**.

La deuxième propriété implique que  $\bigcup_\alpha J_\alpha$  est de mesure totale dans  $J$ . Notons  $f : \bigcup_\alpha J_\alpha \rightarrow J$  l'application qui coïncide avec  $P_c^{n_\alpha}$  sur  $J_\alpha$ . Cette application est **uniformément dilatante, de distortion bornée**, d'après la première propriété.

# Le formalisme thermodynamique (opérateurs de transfert)

Le formalisme thermodynamique (opérateurs de transfert)  
permet de construire une **mesure de probabilité**  $\mu$  supportée  
par  $J$

Le formalisme thermodynamique (opérateurs de transfert) permet de construire une mesure de probabilité  $\mu$  supportée par  $J$  qui est  $f$ -invariante, ergodique et possède une densité analytique par rapport à la mesure de Lebesgue.

Le formalisme thermodynamique (opérateurs de transfert) permet de construire une mesure de probabilité  $\mu$  supportée par  $J$  qui est  $f$ -invariante, ergodique et possède une densité analytique par rapport à la mesure de Lebesgue. On construit ensuite à partir de  $\mu$  une mesure finie  $\nu$  qui est  $P_c$ -invariante et ergodique par la formule

$$\int \varphi d\nu := \sum_{\alpha} \int_{J_{\alpha}} \sum_{0 \leq j < n_{\alpha}} \varphi(P_c^j(x)) d\mu(x).$$

Le formalisme thermodynamique (opérateurs de transfert) permet de construire une **mesure de probabilité**  $\mu$  supportée par  $J$  qui est  **$f$ -invariante**, **ergodique** et **possède une densité analytique par rapport à la mesure de Lebesgue**. On construit ensuite à partir de  $\mu$  une mesure **finie**  $\nu$  qui est  **$P_c$ -invariante et ergodique** par la formule

$$\int \varphi d\nu := \sum_{\alpha} \int_{J_{\alpha}} \sum_{0 \leq j < n_{\alpha}} \varphi(P_c^j(x)) d\mu(x).$$

D'après la deuxième propriété, les temps associés à l'itération de  $P_c$  et  $f$  sont **du même ordre pour presque toute orbite**.

Le formalisme thermodynamique (opérateurs de transfert) permet de construire une **mesure de probabilité**  $\mu$  supportée par  $J$  qui est  **$f$ -invariante**, **ergodique** et **possède une densité analytique par rapport à la mesure de Lebesgue**. On construit ensuite à partir de  $\mu$  une mesure **finie**  $\nu$  qui est  **$P_c$ -invariante et ergodique** par la formule

$$\int \varphi d\nu := \sum_{\alpha} \int_{J_{\alpha}} \sum_{0 \leq j < n_{\alpha}} \varphi(P_c^j(x)) d\mu(x).$$

D'après la deuxième propriété, les temps associés à l'itération de  $P_c$  et  $f$  sont **du même ordre pour presque toute orbite**. Comme  $f$  est uniformément dilatante, l'exposant de Lyapunov de  $\nu$  pour  $P_c$  est **strictement positif**.

**Remarque:** La densité de  $\nu$  par rapport à la mesure de Lebesgue est  $L^1$  mais pas  $L^2$ .

**Remarque:** La densité de  $\nu$  par rapport à la mesure de Lebesgue est  $L^1$  mais pas  $L^2$ .

**Remarque:** L'application  $f$  n'est en général **pas** l'application de premier retour de  $P_c$  dans  $J$ .

**Remarque:** La densité de  $\nu$  par rapport à la mesure de Lebesgue est  $L^1$  mais pas  $L^2$ .

**Remarque:** L'application  $f$  n'est en général **pas** l'application de premier retour de  $P_c$  dans  $J$ .

Le point crucial de la démonstration est de construire l'ensemble  $E$  de façon à satisfaire les deux propriétés ci-dessus.

**Remarque:** La densité de  $\nu$  par rapport à la mesure de Lebesgue est  $L^1$  mais pas  $L^2$ .

**Remarque:** L'application  $f$  n'est en général **pas** l'application de premier retour de  $P_c$  dans  $J$ .

Le point crucial de la démonstration est de construire l'ensemble  $E$  de façon à satisfaire les deux propriétés ci-dessus.

**Remarque:** Les paramètres pour lesquels l'orbite positive du point critique **évite** un voisinage de 0 (paramètres de Misiurewicz) satisfont les propriétés requises, mais ils forment un ensemble **de mesure nulle**.

**Remarque:** La densité de  $\nu$  par rapport à la mesure de Lebesgue est  $L^1$  mais pas  $L^2$ .

**Remarque:** L'application  $f$  n'est en général **pas** l'application de premier retour de  $P_c$  dans  $J$ .

Le point crucial de la démonstration est de construire l'ensemble  $E$  de façon à satisfaire les deux propriétés ci-dessus.

**Remarque:** Les paramètres pour lesquels l'orbite positive du point critique **évite** un voisinage de 0 (paramètres de Misiurewicz) satisfont les propriétés requises, mais ils forment un ensemble **de mesure nulle**. Les paramètres de  $E$  sont choisis de façon que l'orbite positive du point critique ne revienne **pas trop vite ni trop souvent** au voisinage de 0.

**Remarque:** La densité de  $\nu$  par rapport à la mesure de Lebesgue est  $L^1$  mais pas  $L^2$ .

**Remarque:** L'application  $f$  n'est en général **pas** l'application de premier retour de  $P_c$  dans  $J$ .

Le point crucial de la démonstration est de construire l'ensemble  $E$  de façon à satisfaire les deux propriétés ci-dessus.

**Remarque:** Les paramètres pour lesquels l'orbite positive du point critique **évit**e un voisinage de 0 (paramètres de Misiurewicz) satisfont les propriétés requises, mais ils forment un ensemble **de mesure nulle**. Les paramètres de  $E$  sont choisis de façon que l'orbite positive du point critique ne revienne **pas trop vite ni trop souvent** au voisinage de 0.

**Remarque:** Plus récemment, Lyubich a considérablement amélioré le résultat de Jakobson

**Remarque:** La densité de  $\nu$  par rapport à la mesure de Lebesgue est  $L^1$  mais pas  $L^2$ .

**Remarque:** L'application  $f$  n'est en général **pas** l'application de premier retour de  $P_c$  dans  $J$ .

Le point crucial de la démonstration est de construire l'ensemble  $E$  de façon à satisfaire les deux propriétés ci-dessus.

**Remarque:** Les paramètres pour lesquels l'orbite positive du point critique **évit**e un voisinage de 0 (paramètres de Misiurewicz) satisfont les propriétés requises, mais ils forment un ensemble **de mesure nulle**. Les paramètres de  $E$  sont choisis de façon que l'orbite positive du point critique ne revienne **pas trop vite ni trop souvent** au voisinage de 0.

**Remarque:** Plus récemment, Lyubich a considérablement amélioré le résultat de Jakobson en montrant que, **pour presque tout paramètre  $c \in [-2, 1/4]$ ,**

**Remarque:** La densité de  $\nu$  par rapport à la mesure de Lebesgue est  $L^1$  mais pas  $L^2$ .

**Remarque:** L'application  $f$  n'est en général **pas** l'application de premier retour de  $P_c$  dans  $J$ .

Le point crucial de la démonstration est de construire l'ensemble  $E$  de façon à satisfaire les deux propriétés ci-dessus.

**Remarque:** Les paramètres pour lesquels l'orbite positive du point critique **évit**e un voisinage de 0 (paramètres de Misiurewicz) satisfont les propriétés requises, mais ils forment un ensemble **de mesure nulle**. Les paramètres de  $E$  sont choisis de façon que l'orbite positive du point critique ne revienne **pas trop vite ni trop souvent** au voisinage de 0.

**Remarque:** Plus récemment, Lyubich a considérablement amélioré le résultat de Jakobson en montrant que, **pour presque tout paramètre  $c \in [-2, 1/4]$** , soit  $P_c$  est **uniformément hyperbolique**,

**Remarque:** La densité de  $\nu$  par rapport à la mesure de Lebesgue est  $L^1$  mais pas  $L^2$ .

**Remarque:** L'application  $f$  n'est en général **pas** l'application de premier retour de  $P_c$  dans  $J$ .

Le point crucial de la démonstration est de construire l'ensemble  $E$  de façon à satisfaire les deux propriétés ci-dessus.

**Remarque:** Les paramètres pour lesquels l'orbite positive du point critique **évit**e un voisinage de 0 (paramètres de Misiurewicz) satisfont les propriétés requises, mais ils forment un ensemble **de mesure nulle**. Les paramètres de  $E$  sont choisis de façon que l'orbite positive du point critique ne revienne **pas trop vite ni trop souvent** au voisinage de 0.

**Remarque:** Plus récemment, Lyubich a considérablement amélioré le résultat de Jakobson en montrant que, **pour presque tout paramètre  $c \in [-2, 1/4]$** , soit  $P_c$  est **uniformément hyperbolique**, soit  $P_c$  satisfait aux conclusions du théorème de Jakobson.

# Le théorème de M.Rees

# Le théorème de M.Rees

M. Rees a obtenu en 1986 une version complexe du théorème de Jakobson.

# Le théorème de M.Rees

M. Rees a obtenu en 1986 une version complexe du théorème de Jakobson.

**Théorème:** Pour tout degré  $d \geq 2$ ,

# Le théorème de M.Rees

M. Rees a obtenu en 1986 une version complexe du théorème de Jakobson.

**Théorème:** Pour tout degré  $d \geq 2$ , il existe, dans l'espace  $\text{Rat}_d$  des fonctions rationnelles de degré  $d$ ,

# Le théorème de M.Rees

M. Rees a obtenu en 1986 une version complexe du théorème de Jakobson.

**Théorème:** Pour tout degré  $d \geq 2$ , il existe, dans l'espace  $\text{Rat}_d$  des fonctions rationnelles de degré  $d$ , un ensemble  $E$  de mesure de Lebesgue **positive**

# Le théorème de M.Rees

M. Rees a obtenu en 1986 une version complexe du théorème de Jakobson.

**Théorème:** Pour tout degré  $d \geq 2$ , il existe, dans l'espace  $\text{Rat}_d$  des fonctions rationnelles de degré  $d$ , un ensemble  $E$  de mesure de Lebesgue **positive** tel que tout  $R \in E$  possède une mesure invariante **ergodique, équivalente à la mesure de Lebesgue** sur la sphère de Riemann,

# Le théorème de M.Rees

M. Rees a obtenu en 1986 une version complexe du théorème de Jakobson.

**Théorème:** Pour tout degré  $d \geq 2$ , il existe, dans l'espace  $\text{Rat}_d$  des fonctions rationnelles de degré  $d$ , un ensemble  $E$  de mesure de Lebesgue **positive** tel que tout  $R \in E$  possède une mesure invariante **ergodique, équivalente à la mesure de Lebesgue** sur la sphère de Riemann, dont l'exposant de Lyapunov est **strictement positif**.

# Le théorème de M.Rees

M. Rees a obtenu en 1986 une version complexe du théorème de Jakobson.

**Théorème:** Pour tout degré  $d \geq 2$ , il existe, dans l'espace  $\text{Rat}_d$  des fonctions rationnelles de degré  $d$ , un ensemble  $E$  de mesure de Lebesgue **positive** tel que tout  $R \in E$  possède une mesure invariante **ergodique, équivalente à la mesure de Lebesgue** sur la sphère de Riemann, dont l'exposant de Lyapunov est **strictement positif**.

En particulier, pour tout  $R \in E$ , on a  $F(R) = \emptyset$ .