Quelques aspects de la théorie des systèmes dynamiques quasipériodiques(4)

Jean-Christophe Yoccoz

Collège de France

21 mai 2014

Les groupes $\mathrm{Diff}_+(\mathbb{T})$ et $D(\mathbb{T})$

$\mathrm{Diff}^r_+(\mathbb{T})$ est le groupe des difféomorphismes préservant l'orientation de classe C^r du cercle $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Les groupes $\mathrm{Diff}_+(\mathbb{T})$ et $D(\mathbb{T})$

$\mathrm{Diff}^r_+(\mathbb{T})$ est le groupe des difféomorphismes préservant l'orientation de classe C^r du cercle $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

La classe de régularité r est égale soit à 0, soit à un réel dans $[1, +\infty)$, soit à ∞, soit à ω (régularité analytique).

Les groupes $\mathrm{Diff}_+(\mathbb{T})$ et $D(\mathbb{T})$

$\mathrm{Diff}^r_+(\mathbb{T})$ est le groupe des difféomorphismes préservant l'orientation de classe C^r du cercle $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

La classe de régularité r est égale soit à 0, soit à un réel dans $[1, +\infty)$, soit à ∞, soit à ω (régularité analytique).

$D^r(\mathbb{T})$ est le groupe des difféomorphismes de $\mathbb{R}$ de classe C^r qui commutent avec la translation $R_1(x) = x + 1$.

Les groupes $\mathrm{Diff}_+(\mathbb{T})$ et $D(\mathbb{T})$

$\mathrm{Diff}^r_+(\mathbb{T})$ est le groupe des difféomorphismes préservant l'orientation de classe C^r du cercle $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

La classe de régularité r est égale soit à 0, soit à un réel dans $[1, +\infty)$, soit à ∞, soit à ω (régularité analytique).

$D^r(\mathbb{T})$ est le groupe des difféomorphismes de $\mathbb{R}$ de classe C^r qui commutent avec la translation $R_1(x) = x + 1$.

Un difféomorphisme $F \in D^r(\mathbb{T})$ induit un difféomorphisme dans $\mathrm{Diff}^r_+(\mathbb{T})$. Inversement, un difféomorphisme $f \in \mathrm{Diff}^r_+(\mathbb{T})$ se relève en un difféomorphisme de $D^r(\mathbb{T})$, unique mod. $R_{\mathbb{Z}}$.

Les groupes $\mathrm{Diff}_+(\mathbb{T})$ et $D(\mathbb{T})$

$\mathrm{Diff}^r_+(\mathbb{T})$ est le groupe des difféomorphismes préservant l'orientation de classe C^r du cercle $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

La classe de régularité r est égale soit à 0, soit à un réel dans $[1, +\infty)$, soit à ∞, soit à ω (régularité analytique).

$D^r(\mathbb{T})$ est le groupe des difféomorphismes de $\mathbb{R}$ de classe C^r qui commutent avec la translation $R_1(x) = x + 1$.

Un difféomorphisme $F \in D^r(\mathbb{T})$ induit un difféomorphisme dans $\mathrm{Diff}^r_+(\mathbb{T})$. Inversement, un difféomorphisme $f \in \mathrm{Diff}^r_+(\mathbb{T})$ se relève en un difféomorphisme de $D^r(\mathbb{T})$, unique mod. $R_{\mathbb{Z}}$.

Les groupes $\mathrm{Diff}^r_+(\mathbb{T})$, $D^r(\mathbb{T})$, munis de leur topologie naturelle, sont connexes. Le groupe $D^r(\mathbb{T})$ est le revêtement universel de $\mathrm{Diff}^r_+(\mathbb{T})$.

Les groupes $\mathrm{Diff}_+(\mathbb{T})$ et $D(\mathbb{T})$

$\mathrm{Diff}^r_+(\mathbb{T})$ est le groupe des difféomorphismes préservant l'orientation de classe C^r du cercle $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

La classe de régularité r est égale soit à 0, soit à un réel dans $[1, +\infty)$, soit à ∞, soit à ω (régularité analytique).

$D^r(\mathbb{T})$ est le groupe des difféomorphismes de $\mathbb{R}$ de classe C^r qui commutent avec la translation $R_1(x) = x + 1$.

Un difféomorphisme $F \in D^r(\mathbb{T})$ induit un difféomorphisme dans $\mathrm{Diff}^r_+(\mathbb{T})$. Inversement, un difféomorphisme $f \in \mathrm{Diff}^r_+(\mathbb{T})$ se relève en un difféomorphisme de $D^r(\mathbb{T})$, unique mod. $R_{\mathbb{Z}}$.

Les groupes $\mathrm{Diff}^r_+(\mathbb{T})$, $D^r(\mathbb{T})$, munis de leur topologie naturelle, sont connexes. Le groupe $D^r(\mathbb{T})$ est le revêtement universel de $\mathrm{Diff}^r_+(\mathbb{T})$.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ (resp. $\alpha \in \mathbb{T}$), on note $R_\alpha \in D(\mathbb{T})$ (resp. $R_\alpha \in \mathrm{Diff}_+(\mathbb{T})$) la translation $x \mapsto x + \alpha$.

Plan de la théorie

L'étude de la dynamique des difféomorphismes du cercle est divisée en plusieurs parties:

Plan de la théorie

L'étude de la dynamique des difféomorphismes du cercle est divisée en plusieurs parties:

- Poincaré, théorie C^0: nombre de rotation, orbites périodiques, semi-conjugaison à une rotation.

Plan de la théorie

L'étude de la dynamique des difféomorphismes du cercle est divisée en plusieurs parties:

- Poincaré, théorie C^0: nombre de rotation, orbites périodiques, semi-conjugaison à une rotation.
- Denjoy, théorie C^2: minimalité des difféomorphismes sans orbites périodiques.

Plan de la théorie

L'étude de la dynamique des difféomorphismes du cercle est divisée en plusieurs parties:

- Poincaré, théorie C^0: nombre de rotation, orbites périodiques, semi-conjugaison à une rotation.
- Denjoy, théorie C^2: minimalité des difféomorphismes sans orbites périodiques.
- Théorie KAM (Kolmogorov, Arnold, Moser), Herman: Régularité de la conjugaison en présence de condition arithmétique sur le nombre de rotation.

Le nombre de rotation

Soit $F \in D^0(\mathbb{T})$.

Le nombre de rotation

Soit $F \in D^0(\mathbb{T})$.

Théorème: La suite de fonctions $\mathbb{Z}$-périodiques $(\frac{F^n(x)-x}{n})_{n>0}$ converge uniformément vers une constante appelée nombre de rotation de F et notée $\rho(F)$.

Le nombre de rotation

Soit $F \in D^0(\mathbb{T})$.

Théorème: La suite de fonctions $\mathbb{Z}$-périodiques $(\frac{F^n(x)-x}{n})_{n>0}$ converge uniformément vers une constante appelée nombre de rotation de F et notée $\rho(F)$.

Propriétés élémentaires du nombre de rotation:

Le nombre de rotation

Soit $F \in D^0(\mathbb{T})$.

Théorème: La suite de fonctions $\mathbb{Z}$-périodiques $(\frac{F^n(x)-x}{n})_{n>0}$ converge uniformément vers une constante appelée nombre de rotation de F et notée $\rho(F)$.

Propriétés élémentaires du nombre de rotation:

- $\rho(R_\alpha) = \alpha, \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Le nombre de rotation

Soit $F \in D^0(\mathbb{T})$.

Théorème: La suite de fonctions $\mathbb{Z}$-périodiques $(\frac{F^n(x)-x}{n})_{n>0}$ converge uniformément vers une constante appelée nombre de rotation de F et notée $\rho(F)$.

Propriétés élémentaires du nombre de rotation:

- $\rho(R_\alpha) = \alpha,$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.
- $\rho(F^n) = n\,\rho(F),$ $\forall F \in D^0(\mathbb{T}), \forall n \in \mathbb{Z}$.

Le nombre de rotation

Soit $F \in D^0(\mathbb{T})$.

Théorème: La suite de fonctions $\mathbb{Z}$-périodiques $(\frac{F^n(x)-x}{n})_{n>0}$ converge uniformément vers une constante appelée nombre de rotation de F et notée $\rho(F)$.

Propriétés élémentaires du nombre de rotation:

- $\rho(R_\alpha) = \alpha$, $\quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$.
- $\rho(F^n) = n\,\rho(F)$, $\quad \forall F \in D^0(\mathbb{T}), \forall n \in \mathbb{Z}$.
- $\rho(H^{-1} \circ F \circ H) = \rho(F)$, $\quad \forall F, H \in D^0(\mathbb{T})$.

Le nombre de rotation

Soit $F \in D^0(\mathbb{T})$.

Théorème: La suite de fonctions $\mathbb{Z}$-périodiques $(\frac{F^n(x)-x}{n})_{n>0}$ converge uniformément vers une constante appelée nombre de rotation de F et notée $\rho(F)$.

Propriétés élémentaires du nombre de rotation:

- $\rho(R_\alpha) = \alpha,$ $\quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$.
- $\rho(F^n) = n\,\rho(F),$ $\quad \forall F \in D^0(\mathbb{T}), \forall n \in \mathbb{Z}$.
- $\rho(H^{-1} \circ F \circ H) = \rho(F),$ $\quad \forall F, H \in D^0(\mathbb{T})$.
- $\rho(F \circ R_p) = \rho(R_p \circ F) = \rho(F) + p,$ $\quad \forall F \in D^0(\mathbb{T}), \forall p \in \mathbb{Z}$.

Le nombre de rotation

Soit $F \in D^0(\mathbb{T})$.

Théorème: La suite de fonctions $\mathbb{Z}$-périodiques $(\frac{F^n(x)-x}{n})_{n>0}$ converge uniformément vers une constante appelée nombre de rotation de F et notée $\rho(F)$.

Propriétés élémentaires du nombre de rotation:

- $\rho(R_\alpha) = \alpha, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$.
- $\rho(F^n) = n\,\rho(F), \quad \forall F \in D^0(\mathbb{T}), \forall n \in \mathbb{Z}$.
- $\rho(H^{-1} \circ F \circ H) = \rho(F), \quad \forall F, H \in D^0(\mathbb{T})$.
- $\rho(F \circ R_p) = \rho(R_p \circ F) = \rho(F) + p, \quad \forall F \in D^0(\mathbb{T}), \forall p \in \mathbb{Z}$.
- $\rho(F) \leqslant \rho(G)$, pour $F, G \in D^0(\mathbb{T})$ vérifiant $F(x) \leqslant G(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Le nombre de rotation

Soit $F \in D^0(\mathbb{T})$.

Théorème: La suite de fonctions $\mathbb{Z}$-périodiques $(\frac{F^n(x)-x}{n})_{n>0}$ converge uniformément vers une constante appelée nombre de rotation de F et notée $\rho(F)$.

Propriétés élémentaires du nombre de rotation:

- $\rho(R_\alpha) = \alpha$, $\quad\forall \alpha \in \mathbb{R}$.
- $\rho(F^n) = n\,\rho(F)$, $\quad\forall F \in D^0(\mathbb{T}), \forall n \in \mathbb{Z}$.
- $\rho(H^{-1} \circ F \circ H) = \rho(F)$, $\quad\forall F, H \in D^0(\mathbb{T})$.
- $\rho(F \circ R_p) = \rho(R_p \circ F) = \rho(F) + p$, $\quad\forall F \in D^0(\mathbb{T}), \forall p \in \mathbb{Z}$.
- $\rho(F) \leqslant \rho(G)$, pour $F, G \in D^0(\mathbb{T})$ vérifiant $F(x) \leqslant G(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

L'avant-dernière propriété permet de définir le nombre de rotation $\rho(f) \in \mathbb{T}$ d'un homéomorphisme $f \in \mathrm{Diff}^0_+(\mathbb{T})$.

Le nombre de rotation

Soit $F \in D^0(\mathbb{T})$.

Théorème: La suite de fonctions $\mathbb{Z}$-périodiques $(\frac{F^n(x)-x}{n})_{n>0}$ converge uniformément vers une constante appelée nombre de rotation de F et notée $\rho(F)$.

Propriétés élémentaires du nombre de rotation:

- $\rho(R_\alpha) = \alpha$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.
- $\rho(F^n) = n\,\rho(F)$, $\forall F \in D^0(\mathbb{T}), \forall n \in \mathbb{Z}$.
- $\rho(H^{-1} \circ F \circ H) = \rho(F)$, $\forall F, H \in D^0(\mathbb{T})$.
- $\rho(F \circ R_p) = \rho(R_p \circ F) = \rho(F) + p$, $\forall F \in D^0(\mathbb{T}), \forall p \in \mathbb{Z}$.
- $\rho(F) \leqslant \rho(G)$, pour $F, G \in D^0(\mathbb{T})$ vérifiant $F(x) \leqslant G(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

L'avant-dernière propriété permet de définir le nombre de rotation $\rho(f) \in \mathbb{T}$ d'un homéomorphisme $f \in \mathrm{Diff}^0_+(\mathbb{T})$.

On notera que ρ n'est pas un homomorphisme: en général $\rho(F \circ G) \neq \rho(F) + \rho(G)$.

Preuve du théorème

Lemme 1: Soit $(a_n)_{n>0}$ une suite *sous-additive*, i.e vérifiant $a_{m+n} \leqslant a_m + a_n$ pour $m, n > 0$.

Preuve du théorème

Lemme 1: Soit $(a_n)_{n>0}$ une suite *sous-additive*, i.e vérifiant $a_{m+n} \leqslant a_m + a_n$ pour $m, n > 0$. Alors la suite (a_n/n) converge dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ vers $\inf_{n>0} a_n/n$.

Preuve du théorème

Lemme 1: Soit $(a_n)_{n>0}$ une suite *sous-additive*, i.e vérifiant $a_{m+n} \leqslant a_m + a_n$ pour $m, n > 0$. Alors la suite (a_n/n) converge dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ vers $\inf_{n>0} a_n/n$.

Lemme 2: Pour $F \in D^0(\mathbb{T})$, on a

$$\max_{\mathbb{R}}(F(x) - x) < 1 + \min_{\mathbb{R}}(F(x) - x).$$

Preuve du théorème

Lemme 1: Soit $(a_n)_{n>0}$ une suite *sous-additive*, i.e vérifiant $a_{m+n} \leqslant a_m + a_n$ pour $m, n > 0$. Alors la suite (a_n/n) converge dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ vers $\inf_{n>0} a_n/n$.

Lemme 2: Pour $F \in D^0(\mathbb{T})$, on a

$$\max_{\mathbb{R}}(F(x) - x) < 1 + \min_{\mathbb{R}}(F(x) - x).$$

En effet, pour $x < y < x+1$, on a $F(x) < F(y) < F(x+1) = F(x)+1$ donc $F(y) - y < F(x+1) - x = 1 + F(x) - x$. $\square$

Lemme 1: Soit $(a_n)_{n>0}$ une suite *sous-additive*, i.e vérifiant $a_{m+n} \leqslant a_m + a_n$ pour $m, n > 0$. Alors la suite (a_n/n) converge dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ vers $\inf_{n>0} a_n/n$.

Lemme 2: Pour $F \in D^0(\mathbb{T})$, on a

$$\max_{\mathbb{R}}(F(x) - x) < 1 + \min_{\mathbb{R}}(F(x) - x).$$

En effet, pour $x < y < x+1$, on a $F(x) < F(y) < F(x+1) = F(x)+1$ donc $F(y) - y < F(x+1) - x = 1 + F(x) - x$. $\square$

Preuve du théorème: Soit $F \in D^0(\mathbb{T})$.

Preuve du théorème

Lemme 1: Soit $(a_n)_{n>0}$ une suite *sous-additive*, i.e vérifiant $a_{m+n} \leqslant a_m + a_n$ pour $m, n > 0$. Alors la suite (a_n/n) converge dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ vers $\inf_{n>0} a_n/n$.

Lemme 2: Pour $F \in D^0(\mathbb{T})$, on a

$$\max_{\mathbb{R}}(F(x) - x) < 1 + \min_{\mathbb{R}}(F(x) - x).$$

En effet, pour $x < y < x+1$, on a $F(x) < F(y) < F(x+1) = F(x)+1$ donc $F(y) - y < F(x+1) - x = 1 + F(x) - x$. $\square$

Preuve du théorème: Soit $F \in D^0(\mathbb{T})$. Pour $n > 0$, posons $M_n := \max_{\mathbb{R}}(F^n(x) - x)$, $m_n := \min_{\mathbb{R}}(F^n(x) - x)$.

Preuve du théorème

Lemme 1: Soit $(a_n)_{n>0}$ une suite *sous-additive*, i.e vérifiant $a_{m+n} \leqslant a_m + a_n$ pour $m, n > 0$. Alors la suite (a_n/n) converge dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ vers $\inf_{n>0} a_n/n$.

Lemme 2: Pour $F \in D^0(\mathbb{T})$, on a

$$\max_{\mathbb{R}}(F(x) - x) < 1 + \min_{\mathbb{R}}(F(x) - x).$$

En effet, pour $x < y < x+1$, on a $F(x) < F(y) < F(x+1) = F(x)+1$ donc $F(y) - y < F(x+1) - x = 1 + F(x) - x$. $\square$

Preuve du théorème: Soit $F \in D^0(\mathbb{T})$. Pour $n > 0$, posons $M_n := \max_{\mathbb{R}}(F^n(x) - x)$, $m_n := \min_{\mathbb{R}}(F^n(x) - x)$. Les suites (M_n) et $(-m_n)$ sont sous-additives et vérifient $m_n \leqslant M_n < m_n + 1$.

Preuve du théorème

Lemme 1: Soit $(a_n)_{n>0}$ une suite *sous-additive*, i.e vérifiant $a_{m+n} \leqslant a_m + a_n$ pour $m, n > 0$. Alors la suite (a_n/n) converge dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ vers $\inf_{n>0} a_n/n$.

Lemme 2: Pour $F \in D^0(\mathbb{T})$, on a

$$\max_{\mathbb{R}}(F(x) - x) < 1 + \min_{\mathbb{R}}(F(x) - x).$$

En effet, pour $x < y < x+1$, on a $F(x) < F(y) < F(x+1) = F(x)+1$ donc $F(y) - y < F(x+1) - x = 1 + F(x) - x$. $\square$

Preuve du théorème: Soit $F \in D^0(\mathbb{T})$. Pour $n > 0$, posons $M_n := \max_{\mathbb{R}}(F^n(x) - x)$, $m_n := \min_{\mathbb{R}}(F^n(x) - x)$. Les suites (M_n) et $(-m_n)$ sont sous-additives et vérifient $m_n \leqslant M_n < m_n + 1$. Les suites (M_n/n) et (m_n/n) convergent donc dans $\mathbb{R}$ vers la même limite $\rho(F)$.
$\square$

Nombre de rotation et orbites périodiques

Proposition: Soit $F \in D^0(\mathbb{T})$. Soient p, q des entiers premiers entre eux avec $q > 0$.

Nombre de rotation et orbites périodiques

Proposition: Soit $F \in D^0(\mathbb{T})$. Soient p, q des entiers premiers entre eux avec $q > 0$.

- $\rho(F) = p/q \iff \exists x_0 \in \mathbb{R}, F^q(x_0) = x_0 + p$.

Nombre de rotation et orbites périodiques

Proposition: Soit $F \in D^0(\mathbb{T})$. Soient p, q des entiers premiers entre eux avec $q > 0$.

- $\rho(F) = p/q \iff \exists x_0 \in \mathbb{R}, F^q(x_0) = x_0 + p$.
- $\rho(F) < p/q \iff \forall x \in \mathbb{R}, F^q(x) < x + p$.

Nombre de rotation et orbites périodiques

Proposition: Soit $F \in D^0(\mathbb{T})$. Soient p, q des entiers premiers entre eux avec $q > 0$.

- $\rho(F) = p/q \iff \exists x_0 \in \mathbb{R}, F^q(x_0) = x_0 + p$.
- $\rho(F) < p/q \iff \forall x \in \mathbb{R}, F^q(x) < x + p$.
- $\rho(F) > p/q \iff \forall x \in \mathbb{R}, F^q(x) > x + p$.

Nombre de rotation et orbites périodiques

Proposition: Soit $F \in D^0(\mathbb{T})$. Soient p, q des entiers premiers entre eux avec $q > 0$.

- $\rho(F) = p/q \iff \exists x_0 \in \mathbb{R}, F^q(x_0) = x_0 + p$.
- $\rho(F) < p/q \iff \forall x \in \mathbb{R}, F^q(x) < x + p$.
- $\rho(F) > p/q \iff \forall x \in \mathbb{R}, F^q(x) > x + p$.

Preuve: Comme $\rho(F^q \circ R_{-p}) = q\rho(F) - p$, il suffit de traiter le cas $q = 1$, $p = 0$.

Nombre de rotation et orbites périodiques

Proposition: Soit $F \in D^0(\mathbb{T})$. Soient p, q des entiers premiers entre eux avec $q > 0$.

- $\rho(F) = p/q \iff \exists x_0 \in \mathbb{R}, F^q(x_0) = x_0 + p$.
- $\rho(F) < p/q \iff \forall x \in \mathbb{R}, F^q(x) < x + p$.
- $\rho(F) > p/q \iff \forall x \in \mathbb{R}, F^q(x) > x + p$.

Preuve: Comme $\rho(F^q \circ R_{-p}) = q\rho(F) - p$, il suffit de traiter le cas $q = 1,\ p = 0$.
Si F a un point fixe x_0, on a $F^n(x_0) = x_0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ donc $\rho(F) = 0$.

Nombre de rotation et orbites périodiques

Proposition: Soit $F \in D^0(\mathbb{T})$. Soient p, q des entiers premiers entre eux avec $q > 0$.

- $\rho(F) = p/q \iff \exists x_0 \in \mathbb{R}, F^q(x_0) = x_0 + p$.
- $\rho(F) < p/q \iff \forall x \in \mathbb{R}, F^q(x) < x + p$.
- $\rho(F) > p/q \iff \forall x \in \mathbb{R}, F^q(x) > x + p$.

Preuve: Comme $\rho(F^q \circ R_{-p}) = q\rho(F) - p$, il suffit de traiter le cas $q = 1,\ p = 0$.
Si F a un point fixe x_0, on a $F^n(x_0) = x_0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ donc $\rho(F) = 0$.
Si $F(x) > x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $F(x) \geqslant R_\varepsilon(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a donc $\rho(F) \geqslant \rho(R_\varepsilon) = \varepsilon > 0$.

Nombre de rotation et orbites périodiques

Proposition: Soit $F \in D^0(\mathbb{T})$. Soient p, q des entiers premiers entre eux avec $q > 0$.

- $\rho(F) = p/q \iff \exists x_0 \in \mathbb{R}, F^q(x_0) = x_0 + p$.
- $\rho(F) < p/q \iff \forall x \in \mathbb{R}, F^q(x) < x + p$.
- $\rho(F) > p/q \iff \forall x \in \mathbb{R}, F^q(x) > x + p$.

Preuve: Comme $\rho(F^q \circ R_{-p}) = q\rho(F) - p$, il suffit de traiter le cas $q = 1,\ p = 0$.
Si F a un point fixe x_0, on a $F^n(x_0) = x_0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ donc $\rho(F) = 0$.
Si $F(x) > x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $F(x) \geqslant R_\varepsilon(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a donc $\rho(F) \geqslant \rho(R_\varepsilon) = \varepsilon > 0$.
De même, si $F(x) < x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\rho(F) < 0$.

Nombre de rotation et orbites périodiques

Proposition: Soit $F \in D^0(\mathbb{T})$. Soient p, q des entiers premiers entre eux avec $q > 0$.

- $\rho(F) = p/q \iff \exists x_0 \in \mathbb{R}, F^q(x_0) = x_0 + p$.
- $\rho(F) < p/q \iff \forall x \in \mathbb{R}, F^q(x) < x + p$.
- $\rho(F) > p/q \iff \forall x \in \mathbb{R}, F^q(x) > x + p$.

Preuve: Comme $\rho(F^q \circ R_{-p}) = q\rho(F) - p$, il suffit de traiter le cas $q = 1,\ p = 0$.
Si F a un point fixe x_0, on a $F^n(x_0) = x_0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ donc $\rho(F) = 0$.
Si $F(x) > x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $F(x) \geqslant R_\varepsilon(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a donc $\rho(F) \geqslant \rho(R_\varepsilon) = \varepsilon > 0$.
De même, si $F(x) < x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\rho(F) < 0$.
Comme on a ainsi épuisé les différentes possibilités, les implications sont en fait des équivalences. $\square$

Corollaire: Soit $f \in \mathrm{Diff}^0_+(\mathbb{T})$. Le nombre de rotation de f est rationnel (i.e $\rho(f) \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$) si et seulement si f admet au moins une orbite périodique.

Corollaire: Soit $f \in \mathrm{Diff}^0_+(\mathbb{T})$. Le nombre de rotation de f est rationnel (i.e $\rho(f) \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$) si et seulement si f admet au moins une orbite périodique.
Dans ce cas, toutes les orbites périodiques de f ont la même période, qui est l'ordre du nombre de $\rho(f)$ dans $\mathbb{T}$.

Corollaire: Soit $f \in \mathrm{Diff}^0_+(\mathbb{T})$. Le nombre de rotation de f est rationnel (i.e $\rho(f) \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$) si et seulement si f admet au moins une orbite périodique.
Dans ce cas, toutes les orbites périodiques de f ont la même période, qui est l'ordre du nombre de $\rho(f)$ dans $\mathbb{T}$.
De plus, chaque orbite périodique de f, indexée par le temps, a la même disposition cyclique sur le cercle qu'une orbite de la rotation $R_{\rho(f)}$.

Semi-conjugaison aux rotations

Soit $F \in D^0(\mathbb{T})$. On suppose que le nombre de rotation de F est irrationnel.

Semi-conjugaison aux rotations

Soit $F \in D^0(\mathbb{T})$. On suppose que le nombre de rotation de F est irrationnel.

Proposition: Il existe une application continue, croissante (au sens large), surjective $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $H \circ R_1 = R_1 \circ H$ et $H \circ F = R_{\rho(F)} \circ H$.

Semi-conjugaison aux rotations

Soit $F \in D^0(\mathbb{T})$. On suppose que le nombre de rotation de F est irrationnel.

Proposition: Il existe une application continue, croissante (au sens large), surjective $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $H \circ R_1 = R_1 \circ H$ et $H \circ F = R_{\rho(F)} \circ H$.

Une application H' a les mêmes propriétés que H si st seulement si il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $H' = R_t \circ H$.

Semi-conjugaison aux rotations

Soit $F \in D^0(\mathbb{T})$. On suppose que le nombre de rotation de F est irrationnel.

Proposition: Il existe une application continue, croissante (au sens large), surjective $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $H \circ R_1 = R_1 \circ H$ et $H \circ F = R_{\rho(F)} \circ H$.

Une application H' a les mêmes propriétés que H si st seulement si il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $H' = R_t \circ H$.

Notons $f \in \mathrm{Diff}^0_+(\mathbb{T})$ l'homéomorphisme induit par F. L'application H induit une application continue de degré 1 $h : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ vérifiant $h \circ f = R_{\rho(f)} \circ h$.

Alternative de Denjoy

- Si la semi-conjugaison $h : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ est injective, h appartient à $\mathrm{Diff}^0_+(\mathbb{T})$ et conjugue f à $R_{\rho(f)}$.

Alternative de Denjoy

- Si la semi-conjugaison $h : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ est injective, h appartient à $\mathrm{Diff}^0_+(\mathbb{T})$ et conjugue f à $R_{\rho(f)}$. Comme $\rho(f)$ est irrationnel, $R_{\rho(f)}$ et donc aussi f sont des homéomorphismes minimaux.

Alternative de Denjoy

- Si la semi-conjugaison $h : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ est injective, h appartient à $\mathrm{Diff}^0_+(\mathbb{T})$ et conjugue f à $R_{\rho(f)}$. Comme $\rho(f)$ est irrationnel, $R_{\rho(f)}$ et donc aussi f sont des homéomorphismes minimaux.
- Sinon, il existe un point $y_0 \in \mathbb{T}$ tel que $h^{-1}(y_0)$ soit un intervalle non trivial J_0 de $\mathbb{T}$.

Alternative de Denjoy

- Si la semi-conjugaison $h : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ est injective, h appartient à $\mathrm{Diff}^0_+(\mathbb{T})$ et conjugue f à $R_{\rho(f)}$. Comme $\rho(f)$ est irrationnel, $R_{\rho(f)}$ et donc aussi f sont des homéomorphismes minimaux.
- Sinon, il existe un point $y_0 \in \mathbb{T}$ tel que $h^{-1}(y_0)$ soit un intervalle non trivial J_0 de $\mathbb{T}$.

  L'ensemble Z des points y de $\mathbb{T}$ ayant cette propriété est dénombrable et invariant par $R_{\rho(f)}$.

Alternative de Denjoy

- Si la semi-conjugaison $h : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ est injective, h appartient à $\mathrm{Diff}^0_+(\mathbb{T})$ et conjugue f à $R_{\rho(f)}$. Comme $\rho(f)$ est irrationnel, $R_{\rho(f)}$ et donc aussi f sont des homéomorphismes minimaux.
- Sinon, il existe un point $y_0 \in \mathbb{T}$ tel que $h^{-1}(y_0)$ soit un intervalle non trivial J_0 de $\mathbb{T}$.

  L'ensemble Z des points y de $\mathbb{T}$ ayant cette propriété est dénombrable et invariant par $R_{\rho(f)}$.

  Chaque intervalle $J := h^{-1}(y)$ est errant, i.e disjoint de $f^n(J)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$.

Alternative de Denjoy

- Si la semi-conjugaison $h : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ est injective, h appartient à $\mathrm{Diff}^0_+(\mathbb{T})$ et conjugue f à $R_{\rho(f)}$. Comme $\rho(f)$ est irrationnel, $R_{\rho(f)}$ et donc aussi f sont des homéomorphismes minimaux.
- Sinon, il existe un point $y_0 \in \mathbb{T}$ tel que $h^{-1}(y_0)$ soit un intervalle non trivial J_0 de $\mathbb{T}$.

  L'ensemble Z des points y de $\mathbb{T}$ ayant cette propriété est dénombrable et invariant par $R_{\rho(f)}$.

  Chaque intervalle $J := h^{-1}(y)$ est errant, i.e disjoint de $f^n(J)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$.

  L'union des intérieurs des intervalles errants est une partie ouverte et dense de $\mathbb{T}$.

Alternative de Denjoy

- Si la semi-conjugaison $h : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ est injective, h appartient à $\mathrm{Diff}^0_+(\mathbb{T})$ et conjugue f à $R_{\rho(f)}$. Comme $\rho(f)$ est irrationnel, $R_{\rho(f)}$ et donc aussi f sont des homéomorphismes minimaux.
- Sinon, il existe un point $y_0 \in \mathbb{T}$ tel que $h^{-1}(y_0)$ soit un intervalle non trivial J_0 de $\mathbb{T}$.

  L'ensemble Z des points y de $\mathbb{T}$ ayant cette propriété est dénombrable et invariant par $R_{\rho(f)}$.

  Chaque intervalle $J := h^{-1}(y)$ est errant, i.e disjoint de $f^n(J)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$.

  L'union des intérieurs des intervalles errants est une partie ouverte et dense de $\mathbb{T}$.

  Son complémentaire est un ensemble de Cantor, invariant par f, qui est l'ensemble d'accumulation de toute orbite de f.

Construction de la semi-conjugaison

Choisissons des points $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ et définissons

$$X := \{F^q \circ R_p(x_0),\ p, q, \in \mathbb{Z}\}, \quad Y := \{R^q_{\rho(F)} \circ R_p(y_0),\ p, q, \in \mathbb{Z}\}.$$

Construction de la semi-conjugaison

Choisissons des points $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ et définissons

$$X := \{F^q \circ R_p(x_0),\ p, q, \in \mathbb{Z}\}, \quad Y := \{R^q_{\rho(F)} \circ R_p(y_0),\ p, q, \in \mathbb{Z}\}.$$

D'après la proposition précédente, pour $p, q, p', q' \in \mathbb{Z}$, on a

$$F^q \circ R_p(x_0) > F^{q'} \circ R_{p'}(x_0) \iff R^q_{\rho(F)} \circ R_p(y_0) > R^{q'}_{\rho(F)} \circ R_{p'}(y_0).$$

Construction de la semi-conjugaison

Choisissons des points $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ et définissons

$$X := \{F^q \circ R_p(x_0),\ p, q, \in \mathbb{Z}\}, \quad Y := \{R^q_{\rho(F)} \circ R_p(y_0),\ p, q, \in \mathbb{Z}\}.$$

D'après la proposition précédente, pour $p, q, p', q' \in \mathbb{Z}$, on a

$$F^q \circ R_p(x_0) > F^{q'} \circ R_{p'}(x_0) \iff R^q_{\rho(F)} \circ R_p(y_0) > R^{q'}_{\rho(F)} \circ R_{p'}(y_0).$$

La bijection entre X et Y qui envoie $F^q \circ R_p(x_0)$ sur $R^q_{\rho(F)} \circ R_p(y_0)$ est donc croissante.

Construction de la semi-conjugaison

Choisissons des points $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ et définissons

$$X := \{F^q \circ R_p(x_0),\ p, q, \in \mathbb{Z}\}, \quad Y := \{R^q_{\rho(F)} \circ R_p(y_0),\ p, q, \in \mathbb{Z}\}.$$

D'après la proposition précédente, pour $p, q, p', q' \in \mathbb{Z}$, on a

$$F^q \circ R_p(x_0) > F^{q'} \circ R_{p'}(x_0) \iff R^q_{\rho(F)} \circ R_p(y_0) > R^{q'}_{\rho(F)} \circ R_{p'}(y_0).$$

La bijection entre X et Y qui envoie $F^q \circ R_p(x_0)$ sur $R^q_{\rho(F)} \circ R_p(y_0)$ est donc croissante.
Comme Y est dense dans $\mathbb{R}$, il existe une unique application croissante (au sens large) $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui prolonge cette bijection.

Construction de la semi-conjugaison

Choisissons des points $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ et définissons

$$X := \{F^q \circ R_p(x_0),\ p, q, \in \mathbb{Z}\}, \quad Y := \{R^q_{\rho(F)} \circ R_p(y_0),\ p, q, \in \mathbb{Z}\}.$$

D'après la proposition précédente, pour $p, q, p', q' \in \mathbb{Z}$, on a

$$F^q \circ R_p(x_0) > F^{q'} \circ R_{p'}(x_0) \iff R^q_{\rho(F)} \circ R_p(y_0) > R^{q'}_{\rho(F)} \circ R_{p'}(y_0).$$

La bijection entre X et Y qui envoie $F^q \circ R_p(x_0)$ sur $R^q_{\rho(F)} \circ R_p(y_0)$ est donc croissante.
Comme Y est dense dans $\mathbb{R}$, il existe une unique application croissante (au sens large) $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui prolonge cette bijection.
L'application H est automatiquement continue et surjective.

Construction de la semi-conjugaison

Choisissons des points $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ et définissons

$$X := \{F^q \circ R_p(x_0),\ p, q, \in \mathbb{Z}\}, \quad Y := \{R^q_{\rho(F)} \circ R_p(y_0),\ p, q, \in \mathbb{Z}\}.$$

D'après la proposition précédente, pour $p, q, p', q' \in \mathbb{Z}$, on a

$$F^q \circ R_p(x_0) > F^{q'} \circ R_{p'}(x_0) \iff R^q_{\rho(F)} \circ R_p(y_0) > R^{q'}_{\rho(F)} \circ R_{p'}(y_0).$$

La bijection entre X et Y qui envoie $F^q \circ R_p(x_0)$ sur $R^q_{\rho(F)} \circ R_p(y_0)$ est donc croissante.
Comme Y est dense dans $\mathbb{R}$, il existe une unique application croissante (au sens large) $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui prolonge cette bijection.
L'application H est automatiquement continue et surjective.
Les relations $H \circ R_1 = R_1 \circ H$ et $H \circ F = R_{\rho(F)} \circ H$ sont valides par construction sur X.

Construction de la semi-conjugaison

Choisissons des points $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ et définissons

$$X := \{F^q \circ R_p(x_0),\ p, q, \in \mathbb{Z}\}, \quad Y := \{R^q_{\rho(F)} \circ R_p(y_0),\ p, q, \in \mathbb{Z}\}.$$

D'après la proposition précédente, pour $p, q, p', q' \in \mathbb{Z}$, on a

$$F^q \circ R_p(x_0) > F^{q'} \circ R_{p'}(x_0) \iff R^q_{\rho(F)} \circ R_p(y_0) > R^{q'}_{\rho(F)} \circ R_{p'}(y_0).$$

La bijection entre X et Y qui envoie $F^q \circ R_p(x_0)$ sur $R^q_{\rho(F)} \circ R_p(y_0)$ est donc croissante.
Comme Y est dense dans $\mathbb{R}$, il existe une unique application croissante (au sens large) $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui prolonge cette bijection.
L'application H est automatiquement continue et surjective.
Les relations $H \circ R_1 = R_1 \circ H$ et $H \circ F = R_{\rho(F)} \circ H$ sont valides par construction sur X. Elles le sont encore sur $\mathbb{R}$ car Y est dense. $\square$

Unique ergodicité

Proposition: Un homéomorphisme $f \in \mathrm{Diff}^0_+(\mathbb{T})$ sans orbite périodique est uniquement ergodique.

Unique ergodicité

Proposition: Un homéomorphisme $f \in \mathrm{Diff}^0_+(\mathbb{T})$ sans orbite périodique est uniquement ergodique.

Preuve: Comme $\rho(f)$ est irrationnel, la mesure de Lebesgue est l'unique mesure de probabilité sur $\mathbb{T}$ invariante par $R_{\rho(f)}$.

Proposition: Un homéomorphisme $f \in \mathrm{Diff}^0_+(\mathbb{T})$ sans orbite périodique est uniquement ergodique.

Preuve: Comme $\rho(f)$ est irrationnel, la mesure de Lebesgue est l'unique mesure de probabilité sur $\mathbb{T}$ invariante par $R_{\rho(f)}$.

Soit h la semi-conjugaison entre f et $R_{\rho(f)}$. L'image $h_*(\mu)$ d'une mesure de probabilité invariante par f est invariante par $R_{\rho(f)}$, donc égale à la mesure de Lebesgue.

Unique ergodicité

Proposition: Un homéomorphisme $f \in \mathrm{Diff}^0_+(\mathbb{T})$ sans orbite périodique est uniquement ergodique.

Preuve: Comme $\rho(f)$ est irrationnel, la mesure de Lebesgue est l'unique mesure de probabilité sur $\mathbb{T}$ invariante par $R_{\rho(f)}$.

Soit h la semi-conjugaison entre f et $R_{\rho(f)}$. L'image $h_*(\mu)$ d'une mesure de probabilité invariante par f est invariante par $R_{\rho(f)}$, donc égale à la mesure de Lebesgue.

Comme l'ensemble Z des points où h^{-1} n'est pas uniquement défini est au plus dénombrable, donc de mesure de Lebesgue nulle, il existe exactement une mesure de probabilité sur $\mathbb{T}$ dont l'image par h soit la mesure de Lebesgue.

Le théorème de Denjoy

Théorème: (Denjoy, 1932) Supposons que $f \in \mathrm{Diff}^0_+(\mathbb{T})$ soit un C^1-difféomorphisme par morceaux et que la dérivée soit de variation bornée.

Le théorème de Denjoy

Théorème: (Denjoy, 1932) Supposons que $f \in \mathrm{Diff}^0_+(\mathbb{T})$ soit un C^1-difféomorphisme par morceaux et que la dérivée soit de variation bornée. Si le nombre de rotation de f est irrationnel, alors f est minimal et donc topologiquement conjugué à $R_{\rho(f)}$.

Le théorème de Denjoy

Théorème: (Denjoy, 1932) Supposons que $f \in \mathrm{Diff}^0_+(\mathbb{T})$ soit un C^1-difféomorphisme par morceaux et que la dérivée soit de variation bornée. Si le nombre de rotation de f est irrationnel, alors f est minimal et donc topologiquement conjugué à $R_{\rho(f)}$.

Corollaire 1: Un difféomorphisme $f \in \mathrm{Diff}^2_+(\mathbb{T})$ sans orbite périodique est minimal.

Le théorème de Denjoy

Théorème: (Denjoy, 1932) Supposons que $f \in \mathrm{Diff}^0_+(\mathbb{T})$ soit un C^1-difféomorphisme par morceaux et que la dérivée soit de variation bornée. Si le nombre de rotation de f est irrationnel, alors f est minimal et donc topologiquement conjugué à $R_{\rho(f)}$.

Corollaire 1: Un difféomorphisme $f \in \mathrm{Diff}^2_+(\mathbb{T})$ sans orbite périodique est minimal.

Corollaire 2: Un homéomorphisme $f \in \mathrm{Diff}^0_+(\mathbb{T})$ affine par morceaux sans orbite périodique est minimal.

Inégalité de Denjoy

Soit $(p_n/q_n)_{n \geqslant 0}$ la suite des réduites de $\rho(f)$.

Inégalité de Denjoy

Soit $(p_n/q_n)_{n \geqslant 0}$ la suite des réduites de $\rho(f)$.

Proposition: Sous les hypothèses du théorème, on a , pour tous $n \geqslant 0$, $x \in \mathbb{T}$

$$|\log Df^{q_n}(x)| \leqslant V := \mathrm{Var}_{\mathbb{T}}(\log Df).$$

Soit $(p_n/q_n)_{n\geqslant 0}$ la suite des réduites de $\rho(f)$.

Proposition: Sous les hypothèses du théorème, on a , pour tous $n \geqslant 0$, $x \in \mathbb{T}$

$$|\log Df^{q_n}(x)| \leqslant V := \mathrm{Var}_{\mathbb{T}}(\log Df).$$

Preuve du théorème: Soit $J \subset \mathbb{T}$ un intervalle non trivial. Pour tout $n \geqslant 0$, on a

$$|f^{-q_n}(J)| \geqslant \exp(-V)|J|.$$

Inégalité de Denjoy

Soit $(p_n/q_n)_{n\geqslant 0}$ la suite des réduites de $\rho(f)$.

Proposition: Sous les hypothèses du théorème, on a , pour tous $n \geqslant 0$, $x \in \mathbb{T}$

$$|\log Df^{q_n}(x)| \leqslant V := \mathrm{Var}_{\mathbb{T}}(\log Df).$$

Preuve du théorème: Soit $J \subset \mathbb{T}$ un intervalle non trivial. Pour tout $n \geqslant 0$, on a

$$|f^{-q_n}(J)| \geqslant \exp(-V)|J|.$$

Les intervalles $f^{-q_n}(J)$ ne peuvent donc être deux à deux disjoints.

Soit $(p_n/q_n)_{n\geqslant 0}$ la suite des réduites de $\rho(f)$.

Proposition: Sous les hypothèses du théorème, on a , pour tous $n \geqslant 0$, $x \in \mathbb{T}$

$$|\log Df^{q_n}(x)| \leqslant V := \mathrm{Var}_{\mathbb{T}}(\log Df).$$

Preuve du théorème: Soit $J \subset \mathbb{T}$ un intervalle non trivial. Pour tout $n \geqslant 0$, on a

$$|f^{-q_n}(J)| \geqslant \exp(-V)|J|.$$

Les intervalles $f^{-q_n}(J)$ ne peuvent donc être deux à deux disjoints. Comme f ne possède pas d'intervalle errant, f doit être minimal.

Inégalité de Koksma

Proposition: Soient $\alpha \in \mathbb{T}$, p/q une réduite de α (avec $q \geqslant 1, p \wedge q = 1$).

Inégalité de Koksma

Proposition: Soient $\alpha \in \mathbb{T}$, p/q une réduite de α (avec $q \geqslant 1, p \wedge q = 1$). Soit $\varphi : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction de variation bornée et de moyenne nulle.

Inégalité de Koksma

Proposition: Soient $\alpha \in \mathbb{T}$, p/q une réduite de α (avec $q \geqslant 1, p \wedge q = 1$). Soit $\varphi : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction de variation bornée et de moyenne nulle. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$|\sum_{j=0}^{q-1} \varphi(x + j\alpha)| \leqslant \mathrm{Var}_{\mathbb{T}} \varphi.$$

Inégalité de Koksma

Proposition: Soient $\alpha \in \mathbb{T}$, p/q une réduite de α (avec $q \geqslant 1, p \wedge q = 1$). Soit $\varphi : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction de variation bornée et de moyenne nulle. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$|\sum_{j=0}^{q-1} \varphi(x + j\alpha)| \leqslant \mathrm{Var}_{\mathbb{T}}\varphi.$$

Preuve: Supposons par exemple que $\alpha > p/q$.

Inégalité de Koksma

Proposition: Soient $\alpha \in \mathbb{T}$, p/q une réduite de α (avec $q \geqslant 1, p \wedge q = 1$). Soit $\varphi : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction de variation bornée et de moyenne nulle. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$|\sum_{j=0}^{q-1} \varphi(x + j\alpha)| \leqslant \mathrm{Var}_{\mathbb{T}}\varphi.$$

Preuve: Supposons par exemple que $\alpha > p/q$. Pour $0 \leqslant j < q$, notons I_j l'intervalle $[x + jp/q, x + jp/q + 1/q)$.

Inégalité de Koksma

Proposition: Soient $\alpha \in \mathbb{T}$, p/q une réduite de α (avec $q \geqslant 1, p \wedge q = 1$). Soit $\varphi : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction de variation bornée et de moyenne nulle. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$|\sum_{j=0}^{q-1} \varphi(x + j\alpha)| \leqslant \mathrm{Var}_{\mathbb{T}} \varphi.$$

Preuve: Supposons par exemple que $\alpha > p/q$. Pour $0 \leqslant j < q$, notons I_j l'intervalle $[x + jp/q, x + jp/q + 1/q)$. Comme on a $0 < \alpha - p/q < 1/q^2$, l'intervalle I_j contient $x + j\alpha$ et on a donc

$$|\varphi(x + j\alpha) - \frac{1}{|I_j|} \int_{I_j} \varphi(t)\, dt| \leqslant \mathrm{Var}_{I_j} \varphi.$$

Inégalité de Koksma

Proposition: Soient $\alpha \in \mathbb{T}$, p/q une réduite de α (avec $q \geqslant 1, p \wedge q = 1$). Soit $\varphi : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction de variation bornée et de moyenne nulle. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$|\sum_{j=0}^{q-1} \varphi(x + j\alpha)| \leqslant \mathrm{Var}_{\mathbb{T}} \varphi.$$

Preuve: Supposons par exemple que $\alpha > p/q$. Pour $0 \leqslant j < q$, notons I_j l'intervalle $[x + jp/q, x + jp/q + 1/q)$. Comme on a $0 < \alpha - p/q < 1/q^2$, l'intervalle I_j contient $x + j\alpha$ et on a donc

$$|\varphi(x + j\alpha) - \frac{1}{|I_j|} \int_{I_j} \varphi(t)\, dt| \leqslant \mathrm{Var}_{I_j} \varphi.$$

Comme les intervalles I_j forment une partition de $\mathbb{T}$ en intervalles de longueur $1/q$ et φ est de moyenne nulle, on obtient l'inégalité de Koksma en sommant sur j. $\square$.

Preuve de l'inégalité de Denjoy

Soit $f \in \mathrm{Diff}^0_+(\mathbb{T})$ un C^1-difféomorphisme par morceaux sans orbite périodique.

Preuve de l'inégalité de Denjoy

Soit $f \in \mathrm{Diff}^0_+(\mathbb{T})$ un C^1-difféomorphisme par morceaux sans orbite périodique. Notons μ l'unique mesure de probabilité invariante par f.

Preuve de l'inégalité de Denjoy

Soit $f \in \mathrm{Diff}^0_+(\mathbb{T})$ un C^1-difféomorphisme par morceaux sans orbite périodique. Notons μ l'unique mesure de probabilité invariante par f.

Lemme: On a $\int_{\mathbb{T}} \log Df \, d\mu = 0$.

Preuve de l'inégalité de Denjoy

Soit $f \in \mathrm{Diff}^0_+(\mathbb{T})$ un C^1-difféomorphisme par morceaux sans orbite périodique. Notons μ l'unique mesure de probabilité invariante par f.

Lemme: On a $\int_{\mathbb{T}} \log Df \, d\mu = 0$.

En effet, si on avait par exemple $\int_{\mathbb{T}} \log Df \, d\mu > 0$, on pourrait trouver une fonction $\psi \in C^0(\mathbb{T})$ de moyenne strictement positive vérifiant $\psi \leqslant \log Df$.

Preuve de l'inégalité de Denjoy

Soit $f \in \mathrm{Diff}^0_+(\mathbb{T})$ un C^1-difféomorphisme par morceaux sans orbite périodique. Notons μ l'unique mesure de probabilité invariante par f.

Lemme: On a $\int_{\mathbb{T}} \log Df \, d\mu = 0$.

En effet, si on avait par exemple $\int_{\mathbb{T}} \log Df \, d\mu > 0$, on pourrait trouver une fonction $\psi \in C^0(\mathbb{T})$ de moyenne strictement positive vérifiant $\psi \leqslant \log Df$. L' unique ergodicité implique alors que

$$\liminf_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log Df^n \geqslant \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \psi \circ f^j > 0.$$

Preuve de l'inégalité de Denjoy

Soit $f \in \mathrm{Diff}^0_+(\mathbb{T})$ un C^1-difféomorphisme par morceaux sans orbite périodique. Notons μ l'unique mesure de probabilité invariante par f.

Lemme: On a $\int_{\mathbb{T}} \log Df \, d\mu = 0$.

En effet, si on avait par exemple $\int_{\mathbb{T}} \log Df \, d\mu > 0$, on pourrait trouver une fonction $\psi \in C^0(\mathbb{T})$ de moyenne strictement positive vérifiant $\psi \leqslant \log Df$. L' unique ergodicité implique alors que

$$\liminf_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log Df^n \geqslant \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \psi \circ f^j > 0.$$

Ceci n'est pas possible puisque $\int_{\mathbb{T}} Df^n = 1$ pour tout $n \geqslant 0$. On montre de même que $\int_{\mathbb{T}} \log Df \, d\mu < 0$ est impossible. $\square$

Preuve de l'inégalité de Denjoy

Soit $f \in \mathrm{Diff}^0_+(\mathbb{T})$ un C^1-difféomorphisme par morceaux sans orbite périodique. Notons μ l'unique mesure de probabilité invariante par f.

Lemme: On a $\int_{\mathbb{T}} \log Df \, d\mu = 0$.

En effet, si on avait par exemple $\int_{\mathbb{T}} \log Df \, d\mu > 0$, on pourrait trouver une fonction $\psi \in C^0(\mathbb{T})$ de moyenne strictement positive vérifiant $\psi \leqslant \log Df$. L' unique ergodicité implique alors que

$$\liminf_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log Df^n \geqslant \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \psi \circ f^j > 0.$$

Ceci n'est pas possible puisque $\int_{\mathbb{T}} Df^n = 1$ pour tout $n \geqslant 0$. On montre de même que $\int_{\mathbb{T}} \log Df \, d\mu < 0$ est impossible. $\square$

Preuve de l'inégalité de Denjoy:

Preuve de l'inégalité de Denjoy

Soit $f \in \mathrm{Diff}^0_+(\mathbb{T})$ un C^1-difféomorphisme par morceaux sans orbite périodique. Notons μ l'unique mesure de probabilité invariante par f.

Lemme: On a $\int_{\mathbb{T}} \log Df \, d\mu = 0$.

En effet, si on avait par exemple $\int_{\mathbb{T}} \log Df \, d\mu > 0$, on pourrait trouver une fonction $\psi \in C^0(\mathbb{T})$ de moyenne strictement positive vérifiant $\psi \leqslant \log Df$. L' unique ergodicité implique alors que

$$\liminf_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log Df^n \geqslant \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \psi \circ f^j > 0.$$

Ceci n'est pas possible puisque $\int_{\mathbb{T}} Df^n = 1$ pour tout $n \geqslant 0$. On montre de même que $\int_{\mathbb{T}} \log Df \, d\mu < 0$ est impossible. $\square$

Preuve de l'inégalité de Denjoy: On suppose que Df, et donc aussi $\log Df$, est une fonction de variation bornée.

Preuve de l'inégalité de Denjoy

Soit $f \in \mathrm{Diff}^0_+(\mathbb{T})$ un C^1-difféomorphisme par morceaux sans orbite périodique. Notons μ l'unique mesure de probabilité invariante par f.

Lemme: On a $\int_{\mathbb{T}} \log Df \, d\mu = 0$.

En effet, si on avait par exemple $\int_{\mathbb{T}} \log Df \, d\mu > 0$, on pourrait trouver une fonction $\psi \in C^0(\mathbb{T})$ de moyenne strictement positive vérifiant $\psi \leqslant \log Df$. L' unique ergodicité implique alors que

$$\liminf_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log Df^n \geqslant \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \psi \circ f^j > 0.$$

Ceci n'est pas possible puisque $\int_{\mathbb{T}} Df^n = 1$ pour tout $n \geqslant 0$. On montre de même que $\int_{\mathbb{T}} \log Df \, d\mu < 0$ est impossible. $\square$

Preuve de l'inégalité de Denjoy: On suppose que Df, et donc aussi $\log Df$, est une fonction de variation bornée. La preuve de l'inégalité de Denjoy, en prenant en compte le lemme, est alors en tous points similaire à celle de l'inégalité de Koksma. $\square$

Contre-exemples de Denjoy

Proposition: Pour chaque nombre de rotation irrationnel α, il existe un difféomorphisme $f \in \cap_{r<2}\mathrm{Diff}^r_+(\mathbb{T})$ tel que $\rho(f) = \alpha$ et f ne soit pas minimal.

Contre-exemples de Denjoy

Proposition: Pour chaque nombre de rotation irrationnel α, il existe un difféomorphisme $f \in \cap_{r<2} \mathrm{Diff}^r_+(\mathbb{T})$ tel que $\rho(f) = \alpha$ et f ne soit pas minimal.

Indication de construction: On construit un relèvement F de f.

Proposition: Pour chaque nombre de rotation irrationnel α, il existe un difféomorphisme $f \in \cap_{r<2}\mathrm{Diff}^r_+(\mathbb{T})$ tel que $\rho(f) = \alpha$ et f ne soit pas minimal.

Indication de construction: On construit un relèvement F de f. Pour $q \in \mathbb{Z}$, posons

$$\ell_q := c(1 + |q|)^{-1} \log^{-2}(2 + |q|),$$

où la constante c est choisie de façon à avoir $\sum_{q\in\mathbb{Z}} \ell_q = 1$.

Contre-exemples de Denjoy

Proposition: Pour chaque nombre de rotation irrationnel α, il existe un difféomorphisme $f \in \cap_{r<2} \mathrm{Diff}^r_+(\mathbb{T})$ tel que $\rho(f) = \alpha$ et f ne soit pas minimal.

Indication de construction: On construit un relèvement F de f. Pour $q \in \mathbb{Z}$, posons

$$\ell_q := c(1 + |q|)^{-1} \log^{-2}(2 + |q|),$$

où la constante c est choisie de façon à avoir $\sum_{q \in \mathbb{Z}} \ell_q = 1$.
Il existe une unique application croissante $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $H(1/2 + m) = 1/2 + m$ pour tout $m \in \mathbb{Z}$ et telle que $H^{-1}(q\alpha + p)$ soit, pour tous $p, q \in \mathbb{Z}$, un intervalle $J(q, p)$ de longueur ℓ_q.

Contre-exemples de Denjoy

Proposition: Pour chaque nombre de rotation irrationnel α, il existe un difféomorphisme $f \in \cap_{r<2} \mathrm{Diff}^r_+(\mathbb{T})$ tel que $\rho(f) = \alpha$ et f ne soit pas minimal.

Indication de construction: On construit un relèvement F de f. Pour $q \in \mathbb{Z}$, posons

$$\ell_q := c(1 + |q|)^{-1} \log^{-2}(2 + |q|),$$

où la constante c est choisie de façon à avoir $\sum_{q \in \mathbb{Z}} \ell_q = 1$.
Il existe une unique application croissante $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $H(1/2 + m) = 1/2 + m$ pour tout $m \in \mathbb{Z}$ et telle que $H^{-1}(q\alpha + p)$ soit, pour tous $p, q \in \mathbb{Z}$, un intervalle $J(q, p)$ de longueur ℓ_q. Cette application vérifie $H \circ R_1 = R_1 \circ H$.

Contre-exemples de Denjoy

Proposition: Pour chaque nombre de rotation irrationnel α, il existe un difféomorphisme $f \in \cap_{r<2} \mathrm{Diff}^r_+(\mathbb{T})$ tel que $\rho(f) = \alpha$ et f ne soit pas minimal.

Indication de construction: On construit un relèvement F de f. Pour $q \in \mathbb{Z}$, posons

$$\ell_q := c(1+|q|)^{-1} \log^{-2}(2+|q|),$$

où la constante c est choisie de façon à avoir $\sum_{q\in\mathbb{Z}} \ell_q = 1$.
Il existe une unique application croissante $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $H(1/2+m) = 1/2+m$ pour tout $m \in \mathbb{Z}$ et telle que $H^{-1}(q\alpha+p)$ soit, pour tous $p, q \in \mathbb{Z}$, un intervalle $J(q,p)$ de longueur ℓ_q. Cette application vérifie $H \circ R_1 = R_1 \circ H$.
On construit ensuite un homéomorphisme $F \in D^0(\mathbb{T})$ en imposant les relations $F \circ R_1 = R_1 \circ F$, $H \circ F = R_\alpha \circ H$ et en choisissant soigneusement les restrictions : $F : J(q,0) \to J(q+1,0)$.

Conjugaison différentiable

Conjugaison différentiable

Théorème: (Arnold 1961, Herman 1979, Y. 1984)
Si le nombre de rotation α d'un difféomorphisme *f* $\in \mathrm{Diff}^{\infty}_{+}(\mathbb{T})$ appartient à *DC*, alors la conjugaison *h* entre *f* et R_α appartient à $\mathrm{Diff}^{\infty}_{+}(\mathbb{T})$.

Conjugaison différentiable

Théorème: (Arnold 1961, Herman 1979, Y. 1984)
Si le nombre de rotation α d'un difféomorphisme *f* $\in \mathrm{Diff}_+^\infty(\mathbb{T})$ appartient à *DC*, alors la conjugaison *h* entre *f* et R_α appartient à $\mathrm{Diff}_+^\infty(\mathbb{T})$.

Un résultat plus précis est le suivant.

Théorème: (Arnold 1961, Herman 1979, Y. 1984)
Si le nombre de rotation α d'un difféomorphisme $f \in \mathrm{Diff}^{\infty}_{+}(\mathbb{T})$ appartient à DC, alors la conjugaison h entre f et R_α appartient à $\mathrm{Diff}^{\infty}_{+}(\mathbb{T})$.

Un résultat plus précis est le suivant.

Théorème: (Y. 1984, Khanin-Sinaï 1987, Katznelson-Ornstein 1989)
Soient $\tau \geqslant 0$, $s > 1$, $r > s + 1 + \tau$. Si le nombre de rotation α d'un difféomorphisme $f \in \mathrm{Diff}^{r}_{+}(\mathbb{T})$ appartient à $DC(\tau)$, alors la conjugaison h entre f et R_α appartient à $\mathrm{Diff}^{s}_{+}(\mathbb{T})$.

Le cas analytique local

Théorème: (Arnold 1961, Rüssmann 1979, Y. 2002)
Soient α un nombre de Brjuno, $r > 0$.

Le cas analytique local

Théorème: (Arnold 1961, Rüssmann 1979, Y. 2002)
Soient α un nombre de Brjuno, $r > 0$. Il existe $\varepsilon = \varepsilon(\alpha, r) > 0$ tel que, si le difféomorphisme $f \in \mathrm{Diff}^{\omega}_{+}(\mathbb{T})$ a pour nombre de rotation α,

Le cas analytique local

Théorème: (Arnold 1961, Rüssmann 1979, Y. 2002)
Soient α un nombre de Brjuno, $r > 0$. Il existe $\varepsilon = \varepsilon(\alpha, r) > 0$ tel que, si le difféomorphisme $f \in \mathrm{Diff}^{\omega}_{+}(\mathbb{T})$ a pour nombre de rotation α, est holomorphe dans la bande $\Delta_r := \{z \in \mathbb{C}/\mathbb{Z}, |\Im(z)| < r\}$

Le cas analytique local

Théorème: (Arnold 1961, Rüssmann 1979, Y. 2002)
Soient α un nombre de Brjuno, $r > 0$. Il existe $\varepsilon = \varepsilon(\alpha, r) > 0$ tel que, si le difféomorphisme $f \in \mathrm{Diff}^{\omega}_{+}(\mathbb{T})$ a pour nombre de rotation α, est holomorphe dans la bande $\Delta_r := \{z \in \mathbb{C}/\mathbb{Z}, |\Im(z)| < r\}$ et y vérifie

$$|f(z) - z - \alpha| < \varepsilon,$$

Le cas analytique local

Théorème: (Arnold 1961, Rüssmann 1979, Y. 2002)
Soient α un nombre de Brjuno, $r > 0$. Il existe $\varepsilon = \varepsilon(\alpha, r) > 0$ tel que, si le difféomorphisme $f \in \mathrm{Diff}^{\omega}_{+}(\mathbb{T})$ a pour nombre de rotation α, est holomorphe dans la bande $\Delta_r := \{z \in \mathbb{C}/\mathbb{Z}, |\Im(z)| < r\}$ et y vérifie

$$|f(z) - z - \alpha| < \varepsilon,$$

alors la conjugaison h entre f et R_α appartient à $\mathrm{Diff}^{\omega}_{+}(\mathbb{T})$.

Le cas analytique local

Théorème: (Arnold 1961, Rüssmann 1979, Y. 2002)
Soient α un nombre de Brjuno, $r > 0$. Il existe $\varepsilon = \varepsilon(\alpha, r) > 0$ tel que, si le difféomorphisme $f \in \mathrm{Diff}^{\omega}_{+}(\mathbb{T})$ a pour nombre de rotation α, est holomorphe dans la bande $\Delta_r := \{z \in \mathbb{C}/\mathbb{Z}, |\Im(z)| < r\}$ et y vérifie

$$|f(z) - z - \alpha| < \varepsilon,$$

alors la conjugaison h entre f et R_α appartient à $\mathrm{Diff}^{\omega}_{+}(\mathbb{T})$.

On verra plus loin un énoncé (sous une condition arithmétique plus restrictive) qui ne requiert pas la proximité de f et R_α.

Un exemple de méthode perturbative (suivant M. Herman)

On va expliquer la démonstration du résultat suivant.

Un exemple de méthode perturbative (suivant M. Herman)

On va expliquer la démonstration du résultat suivant.

Théorème: Soient $\tau \in [0,1)$, $\alpha \in DC(\tau)$, r un entier au moins égal à 3.

Un exemple de méthode perturbative (suivant M. Herman)

On va expliquer la démonstration du résultat suivant.

Théorème: Soient $\tau \in [0,1)$, $\alpha \in DC(\tau)$, r un entier au moins égal à 3. Il existe un voisinage V de R_α dans $D^{r+3}(\mathbb{T})$ tel que tout $F \in V$ s'écrive de façon unique sous la forme

$$F = R_t \circ H \circ R_\alpha \circ H^{-1},$$

avec $t \in \mathbb{R}$ et $H \in D^r(\mathbb{T})$ satisfaisant $\int_{\mathbb{T}}(H(x) - x)\,dx = 0$.

Un exemple de méthode perturbative (suivant M. Herman)

On va expliquer la démonstration du résultat suivant.

Théorème: Soient $\tau \in [0,1)$, $\alpha \in DC(\tau)$, r un entier au moins égal à 3. Il existe un voisinage V de R_α dans $D^{r+3}(\mathbb{T})$ tel que tout $F \in V$ s'écrive de façon unique sous la forme

$$F = R_t \circ H \circ R_\alpha \circ H^{-1},$$

avec $t \in \mathbb{R}$ et $H \in D^r(\mathbb{T})$ satisfaisant $\int_{\mathbb{T}}(H(x) - x)\, dx = 0$. De plus, l'application $F \mapsto (t, H)$ de V dans $\mathbb{R} \times D^r(\mathbb{T})$ est de classe C^1.

Un exemple de méthode perturbative (suivant M. Herman)

On va expliquer la démonstration du résultat suivant.

Théorème: Soient $\tau \in [0,1)$, $\alpha \in DC(\tau)$, r un entier au moins égal à 3. Il existe un voisinage V de R_α dans $D^{r+3}(\mathbb{T})$ tel que tout $F \in V$ s'écrive de façon unique sous la forme

$$F = R_t \circ H \circ R_\alpha \circ H^{-1},$$

avec $t \in \mathbb{R}$ et $H \in D^r(\mathbb{T})$ satisfaisant $\int_{\mathbb{T}}(H(x) - x)\, dx = 0$.
De plus, l'application $F \mapsto (t, H)$ de V dans $\mathbb{R} \times D^r(\mathbb{T})$ est de classe C^1.

Remarque: On a $\rho(F) = \alpha$ si et seulement si $t = 0$.

Un exemple de méthode perturbative (suivant M. Herman)

On va expliquer la démonstration du résultat suivant.

Théorème: Soient $\tau \in [0, 1)$, $\alpha \in DC(\tau)$, r un entier au moins égal à 3. Il existe un voisinage V de R_α dans $D^{r+3}(\mathbb{T})$ tel que tout $F \in V$ s'écrive de façon unique sous la forme

$$F = R_t \circ H \circ R_\alpha \circ H^{-1},$$

avec $t \in \mathbb{R}$ et $H \in D^r(\mathbb{T})$ satisfaisant $\int_{\mathbb{T}} (H(x) - x)\, dx = 0$. De plus, l'application $F \mapsto (t, H)$ de V dans $\mathbb{R} \times D^r(\mathbb{T})$ est de classe C^1.

Remarque: On a $\rho(F) = \alpha$ si et seulement si $t = 0$. Plus généralement, si $\alpha \in \mathbb{R}$ est irrationnel et $F \in D^0(\mathbb{T})$, il existe un et un seul $t \in \mathbb{R}$ tel que $\rho(R_t \circ F) = \alpha$.

La dérivée Schwarzienne

La dérivée Schwarzienne

Soit f un difféomorphisme préservant l'orientation.

La dérivée Schwarzienne

Soit f un difféomorphisme préservant l'orientation.

La fonction $Nf := D \log Df$ mesure comment f déforme les **rapports**.

La dérivée Schwarzienne

Soit f un difféomorphisme préservant l'orientation.

La fonction $Nf := D \log Df$ mesure comment f déforme les **rapports.** Elle s'annule identiquement exactement lorsque f est **affine.**

La dérivée Schwarzienne

Soit f un difféomorphisme préservant l'orientation.

La fonction $Nf := D \log Df$ mesure comment f déforme les **rapports.** Elle s'annule identiquement exactement lorsque f est **affine.** La formule de composition est

$$N(f \circ g) = Nf \circ g \, Dg + Ng.$$

La dérivée Schwarzienne

Soit f un difféomorphisme préservant l'orientation.

La fonction $Nf := D \log Df$ mesure comment f déforme les **rapports.** Elle s'annule identiquement exactement lorsque f est **affine.** La formule de composition est

$$N(f \circ g) = Nf \circ g \; Dg + Ng.$$

La dérivée Schwarzienne

$$Sf := D^2 \log Df - \frac{1}{2}(D \log Df)^2 = DNf - \frac{1}{2}(Nf)^2$$

La dérivée Schwarzienne

Soit f un difféomorphisme préservant l'orientation.

La fonction $Nf := D \log Df$ mesure comment f déforme les **rapports.** Elle s'annule identiquement exactement lorsque f est **affine.** La formule de composition est

$$N(f \circ g) = Nf \circ g \, Dg + Ng.$$

La dérivée Schwarzienne

$$Sf := D^2 \log Df - \frac{1}{2}(D \log Df)^2 = DNf - \frac{1}{2}(Nf)^2$$

mesure comment f déforme les **birapports.**

La dérivée Schwarzienne

Soit f un difféomorphisme préservant l'orientation.

La fonction $Nf := D \log Df$ mesure comment f déforme les **rapports.** Elle s'annule identiquement exactement lorsque f est **affine.** La formule de composition est

$$N(f \circ g) = Nf \circ g \; Dg + Ng.$$

La dérivée Schwarzienne

$$Sf := D^2 \log Df - \frac{1}{2}(D \log Df)^2 = DNf - \frac{1}{2}(Nf)^2$$

mesure comment f déforme les **birapports.** Elle s'annule identiquement exactement lorsque f est une **homographie.**

La dérivée Schwarzienne

Soit f un difféomorphisme préservant l'orientation.

La fonction $Nf := D \log Df$ mesure comment f déforme les **rapports.** Elle s'annule identiquement exactement lorsque f est **affine.** La formule de composition est

$$N(f \circ g) = Nf \circ g \; Dg + Ng.$$

La dérivée Schwarzienne

$$Sf := D^2 \log Df - \frac{1}{2}(D \log Df)^2 = DNf - \frac{1}{2}(Nf)^2$$

mesure comment f déforme les **birapports.** Elle s'annule identiquement exactement lorsque f est une **homographie.** La formule de composition est

$$S(f \circ g) = Sf \circ g \; (Dg)^2 + Sg.$$

On note

- $C^r_0(\mathbb{T})$ l'espace de Banach des fonctions sur le cercle de classe C^r et de moyenne nulle.

On note

- $C_0^r(\mathbb{T})$ l'espace de Banach des fonctions sur le cercle de classe C^r et de moyenne nulle.
- $D_0^r(\mathbb{T})$ l'ensemble des difféomorphismes $H \in D^r(\mathbb{T})$ tels que $\int_{\mathbb{T}}(H(x) - x)\, dx = 0$.

On note

- $C_0^r(\mathbb{T})$ l'espace de Banach des fonctions sur le cercle de classe C^r et de moyenne nulle.
- $D_0^r(\mathbb{T})$ l'ensemble des difféomorphismes $H \in D^r(\mathbb{T})$ tels que $\int_{\mathbb{T}}(H(x) - x)\, dx = 0$.

Observons que la relation $F = R_t \circ H \circ R_\alpha \circ H^{-1}$ implique

On note

- $C_0^r(\mathbb{T})$ l'espace de Banach des fonctions sur le cercle de classe C^r et de moyenne nulle.
- $D_0^r(\mathbb{T})$ l'ensemble des difféomorphismes $H \in D^r(\mathbb{T})$ tels que $\int_{\mathbb{T}}(H(x) - x)\, dx = 0$.

Observons que la relation $F = R_t \circ H \circ R_\alpha \circ H^{-1}$ implique

$$(\star) \qquad SF \circ H\,(DH)^2 = SH \circ R_\alpha - SH.$$

On note

- $C_0^r(\mathbb{T})$ l'espace de Banach des fonctions sur le cercle de classe C^r et de moyenne nulle.
- $D_0^r(\mathbb{T})$ l'ensemble des difféomorphismes $H \in D^r(\mathbb{T})$ tels que $\int_{\mathbb{T}}(H(x) - x)\, dx = 0$.

Observons que la relation $F = R_t \circ H \circ R_\alpha \circ H^{-1}$ implique

$$(\star) \qquad SF \circ H\,(DH)^2 = SH \circ R_\alpha - SH.$$

Lemme 1: L'application $\Phi : (F, H) \mapsto SF \circ H\,(DH)^2$ de $D^{r+3}(\mathbb{T}) \times D_0^r(\mathbb{T})$ dans $C_0^{r-1}(\mathbb{T})$ est de classe C^1 et sa différentielle en $(R_\alpha, id_{\mathbb{R}})$ est l'application $(\delta F, \delta H) \mapsto D^3\delta F$.

Comme $\alpha \in DC(\tau)$ avec $\tau < 1$, il existe un opérateur borné L de $C^{r-1}(\mathbb{T})$ dans $C_0^{r-3}(\mathbb{T})$ tel qu'on ait

$$\phi - \int_{\mathbb{T}} \phi = L(\phi) \circ R_\alpha - L(\phi),$$

pour toute fonction $\phi \in C^{r-1}(\mathbb{T})$.

Comme $\alpha \in DC(\tau)$ avec $\tau < 1$, il existe un opérateur borné L de $C^{r-1}(\mathbb{T})$ dans $C_0^{r-3}(\mathbb{T})$ tel qu'on ait

$$\phi - \int_{\mathbb{T}} \phi = L(\phi) \circ R_\alpha - L(\phi),$$

pour toute fonction $\phi \in C^{r-1}(\mathbb{T})$. Pour résoudre $(\star)$, il faut donc avoir

$$L(\Phi(F, H)) = SH - \int_{\mathbb{T}} SH, \qquad \int_{\mathbb{T}} \Phi(F, H) = 0.$$

Comme $\alpha \in DC(\tau)$ avec $\tau < 1$, il existe un opérateur borné L de $C^{r-1}(\mathbb{T})$ dans $C_0^{r-3}(\mathbb{T})$ tel qu'on ait

$$\phi - \int_{\mathbb{T}} \phi = L(\phi) \circ R_\alpha - L(\phi),$$

pour toute fonction $\phi \in C^{r-1}(\mathbb{T})$. Pour résoudre $(\star)$, il faut donc avoir

$$L(\Phi(F, H)) = SH - \int_{\mathbb{T}} SH, \qquad \int_{\mathbb{T}} \Phi(F, H) = 0.$$

Lemme 2: L'application $\mathcal{S} : H \mapsto SH - \int_{\mathbb{T}} SH$ de $D_0^r(\mathbb{T})$ dans $C_0^{r-3}(\mathbb{T})$ est de classe C^1, et sa différentielle en $H = id_{\mathbb{R}}$ est l'application $\delta H \mapsto D^3 \delta H$.

Comme $\alpha \in DC(\tau)$ avec $\tau < 1$, il existe un opérateur borné L de $C^{r-1}(\mathbb{T})$ dans $C_0^{r-3}(\mathbb{T})$ tel qu'on ait

$$\phi - \int_{\mathbb{T}} \phi = L(\phi) \circ R_\alpha - L(\phi),$$

pour toute fonction $\phi \in C^{r-1}(\mathbb{T})$. Pour résoudre $(\star)$, il faut donc avoir

$$L(\Phi(F,H)) = SH - \int_{\mathbb{T}} SH, \qquad \int_{\mathbb{T}} \Phi(F,H) = 0.$$

Lemme 2: L'application $\mathcal{S} : H \mapsto SH - \int_{\mathbb{T}} SH$ de $D_0^r(\mathbb{T})$ dans $C_0^{r-3}(\mathbb{T})$ est de classe C^1, et sa différentielle en $H = id_{\mathbb{R}}$ est l'application $\delta H \mapsto D^3 \delta H$.

Par le théorème d'inversion locale, la restriction de $\mathcal{S}$ à un voisinage de $id_{\mathbb{R}}$ dans $D_0^r(\mathbb{T})$ est un difféomorphisme sur un voisinage de 0 dans $C_0^{r-3}(\mathbb{T})$.

L'application $\Psi : (F, H) \mapsto \mathcal{S}^{-1} \circ L \circ \Phi(F, H)$, définie sur un voisinage de $(R_\alpha, id_\mathbb{R})$ dans $D^{r+3}(\mathbb{T}) \times D_0^r(\mathbb{T})$, à valeurs dans $D_0^r(\mathbb{T})$ est de classe C^1 et vérifie

$$\Psi(R_\alpha, id_\mathbb{R}) = id_\mathbb{R}, \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial H}(R_\alpha, id_\mathbb{R})\, \delta H = 0.$$

L'application $\Psi : (F, H) \mapsto \mathcal{S}^{-1} \circ L \circ \Phi(F, H)$, définie sur un voisinage de $(R_\alpha, id_{\mathbb{R}})$ dans $D^{r+3}(\mathbb{T}) \times D_0^r(\mathbb{T})$, à valeurs dans $D_0^r(\mathbb{T})$ est de classe C^1 et vérifie

$$\Psi(R_\alpha, id_{\mathbb{R}}) = id_{\mathbb{R}}, \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial H}(R_\alpha, id_{\mathbb{R}})\, \delta H = 0.$$

Par le théorème des fonctions implicites, l'application Ψ admet, pour chaque F assez voisin de R_α, un unique point fixe $H = \mathcal{H}(F)$, et l'application $\mathcal{H}$ est de classe C^1.

L'application $\Psi : (F, H) \mapsto \mathcal{S}^{-1} \circ L \circ \Phi(F, H)$, définie sur un voisinage de $(R_\alpha, id_\mathbb{R})$ dans $D^{r+3}(\mathbb{T}) \times D_0^r(\mathbb{T})$, à valeurs dans $D_0^r(\mathbb{T})$ est de classe C^1 et vérifie

$$\Psi(R_\alpha, id_\mathbb{R}) = id_\mathbb{R}, \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial H}(R_\alpha, id_\mathbb{R})\, \delta H = 0.$$

Par le théorème des fonctions implicites, l'application Ψ admet, pour chaque F assez voisin de R_α, un unique point fixe $H = \mathcal{H}(F)$, et l'application $\mathcal{H}$ est de classe C^1.

On a donc, pour $H = \mathcal{H}(F)$, $c := \int_\mathbb{T} \Phi(F, H)$

$$S(F \circ H) = S(H \circ R_\alpha) + c.$$

L'application $\Psi : (F, H) \mapsto \mathcal{S}^{-1} \circ L \circ \Phi(F, H)$, définie sur un voisinage de $(R_\alpha, id_\mathbb{R})$ dans $D^{r+3}(\mathbb{T}) \times D_0^r(\mathbb{T})$, à valeurs dans $D_0^r(\mathbb{T})$ est de classe C^1 et vérifie

$$\Psi(R_\alpha, id_\mathbb{R}) = id_\mathbb{R}, \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial H}(R_\alpha, id_\mathbb{R})\, \delta H = 0.$$

Par le théorème des fonctions implicites, l'application Ψ admet, pour chaque F assez voisin de R_α, un unique point fixe $H = \mathcal{H}(F)$, et l'application $\mathcal{H}$ est de classe C^1.

On a donc, pour $H = \mathcal{H}(F)$, $c := \int_\mathbb{T} \Phi(F, H)$

$$S(F \circ H) = S(H \circ R_\alpha) + c.$$

Par le lemme 2, il existe un unique t voisin de 0 tel qu'on ait

$$F \circ H = R_t \circ H \circ R_\alpha,$$

L'application $\Psi : (F, H) \mapsto \mathcal{S}^{-1} \circ L \circ \Phi(F, H)$, définie sur un voisinage de $(R_\alpha, id_{\mathbb{R}})$ dans $D^{r+3}(\mathbb{T}) \times D_0^r(\mathbb{T})$, à valeurs dans $D_0^r(\mathbb{T})$ est de classe C^1 et vérifie

$$\Psi(R_\alpha, id_{\mathbb{R}}) = id_{\mathbb{R}}, \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial H}(R_\alpha, id_{\mathbb{R}})\, \delta H = 0.$$

Par le théorème des fonctions implicites, l'application Ψ admet, pour chaque F assez voisin de R_α, un unique point fixe $H = \mathcal{H}(F)$, et l'application $\mathcal{H}$ est de classe C^1.

On a donc, pour $H = \mathcal{H}(F)$, $c := \int_{\mathbb{T}} \Phi(F, H)$

$$S(F \circ H) = S(H \circ R_\alpha) + c.$$

Par le lemme 2, il existe un unique t voisin de 0 tel qu'on ait

$$F \circ H = R_t \circ H \circ R_\alpha,$$

et l'application $F \mapsto t$ est de classe C^1.

L'application $\Psi : (F, H) \mapsto \mathcal{S}^{-1} \circ L \circ \Phi(F, H)$, définie sur un voisinage de $(R_\alpha, id_{\mathbb{R}})$ dans $D^{r+3}(\mathbb{T}) \times D_0^r(\mathbb{T})$, à valeurs dans $D_0^r(\mathbb{T})$ est de classe C^1 et vérifie

$$\Psi(R_\alpha, id_{\mathbb{R}}) = id_{\mathbb{R}}, \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial H}(R_\alpha, id_{\mathbb{R}})\, \delta H = 0.$$

Par le théorème des fonctions implicites, l'application Ψ admet, pour chaque F assez voisin de R_α, un unique point fixe $H = \mathcal{H}(F)$, et l'application $\mathcal{H}$ est de classe C^1.

On a donc, pour $H = \mathcal{H}(F)$, $c := \int_{\mathbb{T}} \Phi(F, H)$

$$S(F \circ H) = S(H \circ R_\alpha) + c.$$

Par le lemme 2, il existe un unique t voisin de 0 tel qu'on ait

$$F \circ H = R_t \circ H \circ R_\alpha,$$

et l'application $F \mapsto t$ est de classe C^1. La preuve du théorème est complète.