DIFFÉOMORPHISMES MINIMAUX NON DISTAUX

M. R. HERMAN

RÉSUMÉ. Nous nous proposons de répondre à une question de H. Furstenberg et de montrer qu'il existe un difféomorphisme C^∞ de $\mathbb{T}^2$, f, qui est un skew produit d'une rotation de $\mathbb{T}^1$ par $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ et a les deux propriétés suivantes :
(a) f est minimal sur $\mathbb{T}^2$;
(b) f est non distal sur $\mathbb{T}^2$.
La preuve se fait en montrant que les deux propriétés sont génériques dans un sous-groupe adéquat du groupe des difféomorphismes skew produits $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2 : (\theta, y) \mapsto (\theta+\alpha, A_\theta(y))$, $\alpha \in \mathbb{T}^1$, $A_\theta \in C^\infty(\mathbb{T}^1, \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}))$.

ABSTRACT. We answer a question by H. Furstenberg and show the existence of a C^∞ diffeomorphism of $\mathbb{T}^2$, f, that is a skew product above a rotation and with fibers in $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ with the following two properties :
(a) f is minimal on $\mathbb{T}^2$;
(b) f is not distal on $\mathbb{T}^2$.
The proof is obtained by showing that these two properties are generic in an adequate subgroup of the group G of skew product diffeomorphisms $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2 : (\theta, y) \mapsto (\theta+\alpha, A_\theta(y))$, $\alpha \in \mathbb{T}^1$, $A_\theta \in C^\infty(\mathbb{T}^1, \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}))$.

1. Notations et résultats

On considère $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong P_1(\mathbb{R})$.

On fait agir $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\{-1,1\}$ sur $\mathbb{T}^1$ (de façon standard). Si $A \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$, $y \mapsto Ay$ est cette action.

On considère G le groupe des difféomorphismes de $\mathbb{T}^2$ de la forme suivante $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{T}^1 \to \mathbb{T}^1 \times \mathbb{T}^1 : (\theta, y) \mapsto (\theta+\alpha, A_\theta(y))$, $\alpha \in \mathbb{T}^1$, $A_\theta \in C^\infty(\mathbb{T}^1, \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}))$.

Le groupe G pour la C^∞ topologie est un groupe topologique Polonais et donc tous ses fermés sont de Baire (pour la C^∞ topologie induite). Dans toute la suite, toute référence implicite à une topologie sera relative à la topologie C^∞ sur G ou celle induite sur des fermés de G (c'est un groupe skew produit des rotations par $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$).

Ce texte, tiré des archives de Herman, a été traité en latex par B. Fayad.

On considère $x_0 = (\theta_0, y_0), \theta_0 \in \mathbb{T}^1, y_0 = (1,0) \in P_1(\mathbb{R})$, et le sous-groupe fermé de G : $G_0 = \{g \in G | g(x_0) = x_0\}$.

On définit sur G l'action libre de $\mathbb{T}^1$: $R_\alpha(\theta, y) = (\theta + \alpha, y)$. On pose

$$O_{G_0}(\mathbb{T}^1) = \{g \circ R_t \circ g^{-1} | g \in G_0, t \in \mathbb{T}^1\}$$

et on note $\bar{O}_{G_0}(\mathbb{T}^1)$ l'adhérence de $O_{G_0}(\mathbb{T}^1)$ dans G pour la C^∞-topologie. Avec la C^∞-topologie induite, $\bar{O}_{G_0}(\mathbb{T}^1)$ est un espace de Baire, de plus $O_{G_0}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \{g \circ R_t \circ g^{-1} | g \in G_0, t \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\}$ est dense dans $\bar{O}_{G_0}(\mathbb{T}^1)$.

On rappelle

Définition 1. Un homéomorphisme $f : X \to X$, où X est un espace métrique compact avec métrique d, est dit distal si $\forall x_0 \neq x_1$, on a $\inf_{n \geq 1} d(f^n(x_0), f^n(x_1)) > 0$.

Soit alors d une métrique de $\mathbb{T}^2$ et $x_1 = (\theta_0, y_1)$ avec $y_1 \neq y_0$.

On considère la fonction semi-continue supérieurement

$$f \in G \mapsto D(f) = \inf_{n \geq 1} d(f^n(x_0), f^n(x_1)) \in \mathbb{R}_+.$$

Soit le G^δ : $D_1 = \{f \in \bar{O}_{G_0}(\mathbb{T}^1) | D(f) = 0\} \subset \bar{O}_{G_0}(\mathbb{T}^1)$. Evidemment, si $g \in D_1$, g est non distal.

Nous avons alors

Théorème 1. *La proporiété suivante est vraie sur un G^δ dense de $\bar{O}_{G_0}(\mathbb{T}^1)$: "être un difféomorphisme minimal".*

Théorème 2. *D_1 est un G^δ dense de $\bar{O}_{G_0}(\mathbb{T}^1)$. Par conséquent, la proporiété suivante est vraie sur un G^δ dense de $\bar{O}_{G_0}(\mathbb{T}^1)$: "être un difféomorphisme non distal".*

2. Démonstration du théorème 1

Le théorème 1 résulte du théorème suivant qui résulte de la démonstration de "Fathi-Herman, Existence des difféomorphismes minimaux" [1].

Donnons-nous M^n une variété C^∞-compacte connexe avec une action libre R_t de $\mathbb{T}^1$. On appelle $\mathcal{F}$ le feuilletage C^∞ défini par les orbites de l'action R_t. On considère G un groupe topologique métrique complet ($G \hookrightarrow \mathrm{Diff}^\infty_+(M^n)$ continuement, tel que $G \times M^n \to M$ soit C^∞). On suppose que $t \in \mathbb{T}^1 \hookrightarrow R_t \in G$ est continue, et que G_0 est un sous-groupe de G. Soit $O_{G_0}(\mathbb{T}^1) = \{g \circ R_t \circ g^{-1} | g \in G_0, t \in \mathbb{T}^1\}$ et $\bar{O}_{G_0}(\mathbb{T}^1)$ l'adhérence de $O_{G_0}(\mathbb{T}^1)$ dans G pour la topologie induite de celle de G. C'est un espace de Baire. D'après [1]

Théorème 3. *On suppose que pour tout $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ et tout ouvert $U \subset M^n$ non vide, il existe $h \in G_0$ tel que*

(a) $h \circ R_{\frac{p}{q}} = R_{\frac{p}{q}} \circ h$ *;*
(b) $h^{-1}(U)$ *coupe toute feuille du feuilletage* $\mathcal{F}$*.*
Alors la proporiété suivante est vraie sur un G^δ *dense de* $\bar{O}_{G_0}(\mathbb{T}^1)$ *: "être un difféomorphisme minimal".*

On vérifie sans peine que Théorème 3 $\implies$ Théorème 1. Il suffit en effet d'utiliser la propriété suivante, si $I = (a, b)$ est un intervalle, $a \neq b$, il existe $A \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \subset \mathrm{Diff}^\infty(\mathbb{T}^1)$ parabolique (i.e. A a un unique point fixe sur $\mathbb{T}^1$) tel que $A(I) \subset \mathbb{T}^1 - I)$. $\square$

3. Démonstration du théorème 2

Commençons par quelques préliminaires. Soient $C_0^\infty(\mathbb{T}^1) = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^1) | \int_0^1 \varphi(\theta) d\theta = 0\}$ et le groupe

$$H = \{F(\theta, y) = (\theta + \alpha, A_\theta y), \alpha \in \mathbb{T}^1, A_\theta = \begin{pmatrix} 1 & \varphi(\theta) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{T}^1)\}$$

On note que H est un sous-groupe fermé de G.

Proposition 4. *On a que* $H \subset \bar{O}_{G_0}(\mathbb{T}^1)$

Démonstration. Soit $F(\theta, y) = (\theta, A_\theta y)$ avec $A_\theta = \begin{pmatrix} 1 & \varphi(\theta) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors, on a $F \circ R_\alpha \circ F^{-1}(\theta, y) = (\theta + \alpha, B_\theta y)$ avec $B_\theta = \begin{pmatrix} 1 & \varphi(\theta + \alpha) - \varphi(\theta) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

La proposition résulte facilement du lemme élémentaire suivant.

Lemme 5. *Si* $\alpha \in \mathbb{T}^1 - \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, $\{\varphi \circ R_\alpha - \varphi | \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{T}^1)\}$ *est dense dans* $C_0^\infty(\mathbb{T}^1)$ *pour la* C^∞ *topologie.*

$\square$

Proposition 6. *Pour tout* $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, *il existe une suite* $(f_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset H \subset \bar{O}_{G_0}(\mathbb{T}^1)$, *telle que* $f_i \to R_{\frac{p}{q}}$ *et vérifiant pour tout* i *et* $x = (\theta_0, y), y \neq y_0$, $\lim_{k \to \infty} d(f_i^{kq}(x_0), f_i^{kq}(x)) = 0$.

Démonstration. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{T}^1)$ tel que $S_q \varphi(\theta) = \sum_{j=0}^{q-1} \varphi \circ R_{j\frac{p}{q}}(\theta_0) \neq 0$. Soit pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$f_n(\theta, y) = \left(\theta + \frac{p}{q}, \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{n}\varphi(\theta) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} y\right).$$

Si $n \to \infty$, $f_n \to R_{\frac{p}{q}}$ dans la C^∞-topologie. Or

$$f_n^{kq}(\theta_0, y) = \left(\theta_0, \begin{pmatrix} 1 & \frac{k}{n} S_q \varphi(\theta_0) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} y\right).$$

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{n}S_q\varphi(\theta_0) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ est une matrice parabolique ayant y_0 comme unique point fixe dans le projectif et donc $\forall y \in \mathbb{T}$, $\lim_{k\to\infty} A^k y = y_0$. $\square$

Fin de la démonstration du théorème 2. On sait déjà que D_1 est un G_δ dense de $\bar{O}_{G_0}(\mathbb{T}^1)$. Il reste à vérifier que D_1 est dense dans $\bar{O}_{G_0}(\mathbb{T}^1)$. Or $O^-_{G_0}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \{g \circ R_t \circ g^{-1} | g \in G_0, t \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\}$ est dense dans $\bar{O}_{G_0}(\mathbb{T}^1)$ pour la C^∞-topologie. Le théorème résulte, par conjugaison, de la proposition 6. $\square$

Remarque. L'ensemble des homéomorphismes non distaux n'est pas en général un G_δ dans $\mathrm{Homeo}_+(\mathbb{T})$ pour la topologie compacte ouverte (ce qui explique pourquoi nous avons fixé x_0 et x_1 et introduit le groupe G_0). En voici un exemple. Soit $\mathrm{Homeo}_+(\mathbb{T})$ et le fermé $F^0 =$ Fermeture de $(\rho^{-1}(\mathbb{T}^1 - \mathbb{Q}/\mathbb{Z}))$ dans $\mathrm{Homeo}_+(\mathbb{T})$ pour la C^0-topologie. Nous avons montré dans "Herman, Thèse, Chap. X", que $O^0 = \{g \circ R_\alpha \circ g^{-1} | g \in \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{T}), \alpha \in \mathbb{T}\}$ est un G_δ-dense dans F^0.

Références

[1] A. Fathi, M. Herman, *Existence de difféomorphisme minimaux*, Dynamical Systems, Vol. I, Warsaw, Astérisque, **49**, (1977), p. 37–59.