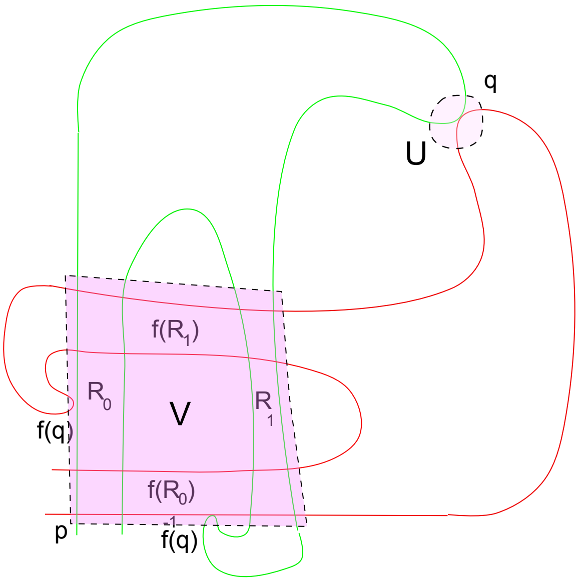
Quelques aspects de la théorie des systèmes dynamiques hyperboliques (9)

Jean-Christophe Yoccoz

Collège de France

18 mars 2015

Bifurcations homoclines pour un ensemble basique



Soit f un difféomorphisme de classe C^∞ d'une surface M.

Soit f un difféomorphisme de classe C^∞ d'une surface M. On suppose que f possède un point périodique hyperbolique p, et qu'il existe un point q, homocline à q, en lequel $W^s(p)$ et $W^u(p)$ ont une tangence quadratique.

Soit f un difféomorphisme de classe C^∞ d'une surface M. On suppose que f possède un point périodique hyperbolique p, et qu'il existe un point q, homocline à q, en lequel $W^s(p)$ et $W^u(p)$ ont une tangence quadratique.

On suppose que p appartient à un ensemble basique infini de type selle (fer à cheval) $K = K_f$.

Soit f un difféomorphisme de classe C^∞ d'une surface M. On suppose que f possède un point périodique hyperbolique p, et qu'il existe un point q, homocline à q, en lequel $W^s(p)$ et $W^u(p)$ ont une tangence quadratique.

On suppose que p appartient à un ensemble basique infini de type selle (fer à cheval) $K = K_f$.
On note V un voisinage ouvert de K_f, ne contenant pas q dans son adhérence, tel que

$$K_f = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^{-n}(V).$$

Soit f un difféomorphisme de classe C^∞ d'une surface M. On suppose que f possède un point périodique hyperbolique p, et qu'il existe un point q, homocline à q, en lequel $W^s(p)$ et $W^u(p)$ ont une tangence quadratique.

On suppose que p appartient à un ensemble basique infini de type selle (fer à cheval) $K = K_f$.

On note V un voisinage ouvert de K_f, ne contenant pas q dans son adhérence, tel que

$$K_f = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^{-n}(V).$$

Notons Λ_f l'union de K et de l'orbite $o(q)$ de q.

Soit f un difféomorphisme de classe C^∞ d'une surface M. On suppose que f possède un point périodique hyperbolique p, et qu'il existe un point q, homocline à q, en lequel $W^s(p)$ et $W^u(p)$ ont une tangence quadratique.

On suppose que p appartient à un ensemble basique infini de type selle (fer à cheval) $K = K_f$.
On note V un voisinage ouvert de K_f, ne contenant pas q dans son adhérence, tel que

$$K_f = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^{-n}(V).$$

Notons Λ_f l'union de K et de l'orbite $o(q)$ de q. C'est un ensemble fermé, invariant par f (mais pas hyperbolique!).

Soit f un difféomorphisme de classe C^∞ d'une surface M. On suppose que f possède un point périodique hyperbolique p, et qu'il existe un point q, homocline à q, en lequel $W^s(p)$ et $W^u(p)$ ont une tangence quadratique.

On suppose que p appartient à un ensemble basique infini de type selle (fer à cheval) $K = K_f$.
On note V un voisinage ouvert de K_f, ne contenant pas q dans son adhérence, tel que

$$K_f = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^{-n}(V).$$

Notons Λ_f l'union de K et de l'orbite $o(q)$ de q. C'est un ensemble fermé, invariant par f (mais pas hyperbolique!). On suppose que Λ_f est localement maximal:

Soit f un difféomorphisme de classe C^∞ d'une surface M. On suppose que f possède un point périodique hyperbolique p, et qu'il existe un point q, homocline à q, en lequel $W^s(p)$ et $W^u(p)$ ont une tangence quadratique.

On suppose que p appartient à un ensemble basique infini de type selle (fer à cheval) $K = K_f$.
On note V un voisinage ouvert de K_f, ne contenant pas q dans son adhérence, tel que

$$K_f = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^{-n}(V).$$

Notons Λ_f l'union de K et de l'orbite $o(q)$ de q. C'est un ensemble fermé, invariant par f (mais pas hyperbolique!). On suppose que Λ_f est localement maximal: il existe un voisinage ouvert $U \cup V$ de Λ_f tel qu'on ait

$$\Lambda_f = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^{-n}(U \cup V).$$

Pour g appartenant à un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de f dans $\mathrm{Diff}^\infty(M)$, on définit

$$\Lambda_g := \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} g^{-n}(U \cup V).$$

Pour g appartenant à un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de f dans $\mathrm{Diff}^{\infty}(M)$, on définit

$$\Lambda_g := \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} g^{-n}(U \cup V).$$

Si $\mathcal{U}$ est assez petit, l'ensemble maximal invariant

$$K_g := \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} g^{-n}(V),$$

est la continuation hyperbolique de K_f.

Pour g appartenant à un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de f dans $\mathrm{Diff}^{\infty}(M)$, on définit

$$\Lambda_g := \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} g^{-n}(U \cup V).$$

Si $\mathcal{U}$ est assez petit, l'ensemble maximal invariant

$$K_g := \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} g^{-n}(V),$$

est la continuation hyperbolique de K_f. Pour $g \in \mathcal{U}$, l'ensemble Λ_g est une partie compacte de $U \cup V$.

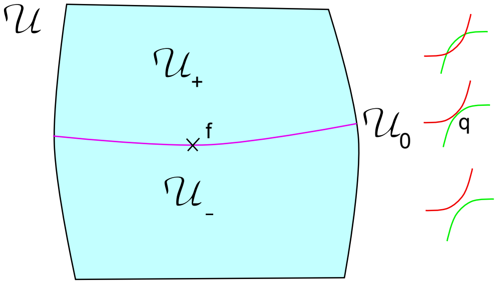
Pour g appartenant à un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de f dans $\mathrm{Diff}^\infty(M)$, on définit

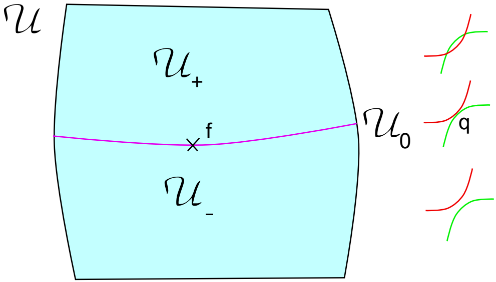
$$\Lambda_g := \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} g^{-n}(U \cup V).$$

Si $\mathcal{U}$ est assez petit, l'ensemble maximal invariant

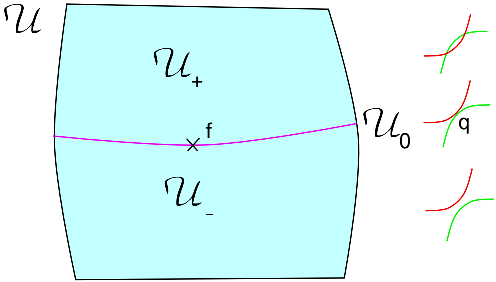
$$K_g := \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} g^{-n}(V),$$

est la continuation hyperbolique de K_f. Pour $g \in \mathcal{U}$, l'ensemble Λ_g est une partie compacte de $U \cup V$. C'est donc une partie fermée, g-invariante et localement maximale dont il s'agit d'étudier la géométrie et la dynamique, pour la plupart des difféomorphismes $g \in \mathcal{U}$.


$\mathcal{U}$
$\mathcal{U}_+$
f
$\mathcal{U}_0$
q
$\mathcal{U}_-$

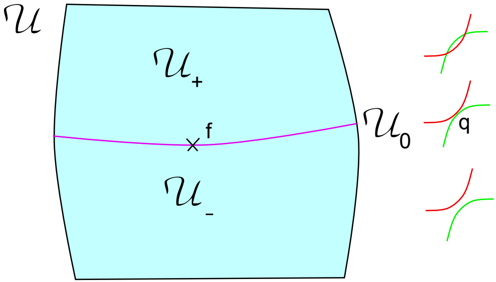


Pour $g \in \mathcal{U}_-$, on a $\Lambda_g = K_g$.



Pour $g \in \mathcal{U}_-$, on a $\Lambda_g = K_g$.

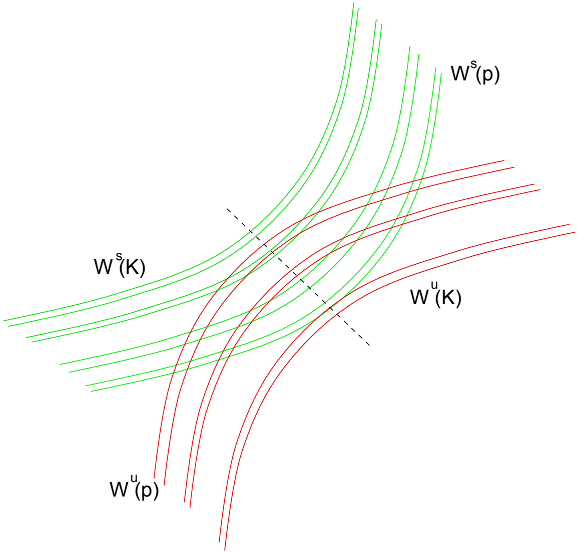
Pour $g \in \mathcal{U}_0$, on a $\Lambda_g = K_g \cup o(q_g)$.



Pour $g \in \mathcal{U}_-$, on a $\Lambda_g = K_g$.

Pour $g \in \mathcal{U}_0$, on a $\Lambda_g = K_g \cup o(q_g)$.

La situation dans $\mathcal{U}_+$ est plus compliquée!


W^s(p)
W^s(K)
W^u(K)
W^u(p)

Tangences entre laminations stables et instables de K

Soit N un entier tel que $f^n(q)$ soit contenu dans V pour $|n| \geqslant N$.

Tangences entre laminations stables et instables de K

Soit N un entier tel que $f^n(q)$ soit contenu dans V pour $|n| \geqslant N$. On pose

$$W^s_g(K_g) = \cap_{n \geqslant N} g^{-n}(V), \qquad W^u_g(K_g) = \cap_{n \geqslant N} g^n(V).$$

Tangences entre laminations stables et instables de K

Soit N un entier tel que $f^n(q)$ soit contenu dans V pour $|n| \geqslant N$. On pose

$$W^s_g(K_g) = \cap_{n \geqslant N} g^{-n}(V), \qquad W^u_g(K_g) = \cap_{n \geqslant N} g^n(V).$$

Les ensembles $W^s_g(K_g)$, $W^u_g(K_g)$ sont au voisinage de q des laminations qui sont transversalement des ensembles de Cantor.

Tangences entre laminations stables et instables de K

Soit N un entier tel que $f^n(q)$ soit contenu dans V pour $|n| \geqslant N$. On pose

$$W^s_g(K_g) = \cap_{n \geqslant N} g^{-n}(V), \qquad W^u_g(K_g) = \cap_{n \geqslant N} g^n(V).$$

Les ensembles $W^s_g(K_g)$, $W^u_g(K_g)$ sont au voisinage de q des laminations qui sont transversalement des ensembles de Cantor. Il existe $r > 1$ tel que les applications d'holonomie de ces laminations sont de classe C^r.

Tangences entre laminations stables et instables de K

Soit N un entier tel que $f^n(q)$ soit contenu dans V pour $|n| \geqslant N$. On pose

$$W_g^s(K_g) = \cap_{n \geqslant N} g^{-n}(V), \qquad W_g^u(K_g) = \cap_{n \geqslant N} g^n(V).$$

Les ensembles $W_g^s(K_g)$, $W_g^u(K_g)$ sont au voisinage de q des laminations qui sont transversalement des ensembles de Cantor. Il existe $r > 1$ tel que les applications d'holonomie de ces laminations sont de classe C^r. Les dimensions de Hausdorff transverses d_s, d_u de $W_g^s(K_g)$, $W_g^u(K_g)$ sont donc bien définies et dépendent continûment de g.

Tangences entre laminations stables et instables de K

Soit N un entier tel que $f^n(q)$ soit contenu dans V pour $|n| \geqslant N$. On pose

$$W^s_g(K_g) = \cap_{n \geqslant N} g^{-n}(V), \qquad W^u_g(K_g) = \cap_{n \geqslant N} g^n(V).$$

Les ensembles $W^s_g(K_g)$, $W^u_g(K_g)$ sont au voisinage de q des laminations qui sont transversalement des ensembles de Cantor. Il existe $r > 1$ tel que les applications d'holonomie de ces laminations sont de classe C^r. Les dimensions de Hausdorff transverses d_s, d_u de $W^s_g(K_g)$, $W^u_g(K_g)$ sont donc bien définies et dépendent continûment de g. La somme $d_s + d_u$ est en fait la dimension de Hausdorff de K.

Tangences entre laminations stables et instables de K

Soit N un entier tel que $f^n(q)$ soit contenu dans V pour $|n| \geqslant N$. On pose

$$W^s_g(K_g) = \cap_{n \geqslant N} g^{-n}(V), \qquad W^u_g(K_g) = \cap_{n \geqslant N} g^n(V).$$

Les ensembles $W^s_g(K_g)$, $W^u_g(K_g)$ sont au voisinage de q des laminations qui sont transversalement des ensembles de Cantor. Il existe $r > 1$ tel que les applications d'holonomie de ces laminations sont de classe C^r. Les dimensions de Hausdorff transverses d_s, d_u de $W^s_g(K_g)$, $W^u_g(K_g)$ sont donc bien définies et dépendent continûment de g. La somme $d_s + d_u$ est en fait la dimension de Hausdorff de K.

L'ensemble Λ_g contient l'intersection $W^s_g(K_g) \cap W^u_g(K_g) \cap U$.

Tangences entre laminations stables et instables de K

Soit N un entier tel que $f^n(q)$ soit contenu dans V pour $|n| \geqslant N$. On pose

$$W^s_g(K_g) = \cap_{n \geqslant N} g^{-n}(V), \qquad W^u_g(K_g) = \cap_{n \geqslant N} g^{n}(V).$$

Les ensembles $W^s_g(K_g)$, $W^u_g(K_g)$ sont au voisinage de q des laminations qui sont transversalement des ensembles de Cantor. Il existe $r > 1$ tel que les applications d'holonomie de ces laminations sont de classe C^r. Les dimensions de Hausdorff transverses d_s, d_u de $W^s_g(K_g)$, $W^u_g(K_g)$ sont donc bien définies et dépendent continûment de g. La somme $d_s + d_u$ est en fait la dimension de Hausdorff de K.

L'ensemble Λ_g contient l'intersection $W^s_g(K_g) \cap W^u_g(K_g) \cap U$. Donc les tangences entre ces deux laminations sont des obstructions à l'hyperbolicité uniforme de Λ_g.

Théorème: (Palis-Takens) Supposons que f vérifie $d_s + d_u < 1$.

Théorème: (Palis-Takens) Supposons que f vérifie $d_s + d_u < 1$. Alors, le compact invariant Λ_g est un ensemble basique avec densité totale dans $\mathcal{U}_+$.

Théorème: (Palis-Takens) Supposons que f vérifie $d_s + d_u < 1$. Alors, le compact invariant Λ_g est un ensemble basique avec densité totale dans $\mathcal{U}_+$.

Notons $\mathcal{T}$ l'ensemble des $g \in \mathcal{U}$ tels que $W^s_g(K_g)$ et $W^u_g(K_g)$ ont au moins une tangence au voisinage de q.

Théorème: (Palis-Takens) Supposons que f vérifie $d_s + d_u < 1$. Alors, le compact invariant Λ_g est un ensemble basique avec densité totale dans $\mathcal{U}_+$.

Notons $\mathcal{T}$ l'ensemble des $g \in \mathcal{U}$ tels que $W^s_g(K_g)$ et $W^u_g(K_g)$ ont au moins une tangence au voisinage de q.

Théorème: (Moreira-Y.) Supposons que f vérifie $d_s + d_u > 1$.

Théorème: (Palis-Takens) Supposons que f vérifie $d_s + d_u < 1$. Alors, le compact invariant Λ_g est un ensemble basique avec densité totale dans $\mathcal{U}_+$.

Notons $\mathcal{T}$ l'ensemble des $g \in \mathcal{U}$ tels que $W^s_g(K_g)$ et $W^u_g(K_g)$ ont au moins une tangence au voisinage de q.

Théorème: (Moreira-Y.) Supposons que f vérifie $d_s + d_u > 1$. Alors, avec densité totale dans $\mathcal{U}_+$

Théorème: (Palis-Takens) Supposons que f vérifie $d_s + d_u < 1$. Alors, le compact invariant Λ_g est un ensemble basique avec densité totale dans $\mathcal{U}_+$.

Notons $\mathcal{T}$ l'ensemble des $g \in \mathcal{U}$ tels que $W^s_g(K_g)$ et $W^u_g(K_g)$ ont au moins une tangence au voisinage de q.

Théorème: (Moreira-Y.) Supposons que f vérifie $d_s + d_u > 1$. Alors, avec densité totale dans $\mathcal{U}_+$

- soit $W^s_g(K_g)$ et $W^u_g(K_g)$ sont transverses au voisinage de q,

Théorème: (Palis-Takens) Supposons que f vérifie $d_s + d_u < 1$. Alors, le compact invariant Λ_g est un ensemble basique avec densité totale dans $\mathcal{U}_+$.

Notons $\mathcal{T}$ l'ensemble des $g \in \mathcal{U}$ tels que $W^s_g(K_g)$ et $W^u_g(K_g)$ ont au moins une tangence au voisinage de q.

Théorème: (Moreira-Y.) Supposons que f vérifie $d_s + d_u > 1$. Alors, avec densité totale dans $\mathcal{U}_+$

- soit $W^s_g(K_g)$ et $W^u_g(K_g)$ sont transverses au voisinage de q,
- soit g appartient à l'intérieur de $\mathcal{T}$.

Théorème: (Palis-Takens) Supposons que f vérifie $d_s + d_u < 1$. Alors, le compact invariant Λ_g est un ensemble basique avec densité totale dans $\mathcal{U}_+$.

Notons $\mathcal{T}$ l'ensemble des $g \in \mathcal{U}$ tels que $W^s_g(K_g)$ et $W^u_g(K_g)$ ont au moins une tangence au voisinage de q.

Théorème: (Moreira-Y.) Supposons que f vérifie $d_s + d_u > 1$. Alors, avec densité totale dans $\mathcal{U}_+$

- soit $W^s_g(K_g)$ et $W^u_g(K_g)$ sont transverses au voisinage de q,
- soit g appartient à l'intérieur de $\mathcal{T}$.

De plus, le deuxième cas a une densité uniformément strictement positive.

Théorème: (Palis-Takens) Supposons que f vérifie $d_s + d_u < 1$. Alors, le compact invariant Λ_g est un ensemble basique avec densité totale dans $\mathcal{U}_+$.

Notons $\mathcal{T}$ l'ensemble des $g \in \mathcal{U}$ tels que $W^s_g(K_g)$ et $W^u_g(K_g)$ ont au moins une tangence au voisinage de q.

Théorème: (Moreira-Y.) Supposons que f vérifie $d_s + d_u > 1$. Alors, avec densité totale dans $\mathcal{U}_+$

- soit $W^s_g(K_g)$ et $W^u_g(K_g)$ sont transverses au voisinage de q,
- soit g appartient à l'intérieur de $\mathcal{T}$.

De plus, le deuxième cas a une densité uniformément strictement positive.

On a vu précédemment que, si les épaisseurs transversales de $W^s_g(K_g)$, $W^u_g(K_g)$ vérifient $\tau_s \tau_u > 1$, on a $\mathcal{T} = \mathcal{U}_0 \cup \mathcal{U}_+$.

Fers à cheval non uniformément hyperboliques

Fers à cheval non uniformément hyperboliques

Question: Quelles sont les propriétés géométriques et dynamiques de Λ_g de densité totale lorsque la condition $d_s + d_u < 1$ de Palis-Takens n'est pas satisfaite?

Fers à cheval non uniformément hyperboliques

Question: Quelles sont les propriétés géométriques et dynamiques de Λ_g de densité totale lorsque la condition $d_s + d_u < 1$ de Palis-Takens n'est pas satisfaite?

D'après Moreira-Y., Λ_g n'est alors pas un ensemble basique (avec densité totale).

Fers à cheval non uniformément hyperboliques

Question: Quelles sont les propriétés géométriques et dynamiques de Λ_g de densité totale lorsque la condition $d_s + d_u < 1$ de Palis-Takens n'est pas satisfaite?

D'après Moreira-Y., Λ_g n'est alors pas un ensemble basique (avec densité totale).

Palis-Y. apportent une réponse partielle à cette question lorsque la dimension $d_s + d_u$ de K est légèrement plus grande que 1,

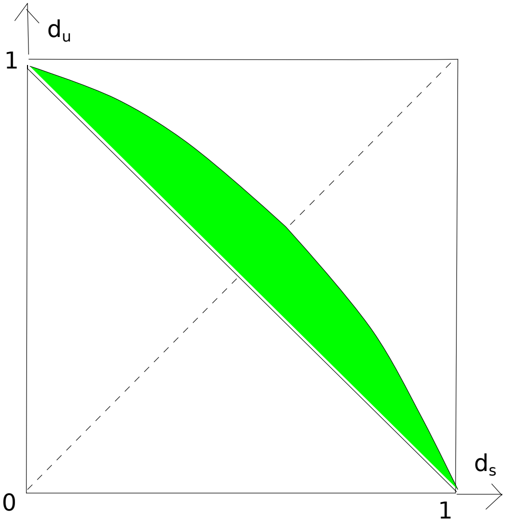
Fers à cheval non uniformément hyperboliques

Question: Quelles sont les propriétés géométriques et dynamiques de Λ_g de densité totale lorsque la condition $d_s + d_u < 1$ de Palis-Takens n'est pas satisfaite?

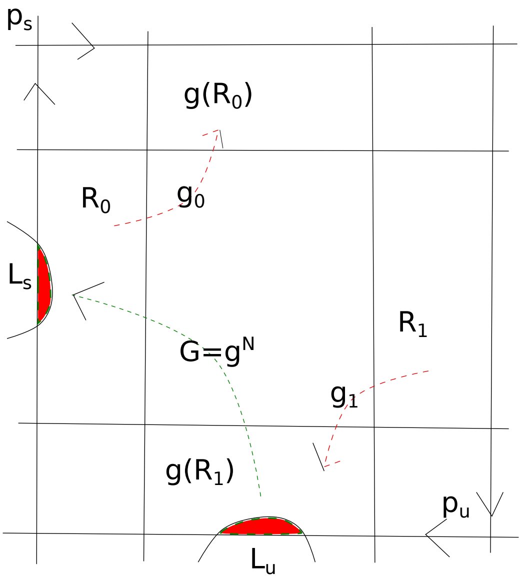
D'après Moreira-Y., Λ_g n'est alors pas un ensemble basique (avec densité totale).

Palis-Y. apportent une réponse partielle à cette question lorsque la dimension $d_s + d_u$ de K est légèrement plus grande que 1, plus précisément $d_s + d_u > 1$ et

$$(d_s + d_u)^2 + (\max(d_s, d_u))^2 < (d_s + d_u) + \max(d_s, d_u).$$



d_u
1
d_s
0
1



p_s
$g(R_0)$
R_0
g_0
L_s
R_1
$G=g^N$
g_1
$g(R_1)$
p_u
L_u

Pour des raisons techniques, on suppose que la tangence quadratique initiale (pour f) se produit entre les variétés stables et instables de deux points fixes p_s, p_u distincts de K.

Pour des raisons techniques, on suppose que la tangence quadratique initiale (pour f) se produit entre les variétés stables et instables de deux points fixes p_s, p_u distincts de K.

Il s'agit de construire, dans toute famille à un paramètre (g_t) transverse à $\mathcal{U}_0$, un ensemble E de bons paramètres de densité totale.

Pour des raisons techniques, on suppose que la tangence quadratique initiale (pour f) se produit entre les variétés stables et instables de deux points fixes p_s, p_u distincts de K.

Il s'agit de construire, dans toute famille à un paramètre (g_t) transverse à $\mathcal{U}_0$, un ensemble E de bons paramètres de densité totale.

Pour de tels paramètres, il existe de nombreux triplets (P, Q, n) tels que:

Pour des raisons techniques, on suppose que la tangence quadratique initiale (pour f) se produit entre les variétés stables et instables de deux points fixes p_s, p_u distincts de K.

Il s'agit de construire, dans toute famille à un paramètre (g_t) transverse à $\mathcal{U}_0$, un ensemble E de bons paramètres de densité totale.

Pour de tels paramètres, il existe de nombreux triplets (P, Q, n) tels que:

- P est une bande "verticale" traversant R;

Pour des raisons techniques, on suppose que la tangence quadratique initiale (pour f) se produit entre les variétés stables et instables de deux points fixes p_s, p_u distincts de K.

Il s'agit de construire, dans toute famille à un paramètre (g_t) transverse à $\mathcal{U}_0$, un ensemble E de bons paramètres de densité totale.

Pour de tels paramètres, il existe de nombreux triplets (P, Q, n) tels que:

- P est une bande "verticale" traversant R;
- Q est une bande "horizontale" traversant R;

Pour des raisons techniques, on suppose que la tangence quadratique initiale (pour f) se produit entre les variétés stables et instables de deux points fixes p_s, p_u distincts de K.

Il s'agit de construire, dans toute famille à un paramètre (g_t) transverse à $\mathcal{U}_0$, un ensemble E de bons paramètres de densité totale.

Pour de tels paramètres, il existe de nombreux triplets (P, Q, n) tels que:

- P est une bande "verticale" traversant R;
- Q est une bande "horizontale" traversant R;
- $g_t^n : P \to Q$ est un difféomorphisme essentiellement affine.

Pour des raisons techniques, on suppose que la tangence quadratique initiale (pour f) se produit entre les variétés stables et instables de deux points fixes p_s, p_u distincts de K.

Il s'agit de construire, dans toute famille à un paramètre (g_t) transverse à $\mathcal{U}_0$, un ensemble E de bons paramètres de densité totale.

Pour de tels paramètres, il existe de nombreux triplets (P, Q, n) tels que:

- P est une bande "verticale" traversant R;
- Q est une bande "horizontale" traversant R;
- $g_t^n : P \to Q$ est un difféomorphisme essentiellement affine.

A partir des deux triplets initiaux avec $n = 1$, les autres sont construits par composition directe ou composition parabolique (on intercale G).

Pour des raisons techniques, on suppose que la tangence quadratique initiale (pour f) se produit entre les variétés stables et instables de deux points fixes p_s, p_u distincts de K.

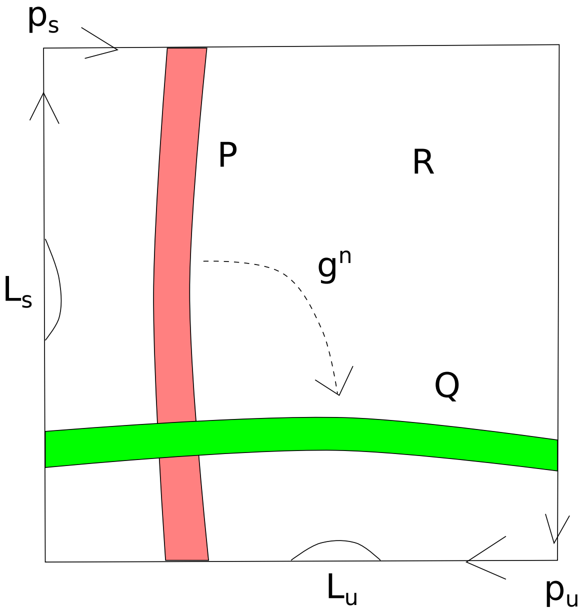
Il s'agit de construire, dans toute famille à un paramètre (g_t) transverse à $\mathfrak{U}_0$, un ensemble E de bons paramètres de densité totale.

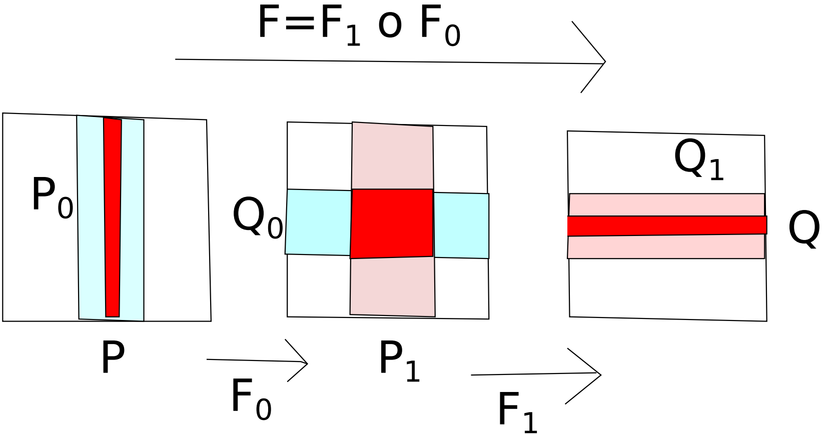
Pour de tels paramètres, il existe de nombreux triplets (P, Q, n) tels que:

- P est une bande "verticale" traversant R;
- Q est une bande "horizontale" traversant R;
- $g_t^n : P \to Q$ est un difféomorphisme essentiellement affine.

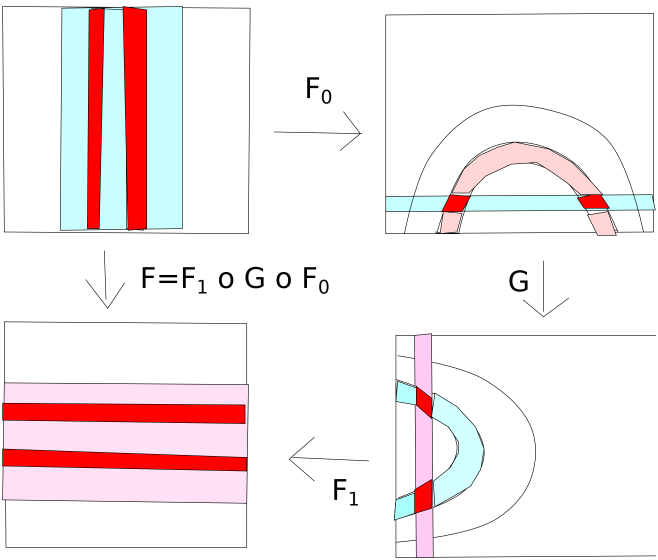
A partir des deux triplets initiaux avec $n = 1$, les autres sont construits par composition directe ou composition parabolique (on intercale G).

Notons $\mathfrak{R}$ l'ensemble des triplets (P, Q, n) construits de la sorte.


ps
P
R
gn
Ls
Q
Lu
pu



F=F1 o F0
P0
Q0
Q1
Q
P
P1
F0
F1



F_0
$F=F_1 \text{ o } G \text{ o } F_0$
G
F_1

Notons $\mathcal{R}_{+}^{\infty}$ l'union des courbes stables traversant verticalement R, Notons $\mathcal{R}_{+}^{\infty}$ l'union des courbes stables traversant verticalement R, qui sont intersection d'une suite décroissante $(P_i)_{i \geqslant 0}$ de rectangles verticaux (avec $(P_i, Q_i, n_i) \in \mathcal{R}$).

Notons $\mathcal{R}_+^\infty$ l'union des courbes stables traversant verticalement R, qui sont intersection d'une suite décroissante $(P_i)_{i \geqslant 0}$ de rectangles verticaux (avec $(P_i, Q_i, n_i) \in \mathcal{R}$).

Construisons de même l'union $\mathcal{R}_-^\infty$ des courbes instables à partir des rectangles horizontaux Q_j.

Notons $\mathcal{R}_+^\infty$ l'union des courbes stables traversant verticalement R, qui sont intersection d'une suite décroissante $(P_i)_{i\geqslant 0}$ de rectangles verticaux (avec $(P_i, Q_i, n_i) \in \mathcal{R}$).

Construisons de même l'union $\mathcal{R}_-^\infty$ des courbes instables à partir des rectangles horizontaux Q_j. On a

$$\mathcal{R}_+^\infty \subset W^s(\Lambda_{g_t}), \quad \mathcal{R}_-^\infty \subset W^u(\Lambda_{g_t}), \quad \mathcal{R}_+^\infty \cap \mathcal{R}_-^\infty \subset \Lambda_{g_t}.$$

Notons $\mathcal{R}_+^\infty$ l'union des courbes stables traversant verticalement R, qui sont intersection d'une suite décroissante $(P_i)_{i\geqslant 0}$ de rectangles verticaux (avec $(P_i, Q_i, n_i) \in \mathcal{R}$).

Construisons de même l'union $\mathcal{R}_-^\infty$ des courbes instables à partir des rectangles horizontaux Q_j. On a

$$\mathcal{R}_+^\infty \subset W^s(\Lambda_{g_t}), \quad \mathcal{R}_-^\infty \subset W^u(\Lambda_{g_t}), \quad \mathcal{R}_+^\infty \cap \mathcal{R}_-^\infty \subset \Lambda_{g_t}.$$

Les dimensions de Hausdorff transverses de $\mathcal{R}_+^\infty$, $\mathcal{R}_-^\infty$ sont proches respectivement de d_s, d_u.

Notons $\mathcal{R}_+^\infty$ l'union des courbes stables traversant verticalement R, qui sont intersection d'une suite décroissante $(P_i)_{i\geqslant 0}$ de rectangles verticaux (avec $(P_i, Q_i, n_i) \in \mathcal{R}$).

Construisons de même l'union $\mathcal{R}_-^\infty$ des courbes instables à partir des rectangles horizontaux Q_j. On a

$$\mathcal{R}_+^\infty \subset W^s(\Lambda_{g_t}), \quad \mathcal{R}_-^\infty \subset W^u(\Lambda_{g_t}), \quad \mathcal{R}_+^\infty \cap \mathcal{R}_-^\infty \subset \Lambda_{g_t}.$$

Les dimensions de Hausdorff transverses de $\mathcal{R}_+^\infty$, $\mathcal{R}_-^\infty$ sont proches respectivement de d_s, d_u.

On a une partition

$$\mathcal{R}_+^\infty = \mathcal{N}_+ \sqcup \big(\bigsqcup_{P\in\mathcal{P}} \mathcal{R}_+^\infty(P)\big),$$

Notons $\mathcal{R}_+^\infty$ l'union des courbes stables traversant verticalement R, qui sont intersection d'une suite décroissante $(P_i)_{i \geqslant 0}$ de rectangles verticaux (avec $(P_i, Q_i, n_i) \in \mathcal{R}$).

Construisons de même l'union $\mathcal{R}_-^\infty$ des courbes instables à partir des rectangles horizontaux Q_j. On a

$$\mathcal{R}_+^\infty \subset W^s(\Lambda_{g_t}), \quad \mathcal{R}_-^\infty \subset W^u(\Lambda_{g_t}), \quad \mathcal{R}_+^\infty \cap \mathcal{R}_-^\infty \subset \Lambda_{g_t}.$$

Les dimensions de Hausdorff transverses de $\mathcal{R}_+^\infty$, $\mathcal{R}_-^\infty$ sont proches respectivement de d_s, d_u.

On a une partition

$$\mathcal{R}_+^\infty = \mathcal{N}_+ \sqcup \Big(\bigsqcup_{P \in \mathcal{P}} \mathcal{R}_+^\infty(P) \Big),$$

où l'ensemble $\mathcal{P}$ est dénombrable.

Notons $\mathcal{R}_+^\infty$ l'union des courbes stables traversant verticalement R, qui sont intersection d'une suite décroissante $(P_i)_{i\geqslant 0}$ de rectangles verticaux (avec $(P_i, Q_i, n_i) \in \mathcal{R}$).

Construisons de même l'union $\mathcal{R}_-^\infty$ des courbes instables à partir des rectangles horizontaux Q_j. On a

$$\mathcal{R}_+^\infty \subset W^s(\Lambda_{g_t}), \quad \mathcal{R}_-^\infty \subset W^u(\Lambda_{g_t}), \quad \mathcal{R}_+^\infty \cap \mathcal{R}_-^\infty \subset \Lambda_{g_t}.$$

Les dimensions de Hausdorff transverses de $\mathcal{R}_+^\infty$, $\mathcal{R}_-^\infty$ sont proches respectivement de d_s, d_u.

On a une partition

$$\mathcal{R}_+^\infty = \mathcal{N}_+ \sqcup \Big(\bigsqcup_{P\in\mathcal{P}} \mathcal{R}_+^\infty(P) \Big),$$

où l'ensemble $\mathcal{P}$ est dénombrable. Cette partition a les propriétés suivantes:

- $\mathcal{N}_+$ est une union de courbes stables;

- $\mathcal{N}_+$ est une union de courbes stables; sa dimension de Hausdorff transverse est strictement inférieure à celle de $\mathcal{R}_+^\infty$;

- $\mathcal{N}_+$ est une union de courbes stables; sa dimension de Hausdorff transverse est strictement inférieure à celle de $\mathcal{R}_+^\infty$;
- (Propriété de Bernoulli)

- $\mathcal{N}_+$ est une union de courbes stables; sa dimension de Hausdorff transverse est strictement inférieure à celle de $\mathcal{R}_+^\infty$;
- (Propriété de Bernoulli) Pour chaque $P \in \mathcal{P}$, l'ensemble $\mathcal{R}_+^\infty(P)$ est une union de courbes stables;

- $\mathcal{N}_+$ est une union de courbes stables; sa dimension de Hausdorff transverse est strictement inférieure à celle de $\mathcal{R}_+^\infty$;
- (Propriété de Bernoulli) Pour chaque $P \in \mathcal{P}$, l'ensemble $\mathcal{R}_+^\infty(P)$ est une union de courbes stables; il existe un entier $n_P > 0$ tel que l'image par $g_t^{n_P}$ d'une courbe stable $\gamma \subset \mathcal{R}_+^\infty(P)$ soit contenue dans une courbe stable $\gamma' \subset \mathcal{R}_+^\infty$;

- $\mathcal{N}_+$ est une union de courbes stables; sa dimension de Hausdorff transverse est strictement inférieure à celle de $\mathcal{R}_+^\infty$;
- (Propriété de Bernoulli) Pour chaque $P \in \mathcal{P}$, l'ensemble $\mathcal{R}_+^\infty(P)$ est une union de courbes stables; il existe un entier $n_P > 0$ tel que l'image par $g_t^{n_P}$ d'une courbe stable $\gamma \subset \mathcal{R}_+^\infty(P)$ soit contenue dans une courbe stable $\gamma' \subset \mathcal{R}_+^\infty$; inversement toute courbe stable $\gamma' \subset \mathcal{R}_+^\infty$ contient l'image par $g_t^{n_P}$ d'une courbe stable $\gamma \subset \mathcal{R}_+^\infty(P)$;

- $\mathcal{N}_+$ est une union de courbes stables; sa dimension de Hausdorff transverse est strictement inférieure à celle de $\mathcal{R}_+^\infty$;
- (Propriété de Bernoulli) Pour chaque $P \in \mathcal{P}$, l'ensemble $\mathcal{R}_+^\infty(P)$ est une union de courbes stables; il existe un entier $n_P > 0$ tel que l'image par $g_t^{n_P}$ d'une courbe stable $\gamma \subset \mathcal{R}_+^\infty(P)$ soit contenue dans une courbe stable $\gamma' \subset \mathcal{R}_+^\infty$; inversement toute courbe stable $\gamma' \subset \mathcal{R}_+^\infty$ contient l'image par $g_t^{n_P}$ d'une courbe stable $\gamma \subset \mathcal{R}_+^\infty(P)$;
- $$\sum_{\mathcal{P}} n_P \, |\mathcal{R}_+^\infty(P)|^{d_s^-} < +\infty,$$

- $\mathcal{N}_+$ est une union de courbes stables; sa dimension de Hausdorff transverse est strictement inférieure à celle de $\mathcal{R}_+^\infty$;
- (Propriété de Bernoulli) Pour chaque $P \in \mathcal{P}$, l'ensemble $\mathcal{R}_+^\infty(P)$ est une union de courbes stables; il existe un entier $n_P > 0$ tel que l'image par $g_t^{n_P}$ d'une courbe stable $\gamma \subset \mathcal{R}_+^\infty(P)$ soit contenue dans une courbe stable $\gamma' \subset \mathcal{R}_+^\infty$; inversement toute courbe stable $\gamma' \subset \mathcal{R}_+^\infty$ contient l'image par $g_t^{n_P}$ d'une courbe stable $\gamma \subset \mathcal{R}_+^\infty(P)$;
- $$\sum_{\mathcal{P}} n_P \, |\mathcal{R}_+^\infty(P)|^{d_s^-} < +\infty,$$

  où $|\mathcal{R}_+^\infty(P)|$ est la largeur de $\mathcal{R}_+^\infty(P)$

- $\mathcal{N}_+$ est une union de courbes stables; sa dimension de Hausdorff transverse est strictement inférieure à celle de $\mathcal{R}_+^\infty$;
- (Propriété de Bernoulli) Pour chaque $P \in \mathcal{P}$, l'ensemble $\mathcal{R}_+^\infty(P)$ est une union de courbes stables; il existe un entier $n_P > 0$ tel que l'image par $g_t^{n_P}$ d'une courbe stable $\gamma \subset \mathcal{R}_+^\infty(P)$ soit contenue dans une courbe stable $\gamma' \subset \mathcal{R}_+^\infty$; inversement toute courbe stable $\gamma' \subset \mathcal{R}_+^\infty$ contient l'image par $g_t^{n_P}$ d'une courbe stable $\gamma \subset \mathcal{R}_+^\infty(P)$;
- $$\sum_{\mathcal{P}} n_P \, |\mathcal{R}_+^\infty(P)|^{d_s^-} < +\infty,$$

  où $|\mathcal{R}_+^\infty(P)|$ est la largeur de $\mathcal{R}_+^\infty(P)$ et $d_s^- < d_s$.

- $\mathcal{N}_+$ est une union de courbes stables; sa dimension de Hausdorff transverse est strictement inférieure à celle de $\mathcal{R}_+^\infty$;
- (Propriété de Bernoulli) Pour chaque $P \in \mathcal{P}$, l'ensemble $\mathcal{R}_+^\infty(P)$ est une union de courbes stables; il existe un entier $n_P > 0$ tel que l'image par $g_t^{n_P}$ d'une courbe stable $\gamma \subset \mathcal{R}_+^\infty(P)$ soit contenue dans une courbe stable $\gamma' \subset \mathcal{R}_+^\infty$; inversement toute courbe stable $\gamma' \subset \mathcal{R}_+^\infty$ contient l'image par $g_t^{n_P}$ d'une courbe stable $\gamma \subset \mathcal{R}_+^\infty(P)$;
- $$\sum_{\mathcal{P}} n_P \, |\mathcal{R}_+^\infty(P)|^{d_s^-} < +\infty,$$

  où $|\mathcal{R}_+^\infty(P)|$ est la largeur de $\mathcal{R}_+^\infty(P)$ et $d_s^- < d_s$.

La première propriété permet d'itérer indéfiniment la famille $(g_t^{n_P})_P$ pour la plupart des courbes stables $\subset \mathcal{R}_+^\infty$.

- $\mathcal{N}_+$ est une union de courbes stables; sa dimension de Hausdorff transverse est strictement inférieure à celle de $\mathcal{R}_+^\infty$;
- (Propriété de Bernoulli) Pour chaque $P \in \mathcal{P}$, l'ensemble $\mathcal{R}_+^\infty(P)$ est une union de courbes stables; il existe un entier $n_P > 0$ tel que l'image par $g_t^{n_P}$ d'une courbe stable $\gamma \subset \mathcal{R}_+^\infty(P)$ soit contenue dans une courbe stable $\gamma' \subset \mathcal{R}_+^\infty$; inversement toute courbe stable $\gamma' \subset \mathcal{R}_+^\infty$ contient l'image par $g_t^{n_P}$ d'une courbe stable $\gamma \subset \mathcal{R}_+^\infty(P)$;
- $$\sum_{\mathcal{P}} n_P \, |\mathcal{R}_+^\infty(P)|^{d_s^-} < +\infty,$$

  où $|\mathcal{R}_+^\infty(P)|$ est la largeur de $\mathcal{R}_+^\infty(P)$ et $d_s^- < d_s$.

La première propriété permet d'itérer indéfiniment la famille $(g_t^{n_P})_P$ pour la plupart des courbes stables $\subset \mathcal{R}_+^\infty$. La troisième propriété permet de comparer le temps relatif à cette itération au temps relatif à l'itération de g_t.

Les propriétés précédentes permettent de comprendre de façon assez satisfaisante la géométrie et la dynamique en temps positif de $\mathcal{R}_+^\infty \subset W^s(\Lambda_{g_t})$.

Les propriétés précédentes permettent de comprendre de façon assez satisfaisante la géométrie et la dynamique en temps positif de $\mathcal{R}_+^\infty \subset W^s(\Lambda_{g_t})$.

On peut de même analyser la géométrie et la dynamique en temps négatif de $\mathcal{R}_-^\infty \subset W^u(\Lambda_{g_t})$.

Les propriétés précédentes permettent de comprendre de façon assez satisfaisante la géométrie et la dynamique en temps positif de $\mathcal{R}_+^\infty \subset W^s(\Lambda_{g_t})$.

On peut de même analyser la géométrie et la dynamique en temps négatif de $\mathcal{R}_-^\infty \subset W^u(\Lambda_{g_t})$.

Dans quelle mesure a-t-on décrit ainsi la dynamique de la plupart des orbites dans $W^s(\Lambda_{g_t}),\ W^u(\Lambda_{g_t})$ respectivement?

Les propriétés précédentes permettent de comprendre de façon assez satisfaisante la géométrie et la dynamique en temps positif de $\mathcal{R}_+^\infty \subset W^s(\Lambda_{g_t})$.

On peut de même analyser la géométrie et la dynamique en temps négatif de $\mathcal{R}_-^\infty \subset W^u(\Lambda_{g_t})$.

Dans quelle mesure a-t-on décrit ainsi la dynamique de la plupart des orbites dans $W^s(\Lambda_{g_t}),\ W^u(\Lambda_{g_t})$ respectivement?

Notons $\mathcal{E}_+$ l'ensemble *exceptionnel* des points de $W^s(\Lambda_{g_t})$ dont l'orbite positive ne rencontre pas $\mathcal{R}_+^\infty$.

On peut montrer que la dimension de Hausdorff de l'intersection de $\mathcal{E}_+$ avec n'importe quelle courbe instable γ

On peut montrer que la dimension de Hausdorff de l'intersection de $\mathcal{E}_+$ avec n'importe quelle courbe instable γ est majorée par $d_s^- < d_s$, On peut montrer que la dimension de Hausdorff de l'intersection de $\mathcal{E}_+$ avec n'importe quelle courbe instable γ est majorée par $d_s^- < d_s$, et est donc strictement inférieure à la dimension de Hausdorff de l'intersection de Λ_{g_t} avec γ

On peut montrer que la dimension de Hausdorff de l'intersection de $\mathcal{E}_+$ avec n'importe quelle courbe instable γ est majorée par $d_s^- < d_s$, et est donc strictement inférieure à la dimension de Hausdorff de l'intersection de Λ_{g_t} avec γ (qui est égale à la dimension transverse de $\mathcal{R}_+^\infty$).

On peut montrer que la dimension de Hausdorff de l'intersection de $\mathcal{E}_+$ avec n'importe quelle courbe instable γ est majorée par $d_s^- < d_s$, et est donc strictement inférieure à la dimension de Hausdorff de l'intersection de Λ_{g_t} avec γ (qui est égale à la dimension transverse de $\mathcal{R}_+^\infty$).

Le contrôle bidimensionnel de $\mathcal{E}_+$ est moins satisfaisant,

On peut montrer que la dimension de Hausdorff de l'intersection de $\mathcal{E}_+$ avec n'importe quelle courbe instable γ est majorée par $d_s^- < d_s$, et est donc strictement inférieure à la dimension de Hausdorff de l'intersection de Λ_{g_t} avec γ (qui est égale à la dimension transverse de $\mathcal{R}_+^\infty$).

Le contrôle bidimensionnel de $\mathcal{E}_+$ est moins satisfaisant, mais suffisant pour conclure que les ensembles $W^s(\Lambda_{g_t}),\ W^u(\Lambda_{g_t})$ sont de dimension de Hausdorff < 2 (Matheus-Palis-Y.).

On peut montrer que la dimension de Hausdorff de l'intersection de $\mathcal{E}_+$ avec n'importe quelle courbe instable γ est majorée par $d_s^- < d_s$, et est donc strictement inférieure à la dimension de Hausdorff de l'intersection de Λ_{g_t} avec γ (qui est égale à la dimension transverse de $\mathcal{R}_+^\infty$).

Le contrôle bidimensionnel de $\mathcal{E}_+$ est moins satisfaisant, mais suffisant pour conclure que les ensembles $W^s(\Lambda_{g_t}),\ W^u(\Lambda_{g_t})$ sont de dimension de Hausdorff < 2 (Matheus-Palis-Y.).

En particulier, pour les paramètres $t \in E$, le difféomorphisme g_t n'a ni attracteur, ni répulseur dans $U \cup V$.

On peut montrer que la dimension de Hausdorff de l'intersection de $\mathcal{E}_+$ avec n'importe quelle courbe instable γ est majorée par $d_s^- < d_s$, et est donc strictement inférieure à la dimension de Hausdorff de l'intersection de Λ_{g_t} avec γ (qui est égale à la dimension transverse de $\mathcal{R}_+^\infty$).

Le contrôle bidimensionnel de $\mathcal{E}_+$ est moins satisfaisant, mais suffisant pour conclure que les ensembles $W^s(\Lambda_{g_t}),\ W^u(\Lambda_{g_t})$ sont de dimension de Hausdorff < 2 (Matheus-Palis-Y.).

En particulier, pour les paramètres $t \in E$, le difféomorphisme g_t n'a ni attracteur, ni répulseur dans $U \cup V$.

La construction du bon ensemble de paramètres E est très compliquée ...

Merci de votre attention!