Quelques aspects de la théorie des systèmes dynamiques hyperboliques(2)

Jean-Christophe Yoccoz

Collège de France

28 janvier 2015

Expansivité

Definition: Un homéomorphisme f d'un espace métrique compact X est expansif s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour toute paire de points distincts $x, y \in X$, il existe un entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $d(f^n x, f^n y) > \varepsilon$.

Expansivité

Definition: Un homéomorphisme f d'un espace métrique compact X est expansif s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour toute paire de points distincts $x, y \in X$, il existe un entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $d(f^n x, f^n y) > \varepsilon$.

Proposition: Soient M une variété, U une partie ouverte de M, $f : U \to M$ un plongement de classe C^1, K une partie compacte de U qui est préservée par f.

Expansivité

Definition: Un homéomorphisme f d'un espace métrique compact X est expansif s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour toute paire de points distincts $x, y \in X$, il existe un entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $d(f^n x, f^n y) > \varepsilon$.

Proposition: Soient M une variété, U une partie ouverte de M, $f : U \to M$ un plongement de classe C^1, K une partie compacte de U qui est préservée par f. Si K est hyperbolique, alors la restriction de f à K est expansive.

Continuation hyperbolique

Soient M une variété, U une partie ouverte de M, $f : U \to M$ un plongement de classe C^1, K une partie compacte invariante hyperbolique de U.

Continuation hyperbolique

Soient M une variété, U une partie ouverte de M, $f : U \to M$ un plongement de classe C^1, K une partie compacte invariante hyperbolique de U.

Théorème: Il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de f dans $C^1(U, M)$ et une application continue $\mathcal{H}$ de $\mathcal{U}$ dans $C(K, M)$ vérifiant $\mathcal{H}(f) = \mathrm{id}$ et, pour tout $g \in \mathcal{U}$:

Continuation hyperbolique

Soient M une variété, U une partie ouverte de M, $f : U \to M$ un plongement de classe C^1, K une partie compacte invariante hyperbolique de U.

Théorème: Il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de f dans $C^1(U, M)$ et une application continue $\mathcal{H}$ de $\mathcal{U}$ dans $C(K, M)$ vérifiant $\mathcal{H}(f) = \mathrm{id}$ et, pour tout $g \in \mathcal{U}$:

- l'ensemble $K_g := \mathcal{H}(g)(K)$ est un ensemble compact, invariant par g, hyperbolique;

Continuation hyperbolique

Soient M une variété, U une partie ouverte de M, $f : U \to M$ un plongement de classe C^1, K une partie compacte invariante hyperbolique de U.

Théorème: Il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de f dans $C^1(U, M)$ et une application continue $\mathcal{H}$ de $\mathcal{U}$ dans $C(K, M)$ vérifiant $\mathcal{H}(f) = \mathrm{id}$ et, pour tout $g \in \mathcal{U}$:

- l'ensemble $K_g := \mathcal{H}(g)(K)$ est un ensemble compact, invariant par g, hyperbolique;
- $g \circ \mathcal{H}(g) = \mathcal{H}(g) \circ f$;

Continuation hyperbolique

Soient M une variété, U une partie ouverte de M, $f : U \to M$ un plongement de classe C^1, K une partie compacte invariante hyperbolique de U.

Théorème: Il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de f dans $C^1(U, M)$ et une application continue $\mathcal{H}$ de $\mathcal{U}$ dans $C(K, M)$ vérifiant $\mathcal{H}(f) = \mathrm{id}$ et, pour tout $g \in \mathcal{U}$:

- l'ensemble $K_g := \mathcal{H}(g)(K)$ est un ensemble compact, invariant par g, hyperbolique;
- $g \circ \mathcal{H}(g) = \mathcal{H}(g) \circ f$;
- $\mathcal{H}(g)$ est l'unique application continue proche de l'identité satisfaisant cette relation;

Continuation hyperbolique

Soient M une variété, U une partie ouverte de M, $f : U \to M$ un plongement de classe C^1, K une partie compacte invariante hyperbolique de U.

Théorème: Il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de f dans $C^1(U, M)$ et une application continue $\mathcal{H}$ de $\mathcal{U}$ dans $C(K, M)$ vérifiant $\mathcal{H}(f) = \mathrm{id}$ et, pour tout $g \in \mathcal{U}$:

- l'ensemble $K_g := \mathcal{H}(g)(K)$ est un ensemble compact, invariant par g, hyperbolique;
- $g \circ \mathcal{H}(g) = \mathcal{H}(g) \circ f$;
- $\mathcal{H}(g)$ est l'unique application continue proche de l'identité satisfaisant cette relation;
- $\mathcal{H}(g)$ est injective.

Pseudo-orbites et récurrence par chaînes

Soient (X, d) un espace métrique compact et $f : X \to X$ un homéomorphisme.

Pseudo-orbites et récurrence par chaînes

Soient (X, d) un espace métrique compact et $f : X \to X$ un homéomorphisme.

Définitions: Soit $\delta > 0$. Une *δ-pseudo-orbite* de f est une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de points de X vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{Z}$

$$d(f(x_n), x_{n+1}) < \delta.$$

Pseudo-orbites et récurrence par chaînes

Soient (X, d) un espace métrique compact et $f : X \to X$ un homéomorphisme.

Définitions: Soit $\delta > 0$. Une *δ-pseudo-orbite* de f est une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de points de X vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{Z}$

$$d(f(x_n), x_{n+1}) < \delta.$$

Un point $x \in X$ est *récurrent par chaînes* si, pour tout $\delta > 0$, il existe une δ-pseudo-orbite périodique de f vérifiant $x_0 = x$.

Pseudo-orbites et récurrence par chaînes

Soient (X, d) un espace métrique compact et $f : X \to X$ un homéomorphisme.

Définitions: Soit $\delta > 0$. Une *δ-pseudo-orbite* de f est une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de points de X vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{Z}$

$$d(f(x_n), x_{n+1}) < \delta.$$

Un point $x \in X$ est *récurrent par chaînes* si, pour tout $\delta > 0$, il existe une δ-pseudo-orbite périodique de f vérifiant $x_0 = x$. L'ensemble des points récurrents par chaînes de f est noté $R(f)$.

Pseudo-orbites et récurrence par chaînes

Soient (X, d) un espace métrique compact et $f : X \to X$ un homéomorphisme.

Définitions: Soit $\delta > 0$. Une *δ-pseudo-orbite* de f est une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de points de X vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{Z}$

$$d(f(x_n), x_{n+1}) < \delta.$$

Un point $x \in X$ est *récurrent par chaînes* si, pour tout $\delta > 0$, il existe une δ-pseudo-orbite périodique de f vérifiant $x_0 = x$. L'ensemble des points récurrents par chaînes de f est noté $R(f)$. C'est une partie compacte, non vide et invariante par f.

Pseudo-orbites et récurrence par chaînes

Soient (X, d) un espace métrique compact et $f : X \to X$ un homéomorphisme.

Définitions: Soit $\delta > 0$. Une *δ-pseudo-orbite* de f est une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de points de X vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{Z}$

$$d(f(x_n), x_{n+1}) < \delta.$$

Un point $x \in X$ est *récurrent par chaînes* si, pour tout $\delta > 0$, il existe une δ-pseudo-orbite périodique de f vérifiant $x_0 = x$. L'ensemble des points récurrents par chaînes de f est noté $R(f)$. C'est une partie compacte, non vide et invariante par f.

La récurrence par chaînes est la plus faible de plusieurs notions de récurrence considérées en dynamique.

Le lemme de poursuite

Soient M une variété, U une partie ouverte de M, $f : U \to M$ un plongement de classe C^1, K une partie compacte invariante hyperbolique de U.

Le lemme de poursuite

Soient M une variété, U une partie ouverte de M, $f : U \to M$ un plongement de classe C^1, K une partie compacte invariante hyperbolique de U.

Théorème: Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour toute δ-pseudo-orbite $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de $f_{|K}$, il existe une orbite $(f^n(x))_{n\in\mathbb{Z}}$ dans U vérifiant

$$d(f^n(x), x_n) < C\delta, \qquad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Le lemme de poursuite

Soient M une variété, U une partie ouverte de M, $f : U \to M$ un plongement de classe C^1, K une partie compacte invariante hyperbolique de U.

Théorème: Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour toute δ-pseudo-orbite $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de $f_{|K}$, il existe une orbite $(f^n(x))_{n\in\mathbb{Z}}$ dans U vérifiant

$$d(f^n(x), x_n) < C\delta, \qquad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Remarques:

Le lemme de poursuite

Soient M une variété, U une partie ouverte de M, $f : U \to M$ un plongement de classe C^1, K une partie compacte invariante hyperbolique de U.

Théorème: Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour toute δ-pseudo-orbite $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de $f_{|K}$, il existe une orbite $(f^n(x))_{n\in\mathbb{Z}}$ dans U vérifiant

$$d(f^n(x), x_n) < C\delta, \qquad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Remarques:

1. En général, le point x n'appartient pas à K; il appartient cependant à un ensemble compact invariant hyperbolique $K' \subset U$.

Le lemme de poursuite

Soient M une variété, U une partie ouverte de M, $f : U \to M$ un plongement de classe C^1, K une partie compacte invariante hyperbolique de U.

Théorème: Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour toute δ-pseudo-orbite $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de $f_{|K}$, il existe une orbite $(f^n(x))_{n\in\mathbb{Z}}$ dans U vérifiant

$$d(f^n(x), x_n) < C\delta, \qquad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Remarques:

1. En général, le point x n'appartient pas à K; il appartient cependant à un ensemble compact invariant hyperbolique $K' \subset U$.
2. D'après l'expansivité de $f_{|K'}$, le point x du théorème est unique si δ est assez petit.

Variétés stables locales

Soient M une variété, U une partie ouverte de M, $f : U \to M$ un plongement de classe C^1, K une partie compacte invariante hyperbolique de U.

Variétés stables locales

Soient M une variété, U une partie ouverte de M, $f : U \to M$ un plongement de classe C^1, K une partie compacte invariante hyperbolique de U. Soit $\kappa' \in (0, 1)$ une constante telle qu'on ait $||Tf^n_{|E_s}|| \leqslant C\kappa'^n$ au-dessus de K pour tout $n \geqslant 0$. Soit $\kappa \in (\kappa', 1)$.

Variétés stables locales

Soient M une variété, U une partie ouverte de M, $f : U \to M$ un plongement de classe C^1, K une partie compacte invariante hyperbolique de U. Soit $\kappa' \in (0,1)$ une constante telle qu'on ait $||Tf^n_{|E_s}|| \leqslant C\kappa'^n$ au-dessus de K pour tout $n \geqslant 0$. Soit $\kappa \in (\kappa', 1)$.

Théorème: Il existe une métrique riemannienne sur U telle que les *variétés stables locales* $W^s_{loc}(x)$ définies pour $x \in K$ par

$$W^s_{loc}(x) = \{y \in U \,|\, d(f^n(y), f^n(x)) < 1, \ \forall n \geqslant 0\}$$

aient les propriétés suivantes:

Variétés stables locales

Soient M une variété, U une partie ouverte de M, $f : U \to M$ un plongement de classe C^1, K une partie compacte invariante hyperbolique de U. Soit $\kappa' \in (0,1)$ une constante telle qu'on ait $||Tf^n_{|E_s}|| \leqslant C\kappa'^n$ au-dessus de K pour tout $n \geqslant 0$. Soit $\kappa \in (\kappa', 1)$.

Théorème: Il existe une métrique riemannienne sur U telle que les *variétés stables locales* $W^s_{loc}(x)$ définies pour $x \in K$ par

$$W^s_{loc}(x) = \{y \in U \,|\, d(f^n(y), f^n(x)) < 1, \forall n \geqslant 0\}$$

aient les propriétés suivantes:

- $d(f^n y, f^n x) \leqslant \kappa^n d(y, x), \quad \forall y \in W^s_{loc}(x), \forall n \geqslant 0;$

Variétés stables locales

Soient M une variété, U une partie ouverte de M, $f : U \to M$ un plongement de classe C^1, K une partie compacte invariante hyperbolique de U. Soit $\kappa' \in (0,1)$ une constante telle qu'on ait $||Tf^n_{|E_s}|| \leqslant C\kappa'^n$ au-dessus de K pour tout $n \geqslant 0$. Soit $\kappa \in (\kappa', 1)$.

Théorème: Il existe une métrique riemannienne sur U telle que les *variétés stables locales $W^s_{loc}(x)$* définies pour $x \in K$ par

$$W^s_{loc}(x) = \{y \in U \,|\, d(f^n(y), f^n(x)) < 1, \, \forall n \geqslant 0\}$$

aient les propriétés suivantes:

- $d(f^n y, f^n x) \leqslant \kappa^n d(y, x), \quad \forall y \in W^s_{loc}(x), \forall n \geqslant 0;$
- $f(W^s_{loc}(x)) \subset W^s_{loc}(f(x));$

Variétés stables locales

Soient M une variété, U une partie ouverte de M, $f : U \to M$ un plongement de classe C^1, K une partie compacte invariante hyperbolique de U. Soit $\kappa' \in (0,1)$ une constante telle qu'on ait $||Tf^n_{|E_s}|| \leqslant C\kappa'^n$ au-dessus de K pour tout $n \geqslant 0$. Soit $\kappa \in (\kappa', 1)$.

Théorème: Il existe une métrique riemannienne sur U telle que les *variétés stables locales $W^s_{loc}(x)$* définies pour $x \in K$ par

$$W^s_{loc}(x) = \{y \in U \,|\, d(f^n(y), f^n(x)) < 1, \, \forall n \geqslant 0\}$$

aient les propriétés suivantes:

- $d(f^n y, f^n x) \leqslant \kappa^n d(y, x), \quad \forall y \in W^s_{loc}(x), \forall n \geqslant 0;$
- $f(W^s_{loc}(x)) \subset W^s_{loc}(f(x));$
- $W^s_{loc}(x)$ est l'image d'un plongement j_x de classe C^1 de la boule unité de $E_{s,x}$ dans U;

Variétés stables locales

Soient M une variété, U une partie ouverte de M, $f : U \to M$ un plongement de classe C^1, K une partie compacte invariante hyperbolique de U. Soit $\kappa' \in (0,1)$ une constante telle qu'on ait $||Tf^n_{|E_s}|| \leqslant C\kappa'^n$ au-dessus de K pour tout $n \geqslant 0$. Soit $\kappa \in (\kappa', 1)$.

Théorème: Il existe une métrique riemannienne sur U telle que les *variétés stables locales $W^s_{loc}(x)$* définies pour $x \in K$ par

$$W^s_{loc}(x) = \{y \in U \,|\, d(f^n(y), f^n(x)) < 1, \forall n \geqslant 0\}$$

aient les propriétés suivantes:

- $d(f^n y, f^n x) \leqslant \kappa^n d(y, x), \quad \forall y \in W^s_{loc}(x), \forall n \geqslant 0;$
- $f(W^s_{loc}(x)) \subset W^s_{loc}(f(x));$
- $W^s_{loc}(x)$ est l'image d'un plongement j_x de classe C^1 de la boule unité de $E_{s,x}$ dans U;
- j_x dépend continument de x et vérifie $j_x(0) = x$, $T_0 j_x = \mathrm{id}_{E_{s,x}}$.

Variétés stables locales en différentiabilité supérieure

Si f est de classe C^r (r réel > 1, $r = \infty$, ou $r = \omega$), alors j_x est aussi de classe C^r et dépend continument de x dans la C^r-topologie.

Variétés stables

Soit K un compact invariant hyperbolique pour un difféomorphisme f de classe C^1 d'une variété M.

Variétés stables

Soit K un compact invariant hyperbolique pour un difféomorphisme f de classe C^1 d'une variété M.

Pour $x \in K$, on définit la *variété stable (globale)* de x par

$$W^s(x) := \{y \in M, \lim_{n \to +\infty} d(f^n(y), f^n(x)) = 0\}.$$

Variétés stables

Soit K un compact invariant hyperbolique pour un difféomorphisme f de classe C^1 d'une variété M.

Pour $x \in K$, on définit la *variété stable (globale)* de x par

$$W^s(x) := \{y \in M, \lim_{n \to +\infty} d(f^n(y), f^n(x)) = 0\}.$$

Cette définition ne dépend pas du choix de la métrique d. La relation avec la variété stable locale est donnée par

$$W^s(x) = \bigcup_{n \geqslant 0} f^{-n}(W^s_{loc}(f^n(x))).$$

Pour tout $y \in W^s(x)$, on a donc

$$\lim_{n\to+\infty} \kappa^{-n} d(f^n(y), f^n(x)) = 0,$$

avec $\kappa \in (0,1)$ comme dans le théorème précédent.

Pour tout $y \in W^s(x)$, on a donc

$$\lim_{n \to +\infty} \kappa^{-n} d(f^n(y), f^n(x)) = 0,$$

avec $\kappa \in (0, 1)$ comme dans le théorème précédent.

La variété stable $W^s(x)$ est l'image d'une immersion injective de $E_{s,x}$, qui est de classe C^r si f est de classe C^r.

Pour tout $y \in W^s(x)$, on a donc

$$\lim_{n \to +\infty} \kappa^{-n} d(f^n(y), f^n(x)) = 0,$$

avec $\kappa \in (0, 1)$ comme dans le théorème précédent.

La variété stable $W^s(x)$ est l'image d'une immersion injective de $E_{s,x}$, qui est de classe C^r si f est de classe C^r. Cette immersion dépend continument de x sur les compacts de $E_{s,x}$.

Structure de produit local

Soient M une variété, U une partie ouverte de M, $f : U \to M$ un plongement de classe C^1, K une partie compacte invariante hyperbolique de U.

Structure de produit local

Soient M une variété, U une partie ouverte de M, $f : U \to M$ un plongement de classe C^1, K une partie compacte invariante hyperbolique de U.

Proposition: Les propriétés suivantes sont équivalentes:

Structure de produit local

Soient M une variété, U une partie ouverte de M, $f : U \to M$ un plongement de classe C^1, K une partie compacte invariante hyperbolique de U.

Proposition: Les propriétés suivantes sont équivalentes:

1. K est localement maximal;

Structure de produit local

Soient M une variété, U une partie ouverte de M, $f : U \to M$ un plongement de classe C^1, K une partie compacte invariante hyperbolique de U.

Proposition: Les propriétés suivantes sont équivalentes:

1. K est localement maximal;
2. K a une *structure de produit local*: si $x, y \in K$ sont assez proches, le point d'intersection (transverse) de $W^s_{loc}(x)$ et $W^u_{loc}(y)$ appartient à K;

Structure de produit local

Soient M une variété, U une partie ouverte de M, $f : U \to M$ un plongement de classe C^1, K une partie compacte invariante hyperbolique de U.

Proposition: Les propriétés suivantes sont équivalentes:

1. K est localement maximal;
2. K a une *structure de produit local*: si $x, y \in K$ sont assez proches, le point d'intersection (transverse) de $W^s_{loc}(x)$ et $W^u_{loc}(y)$ appartient à K;
3. pour $\delta > 0$ assez petit, les δ-pseudo-orbites de $f_{|K}$ sont approchées par des orbites de $f_{|K}$.

Décomposition spectrale

Définition: Un homéomorphisme f d'un espace métrique compact X est *topologiquement mélangeant* si, pour tous ouverts non vides $U, V \subset X$, l'intersection $U \cap f^{-n}(V)$ n'est pas vide pour tout n assez grand.

Décomposition spectrale

Définition: Un homéomorphisme f d'un espace métrique compact X est *topologiquement mélangeant* si, pour tous ouverts non vides $U, V \subset X$, l'intersection $U \cap f^{-n}(V)$ n'est pas vide pour tout n assez grand.

Soient M une variété, U une partie ouverte de M, $f : U \to M$ un plongement de classe C^1, K une partie compacte invariante hyperbolique de U.

Décomposition spectrale

Définition: Un homéomorphisme f d'un espace métrique compact X est *topologiquement mélangeant* si, pour tous ouverts non vides $U, V \subset X$, l'intersection $U \cap f^{-n}(V)$ n'est pas vide pour tout n assez grand.

Soient M une variété, U une partie ouverte de M, $f : U \to M$ un plongement de classe C^1, K une partie compacte invariante hyperbolique de U.

Theorème: (Smale) Supposons que K soit localement maximal et récurrent par chaînes.

Décomposition spectrale

Définition: Un homéomorphisme f d'un espace métrique compact X est *topologiquement mélangeant* si, pour tous ouverts non vides $U, V \subset X$, l'intersection $U \cap f^{-n}(V)$ n'est pas vide pour tout n assez grand.

Soient M une variété, U une partie ouverte de M, $f : U \to M$ un plongement de classe C^1, K une partie compacte invariante hyperbolique de U.

Theorème: (Smale) Supposons que K soit localement maximal et récurrent par chaînes. Alors il existe une partition

$$K = \bigsqcup_{i=1}^{\ell} \bigsqcup_{j \in \mathbb{Z}_{s_i}} K_{i,j}$$

en ensembles compacts

Décomposition spectrale

Définition: Un homéomorphisme f d'un espace métrique compact X est *topologiquement mélangeant* si, pour tous ouverts non vides $U, V \subset X$, l'intersection $U \cap f^{-n}(V)$ n'est pas vide pour tout n assez grand.

Soient M une variété, U une partie ouverte de M, $f : U \to M$ un plongement de classe C^1, K une partie compacte invariante hyperbolique de U.

Theorème: (Smale) Supposons que K soit localement maximal et récurrent par chaînes. Alors il existe une partition

$$K = \bigsqcup_{i=1}^{\ell} \bigsqcup_{j \in \mathbb{Z}_{s_i}} K_{i,j}$$

en ensembles compacts vérifiant

$$f(K_{i,j}) = K_{i,j+1}, \quad \forall 1 \leqslant i \leqslant \ell, \quad \forall j \in \mathbb{Z}_{s_i}$$

Décomposition spectrale

Définition: Un homéomorphisme f d'un espace métrique compact X est *topologiquement mélangeant* si, pour tous ouverts non vides $U, V \subset X$, l'intersection $U \cap f^{-n}(V)$ n'est pas vide pour tout n assez grand.

Soient M une variété, U une partie ouverte de M, $f : U \to M$ un plongement de classe C^1, K une partie compacte invariante hyperbolique de U.

Theorème: (Smale) Supposons que K soit localement maximal et récurrent par chaînes. Alors il existe une partition

$$K = \bigsqcup_{i=1}^{\ell} \bigsqcup_{j \in \mathbb{Z}_{s_i}} K_{i,j}$$

en ensembles compacts vérifiant

$$f(K_{i,j}) = K_{i,j+1}, \quad \forall 1 \leqslant i \leqslant \ell, \quad \forall j \in \mathbb{Z}_{s_i}$$

et tels que les restrictions $f^{s_i}_{|K_{i,j}}$ soient topologiquement mélangeantes.

Ensembles basiques

Définition: Un homéomorphisme f d'un espace métrique compact X est *transitif* s'il possède une orbite dense.

Ensembles basiques

Définition: Un homéomorphisme f d'un espace métrique compact X est *transitif* s'il possède une orbite dense. De façon équivalente, pour tous ouverts non vides $U, V \subset X$, l'intersection $U \cap f^{-n}(V)$ n'est pas vide pour au moins un entier $n \in \mathbb{Z}$.

Ensembles basiques

Définition: Un homéomorphisme f d'un espace métrique compact X est *transitif* s'il possède une orbite dense. De façon équivalente, pour tous ouverts non vides $U, V \subset X$, l'intersection $U \cap f^{-n}(V)$ n'est pas vide pour au moins un entier $n \in \mathbb{Z}$.

Dans le théorème précédent, les ensembles $K_i := \bigsqcup_{j \in \mathbb{Z}_{s_i}} K_{i,j}$ sont compacts, invariants par f, hyperboliques et chaque $f_{|K_i}$ est transitif.

Ensembles basiques

Définition: Un homéomorphisme f d'un espace métrique compact X est *transitif* s'il possède une orbite dense. De façon équivalente, pour tous ouverts non vides $U, V \subset X$, l'intersection $U \cap f^{-n}(V)$ n'est pas vide pour au moins un entier $n \in \mathbb{Z}$.

Dans le théorème précédent, les ensembles $K_i := \bigsqcup_{j \in \mathbb{Z}_{s_i}} K_{i,j}$ sont compacts, invariants par f, hyperboliques et chaque $f_{|K_i}$ est transitif.

Soient M une variété, U une partie ouverte de M, $f : U \to M$ un plongement de classe C^1.

Ensembles basiques

Définition: Un homéomorphisme f d'un espace métrique compact X est *transitif* s'il possède une orbite dense. De façon équivalente, pour tous ouverts non vides $U, V \subset X$, l'intersection $U \cap f^{-n}(V)$ n'est pas vide pour au moins un entier $n \in \mathbb{Z}$.

Dans le théorème précédent, les ensembles $K_i := \bigsqcup_{j \in \mathbb{Z}_{s_i}} K_{i,j}$ sont compacts, invariants par f, hyperboliques et chaque $f_{|K_i}$ est transitif.

Soient M une variété, U une partie ouverte de M, $f : U \to M$ un plongement de classe C^1.

Définition: Une partie compacte invariante hyperbolique K de U est un *ensemble basique* si elle est localement maximale et $f_{|K}$ est transitif.

Ensembles basiques

Définition: Un homéomorphisme f d'un espace métrique compact X est *transitif* s'il possède une orbite dense. De façon équivalente, pour tous ouverts non vides $U, V \subset X$, l'intersection $U \cap f^{-n}(V)$ n'est pas vide pour au moins un entier $n \in \mathbb{Z}$.

Dans le théorème précédent, les ensembles $K_i := \bigsqcup_{j \in \mathbb{Z}_{s_i}} K_{i,j}$ sont compacts, invariants par f, hyperboliques et chaque $f_{|K_i}$ est transitif.

Soient M une variété, U une partie ouverte de M, $f : U \to M$ un plongement de classe C^1.

Définition: Une partie compacte invariante hyperbolique K de U est un *ensemble basique* si elle est localement maximale et $f_{|K}$ est transitif.

Chaque K_i est donc un ensemble basique.

Ensembles basiques

Définition: Un homéomorphisme f d'un espace métrique compact X est *transitif* s'il possède une orbite dense. De façon équivalente, pour tous ouverts non vides $U, V \subset X$, l'intersection $U \cap f^{-n}(V)$ n'est pas vide pour au moins un entier $n \in \mathbb{Z}$.

Dans le théorème précédent, les ensembles $K_i := \bigsqcup_{j \in \mathbb{Z}_{s_i}} K_{i,j}$ sont compacts, invariants par f, hyperboliques et chaque $f_{|K_i}$ est transitif.

Soient M une variété, U une partie ouverte de M, $f : U \to M$ un plongement de classe C^1.

Définition: Une partie compacte invariante hyperbolique K de U est un *ensemble basique* si elle est localement maximale et $f_{|K}$ est transitif.

Chaque K_i est donc un ensemble basique.

Remarque: Si $f : X \to X$ est transitif, tout point de X est récurrent par chaînes.

Attracteurs

Soient M une variété, U une partie ouverte de M, $f : U \to M$ un plongement de classe C^1.

Attracteurs

Soient M une variété, U une partie ouverte de M, $f : U \to M$ un plongement de classe C^1.

Définitions: Un ensemble basique $K \subset U$ de f est un *attracteur* s'il existe un voisinage W de K tel qu'on ait $K = \cap_{n \geqslant 0} f^n(W)$.

Attracteurs

Soient M une variété, U une partie ouverte de M, $f : U \to M$ un plongement de classe C^1.

Définitions: Un ensemble basique $K \subset U$ de f est un *attracteur* s'il existe un voisinage W de K tel qu'on ait $K = \cap_{n \geqslant 0} f^n(W)$. De façon équivalente, on a $W^u_{loc}(x) \subset K$ pour tout $x \in K$.

Attracteurs

Soient M une variété, U une partie ouverte de M, $f : U \to M$ un plongement de classe C^1.

Définitions: Un ensemble basique $K \subset U$ de f est un *attracteur* s'il existe un voisinage W de K tel qu'on ait $K = \cap_{n \geqslant 0} f^n(W)$. De façon équivalente, on a $W^u_{loc}(x) \subset K$ pour tout $x \in K$.

Un ensemble basique de f est un *répulseur* si c'est un attracteur pour f^{-1}.

Attracteurs

Soient M une variété, U une partie ouverte de M, $f : U \to M$ un plongement de classe C^1.

Définitions: Un ensemble basique $K \subset U$ de f est un *attracteur* s'il existe un voisinage W de K tel qu'on ait $K = \cap_{n \geqslant 0} f^n(W)$. De façon équivalente, on a $W^u_{loc}(x) \subset K$ pour tout $x \in K$.

Un ensemble basique de f est un *répulseur* si c'est un attracteur pour f^{-1}.

Un ensemble basique de f est *de type selle* si ce n'est ni un attracteur, ni un répulseur.

Attracteurs

Soient M une variété, U une partie ouverte de M, $f : U \to M$ un plongement de classe C^1.

Définitions: Un ensemble basique $K \subset U$ de f est un *attracteur* s'il existe un voisinage W de K tel qu'on ait $K = \cap_{n \geqslant 0} f^n(W)$. De façon équivalente, on a $W^u_{loc}(x) \subset K$ pour tout $x \in K$.

Un ensemble basique de f est un *répulseur* si c'est un attracteur pour f^{-1}.

Un ensemble basique de f est *de type selle* si ce n'est ni un attracteur, ni un répulseur.

Le solénoïde est un attracteur. Un fer à cheval est un ensemble basique de type selle.

Difféomorphismes hyperboliques

Définition: Un difféomorphisme f de classe C^1 d'une variété compacte connexe M est *hyperbolique* si son ensemble récurrent par chaînes $R(f)$ (qui est toujours compact et invariant) est hyperbolique.

Difféomorphismes hyperboliques

Définition: Un difféomorphisme f de classe C^1 d'une variété compacte connexe M est *hyperbolique* si son ensemble récurrent par chaînes $R(f)$ (qui est toujours compact et invariant) est hyperbolique.

Proposition: Dans ce cas, $R(f)$ est localement maximal et tout point de $R(f)$ est récurrent par chaînes pour $f_{|R(f)}$.

Difféomorphismes hyperboliques

Définition: Un difféomorphisme f de classe C^1 d'une variété compacte connexe M est *hyperbolique* si son ensemble récurrent par chaînes $R(f)$ (qui est toujours compact et invariant) est hyperbolique.

Proposition: Dans ce cas, $R(f)$ est localement maximal et tout point de $R(f)$ est récurrent par chaînes pour $f_{|R(f)}$.

On peut donc appliquer le théorème de décomposition spectrale de Smale à $R(f)$.

Difféomorphismes hyperboliques

Définition: Un difféomorphisme f de classe C^1 d'une variété compacte connexe M est *hyperbolique* si son ensemble récurrent par chaînes $R(f)$ (qui est toujours compact et invariant) est hyperbolique.

Proposition: Dans ce cas, $R(f)$ est localement maximal et tout point de $R(f)$ est récurrent par chaînes pour $f_{|R(f)}$.

On peut donc appliquer le théorème de décomposition spectrale de Smale à $R(f)$.

Question: Pour un difféomorphisme d'Anosov $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$, a-t-on toujours $R(f) = M$?

Difféomorphismes hyperboliques

Définition: Un difféomorphisme f de classe C^1 d'une variété compacte connexe M est *hyperbolique* si son ensemble récurrent par chaînes $R(f)$ (qui est toujours compact et invariant) est hyperbolique.

Proposition: Dans ce cas, $R(f)$ est localement maximal et tout point de $R(f)$ est récurrent par chaînes pour $f_{|R(f)}$.

On peut donc appliquer le théorème de décomposition spectrale de Smale à $R(f)$.

Question: Pour un difféomorphisme d'Anosov $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$, a-t-on toujours $R(f) = M$?

C'est le cas pour tous ceux qu'on sait construire!

Décomposition spectrale pour les difféomorphismes hyperboliques

Soit f un difféomorphisme hyperbolique de classe C^1 d'une variété compacte connexe M.

Décomposition spectrale pour les difféomorphismes hyperboliques

Soit f un difféomorphisme hyperbolique de classe C^1 d'une variété compacte connexe M.
D'après le théorème de Smale, on peut écrire

$$R(f) = \bigsqcup_{\alpha} R_\alpha$$

comme union finie disjointe d'ensembles basiques de f.

Décomposition spectrale pour les difféomorphismes hyperboliques

Soit f un difféomorphisme hyperbolique de classe C^1 d'une variété compacte connexe M.
D'après le théorème de Smale, on peut écrire

$$R(f) = \bigsqcup_{\alpha} R_\alpha$$

comme union finie disjointe d'ensembles basiques de f. Cela donne lieu à des partitions

$$M = \bigsqcup_{\alpha} W^s(R_\alpha) = \bigsqcup_{\alpha} W^u(R_\alpha)$$

où on a posé

Décomposition spectrale pour les difféomorphismes hyperboliques

Soit f un difféomorphisme hyperbolique de classe C^1 d'une variété compacte connexe M.
D'après le théorème de Smale, on peut écrire

$$R(f) = \bigsqcup_{\alpha} R_\alpha$$

comme union finie disjointe d'ensembles basiques de f. Cela donne lieu à des partitions

$$M = \bigsqcup_{\alpha} W^s(R_\alpha) = \bigsqcup_{\alpha} W^u(R_\alpha)$$

où on a posé

$$W^s(R_\alpha) := \{y \in M \mid \lim_{n \to +\infty} d(f^n(y), R_\alpha) = 0\} = \bigcup_{x \in R_\alpha} W^s(x)$$

et de même pour $W^u(R_\alpha)$.

La relation

$$R_\alpha \triangleright R_\beta \Longleftrightarrow W^u(R_\alpha) \cap W^s(R_\beta) \neq \emptyset$$

n'a pas de cycle de longueur > 1.

La relation

$$R_\alpha \triangleright R_\beta \iff W^u(R_\alpha) \cap W^s(R_\beta) \neq \emptyset$$

n'a pas de cycle de longueur > 1.

Il existe donc une relation d'ordre partiel sur l'ensemble des R_α qui prolonge $\triangleright$ et dont le graphe soit minimal pour cette propriété.

La relation

$$R_\alpha \triangleright R_\beta \Longleftrightarrow W^u(R_\alpha) \cap W^s(R_\beta) \neq \emptyset$$

n'a pas de cycle de longueur > 1.

Il existe donc une relation d'ordre partiel sur l'ensemble des R_α qui prolonge $\triangleright$ et dont le graphe soit minimal pour cette propriété.

Un ensemble basique R_α est attracteur (resp. répulseur) si et seulement si $W^u(R_\alpha) = R_\alpha$ (resp. $W^s(R_\alpha) = R_\alpha$),

La relation

$$R_\alpha \triangleright R_\beta \Longleftrightarrow W^u(R_\alpha) \cap W^s(R_\beta) \neq \emptyset$$

n'a pas de cycle de longueur > 1.

Il existe donc une relation d'ordre partiel sur l'ensemble des R_α qui prolonge $\triangleright$ et dont le graphe soit minimal pour cette propriété.

Un ensemble basique R_α est attracteur (resp. répulseur) si et seulement si $W^u(R_\alpha) = R_\alpha$ (resp. $W^s(R_\alpha) = R_\alpha$), c'est-à-dire si et seulement si il est minimal (resp. maximal) pour cet ordre partiel.

Dynamique symbolique: le décalage

Soit $\mathcal{A}$ un alphabet fini.

Dynamique symbolique: le décalage

Soit $\mathcal{A}$ un alphabet fini.

Le *décalage (complet, bilatéral)* est l'homéomorphisme σ de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ défini pour $\underline{\theta} = (\theta_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ par

$$(\sigma(\underline{\theta}))_n = \theta_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Dynamique symbolique: le décalage

Soit $\mathcal{A}$ un alphabet fini.

Le *décalage (complet, bilatéral)* est l'homéomorphisme σ de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ défini pour $\underline{\theta} = (\theta_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ par

$$(\sigma(\underline{\theta}))_n = \theta_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

La même formule définit une application continue surjective σ_+ de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}_+}$ dans lui même appelée *décalage (complet) unilatéral*.

Dynamique symbolique: le décalage

Soit $\mathcal{A}$ un alphabet fini.

Le *décalage (complet, bilatéral)* est l'homéomorphisme σ de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ défini pour $\underline{\theta} = (\theta_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ par

$$(\sigma(\underline{\theta}))_n = \theta_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

La même formule définit une application continue surjective σ_+ de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}_+}$ dans lui même appelée *décalage (complet) unilatéral*.

La restriction de σ (ou σ_+) à une partie fermée invariante de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ est un *sous-décalage*.

Sous-décalages de type fini

Soit $\mathcal{B}$ une partie de $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$.

Sous-décalages de type fini

Soit $\mathcal{B}$ une partie de $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$. L'ensemble

$$\Sigma_{\mathcal{B}} := \{\underline{\theta} \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \mid (\theta_n, \theta_{n+1}) \in \mathcal{B},\ \forall n \in \mathbb{Z}\}$$

est compact et invariant par σ;

Sous-décalages de type fini

Soit $\mathcal{B}$ une partie de $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$. L'ensemble

$$\Sigma_{\mathcal{B}} := \{\underline{\theta} \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \,|\, (\theta_n, \theta_{n+1}) \in \mathcal{B}, \ \forall n \in \mathbb{Z}\}$$

est compact et invariant par σ; c'est le *sous-décalage de type fini* défini par $\mathcal{B}$.

Sous-décalages de type fini

Soit $\mathcal{B}$ une partie de $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$. L'ensemble

$$\Sigma_{\mathcal{B}} := \{\underline{\theta} \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \,|\, (\theta_n, \theta_{n+1}) \in \mathcal{B},\ \forall n \in \mathbb{Z}\}$$

est compact et invariant par σ; c'est le *sous-décalage de type fini* défini par $\mathcal{B}$. On définit de même $\Sigma_{\mathcal{B}}^{+} \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}_+}$.

Sous-décalages de type fini

Soit $\mathcal{B}$ une partie de $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$. L'ensemble

$$\Sigma_{\mathcal{B}} := \{\underline{\theta} \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \,|\, (\theta_n, \theta_{n+1}) \in \mathcal{B},\ \forall n \in \mathbb{Z}\}$$

est compact et invariant par σ; c'est le *sous-décalage de type fini* défini par $\mathcal{B}$. On définit de même $\Sigma_{\mathcal{B}}^{+} \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}_+}$.

Exemple: Soit d un entier $\geqslant 1$. Posons $\mathcal{A}' := \mathcal{A}^d$.

Sous-décalages de type fini

Soit $\mathcal{B}$ une partie de $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$. L'ensemble

$$\Sigma_{\mathcal{B}} := \{\underline{\theta} \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \,|\, (\theta_n, \theta_{n+1}) \in \mathcal{B}, \ \forall n \in \mathbb{Z}\}$$

est compact et invariant par σ; c'est le *sous-décalage de type fini* défini par $\mathcal{B}$. On définit de même $\Sigma_{\mathcal{B}}^{+} \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}_+}$.

Exemple: Soit d un entier $\geqslant 1$. Posons $\mathcal{A}' := \mathcal{A}^d$. L'application $i_d = i : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \to (\mathcal{A}')^{\mathbb{Z}}$ définie par

$$(i(\underline{\theta}))_n = (\theta_n, \ldots, \theta_{n+d-1}) \in \mathcal{A}'$$

Sous-décalages de type fini

Soit $\mathcal{B}$ une partie de $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$. L'ensemble

$$\Sigma_{\mathcal{B}} := \{\underline{\theta} \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \mid (\theta_n, \theta_{n+1}) \in \mathcal{B},\ \forall n \in \mathbb{Z}\}$$

est compact et invariant par σ; c'est le *sous-décalage de type fini* défini par $\mathcal{B}$. On définit de même $\Sigma_{\mathcal{B}}^{+} \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}_+}$.

Exemple: Soit d un entier $\geqslant 1$. Posons $\mathcal{A}' := \mathcal{A}^d$. L'application $i_d = i : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \to (\mathcal{A}')^{\mathbb{Z}}$ définie par

$$(i(\underline{\theta}))_n = (\theta_n, \ldots, \theta_{n+d-1}) \in \mathcal{A}'$$

est une conjugaison entre le décalage complet sur $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ et le sous-décalage de type fini sur $(\mathcal{A}')^{\mathbb{Z}}$ défini par

$$\mathcal{B}_d = \{(\underline{\theta}, \underline{\theta}') \in \mathcal{A}^d \times \mathcal{A}^d \mid \theta_{n+1} = \theta'_n, \quad \forall 1 \leqslant n < d\}.$$

Une caractérisation des sous-décalages de type fini

Proposition: Soit Σ une partie fermée invariante de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

Une caractérisation des sous-décalages de type fini

Proposition: Soit Σ une partie fermée invariante de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. Σ est localement maximale: il existe un voisinage W de Σ tel que $\Sigma = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} \sigma^{-n}(W)$.

Une caractérisation des sous-décalages de type fini

Proposition: Soit Σ une partie fermée invariante de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. Σ est localement maximale: il existe un voisinage W de Σ tel que $\Sigma = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} \sigma^{-n}(W)$.
2. Il existe un entier $d \geqslant 1$ tel que l'image $i_d(\Sigma) \subset (\mathcal{A}^d)^{\mathbb{Z}}$ soit un sous-décalage de type fini de $(\mathcal{A}^d)^{\mathbb{Z}}$.

Mélange topologique pour les sous-décalages de type fini

Le décalage complet σ sur $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ est topologiquement mélangeant, donc aussi transitif.

Mélange topologique pour les sous-décalages de type fini

Le décalage complet σ sur $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ est topologiquement mélangeant, donc aussi transitif.

Soit $\mathcal{B}$ une partie de $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$. Quand le sous-décalage de type fini défini par $\mathcal{B}$ est-il transitif? topologiquement mélangeant?

Mélange topologique pour les sous-décalages de type fini

Le décalage complet σ sur $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ est topologiquement mélangeant, donc aussi transitif.

Soit $\mathcal{B}$ une partie de $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$. Quand le sous-décalage de type fini défini par $\mathcal{B}$ est-il transitif? topologiquement mélangeant?

Notons Γ_B le graphe orienté dont les sommets sont les éléments de $\mathcal{A}$ et qui a une arête de a vers a' pour chaque paire $(a, a') \in \mathcal{B}$.

Mélange topologique pour les sous-décalages de type fini

Le décalage complet σ sur $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ est topologiquement mélangeant, donc aussi transitif.

Soit $\mathcal{B}$ une partie de $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$. Quand le sous-décalage de type fini défini par $\mathcal{B}$ est-il transitif? topologiquement mélangeant?

Notons Γ_B le graphe orienté dont les sommets sont les éléments de $\mathcal{A}$ et qui a une arête de a vers a' pour chaque paire $(a, a') \in \mathcal{B}$. Notons aussi $A = A_{\mathcal{B}}$ la matrice indexée par les éléments de $\mathcal{A}$ définie par

$$A_{a,a'} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad (a, a') \in \mathcal{B} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Mélange topologique pour les sous-décalages de type fini

Le décalage complet σ sur $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ est topologiquement mélangeant, donc aussi transitif.

Soit $\mathcal{B}$ une partie de $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$. Quand le sous-décalage de type fini défini par $\mathcal{B}$ est-il transitif? topologiquement mélangeant?

Notons Γ_B le graphe orienté dont les sommets sont les éléments de $\mathcal{A}$ et qui a une arête de a vers a' pour chaque paire $(a, a') \in \mathcal{B}$. Notons aussi $A = A_{\mathcal{B}}$ la matrice indexée par les éléments de $\mathcal{A}$ définie par

$$A_{a,a'} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad (a, a') \in \mathcal{B} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour $m \geqslant 0$, le coefficient en position (a, a') dans $A_{\mathcal{B}}^m$ est le nombre de chemins de longueur m allant de a à a' dans Γ_B.

Sans perte de généralité, on peut supposer que tout sommet de Γ_B est origine d'au moins une arête et aussi extrémité d'au moins une arête.

Sans perte de généralité, on peut supposer que tout sommet de Γ_B est origine d'au moins une arête et aussi extrémité d'au moins une arête.

Proposition: Le sous-décalage défini par $\mathcal{B}$ est transitif si et seulement si le graphe $\Gamma_{\mathcal{B}}$ est *fortement connexe*: pour tous sommets a, a', il existe un chemin orienté de a à a'.

Proposition: Supposons que $\Gamma_{\mathcal{B}}$ soit fortement connexe.

Proposition: Supposons que $\Gamma_{\mathcal{B}}$ soit fortement connexe. Appelons *période* du sous-décalage l' entier $s \geqslant 1$ p.g.c.d. de la longueur des lacets de $\Gamma_{\mathcal{B}}$.

Proposition: Supposons que $\Gamma_{\mathcal{B}}$ soit fortement connexe. Appelons *période* du sous-décalage l' entier $s \geqslant 1$ p.g.c.d. de la longueur des lacets de $\Gamma_{\mathcal{B}}$. Il existe une partition de l'alphabet

$$\mathcal{A} = \bigsqcup_{i \in \mathbb{Z}_s} \mathcal{A}_i$$

Proposition: Supposons que $\Gamma_{\mathcal{B}}$ soit fortement connexe. Appelons *période* du sous-décalage l' entier $s \geqslant 1$ p.g.c.d. de la longueur des lacets de $\Gamma_{\mathcal{B}}$. Il existe une partition de l'alphabet

$$\mathcal{A} = \bigsqcup_{i \in \mathbb{Z}_s} \mathcal{A}_i$$

telle que, si on pose

$$\Sigma_i = \{\underline{\theta} \in \Sigma_{\mathcal{B}} \mid \theta_0 \in \mathcal{A}_i\},$$

Proposition: Supposons que $\Gamma_{\mathcal{B}}$ soit fortement connexe. Appelons *période* du sous-décalage l' entier $s \geqslant 1$ p.g.c.d. de la longueur des lacets de $\Gamma_{\mathcal{B}}$. Il existe une partition de l'alphabet

$$\mathcal{A} = \bigsqcup_{i \in \mathbb{Z}_s} \mathcal{A}_i$$

telle que, si on pose

$$\Sigma_i = \{\underline{\theta} \in \Sigma_{\mathcal{B}} \mid \theta_0 \in \mathcal{A}_i\},$$

alors on a $\sigma(\Sigma_i) = \Sigma_{i+1}$ pour tout $i \in \mathbb{Z}_s$

Proposition: Supposons que $\Gamma_{\mathcal{B}}$ soit fortement connexe. Appelons *période* du sous-décalage l' entier $s \geqslant 1$ p.g.c.d. de la longueur des lacets de $\Gamma_{\mathcal{B}}$. Il existe une partition de l'alphabet

$$\mathcal{A} = \bigsqcup_{i \in \mathbb{Z}_s} \mathcal{A}_i$$

telle que, si on pose

$$\Sigma_i = \{\underline{\theta} \in \Sigma_{\mathcal{B}} \mid \theta_0 \in \mathcal{A}_i\},$$

alors on a $\sigma(\Sigma_i) = \Sigma_{i+1}$ pour tout $i \in \mathbb{Z}_s$ et $\sigma^s_{|\Sigma_i}$ est topologiquement mélangeant.