Quelques aspects de la théorie des systèmes dynamiques hyperboliques(1)

Jean-Christophe Yoccoz

Collège de France

21 janvier 2015

Une référence pour la théorie uniformément hyperbolique est:

J.C.Yoccoz, *Introduction to Hyperbolic Dynamics*, in Real and Complex Dynamics (Hillerod, 1993), 265-291, NATO Adv.Sci.Inst.Ser.C Math. Phys. Sci., 464, Klüwer Acad. Publ., Dordrecht,1995.

Automorphismes linéaires hyperboliques

Definition: Un automorphisme linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie est *hyperbolique* si aucune de ses valeurs propres (complexes) n'est de module 1.

Automorphismes linéaires hyperboliques

Definition: Un automorphisme linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie est *hyperbolique* si aucune de ses valeurs propres (complexes) n'est de module 1.

Plus généralement,une automorphisme linéaire d'un espace de Banach est *hyperbolique* si son spectre ne rencontre pas le cercle unité.

Automorphismes linéaires hyperboliques

Definition: Un automorphisme linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie est *hyperbolique* si aucune de ses valeurs propres (complexes) n'est de module 1.

Plus généralement,une automorphisme linéaire d'un espace de Banach est *hyperbolique* si son spectre ne rencontre pas le cercle unité.

Dans le groupe des automorphismes linéaires d'un espace de Banach, les automorphismes hyperboliques forment une partie ouverte.

Automorphismes linéaires hyperboliques

Definition: Un automorphisme linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie est *hyperbolique* si aucune de ses valeurs propres (complexes) n'est de module 1.

Plus généralement,une automorphisme linéaire d'un espace de Banach est *hyperbolique* si son spectre ne rencontre pas le cercle unité.

Dans le groupe des automorphismes linéaires d'un espace de Banach, les automorphismes hyperboliques forment une partie ouverte.

Proposition: Un automorphisme linéaire T d'un espace de Banach E est hyperbolique ssi il existe une décomposition continue $E = E_s \oplus E_u$ en sous-espaces fermés T-invariants et des constantes $C > 0$, $\lambda \in (0,1)$ telles qu'on ait, pour tout $n \geqslant 0$,

$$\| T^n_{|E_s} \| \leqslant C\lambda^n, \quad \| T^{-n}_{|E_u} \| \leqslant C\lambda^n.$$

Automorphismes linéaires hyperboliques

Definition: Un automorphisme linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie est *hyperbolique* si aucune de ses valeurs propres (complexes) n'est de module 1.

Plus généralement,une automorphisme linéaire d'un espace de Banach est *hyperbolique* si son spectre ne rencontre pas le cercle unité.

Dans le groupe des automorphismes linéaires d'un espace de Banach, les automorphismes hyperboliques forment une partie ouverte.

Proposition: Un automorphisme linéaire T d'un espace de Banach E est hyperbolique ssi il existe une décomposition continue $E = E_s \oplus E_u$ en sous-espaces fermés T-invariants et des constantes $C > 0$, $\lambda \in (0, 1)$ telles qu'on ait, pour tout $n \geqslant 0$,

$$\| T^n_{|E_s} \| \leqslant C\lambda^n, \quad \| T^{-n}_{|E_u} \| \leqslant C\lambda^n.$$

Remarque: Quitte à remplacer la norme de E par une norme équivalente, on peut prendre $C = 1$ dans les inégalités précédentes.

Points fixes hyperboliques

Soient E un espace de Banach, U une partie ouverte de E, et $f : U \to E$ une application de classe C^1.

Soient E un espace de Banach, U une partie ouverte de E, et $f : U \to E$ une application de classe C^1.

Définition: Un point fixe x^* de f est hyperbolique si l'application tangente $T_{x^*} f$ est un automorphisme linéaire hyperbolique de E.

Points fixes hyperboliques

Soient E un espace de Banach, U une partie ouverte de E, et $f : U \to E$ une application de classe C^1.

Définition: Un point fixe x^* de f est hyperbolique si l'application tangente $T_{x^*} f$ est un automorphisme linéaire hyperbolique de E.

Théorème: (Hartman-Grobman) Soit T un automorphisme linéaire hyperbolique de E. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que, si $\Delta f : E \to E$ est une application Lipschitzienne bornée vérifiant $\mathrm{Lip}(\Delta f) < \varepsilon$,

Points fixes hyperboliques

Soient E un espace de Banach, U une partie ouverte de E, et $f : U \to E$ une application de classe C^1.

Définition: Un point fixe x^* de f est hyperbolique si l'application tangente $T_{x^*} f$ est un automorphisme linéaire hyperbolique de E.

Théorème: (Hartman-Grobman) Soit T un automorphisme linéaire hyperbolique de E. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que, si $\Delta f : E \to E$ est une application Lipschitzienne bornée vérifiant $\mathrm{Lip}(\Delta f) < \varepsilon$, alors il existe un unique homéomorphisme $h : E \to E$ tel que $h - \mathrm{id}_E$ soit bornée et qu'on ait

$$h \circ T \circ h^{-1} = T + \Delta f.$$

Points fixes hyperboliques

Soient E un espace de Banach, U une partie ouverte de E, et $f : U \to E$ une application de classe C^1.

Définition: Un point fixe x^* de f est hyperbolique si l'application tangente $T_{x^*} f$ est un automorphisme linéaire hyperbolique de E.

Théorème: (Hartman-Grobman) Soit T un automorphisme linéaire hyperbolique de E. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que, si $\Delta f : E \to E$ est une application Lipschitzienne bornée vérifiant $\mathrm{Lip}(\Delta f) < \varepsilon$, alors il existe un unique homéomorphisme $h : E \to E$ tel que $h - \mathrm{id}_E$ soit bornée et qu'on ait

$$h \circ T \circ h^{-1} = T + \Delta f.$$

Corollaire: La dynamique au voisinage d'un point fixe hyperbolique est topologiquement conjuguée à celle de l'application tangente.

Théorème de linéarisation de Sternberg

Théorème: (Sternberg) Soient E un espace vectoriel de dimension finie, U une partie ouverte de E, $f : U \to E$ une application de classe C^∞, et x^* un point fixe hyperbolique de f.

Théorème de linéarisation de Sternberg

Théorème: (Sternberg) Soient E un espace vectoriel de dimension finie, U une partie ouverte de E, $f : U \to E$ une application de classe C^∞, et x^* un point fixe hyperbolique de f. On suppose que $T_{x^*} f$ est non-résonante.

Théorème de linéarisation de Sternberg

Théorème: (Sternberg) Soient E un espace vectoriel de dimension finie, U une partie ouverte de E, $f : U \to E$ une application de classe C^∞, et x^* un point fixe hyperbolique de f. On suppose que $T_{x^*}f$ est non-résonante. Alors f est C^∞-linéarisable au voisinage de x^*: il existe un C^∞-difféomorphisme local $h : (E, x^*) \to (E, 0)$ tel que

$$h \circ f \circ h^{-1} = T_{x^*}f.$$

Théorème de linéarisation de Sternberg

Théorème: (Sternberg) Soient E un espace vectoriel de dimension finie, U une partie ouverte de E, $f : U \to E$ une application de classe C^∞, et x^* un point fixe hyperbolique de f. On suppose que $T_{x^*}f$ est non-résonante. Alors f est C^∞-linéarisable au voisinage de x^*: il existe un C^∞-difféomorphisme local $h : (E, x^*) \to (E, 0)$ tel que

$$h \circ f \circ h^{-1} = T_{x^*}f.$$

Un automorphisme linéaire est *non-résonant* si ses valeurs propres (complexes) ne vérifient aucune relation (résonance) de la forme

$$\lambda_i = \lambda_1^{j_1} \dots \lambda_n^{j_n}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \quad j_m \geqslant 0, \sum_1^n j_m \geqslant 2.$$

Le théorème de la variété stable

Soit T un automorphisme linéaire d'un espace de Banach E.

Le théorème de la variété stable

Soit T un automorphisme linéaire d'un espace de Banach E. Soient $0 < \kappa_s < \kappa_u$ des nombres réels tels que le spectre de T soit disjoint de l'anneau $\kappa_s \leqslant |\lambda| \leqslant \kappa_u$.

Le théorème de la variété stable

Soit T un automorphisme linéaire d'un espace de Banach E. Soient $0 < \kappa_s < \kappa_u$ des nombres réels tels que le spectre de T soit disjoint de l'anneau $\kappa_s \leqslant |\lambda| \leqslant \kappa_u$. Soit $E = E_s \oplus E_u$ la décomposition de E en sous-espaces T-invariants correspondant à cette partition du spectre de T.

Le théorème de la variété stable

Soit T un automorphisme linéaire d'un espace de Banach E. Soient $0 < \kappa_s < \kappa_u$ des nombres réels tels que le spectre de T soit disjoint de l'anneau $\kappa_s \leqslant |\lambda| \leqslant \kappa_u$. Soit $E = E_s \oplus E_u$ la décomposition de E en sous-espaces T-invariants correspondant à cette partition du spectre de T.

Théorème: Soit $\kappa \in (\kappa_s, \kappa_u)$. Soit $f : E \to E$ une application Lipschitzienne vérifiant $f(0) = 0$ et $\mathrm{Lip}(f - T) < \min(\kappa - \kappa_s, \kappa_u - \kappa)$.

Le théorème de la variété stable

Soit T un automorphisme linéaire d'un espace de Banach E. Soient $0 < \kappa_s < \kappa_u$ des nombres réels tels que le spectre de T soit disjoint de l'anneau $\kappa_s \leqslant |\lambda| \leqslant \kappa_u$. Soit $E = E_s \oplus E_u$ la décomposition de E en sous-espaces T-invariants correspondant à cette partition du spectre de T.

Théorème: Soit $\kappa \in (\kappa_s, \kappa_u)$. Soit $f : E \to E$ une application Lipschitzienne vérifiant $f(0) = 0$ et $\mathrm{Lip}(f - T) < \min(\kappa - \kappa_s, \kappa_u - \kappa)$. Alors l'ensemble

$$W^s_\kappa(f) := \{x \in E, \sup_{n \to +\infty} \kappa^{-n} ||f^n(x)|| < +\infty\}$$

est le graphe d'une application contractante $g : E_s \to E_u$ vérifiant $g(0) = 0$.

Le théorème de la variété stable

Soit T un automorphisme linéaire d'un espace de Banach E. Soient $0 < \kappa_s < \kappa_u$ des nombres réels tels que le spectre de T soit disjoint de l'anneau $\kappa_s \leqslant |\lambda| \leqslant \kappa_u$. Soit $E = E_s \oplus E_u$ la décomposition de E en sous-espaces T-invariants correspondant à cette partition du spectre de T.

Théorème: Soit $\kappa \in (\kappa_s, \kappa_u)$. Soit $f : E \to E$ une application Lipschitzienne vérifiant $f(0) = 0$ et $\mathrm{Lip}(f - T) < \min(\kappa - \kappa_s, \kappa_u - \kappa)$. Alors l'ensemble

$$W^s_\kappa(f) := \{x \in E, \sup_{n \to +\infty} \kappa^{-n} ||f^n(x)|| < +\infty\}$$

est le graphe d'une application contractante $g : E_s \to E_u$ vérifiant $g(0) = 0$. De plus, pour $x \in W^s_\kappa(f)$, on a

$$\lim_{n \to +\infty} \kappa^{-n} ||f^n(x)|| = 0.$$

Régularité de la variété stable

Remarque: L'ensemble $W^s_\kappa(f)$ ne dépend pas de κ (à condition que $\mathrm{Lip}(f - T) < \min(\kappa - \kappa_s, \kappa_u - \kappa)$).

Régularité de la variété stable

Remarque: L'ensemble $W^s_\kappa(f)$ ne dépend pas de κ (à condition que $\mathrm{Lip}(f - T) < \min(\kappa - \kappa_s, \kappa_u - \kappa)$).

L'ensemble $W^s_\kappa(f)$ est appelé *variété stable* lorsque $\kappa_s < 1 < \kappa_u$,

Régularité de la variété stable

Remarque: L'ensemble $W^s_\kappa(f)$ ne dépend pas de κ (à condition que $\mathrm{Lip}(f - T) < \min(\kappa - \kappa_s, \kappa_u - \kappa)$).

L'ensemble $W^s_\kappa(f)$ est appelé *variété stable* lorsque $\kappa_s < 1 < \kappa_u$, *variété stable forte* lorsque $\kappa_u \leqslant 1$,

Régularité de la variété stable

Remarque: L'ensemble $W^s_\kappa(f)$ ne dépend pas de κ (à condition que $\mathrm{Lip}(f - T) < \min(\kappa - \kappa_s, \kappa_u - \kappa)$).

L'ensemble $W^s_\kappa(f)$ est appelé *variété stable* lorsque $\kappa_s < 1 < \kappa_u$, *variété stable forte* lorsque $\kappa_u \leqslant 1$, *variété centrale-stable* lorsque $\kappa_s \geqslant 1$.

Régularité de la variété stable

Remarque: L'ensemble $W^s_\kappa(f)$ ne dépend pas de κ (à condition que $\mathrm{Lip}(f - T) < \min(\kappa - \kappa_s, \kappa_u - \kappa)$).

L'ensemble $W^s_\kappa(f)$ est appelé *variété stable* lorsque $\kappa_s < 1 < \kappa_u$, *variété stable forte* lorsque $\kappa_u \leqslant 1$, *variété centrale-stable* lorsque $\kappa_s \geqslant 1$.

Proposition: Lorsque $\kappa < 1$ et f est de classe C^r (r real $\geqslant 1, r = \infty, \omega$), alors g est aussi de classe C^r.

Régularité de la variété stable

Remarque: L'ensemble $W^s_\kappa(f)$ ne dépend pas de κ (à condition que $\mathrm{Lip}(f - T) < \min(\kappa - \kappa_s, \kappa_u - \kappa)$).

L'ensemble $W^s_\kappa(f)$ est appelé *variété stable* lorsque $\kappa_s < 1 < \kappa_u$, *variété stable forte* lorsque $\kappa_u \leqslant 1$, *variété centrale-stable* lorsque $\kappa_s \geqslant 1$.

Proposition: Lorsque $\kappa < 1$ et f est de classe C^r (r real $\geqslant 1, r = \infty, \omega$), alors g est aussi de classe C^r. De plus, $D_0 g = 0$ si $D_0(f - T) = 0$.

Régularité de la variété stable

Remarque: L'ensemble $W^s_\kappa(f)$ ne dépend pas de κ (à condition que $\mathrm{Lip}(f - T) < \min(\kappa - \kappa_s, \kappa_u - \kappa)$).

L'ensemble $W^s_\kappa(f)$ est appelé *variété stable* lorsque $\kappa_s < 1 < \kappa_u$, *variété stable forte* lorsque $\kappa_u \leqslant 1$, *variété centrale-stable* lorsque $\kappa_s \geqslant 1$.

Proposition: Lorsque $\kappa < 1$ et f est de classe C^r (r real $\geqslant 1$,$r = \infty, \omega$), alors g est aussi de classe C^r. De plus, $D_0 g = 0$ si $D_0(f - T) = 0$.

Remarque: Lorsque $\mathrm{Lip}(f - T)$ est assez petit, f est un homéomorphisme bilipschitzien et f^{-1} satisfait les hypothèses du théorème.

Remarque: L'ensemble $W^s_\kappa(f)$ ne dépend pas de κ (à condition que $\mathrm{Lip}(f - T) < \min(\kappa - \kappa_s, \kappa_u - \kappa)$).

L'ensemble $W^s_\kappa(f)$ est appelé *variété stable* lorsque $\kappa_s < 1 < \kappa_u$, *variété stable forte* lorsque $\kappa_u \leqslant 1$, *variété centrale-stable* lorsque $\kappa_s \geqslant 1$.

Proposition: Lorsque $\kappa < 1$ et f est de classe C^r (r real $\geqslant 1, r = \infty, \omega$), alors g est aussi de classe C^r. De plus, $D_0 g = 0$ si $D_0(f - T) = 0$.

Remarque: Lorsque $\mathrm{Lip}(f - T)$ est assez petit, f est un homéomorphisme bilipschitzien et f^{-1} satisfait les hypothèses du théorème. On obtient ainsi la variété instable (instable forte, centrale-instable) de f.

Compacts invariants hyperboliques (I)

Soient K un espace métrique compact, f un homéomorphisme de K, $p : E \to K$ un fibré vectoriel banachique sur K et $F : E \to E$ un automorphisme de E au-dessus de f.

Compacts invariants hyperboliques (I)

Soient K un espace métrique compact, f un homéomorphisme de K, $p : E \to K$ un fibré vectoriel banachique sur K et $F : E \to E$ un automorphisme de E au-dessus de f.

Proposition: Les propriétés suivantes sont équivalentes:

Compacts invariants hyperboliques (I)

Soient K un espace métrique compact, f un homéomorphisme de K, $p : E \to K$ un fibré vectoriel banachique sur K et $F : E \to E$ un automorphisme de E au-dessus de f.

Proposition: Les propriétés suivantes sont équivalentes:

1. L'automorphisme $\sigma \mapsto F \circ \sigma \circ f^{-1}$ induit par f sur l'espace des sections continues de p est hyperbolique.

Compacts invariants hyperboliques (I)

Soient K un espace métrique compact, f un homéomorphisme de K, $p : E \to K$ un fibré vectoriel banachique sur K et $F : E \to E$ un automorphisme de E au-dessus de f.

Proposition: Les propriétés suivantes sont équivalentes:

1. L'automorphisme $\sigma \mapsto F \circ \sigma \circ f^{-1}$ induit par f sur l'espace des sections continues de p est hyperbolique.
2. L'automorphisme $\sigma \mapsto F \circ \sigma \circ f^{-1}$ induit par f sur l'espace des sections bornées de p est hyperbolique.

Compacts invariants hyperboliques (I)

Soient K un espace métrique compact, f un homéomorphisme de K, $p : E \to K$ un fibré vectoriel banachique sur K et $F : E \to E$ un automorphisme de E au-dessus de f.

Proposition: Les propriétés suivantes sont équivalentes:

1. L'automorphisme $\sigma \mapsto F \circ \sigma \circ f^{-1}$ induit par f sur l'espace des sections continues de p est hyperbolique.
2. L'automorphisme $\sigma \mapsto F \circ \sigma \circ f^{-1}$ induit par f sur l'espace des sections bornées de p est hyperbolique.
3. Il existe une décomposition continue $E = E_s \oplus E_u$ de E en sous-fibrés fermés F-invariants et des constantes $C > 1$, $\lambda \in (0, 1)$ telles qu'on ait, pour tout $n \geqslant 0$

$$\|F^n_{|E_s}\| \leqslant C\lambda^n, \quad \|F^{-n}_{|E_u}\| \leqslant C\lambda^n.$$

Compacts invariants hyperboliques (I)

Soient K un espace métrique compact, f un homéomorphisme de K, $p : E \to K$ un fibré vectoriel banachique sur K et $F : E \to E$ un automorphisme de E au-dessus de f.

Proposition: Les propriétés suivantes sont équivalentes:

1. L'automorphisme $\sigma \mapsto F \circ \sigma \circ f^{-1}$ induit par f sur l'espace des sections continues de p est hyperbolique.
2. L'automorphisme $\sigma \mapsto F \circ \sigma \circ f^{-1}$ induit par f sur l'espace des sections bornées de p est hyperbolique.
3. Il existe une décomposition continue $E = E_s \oplus E_u$ de E en sous-fibrés fermés F-invariants et des constantes $C > 1$, $\lambda \in (0, 1)$ telles qu'on ait, pour tout $n \geqslant 0$

$$\|F^n_{|E_s}\| \leqslant C\lambda^n, \quad \|F^{-n}_{|E_u}\| \leqslant C\lambda^n.$$

Lorsque ces propriétés sont satisfaites, on dit que F est *hyperbolique*.

Compacts invariants hyperboliques (I)

Soient K un espace métrique compact, f un homéomorphisme de K, $p : E \to K$ un fibré vectoriel banachique sur K et $F : E \to E$ un automorphisme de E au-dessus de f.

Proposition: Les propriétés suivantes sont équivalentes:

1. L'automorphisme $\sigma \mapsto F \circ \sigma \circ f^{-1}$ induit par f sur l'espace des sections continues de p est hyperbolique.
2. L'automorphisme $\sigma \mapsto F \circ \sigma \circ f^{-1}$ induit par f sur l'espace des sections bornées de p est hyperbolique.
3. Il existe une décomposition continue $E = E_s \oplus E_u$ de E en sous-fibrés fermés F-invariants et des constantes $C > 1$, $\lambda \in (0, 1)$ telles qu'on ait, pour tout $n \geqslant 0$

$$\|F^n_{|E_s}\| \leqslant C\lambda^n, \quad \|F^{-n}_{|E_u}\| \leqslant C\lambda^n.$$

Lorsque ces propriétés sont satisfaites, on dit que F est *hyperbolique*. Les décompositions de l'espace des sections bornées / continues de p sont celles associées à la décomposition de E.

Compacts invariants hyperboliques (II)

Soient M une variété, U une partie ouverte de M, $f : U \to M$ un plongement de classe C^1, K une partie compacte de U qui est préservée par f.

Compacts invariants hyperboliques (II)

Soient M une variété, U une partie ouverte de M, $f : U \to M$ un plongement de classe C^1, K une partie compacte de U qui est préservée par f.

Définition: Le compact invariant K est *hyperbolique* si la restriction de l'application tangente Tf au fibré vectoriel $TM_{|K}$ est hyperbolique.

Le critère des champs de cônes

Soient K un espace métrique compact, f un homéomorphisme de K, $p : E \to K$ un fibré vectoriel banachique sur K et $F : E \to E$ un automorphisme de E au-dessus de f.

Le critère des champs de cônes

Soient K un espace métrique compact, f un homéomorphisme de K, $p : E \to K$ un fibré vectoriel banachique sur K et $F : E \to E$ un automorphisme de E au-dessus de f.

Supposons qu'on ait, pour chaque $x \in K$, une décomposition $E_x = E_{1,x} \oplus E_{2,x}$ de la fibre de E en x en sous-espaces fermés (on ne suppose **pas** que $E_{i,x}$ dépende continument de x).

Le critère des champs de cônes

Soient K un espace métrique compact, f un homéomorphisme de K, $p : E \to K$ un fibré vectoriel banachique sur K et $F : E \to E$ un automorphisme de E au-dessus de f.

Supposons qu'on ait, pour chaque $x \in K$, une décomposition $E_x = E_{1,x} \oplus E_{2,x}$ de la fibre de E en x en sous-espaces fermés (on ne suppose **pas** que $E_{i,x}$ dépende continument de x). Supposons que chaque $E_{i,x}$ soit muni d'une norme $\| \quad \|_{i,x}$ et qu'il existe une constante $C > 1$ telle qu'on ait

$$C^{-1} \max(||v_1||_{1,x}, ||v_2||_{2,x}) \leqslant ||v_1 + v_2|| \leqslant C \max(||v_1||_{1,x}, ||v_2||_{2,x}),$$

pour tous $x \in K$, $v_1 \in E_{1,x}$, $v_2 \in E_{2,x}$.

Le critère des champs de cônes

Soient K un espace métrique compact, f un homéomorphisme de K, $p : E \to K$ un fibré vectoriel banachique sur K et $F : E \to E$ un automorphisme de E au-dessus de f.

Supposons qu'on ait, pour chaque $x \in K$, une décomposition $E_x = E_{1,x} \oplus E_{2,x}$ de la fibre de E en x en sous-espaces fermés (on ne suppose **pas** que $E_{i,x}$ dépende continument de x). Supposons que chaque $E_{i,x}$ soit muni d'une norme $\| \quad \|_{i,x}$ et qu'il existe une constante $C > 1$ telle qu'on ait

$$C^{-1} \max(||v_1||_{1,x}, ||v_2||_{2,x}) \leqslant ||v_1 + v_2|| \leqslant C \max(||v_1||_{1,x}, ||v_2||_{2,x}),$$

pour tous $x \in K$, $v_1 \in E_{1,x}$, $v_2 \in E_{2,x}$.

Pour $\lambda > 0$, considérons les cônes de pente λ associés à cette décomposition

$$\mathcal{C}_\lambda(x) = \{v = v_1 + v_2 \in E_x,\ ||v_1||_{1,x} \leqslant \lambda ||v_2||_{2,x}\},$$

$$\mathcal{C}^*_\lambda(x) = \{v = v_1 + v_2 \in E_x,\ ||v_2||_{2,x} \leqslant \lambda ||v_1||_{1,x}\}.$$

Proposition: Supposons qu'il existe $\lambda \in (0, 1)$, $\mu > 1$ et un entier $m \geqslant 1$ tels qu'on ait, pour chaque $x \in K$

Proposition: Supposons qu'il existe $\lambda \in (0,1)$, $\mu > 1$ et un entier $m \geqslant 1$ tels qu'on ait, pour chaque $x \in K$

1. $F(\mathcal{C}_{\lambda^{-1}}(x)) \subset \mathcal{C}_\lambda(f(x))$ ($\iff F^{-1}(\mathcal{C}^*_{\lambda^{-1}}(f(x))) \subset \mathcal{C}^*_\lambda(x)$);

Proposition: Supposons qu'il existe $\lambda \in (0,1)$, $\mu > 1$ et un entier $m \geqslant 1$ tels qu'on ait, pour chaque $x \in K$

1. $F(\mathcal{C}_{\lambda^{-1}}(x)) \subset \mathcal{C}_{\lambda}(f(x))$ ($\iff F^{-1}(\mathcal{C}^*_{\lambda^{-1}}(f(x))) \subset \mathcal{C}^*_{\lambda}(x)$);
2. $E_x = F(E_{1,f^{-1}(x)}) \oplus E_{2,x} = E_{1,x} \oplus F^{-1}(E_{2,f(x)})$;

Proposition: Supposons qu'il existe $\lambda \in (0,1)$, $\mu > 1$ et un entier $m \geqslant 1$ tels qu'on ait, pour chaque $x \in K$

1. $F(\mathcal{C}_{\lambda^{-1}}(x)) \subset \mathcal{C}_{\lambda}(f(x))$ ($\iff F^{-1}(\mathcal{C}^*_{\lambda^{-1}}(f(x))) \subset \mathcal{C}^*_{\lambda}(x)$);
2. $E_x = F(E_{1,f^{-1}(x)}) \oplus E_{2,x} = E_{1,x} \oplus F^{-1}(E_{2,f(x)})$;
3. $||F^m(v)||_{f^m(x)} \geqslant \mu ||v||_x, \qquad \forall v \in \mathcal{C}_{\lambda^{-1}}(x)$;

Proposition: Supposons qu'il existe $\lambda \in (0,1)$, $\mu > 1$ et un entier $m \geqslant 1$ tels qu'on ait, pour chaque $x \in K$

1. $F(\mathcal{C}_{\lambda^{-1}}(x)) \subset \mathcal{C}_{\lambda}(f(x))$ ($\iff F^{-1}(\mathcal{C}^*_{\lambda^{-1}}(f(x))) \subset \mathcal{C}^*_{\lambda}(x)$);
2. $E_x = F(E_{1,f^{-1}(x)}) \oplus E_{2,x} = E_{1,x} \oplus F^{-1}(E_{2,f(x)})$;
3. $||F^m(v)||_{f^m(x)} \geqslant \mu ||v||_x, \qquad \forall v \in \mathcal{C}_{\lambda^{-1}}(x)$;
4. $||F^{-m}(v)||_{f^{-m}(x)} \geqslant \mu ||v||_x, \qquad \forall v \in \mathcal{C}^*_{\lambda^{-1}}(x)$.

Proposition: Supposons qu'il existe $\lambda \in (0,1)$, $\mu > 1$ et un entier $m \geqslant 1$ tels qu'on ait, pour chaque $x \in K$

1. $F(\mathcal{C}_{\lambda^{-1}}(x)) \subset \mathcal{C}_\lambda(f(x))$ ($\iff F^{-1}(\mathcal{C}^*_{\lambda^{-1}}(f(x))) \subset \mathcal{C}^*_\lambda(x)$);
2. $E_x = F(E_{1,f^{-1}(x)}) \oplus E_{2,x} = E_{1,x} \oplus F^{-1}(E_{2,f(x)})$;
3. $||F^m(v)||_{f^m(x)} \geqslant \mu ||v||_x, \qquad \forall v \in \mathcal{C}_{\lambda^{-1}}(x)$;
4. $||F^{-m}(v)||_{f^{-m}(x)} \geqslant \mu ||v||_x, \qquad \forall v \in \mathcal{C}^*_{\lambda^{-1}}(x)$.

Alors F est hyperbolique et on a $E_u(x) \subset C_\lambda(x),\ E_s(x) \subset \mathcal{C}^*_\lambda(x)$ pour tout $x \in K$.

Proposition: Supposons qu'il existe $\lambda \in (0,1)$, $\mu > 1$ et un entier $m \geqslant 1$ tels qu'on ait, pour chaque $x \in K$

1. $F(\mathcal{C}_{\lambda^{-1}}(x)) \subset \mathcal{C}_\lambda(f(x))$ ($\iff$ $F^{-1}(\mathcal{C}^*_{\lambda^{-1}}(f(x))) \subset \mathcal{C}^*_\lambda(x)$);
2. $E_x = F(E_{1,f^{-1}(x)}) \oplus E_{2,x} = E_{1,x} \oplus F^{-1}(E_{2,f(x)})$;
3. $||F^m(v)||_{f^m(x)} \geqslant \mu ||v||_x, \qquad \forall v \in \mathcal{C}_{\lambda^{-1}}(x)$;
4. $||F^{-m}(v)||_{f^{-m}(x)} \geqslant \mu ||v||_x, \qquad \forall v \in \mathcal{C}^*_{\lambda^{-1}}(x)$.

Alors F est hyperbolique et on a $E_u(x) \subset C_\lambda(x),\ E_s(x) \subset \mathcal{C}^*_\lambda(x)$ pour tout $x \in K$.

Remarque: On ne suppose **pas** qu'on a $F(E_{i,x}) = E_{i,f(x)}$.

Une application du critère précédent

Soient M une variété, U une partie ouverte de M, $f : U \to M$ un plongement de classe C^1, K une partie compacte de U qui est préservée par f.

Une application du critère précédent

Soient M une variété, U une partie ouverte de M, $f : U \to M$ un plongement de classe C^1, K une partie compacte de U qui est préservée par f.

Corollaire: Supposons que K soit hyperbolique.

Une application du critère précédent

Soient M une variété, U une partie ouverte de M, $f : U \to M$ un plongement de classe C^1, K une partie compacte de U qui est préservée par f.

Corollaire: Supposons que K soit hyperbolique. Alors, il existe un voisinage compact $W \subset U$ de K tel que l'ensemble (compact) maximal invariant $\cap_{n\in\mathbb{Z}} f^{-n}(W) \supset K$ soit aussi hyperbolique.

Une application du critère précédent

Soient M une variété, U une partie ouverte de M, $f : U \to M$ un plongement de classe C^1, K une partie compacte de U qui est préservée par f.

Corollaire: Supposons que K soit hyperbolique. Alors, il existe un voisinage compact $W \subset U$ de K tel que l'ensemble (compact) maximal invariant $\cap_{n\in\mathbb{Z}} f^{-n}(W) \supset K$ soit aussi hyperbolique.

Définition: L'ensemble compact invariant K est *localement maximal* s'il possède un voisinage compact $W \subset U$ tel que $\cap_{n\in\mathbb{Z}} f^{-n}(W) = K$.

Une application du critère précédent

Soient M une variété, U une partie ouverte de M, $f : U \to M$ un plongement de classe C^1, K une partie compacte de U qui est préservée par f.

Corollaire: Supposons que K soit hyperbolique. Alors, il existe un voisinage compact $W \subset U$ de K tel que l'ensemble (compact) maximal invariant $\cap_{n \in \mathbb{Z}} f^{-n}(W) \supset K$ soit aussi hyperbolique.

Définition: L'ensemble compact invariant K est *localement maximal* s'il possède un voisinage compact $W \subset U$ tel que $\cap_{n \in \mathbb{Z}} f^{-n}(W) = K$.

Remarque: Crovisier a construit un ensemble compact hyperbolique pour un difféomorphisme de $\mathbb{T}^4$ qui n'est pas contenu dans un ensemble compact hyperbolique localement maximal.

Exemples (I):Difféomorphismes d’Anosov

Définition: Soit M une variété compacte connexe. Un difféomorphisme de classe C^1 de M est un *difféomorphisme d’Anosov* si le compact invariant M est hyperbolique.

Exemples (I):Difféomorphismes d'Anosov

Définition: Soit M une variété compacte connexe. Un difféomorphisme de classe C^1 de M est un *difféomorphisme d'Anosov* si le compact invariant M est hyperbolique.

Remarque: La plupart des variétés ne possèdent pas de difféomorphisme d'Anosov.

Exemples (I):Difféomorphismes d'Anosov

Définition: Soit M une variété compacte connexe. Un difféomorphisme de classe C^1 de M est un *difféomorphisme d'Anosov* si le compact invariant M est hyperbolique.

Remarque: La plupart des variétés ne possèdent pas de difféomorphisme d'Anosov.

Les difféomorphismes d'Anosov forment une partie ouverte de $\mathrm{Diff}^1(M)$.

Soit $A \in GL(d, \mathbb{Z})$ une matrice hyperbolique.

Soit $A \in GL(d, \mathbb{Z})$ une matrice hyperbolique. Elle préserve $\mathbb{Z}^d$ donc induit un difféomorphisme (encore noté A) de $\mathbb{T}^d := \mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d$, qui est Anosov.

Soit $A \in GL(d, \mathbb{Z})$ une matrice hyperbolique. Elle préserve $\mathbb{Z}^d$ donc induit un difféomorphisme (encore noté A) de $\mathbb{T}^d := \mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d$, qui est Anosov.

Théorème: (Franks) Toute application continue $f : \mathbb{T}^d \to \mathbb{T}^d$ homotope à A est *semi-conjuguée* à A:

Soit $A \in GL(d, \mathbb{Z})$ une matrice hyperbolique. Elle préserve $\mathbb{Z}^d$ donc induit un difféomorphisme (encore noté A) de $\mathbb{T}^d := \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$, qui est Anosov.

Théorème: (Franks) Toute application continue $f : \mathbb{T}^d \to \mathbb{T}^d$ homotope à A est *semi-conjuguée* à A: Il existe une application continue, surjective, homotope à l'identité $h : \mathbb{T}^d \to \mathbb{T}^d$ vérifiant $h \circ f = A \circ h$.

Soit $A \in GL(d, \mathbb{Z})$ une matrice hyperbolique. Elle préserve $\mathbb{Z}^d$ donc induit un difféomorphisme (encore noté A) de $\mathbb{T}^d := \mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d$, qui est Anosov.

Théorème: (Franks) Toute application continue $f : \mathbb{T}^d \to \mathbb{T}^d$ homotope à A est *semi-conjuguée* à A: Il existe une application continue, surjective, homotope à l'identité $h : \mathbb{T}^d \to \mathbb{T}^d$ vérifiant $h \circ f = A \circ h$.
Si de plus f est Anosov, h est un homéomorphisme.

Soit $A \in GL(d, \mathbb{Z})$ une matrice hyperbolique. Elle préserve $\mathbb{Z}^d$ donc induit un difféomorphisme (encore noté A) de $\mathbb{T}^d := \mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d$, qui est Anosov.

Théorème: (Franks) Toute application continue $f : \mathbb{T}^d \to \mathbb{T}^d$ homotope à A est *semi-conjuguée* à A: Il existe une application continue, surjective, homotope à l'identité $h : \mathbb{T}^d \to \mathbb{T}^d$ vérifiant $h \circ f = A \circ h$.
Si de plus f est Anosov, h est un homéomorphisme.

Inversement, tout difféomorphisme d'Anosov de $\mathbb{T}^d$ est homotope au difféomorphisme induit par une matrice hyperbolique $A \in GL(d, \mathbb{Z})$.

Exemples (II): Le solénoïde

Notons $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| < 1\}$. Définissons $f : \mathbb{T} \times \mathbb{D} \to \mathbb{T} \times \mathbb{D}$ par

$$f(\theta, z) = (2\theta, \frac{1}{2} \exp 2\pi i\theta + \frac{1}{4} z).$$

Exemples (II): Le solénoïde

Notons $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| < 1\}$. Définissons $f : \mathbb{T} \times \mathbb{D} \to \mathbb{T} \times \mathbb{D}$ par

$$f(\theta, z) = (2\theta, \frac{1}{2} \exp 2\pi i\theta + \frac{1}{4} z).$$

Le *solénoïde* est l'ensemble maximal invariant

$$S := \bigcap_{n \geqslant 0} f^n(\mathbb{T} \times \mathbb{D}).$$

Exemples (II): Le solénoïde

Notons $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| < 1\}$. Définissons $f : \mathbb{T} \times \mathbb{D} \to \mathbb{T} \times \mathbb{D}$ par

$$f(\theta, z) = (2\theta, \frac{1}{2} \exp 2\pi i\theta + \frac{1}{4} z).$$

Le *solénoïde* est l'ensemble maximal invariant

$$S := \bigcap_{n \geqslant 0} f^n(\mathbb{T} \times \mathbb{D}).$$

Le solénoïde est compact, connexe et hyperbolique (d'après le critère des champs de cônes).

Exemples (II): Le solénoïde

Notons $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| < 1\}$. Définissons $f : \mathbb{T} \times \mathbb{D} \to \mathbb{T} \times \mathbb{D}$ par

$$f(\theta, z) = (2\theta, \frac{1}{2}\exp 2\pi i\theta + \frac{1}{4}z).$$

Le *solénoïde* est l'ensemble maximal invariant

$$S := \bigcap_{n \geqslant 0} f^n(\mathbb{T} \times \mathbb{D}).$$

Le solénoïde est compact, connexe et hyperbolique (d'après le critère des champs de cônes).

La projection $(\theta, z) \mapsto \theta$ de S sur $\mathbb{T}$ est une semi-conjugaison entre $f_{|S}$ et l'application $m : \theta \mapsto 2\theta$ sur $\mathbb{T}$.

Exemples (II): Le solénoïde

Notons $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| < 1\}$. Définissons $f : \mathbb{T} \times \mathbb{D} \to \mathbb{T} \times \mathbb{D}$ par

$$f(\theta, z) = (2\theta, \frac{1}{2}\exp 2\pi i\theta + \frac{1}{4}z).$$

Le *solénoïde* est l'ensemble maximal invariant

$$S := \bigcap_{n \geqslant 0} f^n(\mathbb{T} \times \mathbb{D}).$$

Le solénoïde est compact, connexe et hyperbolique (d'après le critère des champs de cônes).

La projection $(\theta, z) \mapsto \theta$ de S sur $\mathbb{T}$ est une semi-conjugaison entre $f_{|S}$ et l'application $m : \theta \mapsto 2\theta$ sur $\mathbb{T}$. Cette semi-conjugaison identifie $(S, f_{|S})$ à la limite projective de m.

Exemples(III): Fers à cheval dans la famille de Hénon

Dans un article paru en 1976, Hénon étudie numériquement la famille à deux paramètres de difféomorphismes du plan définie pour $b, c \in \mathbb{R}, b \neq 0$ par

$$H_{b,c}(x, y) := (x^2 + c - by, x).$$

Exemples(III): Fers à cheval dans la famille de Hénon

Dans un article paru en 1976, Hénon étudie numériquement la famille à deux paramètres de difféomorphismes du plan définie pour $b, c \in \mathbb{R}, b \neq 0$ par

$$H_{b,c}(x, y) := (x^2 + c - by, x).$$

Le difféomorphisme inverse est donné par

$$H_{b,c}^{-1}(x, y) := (y, b^{-1}(y^2 + c - x)).$$

Exemples(III): Fers à cheval dans la famille de Hénon

Dans un article paru en 1976, Hénon étudie numériquement la famille à deux paramètres de difféomorphismes du plan définie pour $b, c \in \mathbb{R}, b \neq 0$ par

$$H_{b,c}(x, y) := (x^2 + c - by, x).$$

Le difféomorphisme inverse est donné par

$$H_{b,c}^{-1}(x, y) := (y, b^{-1}(y^2 + c - x)).$$

Le Jacobien de $H_{b,c}$ est constant égal à b.

Exemples(III): Fers à cheval dans la famille de Hénon

Dans un article paru en 1976, Hénon étudie numériquement la famille à deux paramètres de difféomorphismes du plan définie pour $b, c \in \mathbb{R}, b \neq 0$ par

$$H_{b,c}(x, y) := (x^2 + c - by, x).$$

Le difféomorphisme inverse est donné par

$$H_{b,c}^{-1}(x, y) := (y, b^{-1}(y^2 + c - x)).$$

Le Jacobien de $H_{b,c}$ est constant égal à b. On notera $K_{b,c}$ l'ensemble des points de $\mathbb{R}^2$ dont l'orbite (passée et future) sous $H_{b,c}$ est bornée.

Exemples(III): Fers à cheval dans la famille de Hénon

Dans un article paru en 1976, Hénon étudie numériquement la famille à deux paramètres de difféomorphismes du plan définie pour $b, c \in \mathbb{R}, b \neq 0$ par

$$H_{b,c}(x, y) := (x^2 + c - by, x).$$

Le difféomorphisme inverse est donné par

$$H_{b,c}^{-1}(x, y) := (y, b^{-1}(y^2 + c - x)).$$

Le Jacobien de $H_{b,c}$ est constant égal à b. On notera $K_{b,c}$ l'ensemble des points de $\mathbb{R}^2$ dont l'orbite (passée et future) sous $H_{b,c}$ est bornée.

Exercice: Montrer que $K_{b,c}$ est un ensemble compact invariant par $H_{b,c}$.

Fixons $b > 0$. Pour c suffisamment négatif, on a

$$K_{b,c} = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} H_{b,c}^{-n}(R),$$

où R est le carré $[-(2|c|)^{\frac{1}{2}}, (2|c|)^{\frac{1}{2}}]^2$.

Fixons $b > 0$. Pour c suffisamment négatif, on a

$$K_{b,c} = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} H_{b,c}^{-n}(R),$$

où R est le carré $[-(2|c|)^{\frac{1}{2}}, (2|c|)^{\frac{1}{2}}]^2$.
Comme on a

$$H_{b,c}^{-1}(R) = \{|x| \leqslant (2|c|)^{\frac{1}{2}},\ |x^2 + c - by| \leqslant (2|c|)^{\frac{1}{2}}\},$$

$$H_{b,c}(R) = \{|y| \leqslant (2|c|)^{\frac{1}{2}},\ |y^2 + c - x| \leqslant (2|c|)^{\frac{1}{2}} b\},$$

Fixons $b > 0$. Pour c suffisamment négatif, on a

$$K_{b,c} = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} H_{b,c}^{-n}(R),$$

où R est le carré $[-(2|c|)^{\frac{1}{2}}, (2|c|)^{\frac{1}{2}}]^2$.
Comme on a

$$H_{b,c}^{-1}(R) = \{|x| \leqslant (2|c|)^{\frac{1}{2}},\ |x^2 + c - by| \leqslant (2|c|)^{\frac{1}{2}}\},$$

$$H_{b,c}(R) = \{|y| \leqslant (2|c|)^{\frac{1}{2}},\ |y^2 + c - x| \leqslant (2|c|)^{\frac{1}{2}} b\},$$

l'ensemble $R \cap H_{b,c}^{-1}(R)$ est formé de deux bandes, contenues dans $\{|x| \geqslant (\frac{1}{2}|c|)^{1/2}\}$, qui traversent "verticalement" R;

Fixons $b > 0$. Pour c suffisamment négatif, on a

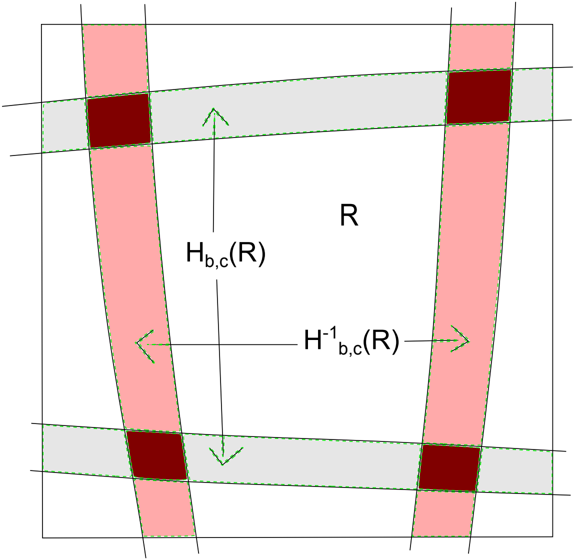
$$K_{b,c} = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} H_{b,c}^{-n}(R),$$

où R est le carré $[-(2|c|)^{\frac{1}{2}}, (2|c|)^{\frac{1}{2}}]^2$.
Comme on a

$$H_{b,c}^{-1}(R) = \{|x| \leqslant (2|c|)^{\frac{1}{2}}, \ |x^2 + c - by| \leqslant (2|c|)^{\frac{1}{2}}\},$$

$$H_{b,c}(R) = \{|y| \leqslant (2|c|)^{\frac{1}{2}}, \ |y^2 + c - x| \leqslant (2|c|)^{\frac{1}{2}} b\},$$

l'ensemble $R \cap H_{b,c}^{-1}(R)$ est formé de deux bandes, contenues dans $\{|x| \geqslant (\frac{1}{2}|c|)^{1/2}\}$, qui traversent "verticalement" R; leurs images sont deux bandes, contenues dans $\{|y| \geqslant (\frac{1}{2}|c|)^{1/2}\}$, qui traversent "horizontalement" R.


R
$H_{b,c}(R)$
$H^{-1}_{b,c}(R)$

Les matrices jacobiennes de $H_{b,c}$ et $H_{b,c}^{-1}$ sont respectivement

$$\begin{pmatrix} 2x & -b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b^{-1} & 2b^{-1}y \end{pmatrix}$$

Les matrices jacobiennes de $H_{b,c}$ et $H_{b,c}^{-1}$ sont respectivement

$$\begin{pmatrix} 2x & -b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b^{-1} & 2b^{-1}y \end{pmatrix}$$

D'après le critère des champs de cônes, l'ensemble $K_{b,c}$ est hyperbolique (si c est suffisamment négatif).