Quelques aspects de la théorie des systèmes dynamiques hyperboliques(3)

Jean-Christophe Yoccoz

Collège de France

4 février 2015

Sans perte de généralité, on peut supposer que tout sommet de Γ_B est origine d'au moins une arête et aussi extrémité d'au moins une arête.

Proposition: Le sous-décalage défini par $\mathcal{B}$ est transitif si et seulement si le graphe $\Gamma_{\mathcal{B}}$ est *fortement connexe*: pour tous sommets a, a', il existe un chemin orienté de a à a'.

Proposition: Supposons que $\Gamma_{\mathcal{B}}$ soit fortement connexe. Appelons *période* du sous-décalage l' entier $s \geqslant 1$ p.g.c.d. de la longueur des lacets de $\Gamma_{\mathcal{B}}$. Il existe une partition de l'alphabet

$$\mathcal{A} = \bigsqcup_{i \in \mathbb{Z}_s} \mathcal{A}_i$$

telle que, si on pose

$$\Sigma_i = \{\underline{\theta} \in \Sigma_{\mathcal{B}} \mid \theta_0 \in \mathcal{A}_i\},$$

alors on a $\sigma(\Sigma_i) = \Sigma_{i+1}$ pour tout $i \in \mathbb{Z}_s$ et $\sigma^s_{|\Sigma_i}$ est topologiquement mélangeant.

Ensembles basiques totalement discontinus

Soient M une variété, U une partie ouverte de M, $f : U \to M$ un plongement de classe C^1.

Ensembles basiques totalement discontinus

Soient M une variété, U une partie ouverte de M, $f : U \to M$ un plongement de classe C^1.

Proposition: Soit K un ensemble basique pour f. Supposons que K soit totalement discontinu.

Ensembles basiques totalement discontinus

Soient M une variété, U une partie ouverte de M, $f : U \to M$ un plongement de classe C^1.

Proposition: Soit K un ensemble basique pour f. Supposons que K soit totalement discontinu. Alors il existe un sous-décalage transitif de type fini $(\sigma, \Sigma_{\mathcal{B}})$ et un homéomorphisme $h : K \to \Sigma_{\mathcal{B}}$ qui conjugue $f_{|K}$ à $\sigma_{|\Sigma_{\mathcal{B}}}$.

Ensembles basiques totalement discontinus

Soient M une variété, U une partie ouverte de M, $f : U \to M$ un plongement de classe C^1.

Proposition: Soit K un ensemble basique pour f. Supposons que K soit totalement discontinu. Alors il existe un sous-décalage transitif de type fini $(\sigma, \Sigma_{\mathcal{B}})$ et un homéomorphisme $h : K \to \Sigma_{\mathcal{B}}$ qui conjugue $f_{|K}$ à $\sigma_{|\Sigma_{\mathcal{B}}}$.

Remarque: Si K est infini (i.e n'est pas réduit à une orbite périodique), l'hypothèse que K est totalement discontinu implique que K est de type selle.

Ensembles basiques totalement discontinus

Soient M une variété, U une partie ouverte de M, $f : U \to M$ un plongement de classe C^1.

Proposition: Soit K un ensemble basique pour f. Supposons que K soit totalement discontinu. Alors il existe un sous-décalage transitif de type fini $(\sigma, \Sigma_{\mathcal{B}})$ et un homéomorphisme $h : K \to \Sigma_{\mathcal{B}}$ qui conjugue $f_{|K}$ à $\sigma_{|\Sigma_{\mathcal{B}}}$.

Remarque: Si K est infini (i.e n'est pas réduit à une orbite périodique), l'hypothèse que K est totalement discontinu implique que K est de type selle.

Exemple: Pour le fer à cheval de l'application de Hénon (avec $c \ll 0$), la dynamique est conjuguée au décalage complet sur deux symboles.

Esquisse de preuve

Comme K est totalement discontinu, il existe des partitions finies

$$K = \bigsqcup_{\alpha \in \mathcal{A}} K_\alpha$$

en parties ouvertes et fermées de diamètre arbitrairement petit.

Esquisse de preuve

Comme K est totalement discontinu, il existe des partitions finies

$$K = \bigsqcup_{\alpha \in \mathcal{A}} K_\alpha$$

en parties ouvertes et fermées de diamètre arbitrairement petit.

Définissons une application $h : K \to \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ par

$$h(x) = (\theta_n)_{n \in \mathbb{Z}} \iff f^n(x) \in K_{\theta_n}, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Esquisse de preuve

Comme K est totalement discontinu, il existe des partitions finies

$$K = \bigsqcup_{\alpha \in \mathcal{A}} K_\alpha$$

en parties ouvertes et fermées de diamètre arbitrairement petit.
Définissons une application $h : K \to \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ par

$$h(x) = (\theta_n)_{n\in\mathbb{Z}} \iff f^n(x) \in K_{\theta_n}, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

L'application h est continue.

Esquisse de preuve

Comme K est totalement discontinu, il existe des partitions finies

$$K = \bigsqcup_{\alpha \in \mathcal{A}} K_\alpha$$

en parties ouvertes et fermées de diamètre arbitrairement petit. Définissons une application $h : K \to \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ par

$$h(x) = (\theta_n)_{n \in \mathbb{Z}} \iff f^n(x) \in K_{\theta_n}, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

L'application h est continue. Elle est injective si le diamètre des K_α est suffisamment petit, car $f_{|K}$ est expansive.

Esquisse de preuve

Comme K est totalement discontinu, il existe des partitions finies

$$K = \bigsqcup_{\alpha \in \mathcal{A}} K_\alpha$$

en parties ouvertes et fermées de diamètre arbitrairement petit. Définissons une application $h : K \to \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ par

$$h(x) = (\theta_n)_{n \in \mathbb{Z}} \iff f^n(x) \in K_{\theta_n}, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

L'application h est continue. Elle est injective si le diamètre des K_α est suffisamment petit, car $f_{|K}$ est expansive. La relation $h \circ f = \sigma \circ h$ est vérifiée. L'application h est donc une conjugaison entre $f_{|K}$ et un sous-décalage Σ de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$.

Esquisse de preuve

Comme K est totalement discontinu, il existe des partitions finies

$$K = \bigsqcup_{\alpha \in \mathcal{A}} K_\alpha$$

en parties ouvertes et fermées de diamètre arbitrairement petit.
Définissons une application $h : K \to \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ par

$$h(x) = (\theta_n)_{n \in \mathbb{Z}} \iff f^n(x) \in K_{\theta_n}, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

L'application h est continue. Elle est injective si le diamètre des K_α est suffisamment petit, car $f_{|K}$ est expansive. La relation $h \circ f = \sigma \circ h$ est vérifiée. L'application h est donc une conjugaison entre $f_{|K}$ et un sous-décalage Σ de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$. Comme K est localement maximal, il en est de même de Σ, qui est donc un sous-décalage de type fini.

Intersections homoclines transverses

Soient M une variété, $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$, et soit $\mathcal{O}$ une orbite périodique hyperbolique de f.

Intersections homoclines transverses

Soient M une variété, $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$, et soit $\mathcal{O}$ une orbite périodique hyperbolique de f.

Définition Un point $q \in M$ est homocline à $\mathcal{O}$ s'il appartient à l'intersection $W^s(\mathcal{O}) \cap W^u(\mathcal{O})$ mais n'appartient pas à $\mathcal{O}$.

Intersections homoclines transverses

Soient M une variété, $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$, et soit $\mathcal{O}$ une orbite périodique hyperbolique de f.

Définition Un point $q \in M$ est homocline à $\mathcal{O}$ s'il appartient à l'intersection $W^s(\mathcal{O}) \cap W^u(\mathcal{O})$ mais n'appartient pas à $\mathcal{O}$. Il est homocline transverse si de plus l'intersection $W^s(\mathcal{O}) \cap W^u(\mathcal{O})$ est transverse en q.

Intersections homoclines transverses

Soient M une variété, $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$, et soit $\mathcal{O}$ une orbite périodique hyperbolique de f.

Définition Un point $q \in M$ est homocline à $\mathcal{O}$ s'il appartient à l'intersection $W^s(\mathcal{O}) \cap W^u(\mathcal{O})$ mais n'appartient pas à $\mathcal{O}$. Il est homocline transverse si de plus l'intersection $W^s(\mathcal{O}) \cap W^u(\mathcal{O})$ est transverse en q.

Si q est homocline (transverse) à $\mathcal{O}$, tous les points de l'orbite de q sont aussi homoclines (transverses) à $\mathcal{O}$.

Intersections homoclines transverses

Soient M une variété, $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$, et soit $\mathcal{O}$ une orbite périodique hyperbolique de f.

Définition   Un point $q \in M$ est homocline à $\mathcal{O}$ s'il appartient à l'intersection $W^s(\mathcal{O}) \cap W^u(\mathcal{O})$ mais n'appartient pas à $\mathcal{O}$. Il est homocline transverse si de plus l'intersection $W^s(\mathcal{O}) \cap W^u(\mathcal{O})$ est transverse en q.

Si q est homocline (transverse) à $\mathcal{O}$, tous les points de l'orbite de q sont aussi homoclines (transverses) à $\mathcal{O}$.

Soit q un point homocline à $\mathcal{O}$. L'union de $\mathcal{O}$ et de l'orbite $o(q)$ de q est un ensemble fermé, invariant, totalement discontinu, transitif de M.

Intersections homoclines transverses

Soient M une variété, $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$, et soit $\mathcal{O}$ une orbite périodique hyperbolique de f.

Définition Un point $q \in M$ est homocline à $\mathcal{O}$ s'il appartient à l'intersection $W^s(\mathcal{O}) \cap W^u(\mathcal{O})$ mais n'appartient pas à $\mathcal{O}$. Il est homocline transverse si de plus l'intersection $W^s(\mathcal{O}) \cap W^u(\mathcal{O})$ est transverse en q.

Si q est homocline (transverse) à $\mathcal{O}$, tous les points de l'orbite de q sont aussi homoclines (transverses) à $\mathcal{O}$.

Soit q un point homocline à $\mathcal{O}$. L'union de $\mathcal{O}$ et de l'orbite $o(q)$ de q est un ensemble fermé, invariant, totalement discontinu, transitif de M.

Si q est de plus homocline transverse, cet ensemble est aussi hyperbolique. Cependant, cet ensemble n'est alors pas localement maximal, donc n'est pas un ensemble basique.

Proposition (Birkhoff, Smale) Soit q un point homocline transverse à $\mathcal{O}$. Alors l'union $\mathcal{O} \cup o(q)$ est l'intersection décroissante d'une suite $(K_m)_{m \geqslant 0}$ d'ensembles basiques totalement discontinus de f.

Proposition (Birkhoff, Smale) Soit q un point homocline transverse à $\mathcal{O}$. Alors l'union $\mathcal{O} \cup o(q)$ est l'intersection décroissante d'une suite $(K_m)_{m \geqslant 0}$ d'ensembles basiques totalement discontinus de f.

Remarque Supposons que $\mathcal{O}$ soit un point fixe de f. On peut alors s'arranger pour que , pour tout m assez grand, $f_{|K_m}$ soit topologiquement conjugué au sous-décalage de type fini topologiquement mélangeant $(\Sigma_{\mathcal{B}_m}, \sigma)$ défini par

$$\mathcal{B}_m = \{(i,j) \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \mid j = i+1 \text{ ou } i = j = 0.\}.$$

Rectangles

Soient M une variété, U une partie ouverte de M, $f : U \to M$ un plongement de classe C^1. Soit K un ensemble basique de f.

Rectangles

Soient M une variété, U une partie ouverte de M, $f : U \to M$ un plongement de classe C^1. Soit K un ensemble basique de f.

Définition: Un *rectangle* est une partie fermée non vide R de K telle que:

Rectangles

Soient M une variété, U une partie ouverte de M, $f : U \to M$ un plongement de classe C^1. Soit K un ensemble basique de f.

Définition: Un *rectangle* est une partie fermée non vide R de K telle que:

- l'intérieur de R dans K est dense dans R;

Rectangles

Soient M une variété, U une partie ouverte de M, $f : U \to M$ un plongement de classe C^1. Soit K un ensemble basique de f.

Définition: Un *rectangle* est une partie fermée non vide R de K telle que:

- l'intérieur de R dans K est dense dans R;
- pour tous $x, y \in R$, la variété stable locale $W^s_{loc}(x)$ et la variété instable locale $W^u_{loc}(y)$ se rencontrent (transversalement) en un unique point, noté $[x, y]$

Rectangles

Soient M une variété, U une partie ouverte de M, $f : U \to M$ un plongement de classe C^1. Soit K un ensemble basique de f.

Définition: Un *rectangle* est une partie fermée non vide R de K telle que:

- l'intérieur de R dans K est dense dans R;
- pour tous $x, y \in R$, la variété stable locale $W^s_{loc}(x)$ et la variété instable locale $W^u_{loc}(y)$ se rencontrent (transversalement) en un unique point, noté $[x, y]$ (cette propriété est automatique dès que le diamètre de R est assez petit);

Rectangles

Soient M une variété, U une partie ouverte de M, $f : U \to M$ un plongement de classe C^1. Soit K un ensemble basique de f.

Définition: Un *rectangle* est une partie fermée non vide R de K telle que:

- l'intérieur de R dans K est dense dans R;
- pour tous $x, y \in R$, la variété stable locale $W^s_{loc}(x)$ et la variété instable locale $W^u_{loc}(y)$ se rencontrent (transversalement) en un unique point, noté $[x, y]$ (cette propriété est automatique dès que le diamètre de R est assez petit);
- pour tous $x, y \in R$ tels que $W^s_{loc}(x) \cap W^s_{loc}(y) \neq \emptyset$, on a $W^s_{loc}(x) \cap R = W^s_{loc}(y) \cap R$;

Rectangles

Soient M une variété, U une partie ouverte de M, $f : U \to M$ un plongement de classe C^1. Soit K un ensemble basique de f.

Définition: Un *rectangle* est une partie fermée non vide R de K telle que:

- l'intérieur de R dans K est dense dans R;
- pour tous $x, y \in R$, la variété stable locale $W^s_{loc}(x)$ et la variété instable locale $W^u_{loc}(y)$ se rencontrent (transversalement) en un unique point, noté $[x, y]$ (cette propriété est automatique dès que le diamètre de R est assez petit);
- pour tous $x, y \in R$ tels que $W^s_{loc}(x) \cap W^s_{loc}(y) \neq \emptyset$, on a $W^s_{loc}(x) \cap R = W^s_{loc}(y) \cap R$;
- pour tous $x, y \in R$ tels que $W^u_{loc}(x) \cap W^u_{loc}(y) \neq \emptyset$, on a $W^u_{loc}(x) \cap R = W^u_{loc}(y) \cap R$;

Rectangles

Soient M une variété, U une partie ouverte de M, $f : U \to M$ un plongement de classe C^1. Soit K un ensemble basique de f.

Définition: Un *rectangle* est une partie fermée non vide R de K telle que:

- l'intérieur de R dans K est dense dans R;
- pour tous $x, y \in R$, la variété stable locale $W^s_{loc}(x)$ et la variété instable locale $W^u_{loc}(y)$ se rencontrent (transversalement) en un unique point, noté $[x, y]$ (cette propriété est automatique dès que le diamètre de R est assez petit);
- pour tous $x, y \in R$ tels que $W^s_{loc}(x) \cap W^s_{loc}(y) \neq \emptyset$, on a $W^s_{loc}(x) \cap R = W^s_{loc}(y) \cap R$;
- pour tous $x, y \in R$ tels que $W^u_{loc}(x) \cap W^u_{loc}(y) \neq \emptyset$, on a $W^u_{loc}(x) \cap R = W^u_{loc}(y) \cap R$;
- pour tous $x, y \in R$, on a $[x, y] \in R$.

Pour $x \in R$, on pose

$$W^s(x,R) = W^s_{loc}(x) \cap R, \quad W^u(x,R) = W^u_{loc}(x) \cap R.$$

Pour $x \in R$, on pose

$$W^s(x, R) = W^s_{loc}(x) \cap R, \quad W^u(x, R) = W^u_{loc}(x) \cap R.$$

La relation $W^s(x, R) = W^s(y, R)$ est une relation d'équivalence $\approx_s$ dont l'ensemble des classes est noté R_s.

Pour $x \in R$, on pose

$$W^s(x,R) = W^s_{loc}(x) \cap R, \quad W^u(x,R) = W^u_{loc}(x) \cap R.$$

La relation $W^s(x,R) = W^s(y,R)$ est une relation d'équivalence $\approx_s$ dont l'ensemble des classes est noté R_s. La classe d'équivalence de x est égale à $W^s(x,R)$.

Pour $x \in R$, on pose

$$W^s(x,R) = W^s_{loc}(x) \cap R, \quad W^u(x,R) = W^u_{loc}(x) \cap R.$$

La relation $W^s(x,R) = W^s(y,R)$ est une relation d'équivalence $\approx_s$ dont l'ensemble des classes est noté R_s. La classe d'équivalence de x est égale à $W^s(x,R)$.

De même, la relation $W^u(x,R) = W^u(y,R)$ est une relation d'équivalence $\approx_u$ dont l'ensemble des classes est noté R_u.

Pour $x \in R$, on pose

$$W^s(x,R) = W^s_{loc}(x) \cap R, \quad W^u(x,R) = W^u_{loc}(x) \cap R.$$

La relation $W^s(x,R) = W^s(y,R)$ est une relation d'équivalence $\approx_s$ dont l'ensemble des classes est noté R_s. La classe d'équivalence de x est égale à $W^s(x,R)$.

De même, la relation $W^u(x,R) = W^u(y,R)$ est une relation d'équivalence $\approx_u$ dont l'ensemble des classes est noté R_u. La classe d'équivalence de x est égale à $W^u(x,R)$.

Pour $x \in R$, on pose

$$W^s(x,R) = W^s_{loc}(x) \cap R, \quad W^u(x,R) = W^u_{loc}(x) \cap R.$$

La relation $W^s(x,R) = W^s(y,R)$ est une relation d'équivalence $\approx_s$ dont l'ensemble des classes est noté R_s. La classe d'équivalence de x est égale à $W^s(x,R)$.

De même, la relation $W^u(x,R) = W^u(y,R)$ est une relation d'équivalence $\approx_u$ dont l'ensemble des classes est noté R_u. La classe d'équivalence de x est égale à $W^u(x,R)$.

Le rectangle R est canoniquement homéomorphe au produit $R_s \times R_u$.

Partitions de Markov

Soient M une variété, U une partie ouverte de M, $f : U \to M$ un plongement de classe C^1. Soit K un ensemble basique de f.

Partitions de Markov

Soient M une variété, U une partie ouverte de M, $f : U \to M$ un plongement de classe C^1. Soit K un ensemble basique de f.

Définition: Une *partition de Markov* de K est une collection finie $(R_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ de rectangles de K qui vérifie:

Partitions de Markov

Soient M une variété, U une partie ouverte de M, $f : U \to M$ un plongement de classe C^1. Soit K un ensemble basique de f.

Définition: Une *partition de Markov* de K est une collection finie $(R_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ de rectangles de K qui vérifie:

- $K = \bigcup_\alpha R_\alpha$;

Partitions de Markov

Soient M une variété, U une partie ouverte de M, $f : U \to M$ un plongement de classe C^1. Soit K un ensemble basique de f.

Définition: Une *partition de Markov* de K est une collection finie $(R_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ de rectangles de K qui vérifie:

- $K = \bigcup_\alpha R_\alpha$;
- Les intérieurs (dans K) des rectangles R_α sont disjoints;

Partitions de Markov

Soient M une variété, U une partie ouverte de M, $f : U \to M$ un plongement de classe C^1. Soit K un ensemble basique de f.

Définition: Une *partition de Markov* de K est une collection finie $(R_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ de rectangles de K qui vérifie:

- $K = \bigcup_\alpha R_\alpha$;
- Les intérieurs (dans K) des rectangles R_α sont disjoints;
- pour $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$, $x \in \mathrm{int}(R_\alpha) \cap f^{-1}(\mathrm{int}(R_\beta))$, on a

$$f(W^s(x, R_\alpha)) \subset W^s(f(x), R_\beta), \quad f^{-1}(W^u(f(x), R_\beta) \subset W^u(x, R_\alpha).$$

Partitions de Markov

Soient M une variété, U une partie ouverte de M, $f : U \to M$ un plongement de classe C^1. Soit K un ensemble basique de f.

Définition: Une *partition de Markov* de K est une collection finie $(R_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ de rectangles de K qui vérifie:

- $K = \bigcup_\alpha R_\alpha$;
- Les intérieurs (dans K) des rectangles R_α sont disjoints;
- pour $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$, $x \in \mathrm{int}(R_\alpha) \cap f^{-1}(\mathrm{int}(R_\beta))$, on a

$$f(W^s(x, R_\alpha)) \subset W^s(f(x), R_\beta), \quad f^{-1}(W^u(f(x), R_\beta) \subset W^u(x, R_\alpha).$$

Théorème: (Sinai, Bowen) Tout ensemble basique admet des partitions de Markov

Partitions de Markov

Soient M une variété, U une partie ouverte de M, $f : U \to M$ un plongement de classe C^1. Soit K un ensemble basique de f.

Définition: Une *partition de Markov* de K est une collection finie $(R_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ de rectangles de K qui vérifie:

- $K = \bigcup_\alpha R_\alpha$;
- Les intérieurs (dans K) des rectangles R_α sont disjoints;
- pour $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$, $x \in \mathrm{int}(R_\alpha) \cap f^{-1}(\mathrm{int}(R_\beta))$, on a

$$f(W^s(x, R_\alpha)) \subset W^s(f(x), R_\beta), \quad f^{-1}(W^u(f(x), R_\beta) \subset W^u(x, R_\alpha).$$

Théorème: (Sinai, Bowen) Tout ensemble basique admet des partitions de Markov (avec des rectangles de diamètre arbitrairement petit).

Soient M une variété, U une partie ouverte de M, $f : U \to M$ un plongement de classe C^1.

Codage et partitions de Markov

Soient M une variété, U une partie ouverte de M, $f : U \to M$ un plongement de classe C^1. Soient K un ensemble basique de f et $(R_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ une partition de Markov de K.

Codage et partitions de Markov

Soient M une variété, U une partie ouverte de M, $f : U \to M$ un plongement de classe C^1. Soient K un ensemble basique de f et $(R_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ une partition de Markov de K.

Définissons $\mathcal{B} := \{(\alpha, \beta) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A},\ \mathrm{int}(R_\alpha) \cap f^{-1}(\mathrm{int}(R_\beta)) \neq \emptyset\}$.

Codage et partitions de Markov

Soient M une variété, U une partie ouverte de M, $f : U \to M$ un plongement de classe C^1. Soient K un ensemble basique de f et $(R_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ une partition de Markov de K.

Définissons $\mathcal{B} := \{(\alpha, \beta) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A},\ \mathrm{int}(R_\alpha) \cap f^{-1}(\mathrm{int}(R_\beta)) \neq \emptyset\}$.
Soit $(\alpha_0, \ldots, \alpha_m)$ un mot tel que $(\alpha_j, \alpha_{j+1}) \in \mathcal{B}$ pour $0 \leqslant j < m$.

Codage et partitions de Markov

Soient M une variété, U une partie ouverte de M, $f : U \to M$ un plongement de classe C^1. Soient K un ensemble basique de f et $(R_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ une partition de Markov de K.

Définissons $\mathcal{B} := \{(\alpha, \beta) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A},\ \mathrm{int}(R_\alpha) \cap f^{-1}(\mathrm{int}(R_\beta)) \neq \emptyset\}$.
Soit $(\alpha_0, \ldots, \alpha_m)$ un mot tel que $(\alpha_j, \alpha_{j+1}) \in \mathcal{B}$ pour $0 \leqslant j < m$.
L'intersection $\cap_0^m f^{-j}(R_{\alpha_j})$ est une partie compacte non vide de R_{α_0} qui est saturée pour $\approx_s$.

Codage et partitions de Markov

Soient M une variété, U une partie ouverte de M, $f : U \to M$ un plongement de classe C^1. Soient K un ensemble basique de f et $(R_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ une partition de Markov de K.

Définissons $\mathcal{B} := \{(\alpha, \beta) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A},\ \mathrm{int}(R_\alpha) \cap f^{-1}(\mathrm{int}(R_\beta)) \neq \emptyset\}$.
Soit $(\alpha_0, \ldots, \alpha_m)$ un mot tel que $(\alpha_j, \alpha_{j+1}) \in \mathcal{B}$ pour $0 \leqslant j < m$.
L'intersection $\cap_0^m f^{-j}(R_{\alpha_j})$ est une partie compacte non vide de R_{α_0} qui est saturée pour $\approx_s$.
Soit $(\alpha_j)_{j \geqslant 0}$ une suite dans $\Sigma_{\mathcal{B}}^+$. L'intersection $\cap_{j \geqslant 0} f^{-j}(R_{\alpha_j})$ est une classe de $\approx_s$ dans R_{α_0}.

Codage et partitions de Markov

Soient M une variété, U une partie ouverte de M, $f : U \to M$ un plongement de classe C^1. Soient K un ensemble basique de f et $(R_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ une partition de Markov de K.

Définissons $\mathcal{B} := \{(\alpha, \beta) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A},\ \mathrm{int}(R_\alpha) \cap f^{-1}(\mathrm{int}(R_\beta)) \neq \emptyset\}$.
Soit $(\alpha_0, \ldots, \alpha_m)$ un mot tel que $(\alpha_j, \alpha_{j+1}) \in \mathcal{B}$ pour $0 \leqslant j < m$.
L'intersection $\cap_0^m f^{-j}(R_{\alpha_j})$ est une partie compacte non vide de R_{α_0} qui est saturée pour $\approx_s$.

Soit $(\alpha_j)_{j \geqslant 0}$ une suite dans $\Sigma^+_{\mathcal{B}}$. L'intersection $\cap_{j \geqslant 0} f^{-j}(R_{\alpha_j})$ est une classe de $\approx_s$ dans R_{α_0}.

Soit $(\alpha_j)_{j \leqslant 0}$ une suite dans $\Sigma^-_{\mathcal{B}}$. L'intersection $\cap_{j \leqslant 0} f^{-j}(R_{\alpha_j})$ est une classe de $\approx_u$ dans R_{α_0}.

Soit $\underline{\alpha} := (\alpha_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ une suite dans Σ_B.

Soit $\underline{\alpha} := (\alpha_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ une suite dans Σ_B.

L'intersection dans R_{α_0} de la classe de $\approx_s$ associée à $(\alpha_j)_{j\geqslant 0}$ et de la classe de $\approx_u$ associée à $(\alpha_j)_{j\leqslant 0}$ est un point $H(\underline{\alpha}) := \cap_{j\in\mathbb{Z}} f^{-j}(R_{\alpha_j})$.

Soit $\underline{\alpha} := (\alpha_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ une suite dans Σ_B.

L'intersection dans R_{α_0} de la classe de $\approx_s$ associée à $(\alpha_j)_{j\geqslant 0}$ et de la classe de $\approx_u$ associée à $(\alpha_j)_{j\leqslant 0}$ est un point $H(\underline{\alpha}) := \cap_{j\in\mathbb{Z}} f^{-j}(R_{\alpha_j})$.

Proposition: L'application $H : \Sigma_{\mathcal{B}} \to K$ est continue,

Soit $\underline{\alpha} := (\alpha_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ une suite dans Σ_B.

L'intersection dans R_{α_0} de la classe de $\approx_s$ associée à $(\alpha_j)_{j\geqslant 0}$ et de la classe de $\approx_u$ associée à $(\alpha_j)_{j\leqslant 0}$ est un point $H(\underline{\alpha}) := \cap_{j\in\mathbb{Z}} f^{-j}(R_{\alpha_j})$.

Proposition: L'application $H : \Sigma_{\mathcal{B}} \to K$ est continue, surjective

Soit $\underline{\alpha} := (\alpha_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ une suite dans Σ_B.

L'intersection dans R_{α_0} de la classe de $\approx_s$ associée à $(\alpha_j)_{j\geqslant 0}$ et de la classe de $\approx_u$ associée à $(\alpha_j)_{j\leqslant 0}$ est un point $H(\underline{\alpha}) := \cap_{j\in\mathbb{Z}} f^{-j}(R_{\alpha_j})$.

Proposition: L'application $H : \Sigma_{\mathcal{B}} \to K$ est continue, surjective et vérifie $H \circ \sigma = f \circ H$.

Soit $\underline{\alpha} := (\alpha_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ une suite dans Σ_B.

L'intersection dans R_{α_0} de la classe de $\approx_s$ associée à $(\alpha_j)_{j\geqslant 0}$ et de la classe de $\approx_u$ associée à $(\alpha_j)_{j\leqslant 0}$ est un point $H(\underline{\alpha}) := \cap_{j\in\mathbb{Z}} f^{-j}(R_{\alpha_j})$.

Proposition: L'application $H : \Sigma_{\mathcal{B}} \to K$ est continue, surjective et vérifie $H \circ \sigma = f \circ H$. De plus

- Il existe un entier M tel que tout point de K a au plus M images inverses par H.

Soit $\underline{\alpha} := (\alpha_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ une suite dans Σ_B.

L'intersection dans R_{α_0} de la classe de $\approx_s$ associée à $(\alpha_j)_{j \geqslant 0}$ et de la classe de $\approx_u$ associée à $(\alpha_j)_{j \leqslant 0}$ est un point $H(\underline{\alpha}) := \cap_{j \in \mathbb{Z}} f^{-j}(R_{\alpha_j})$.

Proposition: L'application $H : \Sigma_{\mathcal{B}} \to K$ est continue, surjective et vérifie $H \circ \sigma = f \circ H$. De plus

- Il existe un entier M tel que tout point de K a au plus M images inverses par H.
- Si l'orbite de $x \in K$ est contenue dans l'union des intérieurs (dans K) des R_α, le point x a un seul antécédent par H;

Soit $\underline{\alpha} := (\alpha_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ une suite dans Σ_B.

L'intersection dans R_{α_0} de la classe de $\approx_s$ associée à $(\alpha_j)_{j\geqslant 0}$ et de la classe de $\approx_u$ associée à $(\alpha_j)_{j\leqslant 0}$ est un point $H(\underline{\alpha}) := \cap_{j\in\mathbb{Z}} f^{-j}(R_{\alpha_j})$.

Proposition: L'application $H : \Sigma_{\mathcal{B}} \to K$ est continue, surjective et vérifie $H \circ \sigma = f \circ H$. De plus

- Il existe un entier M tel que tout point de K a au plus M images inverses par H.
- Si l'orbite de $x \in K$ est contenue dans l'union des intérieurs (dans K) des R_α, le point x a un seul antécédent par H; ceci se produit pour une partie G_δ-dense de K.

La fonction zeta d'Artin-Mazur

Soit f une application continue d'un espace métrique compact X dans lui même. On suppose que, pour tout $m \geqslant 1$, l'ensemble $Fix(f^m)$ des points fixes de f^m est fini.

La fonction zeta d'Artin-Mazur

Soit f une application continue d'un espace métrique compact X dans lui même. On suppose que, pour tout $m \geqslant 1$, l'ensemble $Fix(f^m)$ des points fixes de f^m est fini.

Définition: La *fonction zeta* de f (introduite par Artin-Mazur en 1965) est la série formelle

$$\zeta_f(z) := \exp\Big(\sum_{m \geqslant 1} \#Fix(f^m)\frac{z^m}{m}\Big).$$

La fonction zeta d'Artin-Mazur

Soit f une application continue d'un espace métrique compact X dans lui même. On suppose que, pour tout $m \geqslant 1$, l'ensemble $Fix(f^m)$ des points fixes de f^m est fini.

Définition: La *fonction zeta* de f (introduite par Artin-Mazur en 1965) est la série formelle

$$\zeta_f(z) := \exp(\sum_{m \geqslant 1} \# Fix(f^m) \frac{z^m}{m}).$$

Pour $m \geqslant 1$, notons P_m le nombre d'orbites périodiques de f dont la période minimale est m.

La fonction zeta d'Artin-Mazur

Soit f une application continue d'un espace métrique compact X dans lui même. On suppose que, pour tout $m \geqslant 1$, l'ensemble $Fix(f^m)$ des points fixes de f^m est fini.

Définition: La *fonction zeta* de f (introduite par Artin-Mazur en 1965) est la série formelle

$$\zeta_f(z) := \exp(\sum_{m \geqslant 1} \# Fix(f^m) \frac{z^m}{m}).$$

Pour $m \geqslant 1$, notons P_m le nombre d'orbites périodiques de f dont la période minimale est m. On a

$$\# Fix(f^m) = \sum_{d/m} dP_d.$$

La fonction zeta d'Artin-Mazur

Soit f une application continue d'un espace métrique compact X dans lui même. On suppose que, pour tout $m \geqslant 1$, l'ensemble $Fix(f^m)$ des points fixes de f^m est fini.

Définition: La *fonction zeta* de f (introduite par Artin-Mazur en 1965) est la série formelle

$$\zeta_f(z) := \exp(\sum_{m \geqslant 1} \# Fix(f^m) \frac{z^m}{m}).$$

Pour $m \geqslant 1$, notons P_m le nombre d'orbites périodiques de f dont la période minimale est m. On a

$$\# Fix(f^m) = \sum_{d/m} d P_d.$$

Ceci permet d'écrire ζ_f comme produit eulerien.

Produit eulerien pour ζ_f

$$\zeta_f(z) \quad = \quad \exp(\sum_{m \geqslant 1} \sum_{d/m} dP_d \frac{z^m}{m})$$

Produit eulerien pour ζ_f

$$\begin{aligned}\zeta_f(z) &= \exp\Big(\sum_{m\geqslant 1}\sum_{d/m} dP_d \frac{z^m}{m}\Big)\\ &= \exp\Big(\sum_{d\geqslant 1}\sum_{k\geqslant 1} dP_d \frac{z^{kd}}{kd}\Big)\end{aligned}$$

Produit eulerien pour ζ_f

$$\begin{aligned}
\zeta_f(z) &= \exp\Big(\sum_{m\geqslant 1}\sum_{d/m} dP_d \frac{z^m}{m}\Big) \\
&= \exp\Big(\sum_{d\geqslant 1}\sum_{k\geqslant 1} dP_d \frac{z^{kd}}{kd}\Big) \\
&= \exp\Big(\sum_{d\geqslant 1} P_d \sum_{k\geqslant 1} \frac{z^{kd}}{k}\Big)
\end{aligned}$$

Produit eulerien pour ζ_f

$$\begin{aligned}
\zeta_f(z) &= \exp\Big(\sum_{m\geqslant 1}\sum_{d/m} dP_d \frac{z^m}{m}\Big) \\
&= \exp\Big(\sum_{d\geqslant 1}\sum_{k\geqslant 1} dP_d \frac{z^{kd}}{kd}\Big) \\
&= \exp\Big(\sum_{d\geqslant 1} P_d \sum_{k\geqslant 1} \frac{z^{kd}}{k}\Big) \\
&= \exp\Big(\sum_{d\geqslant 1} P_d \log(1-z^d)^{-1}\Big)
\end{aligned}$$

Produit eulerien pour ζ_f

$$\begin{aligned}
\zeta_f(z) &= \exp\Big(\sum_{m\geqslant 1}\sum_{d/m} dP_d \frac{z^m}{m}\Big) \\
&= \exp\Big(\sum_{d\geqslant 1}\sum_{k\geqslant 1} dP_d \frac{z^{kd}}{kd}\Big) \\
&= \exp\Big(\sum_{d\geqslant 1} P_d \sum_{k\geqslant 1} \frac{z^{kd}}{k}\Big) \\
&= \exp\Big(\sum_{d\geqslant 1} P_d \log(1-z^d)^{-1}\Big) \\
&= \prod_{\pi\in P_f} (1-z^{d(\pi)})^{-1},
\end{aligned}$$

Produit eulerien pour ζ_f

$$\begin{aligned}
\zeta_f(z) &= \exp(\sum_{m\geqslant 1}\sum_{d/m} dP_d \frac{z^m}{m}) \\
&= \exp(\sum_{d\geqslant 1}\sum_{k\geqslant 1} dP_d \frac{z^{kd}}{kd}) \\
&= \exp(\sum_{d\geqslant 1} P_d \sum_{k\geqslant 1} \frac{z^{kd}}{k}) \\
&= \exp(\sum_{d\geqslant 1} P_d \log(1-z^d)^{-1}) \\
&= \prod_{\pi\in P_f} (1-z^{d(\pi)})^{-1},
\end{aligned}$$

où le produit est pris sur les orbites périodiques de f, et $d(\pi)$ désigne la période minimale de π.

Exemples de fonctions zeta

- Pour le décalage complet σ sur un alphabet à d lettres, on a $\# Fix \sigma^m = d^m$

Exemples de fonctions zeta

- Pour le décalage complet σ sur un alphabet à d lettres, on a $\# Fix \sigma^m = d^m$ donc $\zeta_\sigma(z) = (1 - dz)^{-1}$.

Exemples de fonctions zeta

- Pour le décalage complet σ sur un alphabet à d lettres, on a $\# Fix \sigma^m = d^m$ donc $\zeta_\sigma(z) = (1 - dz)^{-1}$.
- Soit $\Sigma_{\mathcal{B}}$ un sous-décalage de type fini, $A_{\mathcal{B}}$ la matrice de transition associée.

Exemples de fonctions zeta

- Pour le décalage complet σ sur un alphabet à d lettres, on a $\# Fix \sigma^m = d^m$ donc $\zeta_\sigma(z) = (1 - dz)^{-1}$.
- Soit $\Sigma_{\mathcal{B}}$ un sous-décalage de type fini, $A_{\mathcal{B}}$ la matrice de transition associée. Pour $m \geqslant 1$, le nombre de points fixes de σ^m dans $\Sigma_{\mathcal{B}}$ est égal à la trace de $A_{\mathcal{B}}^m$.

Exemples de fonctions zeta

- Pour le décalage complet σ sur un alphabet à d lettres, on a $\# Fix \sigma^m = d^m$ donc $\zeta_\sigma(z) = (1 - dz)^{-1}$.
- Soit $\Sigma_{\mathcal{B}}$ un sous-décalage de type fini, $A_{\mathcal{B}}$ la matrice de transition associée. Pour $m \geqslant 1$, le nombre de points fixes de σ^m dans $\Sigma_{\mathcal{B}}$ est égal à la trace de $A_{\mathcal{B}}^m$. On a donc

$$\zeta_{\sigma_{|\Sigma_{\mathcal{B}}}}(z) = \det(1 - zA_{\mathcal{B}})^{-1}.$$

Exemples de fonctions zeta

- Pour le décalage complet σ sur un alphabet à d lettres, on a $\# Fix \sigma^m = d^m$ donc $\zeta_\sigma(z) = (1 - dz)^{-1}$.
- Soit $\Sigma_{\mathcal{B}}$ un sous-décalage de type fini, $A_{\mathcal{B}}$ la matrice de transition associée. Pour $m \geqslant 1$, le nombre de points fixes de σ^m dans $\Sigma_{\mathcal{B}}$ est égal à la trace de $A_{\mathcal{B}}^m$. On a donc

$$\zeta_{\sigma_{|\Sigma_{\mathcal{B}}}}(z) = \det(1 - zA_{\mathcal{B}})^{-1}.$$

- Exercice: Soit $A \in GL(d, \mathbb{Z})$ une matrice hyperbolique définissant un difféomorphisme d'Anosov (linéaire) de $\mathbb{T}^d$.

Exemples de fonctions zeta

- Pour le décalage complet σ sur un alphabet à d lettres, on a $\# Fix \sigma^m = d^m$ donc $\zeta_\sigma(z) = (1 - dz)^{-1}$.
- Soit $\Sigma_{\mathcal{B}}$ un sous-décalage de type fini, $A_{\mathcal{B}}$ la matrice de transition associée. Pour $m \geqslant 1$, le nombre de points fixes de σ^m dans $\Sigma_{\mathcal{B}}$ est égal à la trace de $A_{\mathcal{B}}^m$. On a donc

$$\zeta_{\sigma_{|\Sigma_{\mathcal{B}}}}(z) = \det(1 - zA_{\mathcal{B}})^{-1}.$$

- Exercice: Soit $A \in GL(d, \mathbb{Z})$ une matrice hyperbolique définissant un difféomorphisme d'Anosov (linéaire) de $\mathbb{T}^d$.
  1. Montrer qu'on a $\# Fix(A^m) = |\det(A^m - 1)|$ pour $m \geqslant 1$.

Exemples de fonctions zeta

- Pour le décalage complet σ sur un alphabet à d lettres, on a $\# Fix \sigma^m = d^m$ donc $\zeta_\sigma(z) = (1 - dz)^{-1}$.
- Soit $\Sigma_{\mathcal{B}}$ un sous-décalage de type fini, $A_{\mathcal{B}}$ la matrice de transition associée. Pour $m \geqslant 1$, le nombre de points fixes de σ^m dans $\Sigma_{\mathcal{B}}$ est égal à la trace de $A^m_{\mathcal{B}}$. On a donc

$$\zeta_{\sigma_{|\Sigma_{\mathcal{B}}}}(z) = \det(1 - zA_{\mathcal{B}})^{-1}.$$

- Exercice: Soit $A \in GL(d, \mathbb{Z})$ une matrice hyperbolique définissant un difféomorphisme d'Anosov (linéaire) de $\mathbb{T}^d$.
  1. Montrer qu'on a $\# Fix(A^m) = |\det(A^m - 1)|$ pour $m \geqslant 1$.
  2. Exprimer ζ_A en fonction des valeurs propres de A.

Fonction zeta d'un ensemble basique

Soient M une variété, U une partie ouverte de M, $f : U \to M$ un plongement de classe C^1. Soit K un ensemble basique de f.

Fonction zeta d'un ensemble basique

Soient M une variété, U une partie ouverte de M, $f : U \to M$ un plongement de classe C^1. Soit K un ensemble basique de f.

Théorème: (Smale, Guckenheimer,Manning, Bowen,Fried) La fonction zeta de $f_{|K}$ est une fraction rationnelle de z.

Fonction zeta d'un ensemble basique

Soient M une variété, U une partie ouverte de M, $f : U \to M$ un plongement de classe C^1. Soit K un ensemble basique de f.

Théorème: (Smale, Guckenheimer,Manning, Bowen,Fried)
La fonction zeta de $f_{|K}$ est une fraction rationnelle de z.

Indication de preuve: Choisissons une partition de Markov $(R_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ de K et notons $H : \Sigma_{\mathcal{B}} \to K$ la semi-conjugaison associée.

Fonction zeta d'un ensemble basique

Soient M une variété, U une partie ouverte de M, $f : U \to M$ un plongement de classe C^1. Soit K un ensemble basique de f.

Théorème: (Smale, Guckenheimer,Manning, Bowen,Fried)
La fonction zeta de $f_{|K}$ est une fraction rationnelle de z.

Indication de preuve: Choisissons une partition de Markov $(R_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ de K et notons $H : \Sigma_{\mathcal{B}} \to K$ la semi-conjugaison associée. Lorsque H est injective (i.e lorsque K est totalement discontinu), on a $\zeta_K = \zeta_{\mathcal{B}}$ et ζ_K est donc rationnelle.

Fonction zeta d'un ensemble basique

Soient M une variété, U une partie ouverte de M, $f : U \to M$ un plongement de classe C^1. Soit K un ensemble basique de f.

Théorème: (Smale, Guckenheimer,Manning, Bowen,Fried)
La fonction zeta de $f_{|K}$ est une fraction rationnelle de z.

Indication de preuve: Choisissons une partition de Markov $(R_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ de K et notons $H : \Sigma_{\mathcal{B}} \to K$ la semi-conjugaison associée. Lorsque H est injective (i.e lorsque K est totalement discontinu), on a $\zeta_K = \zeta_{\mathcal{B}}$ et ζ_K est donc rationnelle.

Dans le cas général, les points fixes de f^m qui se trouvent dans l'intérieur d'un rectangle R_α sont encore en correspondance biunivoque avec leurs uniques antécédents par H, qui sont des points fixes de σ^m.

Fonction zeta d'un ensemble basique

Soient M une variété, U une partie ouverte de M, $f : U \to M$ un plongement de classe C^1. Soit K un ensemble basique de f.

Théorème: (Smale, Guckenheimer,Manning, Bowen,Fried) La fonction zeta de $f_{|K}$ est une fraction rationnelle de z.

Indication de preuve: Choisissons une partition de Markov $(R_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ de K et notons $H : \Sigma_{\mathcal{B}} \to K$ la semi-conjugaison associée. Lorsque H est injective (i.e lorsque K est totalement discontinu), on a $\zeta_K = \zeta_{\mathcal{B}}$ et ζ_K est donc rationnelle.

Dans le cas général, les points fixes de f^m qui se trouvent dans l'intérieur d'un rectangle R_α sont encore en correspondance biunivoque avec leurs uniques antécédents par H, qui sont des points fixes de σ^m. Les points fixes de f^m qui se trouvent sur le bord de rectangles de la partition ont plusieurs antécédents par H.

Fonction zeta d'un ensemble basique

Soient M une variété, U une partie ouverte de M, $f : U \to M$ un plongement de classe C^1. Soit K un ensemble basique de f.

Théorème: (Smale, Guckenheimer,Manning, Bowen,Fried)
La fonction zeta de $f_{|K}$ est une fraction rationnelle de z.

Indication de preuve: Choisissons une partition de Markov $(R_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ de K et notons $H : \Sigma_{\mathcal{B}} \to K$ la semi-conjugaison associée. Lorsque H est injective (i.e lorsque K est totalement discontinu), on a $\zeta_K = \zeta_{\mathcal{B}}$ et ζ_K est donc rationnelle.

Dans le cas général, les points fixes de f^m qui se trouvent dans l'intérieur d'un rectangle R_α sont encore en correspondance biunivoque avec leurs uniques antécédents par H, qui sont des points fixes de σ^m. Les points fixes de f^m qui se trouvent sur le bord de rectangles de la partition ont plusieurs antécédents par H. Cette multiplicité est aussi codée par des sous-décalages de type fini, ce qui permet de conclure.

Fonctions zeta à poids

Soit f une application continue d'un espace métrique compact X dans lui-même.

Fonctions zeta à poids

Soit f une application continue d'un espace métrique compact X dans lui-même. On suppose que, pour tout $m \geqslant 1$, l'ensemble des points fixes de f^m est fini.

Fonctions zeta à poids

Soit f une application continue d'un espace métrique compact X dans lui-même. On suppose que, pour tout $m \geqslant 1$, l'ensemble des points fixes de f^m est fini.

Soit $\Phi : X \to \mathbb{R}^*$ une fonction poids.

Fonctions zeta à poids

Soit f une application continue d'un espace métrique compact X dans lui-même. On suppose que, pour tout $m \geqslant 1$, l'ensemble des points fixes de f^m est fini.

Soit $\Phi : X \to \mathbb{R}^*$ une fonction poids. Le plus souvent, Φ ne prend que des valeurs positives et on écrit $\Phi = \exp \varphi$.

Fonctions zeta à poids

Soit f une application continue d'un espace métrique compact X dans lui-même. On suppose que, pour tout $m \geqslant 1$, l'ensemble des points fixes de f^m est fini.

Soit $\Phi : X \to \mathbb{R}^*$ une fonction poids. Le plus souvent, Φ ne prend que des valeurs positives et on écrit $\Phi = \exp \varphi$. On définit

$$\zeta_{f,\Phi}(z) := \exp\Big(\sum_{m \geqslant 1} \sum_{f^m(x)=x} \prod_{0}^{m-1} \Phi(f^j(x)) \frac{z^m}{m}\Big).$$

Fonctions zeta à poids

Soit f une application continue d'un espace métrique compact X dans lui-même. On suppose que, pour tout $m \geqslant 1$, l'ensemble des points fixes de f^m est fini.

Soit $\Phi : X \to \mathbb{R}^*$ une fonction poids. Le plus souvent, Φ ne prend que des valeurs positives et on écrit $\Phi = \exp \varphi$. On définit

$$\zeta_{f,\Phi}(z) := \exp\Big(\sum_{m \geqslant 1} \sum_{f^m(x)=x} \prod_{0}^{m-1} \Phi(f^j(x)) \frac{z^m}{m}\Big).$$

On a encore un produit eulerien

$$\zeta_{f,\Phi}(z) = \prod_{\pi \in P_f} (1 - z^{d(\pi)}\Phi(\pi))^{-1},$$

Fonctions zeta à poids

Soit f une application continue d'un espace métrique compact X dans lui-même. On suppose que, pour tout $m \geqslant 1$, l'ensemble des points fixes de f^m est fini.

Soit $\Phi : X \to \mathbb{R}^*$ une fonction poids. Le plus souvent, Φ ne prend que des valeurs positives et on écrit $\Phi = \exp \varphi$. On définit

$$\zeta_{f,\Phi}(z) := \exp\Big(\sum_{m \geqslant 1} \sum_{f^m(x)=x} \prod_{0}^{m-1} \Phi(f^j(x)) \frac{z^m}{m}\Big).$$

On a encore un produit eulerien

$$\zeta_{f,\Phi}(z) = \prod_{\pi \in P_f} (1 - z^{d(\pi)}\Phi(\pi))^{-1},$$

avec $\Phi(\pi) = \prod_{x \in \pi} \Phi(x)$.

Formalisme thermodynamique (Bowen,Ruelle,Sinai): la pression

Soient M une variété, U une partie ouverte de M, $f : U \to M$ un plongement de classe C^1.

Formalisme thermodynamique (Bowen,Ruelle,Sinai): la pression

Soient M une variété, U une partie ouverte de M, $f : U \to M$ un plongement de classe C^1. Soient K un ensemble basique de f et $\Phi = \exp \varphi : K \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction poids.

Formalisme thermodynamique (Bowen,Ruelle,Sinai): la pression

Soient M une variété, U une partie ouverte de M, $f : U \to M$ un plongement de classe C^1. Soient K un ensemble basique de f et $\Phi = \exp \varphi : K \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction poids.

Théorème: (Ruelle) Supposons que φ soit hölderienne.

Formalisme thermodynamique (Bowen,Ruelle,Sinai): la pression

Soient M une variété, U une partie ouverte de M, $f : U \to M$ un plongement de classe C^1. Soient K un ensemble basique de f et $\Phi = \exp \varphi : K \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction poids.

Théorème: (Ruelle) Supposons que φ soit hölderienne. La *pression* $P(\varphi)$ est définie par

$$P(\varphi) := \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \log\Big(\sum_{f^m(x)=x} \exp\Big(\sum_{0}^{m-1} \varphi(f^j(x))\Big)\Big).$$

Formalisme thermodynamique (Bowen,Ruelle,Sinai): la pression

Soient M une variété, U une partie ouverte de M, $f : U \to M$ un plongement de classe C^1. Soient K un ensemble basique de f et $\Phi = \exp \varphi : K \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction poids.

Théorème: (Ruelle) Supposons que φ soit hölderienne. La *pression* $P(\varphi)$ est définie par

$$P(\varphi) := \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \log(\sum_{f^m(x)=x} \exp(\sum_0^{m-1} \varphi(f^j(x)))).$$

Le rayon de convergence de $\zeta_{f,\Phi}$ est égal à $\exp(-P(\varphi))$.

Formalisme thermodynamique (Bowen,Ruelle,Sinai): la pression

Soient M une variété, U une partie ouverte de M, $f : U \to M$ un plongement de classe C^1. Soient K un ensemble basique de f et $\Phi = \exp \varphi : K \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction poids.

Théorème: (Ruelle) Supposons que φ soit hölderienne. La *pression* $P(\varphi)$ est définie par

$$P(\varphi) := \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \log(\sum_{f^m(x)=x} \exp(\sum_0^{m-1} \varphi(f^j(x)))).$$

Le rayon de convergence de $\zeta_{f,\Phi}$ est égal à $\exp(-P(\varphi))$. L'unique singularité de $\zeta_{f,\Phi}$ sur le cercle de convergence est un pôle simple en $\exp(-P(\varphi))$.

Formalisme thermodynamique (Bowen,Ruelle,Sinai): la pression

Soient M une variété, U une partie ouverte de M, $f : U \to M$ un plongement de classe C^1. Soient K un ensemble basique de f et $\Phi = \exp\varphi : K \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction poids.

Théorème: (Ruelle) Supposons que φ soit hölderienne. La *pression* $P(\varphi)$ est définie par

$$P(\varphi) := \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \log\Big(\sum_{f^m(x)=x} \exp\big(\sum_0^{m-1} \varphi(f^j(x))\big)\Big).$$

Le rayon de convergence de $\zeta_{f,\Phi}$ est égal à $\exp(-P(\varphi))$. L'unique singularité de $\zeta_{f,\Phi}$ sur le cercle de convergence est un pôle simple en $\exp(-P(\varphi))$.

Remarque: La pression de la fonction $\varphi \equiv 0$ est *l'entropie topologique* de $f_{|K}$ (qui sera discutée dans la suite).

Opérateurs de transfert pour les sous-décalages

Soit $(\Sigma_{\mathcal{B}}^{+}, \sigma)$ un sous-décalage unilatéral topologiquement mélangeant.

Opérateurs de transfert pour les sous-décalages

Soit $(\Sigma_{\mathcal{B}}^{+}, \sigma)$ un sous-décalage unilatéral topologiquement mélangeant. Soit $\varphi^{+} : \Sigma_{\mathcal{B}}^{+} \to \mathbb{R}$ une fonction hölderienne.

Opérateurs de transfert pour les sous-décalages

Soit $(\Sigma_{\mathcal{B}}^{+}, \sigma)$ un sous-décalage unilatéral topologiquement mélangeant. Soit $\varphi^{+} : \Sigma_{\mathcal{B}}^{+} \to \mathbb{R}$ une fonction hölderienne.

Définition: *L'opérateur de transfert* $\mathcal{L}_{\varphi^{+}} : C(\Sigma_{\mathcal{B}}^{+}) \to C(\Sigma_{\mathcal{B}}^{+})$ est défini par

$$\mathcal{L}_{\varphi^{+}}(\psi)(x) = \sum_{\sigma(y)=x} \exp(\varphi^{+}(y))\psi(y).$$

Opérateurs de transfert pour les sous-décalages

Soit $(\Sigma_{\mathcal{B}}^+, \sigma)$ un sous-décalage unilatéral topologiquement mélangeant. Soit $\varphi^+ : \Sigma_{\mathcal{B}}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction hölderienne.

Définition: *L'opérateur de transfert* $\mathcal{L}_{\varphi^+} : C(\Sigma_{\mathcal{B}}^+) \to C(\Sigma_{\mathcal{B}}^+)$ est défini par

$$\mathcal{L}_{\varphi^+}(\psi)(x) = \sum_{\sigma(y)=x} \exp(\varphi^+(y))\psi(y).$$

C'est un opérateur positif.

Opérateurs de transfert pour les sous-décalages

Soit $(\Sigma_{\mathcal{B}}^{+}, \sigma)$ un sous-décalage unilatéral topologiquement mélangeant. Soit $\varphi^{+} : \Sigma_{\mathcal{B}}^{+} \to \mathbb{R}$ une fonction hölderienne.

Définition: *L'opérateur de transfert* $\mathcal{L}_{\varphi^{+}} : C(\Sigma_{\mathcal{B}}^{+}) \to C(\Sigma_{\mathcal{B}}^{+})$ est défini par

$$\mathcal{L}_{\varphi^{+}}(\psi)(x) = \sum_{\sigma(y)=x} \exp(\varphi^{+}(y))\psi(y).$$

C'est un opérateur positif. Pour $m \geqslant 1$, on a

$$\mathcal{L}_{\varphi^{+}}^{m}(\psi)(x) = \sum_{\sigma^{m}(y)=x} \exp(\sum_{0}^{m-1} \varphi^{+}(\sigma^{j}(y)))\psi(y).$$

Opérateurs de transfert pour les sous-décalages

Soit $(\Sigma_{\mathcal{B}}^{+}, \sigma)$ un sous-décalage unilatéral topologiquement mélangeant. Soit $\varphi^{+} : \Sigma_{\mathcal{B}}^{+} \to \mathbb{R}$ une fonction hölderienne.

Définition: *L'opérateur de transfert* $\mathcal{L}_{\varphi^{+}} : C(\Sigma_{\mathcal{B}}^{+}) \to C(\Sigma_{\mathcal{B}}^{+})$ est défini par

$$\mathcal{L}_{\varphi^{+}}(\psi)(x) = \sum_{\sigma(y)=x} \exp(\varphi^{+}(y))\psi(y).$$

C'est un opérateur positif. Pour $m \geqslant 1$, on a

$$\mathcal{L}_{\varphi^{+}}^{m}(\psi)(x) = \sum_{\sigma^{m}(y)=x} \exp(\sum_{0}^{m-1} \varphi^{+}(\sigma^{j}(y)))\psi(y).$$

Formellement, on a donc

$$Tr(\mathcal{L}_{\varphi^{+}}^{m}(\psi)) = \sum_{\sigma^{m}(x)=x} \exp(\sum_{0}^{m-1} \varphi^{+}(\sigma^{j}(x))).$$