Équations différentielles et systèmes dynamiques

M. Jean-Christophe YOCCOZ, membre de l'Institut
(Académie des sciences), professeur

COURS : SURFACES À PETITS CARREAUX *(suite)*

On a poursuivi l'étude des surfaces à petits carreaux, entamée l'année précédente. On a en particulier rendu compte de travaux effectués en collaboration avec C. Matheus, M. Möller et D. Zmiaikou.

1. Dans la première partie du cours, on a démontré, dans un cadre plus général, une formule obtenue avec C. Matheus et D. Zmiaikou qui avait fait, dans le cadre plus restreint des origamis réguliers, l'objet de la fin du cours de l'année précédente.

Rappelons qu'un origami peut être spécifié par les données suivantes :

- un groupe fini G, muni d'une paire de générateurs $(g_r,\, g_u)$;
- un sous-groupe H de G dont l'intersection des conjugués est réduite à l'identité.

Les carreaux de l'origami associé, noté M dans la suite, sont les classes Hg. Le carreau à droite (resp. au-dessus) de Hg est Hgg_r (resp. Hgg_u). Le groupe Γ des automorphismes de M s'identifie au quotient N/H, où le normalisateur N de H dans G agit à gauche sur l'ensemble des carreaux de M. Le groupe fini Γ agit sur le premier groupe d'homologie de M ; il s'agit de calculer les multiplicités des différentes représentations irréductibles de Γ dans $H_1(M)$.

Notons $\pi : M \to \mathbb{T}^2 := \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ le morphisme canonique sur le tore. L'ensemble $\Sigma := \pi^{-1}(0)$ contient les points de ramification de π, associés aux cycles du commutateur $c := g_r g_u g_r^{-1} g_u^{-1}$.

Soit $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$. Le groupe d'homologie relative $H_1(M, \Sigma, \mathbb{K})$ s'insère dans la suite exacte de Γ-modules

$$0 \to \mathbb{K} \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{K}(M) \xrightarrow{\iota} \mathbb{K}(M) \oplus \mathbb{K}(M) \xrightarrow{\varpi} H_1(M, \Sigma, \mathbb{K}) \to 0.$$

Ici, $\mathbb{K}(M)$ est le K-espace vectoriel dont la base naturelle (e_s) est indexée par les carreaux de M ; l'application ε envoie 1 sur $\sum_s e_s$; l'application ι envoie e_s sur $\square_s := (e_s, 0) + (0, e_{sg_r}) - (e_{sg_u}, 0) - (0, e_s)$; l'image $\varpi(e_s, 0)$ (resp. $\varpi(0, e_s)$) est la classe d'homologie relative assosiée au bord inférieur du carreau s, orienté de gauche à droite (resp. au bord gauche de s, orienté de bas en haut).

D'autre part, on a la suite exacte usuelle de Γ-modules

$$0 \to H_1(M,\mathbb{K}) \to H_1(M,\Sigma,\mathbb{K}) \to H_0(\Sigma,\mathbb{K}) \to \mathbb{K} \to 0.$$

Finalement, rappelons la décomposition canonique

$$H_1(M,\mathbb{K}) = H_1^{st}(M,\mathbb{K}) \oplus H_1^{(0)}(M,\mathbb{K}).$$

en un Γ-module trivial $H_1^{st}(M,\mathbb{K})$ de dimension 2 sur $\mathbb{K}$ et le noyau $H_1^{(0)}(M,\mathbb{K})$ de $H_1(\pi)$. On obtient la relation entre Γ-modules

$$H_1^{(0)}(M,\mathbb{K}) = \mathbb{K}(M) \ominus H_0(\Sigma,\mathbb{K}).$$

En étudiant l'action de Γ sur Σ, on calcule la décomposition de $H_0(\Sigma,\mathbb{C})$ puis de $H_1^{(0)}(M,\mathbb{C})$ en sous-modules isotypiques. La formule générale s'énonce comme suit. Soit π_α une représentation $\mathbb{C}$-irréductible de Γ dans un espace E_α, également considérée comme une représentation de N via l'homomorphisme canonique de N dans Γ. Notons ψ_α la représentation de G induite par π_α dans $\oplus_{\overline{g}\in G/N}\, \overline{g}\cdot E_\alpha$, ρ la permutation de G/N induite par l'action à gauche de c. Pour un cycle C de ρ, de longueur n_c, notons $f_\alpha(C)$ la dimension de l'espace fixé par la restriction de $\psi_\alpha(c^{n_c})$ à $\overline{g}\cdot E_\alpha$ (pour tout $\overline{g} \in C$).

La multiplicité ℓ_α de π_α dans le Γ-module $H_1^{(0)}(M,\mathbb{C})$ est alors donnée par

$$\ell_\alpha = \dim \psi_\alpha - \sum_{C\, cycle\ of\ \rho} f_\alpha(C).$$

Le cas $H = \{1\}$ est celui d'un origami *régulier* : on a alors $\mathrm{N} = G$ et la multiplicité ℓ_α est égale à la codimension de l'espace fixé par $\pi_\alpha(c)$. Il en résulte que, lorsque M est régulier, les représentations π_α de dimension 1 n'apparaissent pas dans $H_1^{(0)}(M,\mathbb{C})$ et celles de dimension > 1 ont une multiplicité > 1.

2. On dira que l'origami M est *quasi régulier* si la représentation triviale n'apparaît pas dans $H_1^{(0)}(M,\mathbb{C})$. D'après la formule précédente, cela se produit si et seulement si la classe de conjugaison de c est contenue dans N.

Lorsqu'au contraire M n'est pas quasi régulier, toutes les représentations π_α ont une multiplicité > 1 dans $H_1^{(0)}(M,\mathbb{C})$. En fait, dans tous les cas, la multiplicité ne peut jamais être égale à 1 : elle est soit nulle soit > 1.

On peut aussi caractériser les origamis quasi régulier de la façon suivante : M est quasi régulier si et seulement si N est normal dans G et G/N est abélien. Notons qu'alors G/N est de rang $\leqslant 2$ puiqu'engendré par les classes de g_r et g_u.

On a donné quelques exemples d'origamis quasi régulier qui ne sont pas réguliers. Le plus simple est basé sur le groupe de Heisenberg à coefficients dans le corps fini $\mathbb{F}_p$. Le groupe d'automorphismes Γ est dans ce cas cyclique d'ordre p.

Un exemple plus riche est obtenu comme suit. Soit n en entier au moins égal à 2. Le groupe G est constitué des permutations de l'ensemble $X := \{1,\ldots,2n\}$ qui préservent la partition $X = X_p \sqcup X_i$ en entiers pairs et impairs.
Le sous-groupe H est constitué des permutations qui fixent chaque entier pair. Le normalisateur N de H est donc l'ensemble des permutations qui préservent X_p. On choisit pour générateurs de G les permutations $g_r = (12\ldots 2n)$ et $g_u = (24)$. Le groupe d'automorphismes Γ, isomorphe à N/H s'identifie donc au groupe symétrique

d'ordre n. On notera que le commutateur $c = g_r g_u g_r^{-1} g_u^{-1}$ correspond alors à une transposition ; en particulier, ce n'est pas un commutateur de Γ. Comme N est un sous-groupe d'indice 2 de G, l'origami M associé à (G, H, g_r, g_u) est quasi régulier.

Les représentations irréductibles π_α de Γ sont associées aux diagrammes de Young d'ordre n. La multiplicité ℓ_α de π_α dans $H_1^{(0)}(M,\mathbb{C})$ est le double de la codimension de l'espace fixé par $\pi_\alpha(c)$, codimension qu'on peut calculer grâce à la formule de Frobenius.

Une petite modification de l'exemple précédent produit un exemple d'origami quasi régulier tel que G/N ne soit pas cyclique.

3. Un homéomorphisme d'un origami $\pi : M \to \mathbb{T}^2$ est *affine* s'il relève un automorphisme linéaire de $\mathbb{T}^2$. Les homéomorphismes affines de M forment un groupe $\mathrm{Aff}(M)$. La suite exacte

$$1 \to \mathrm{Aut}(M) \to \mathrm{Aff}(M) \to GL(M) \to 1$$

indique que $\mathrm{Aff}(M)$ est une extension du *groupe de Veech* $GL(M)$ par le groupe $\Gamma = \mathrm{Aut}(M)$. On note $\mathrm{Aff}_{**}(M)$ le centralisateur de Γ dans $\mathrm{Aff}(M)$: c'est un sous-groupe normal d'indice fini de $\mathrm{Aff}(M)$.

Tout élément du groupe affine préserve la décomposition

$$H_1(M,\mathbb{K}) = H_1^{st}(M,\mathbb{K}) \oplus H_1^{(0)}(M,\mathbb{K}).$$

Notons

$$H_1^{(0)}(M,\mathbb{K}) = \oplus_{a \in \mathcal{I}rr_{\mathbb{K}}(\Gamma)} W_a$$

la décomposition de $H_1^{(0)}(M,\mathbb{K})$ en composantes isotypiques, $\mathcal{I}rr_{\mathbb{K}}(\Gamma)$ désignant l'ensemble des classes d'isomorphismes de $\mathbb{K}(\Gamma)$-modules irréductibles. L'action sur $H_1^{(0)}(M,\mathbb{K})$ d'un élément A de $\mathrm{Aff}_{**}(M)$ préserve chaque composante W_a.

Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, les composantes sont orthogonales pour la forme symplectique d'intersection sur $H_1^{(0)}(M,\mathbb{R})$. On conclut que la restriction de g à W_a est un automorphisme symplectique du $\mathbb{R}(\Gamma)$-module W_a. On note $Sp(W_a)$ le groupe de tels automorphismes.

Il n'est pas difficile d'analyser la structure du groupe $Sp(W_a)$. Notons V_a un $\mathbb{R}(\Gamma)$-module irréductible contenu dans W_a et ℓ_a la multiplicité de V_a dans W_a.

• Lorsque la représentation V_a est *réelle*, l'entier ℓ_a est pair et $Sp(W_a)$ est isomorphe au groupe symplectique $Sp(\ell_a, \mathbb{R})$.

• Lorsque la représentation V_a est *complexe*, il existe des entiers $p, q \geqslant 0$ avec $p + q = \ell_a$ tels que le groupe $Sp(W_a)$ soit isomorphe au groupe unitaire $U_{\mathbb{C}}(p,q)$ d'une forme hermitienne de signature (p,q).

• Lorsque la représentation V_a est *quaternionienne*, il existe de même des entiers $p, q \geqslant 0$ avec $p + q = \ell_a$ tels que le groupe $Sp(W_a)$ soit isomorphe au groupe unitaire $U_{\mathbb{H}}(p,q)$ d'une forme $\mathbb{H}$-hermitienne de signature (p,q).

4. L'action du groupe affine sur l'homologie d'un origami M est intimement liée aux exposants de Lyapunov de la restriction du *cocycle de Kontsevich-Zorich* à la $SL(2,\mathbb{R})$-orbite de M dans l'espace des modules. La définition même du cocycle requiert d'ailleurs quelques précautions lorsque le groupe d'automorphismes Γ de M n'est pas trivial.

Le lien peut s'exprimer comme suit : pour presque tout point x dans l'orbite $SL(2,\mathbb{R})/SL(M)$ de M, il existe une suite d'éléments distincts A_n dans Aff$_{**}(M)$ telle que le sous-espace de $H_1^{(0)}(M,\mathbb{R})$ associé à l'exposant de Lyapunov θ soit donné par

$$E(\theta,x) = \{v \in H_1^{(0)}(M,\mathbb{R}),\ \lim_{n\to+\infty} \frac{\log || A_n(v) ||}{\log || A_n ||} = \theta.\}$$

Comme les éléments de Aff$_{**}(M)$ préservent chaque composante W_a, on peut analyser séparément les exposants de Lyapunov sur chacune de ces composantes. Dans une telle composante, chaque sous-espace caractéristique est invariant sous l'action de Γ ; sa dimension est donc un multiple de la multiplicité ℓ_a de V_a dans W_a. Lorsque la représentation V_a est complexe ou quaternionienne, et le groupe $Sp(W_a)$ est isomorphe à un groupe unitaire $U_{\mathbb{C}}(p,q)$ ou $U_{\mathbb{H}}(p,q)$, la multiplicité dans W_a de l'exposant 0 est au moins égale à $|q-p|\dim_{\mathbb{R}} V_a$.

La fin de la première partie du cours a été consacrée à l'analyse détaillée d'une famille d'exemples d'origamis réguliers. Soit p un nombre premier impair. On considère le groupe $G = \Gamma = SL(2,\mathbb{F}_p)$, et on choisit pour générateurs

$$g_r = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad g_u = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$$

avec $\pi = ab \neq 0$. Il y a $p+4$ représentations irréductibles dont on a exprimé la multiplicité dans le Γ-module $H_1^{(0)}(M,\mathbb{R})$: la discussion dépend de la congruence de p modulo 4, et du caractère quadratique ou non du résidu π^2+4 modulo p.

5. Dans la seconde partie du cours, on a exposé un critère de simplicité du spectre de Lyapunov pour les origamis obtenu en collaboration avec C. Matheus et M. Möller.

On a tout d'abord rappelé une forme du critère de simplicité général d'Avila-Viana. Le cadre dans lequel se formule ce critère est le suivant :

- Λ est un alphabet fini ou dénombrable ;
- $(\Sigma := \Lambda^{\mathbb{N}}, f)$ est le décalage complet unilatéral sur l'alphabet Λ ; Ω est l'ensemble des mots de Λ ; pour $\underline{\ell} \in \Omega$, $\Sigma(\underline{\ell})$ désigne le cylindre de Σ formé des suites commençant par $\underline{\ell}$;
- μ est une des mesure de probabilité f-invariante sur Σ. On suppose que μ est *de distorsion bornée* : il existe une constante $C > 1$ telle que

$$C^{-1} \leqslant \frac{\mu(\Sigma(\underline{\ell}_1\underline{\ell}_2))}{\mu(\Sigma(\underline{\ell}_1))\mu(\Sigma(\underline{\ell}_2))} \leqslant C$$

pour tous mots $\underline{\ell}_1, \underline{\ell}_2 \in \Omega$.

- $\mathbb{G}$ est l'un des groupes de Lie suivants : $GL(d,\mathbb{R})$, $Sp(d,\mathbb{R})$ (pour d pair), $\mathrm{U}_{\mathbb{C}}(p,q)$, $\mathrm{U}_{\mathbb{H}}(p,q)$ (avec $p+q=d, q \leqslant p$) ; $\mathbb{K}$ est le corps associé : $\mathbb{R}$ dans les deux premiers cas, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$ dans les deux derniers.
- $(A_\ell)_{\ell\in\Lambda}$ est une famille d'éléments de $\mathbb{G}$ vérifiant la condition d'intégrabilité

$$\sum_{\ell} \mu(\Sigma(\ell)) \log || A_\ell^{\pm 1} || < +\infty.$$

La famille $(A_\ell)_{\ell\in\Lambda}$ définit un cocycle localement constant au-dessus de f dont on se propose d'étudier les exposants de Lyapunov par rapport à la mesure μ. Pour tout mot $\underline{\ell}\in\Omega$, on note $A(\underline{\ell})$ le produit associé dans $\mathbb{G}$.

Lorsque $\mathbb{G}=GL(d,\mathbb{R})$, on désigne pour $0<k\leqslant d$ par $G(k)$ la variété grassmannienne des k-plans de $\mathbb{R}^d$. Lorsque $\mathbb{G}=Sp(d,\mathbb{R})$, on désigne pour $0<k\leqslant d/2$ (resp. $d/2\leqslant k<d$) par $G(k)$ la variété grassmannienne des k-plans isotropes (resp. coisotropes) de $\mathbb{R}^d$. Finalement, lorsque $\mathbb{G}=U_{\mathbb{K}}(p,q)$, on désigne pour $0<k\leqslant q$ (resp. $p\leqslant k<d$) par $G(k)$ la variété grassmannienne des k-plans isotropes (resp. coisotropes) de $\mathbb{K}^d$. On notera que dans tous les cas, le groupe $\mathbb{G}$ agit naturellement sur chaque $G(k)$.

On dira que le spectre de Lyapunov d'un cocycle $\mathbb{G}$-valué est simple si chaque exposant non nul est de multiplicité 1, et la multiplicité de l'exposant 0 est la plus petite possible, c'est-à-dire 0 lorsque $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, $p-q$ lorsque $\mathbb{G}=U_{\mathbb{K}}(p,q)$.

Avila et Viana font deux hypothèses permettant de conclure à la simplicité du spectre.

i. **Pincement :** on suppose qu'il existe un mot $\underline{\ell}^*\in\Omega$ tel que $A(\underline{\ell}^*)$ a un spectre simple au sens précédent.

ii. **Torsion :** pour tous sous-espaces $F_1,\dots,F_m,F'_1,\dots,F'_m$ avec $F_i\in G(k_i),F'_i\in G(d-k_i)$, il existe $\underline{\ell}\in\Omega$ tel que $A(\underline{\ell})F_i$ soit transverse à F'_i pour tout $1\leqslant i\leqslant m$.

En présence d'un mot $\underline{\ell}^*\in\Omega$ vérifiant la condition de pincement, la condition de torsion prend la forme équivalente suivante :

iii. **Torsion** (version alternative) : Pour tout $1\leqslant k\leqslant d/2$ ($1\leqslant k\leqslant q$ dans le cas unitaire), il existe $\underline{\ell}_k\in\Omega$ tel que, pour tous sous-espaces $A(\underline{\ell}^*)$-**invariants** $F\in G(k)$, $F'\in G(d-k)$, $A(\underline{\ell}_k)(F)$ soit transverse à F'.

La version du critère de simplicité obtenue avec Matheus et Möller se ramène à celle d'Avila-Viana mais en diffère dans la formulation de la condition de torsion.

Le cadre est un peu plus restrictif : Λ,Σ,f,μ sont comme ci-dessus, mais la famille de matrices $(A_\ell)_{\ell\in\Lambda}$ définissant le cocycle appartient au groupe $Sp(2d,\mathbb{Z})$. Elle vérifie encore la condition d'intégrabilité. La condition de pincement a une formulation arithmétique :

iv. **Groupe de Galois :** Il existe un mot $\underline{\ell}^*\in\Omega$ tel que toutes les valeurs propres de la matrice $A(\underline{\ell}^*)$ soient **réelles** et le groupe de Galois de son polynôme caractéristique soit le plus gros possible, c'est- à-dire isomorphe à $(\mathbb{Z}_2)^d\times S_d$.

Il est facile de voir que cette condition est plus forte que la condition de pincement d'Avila-Viana. Ceci permet d'avoir une condition de torsion plus faible :

v. **Torsion faible :** Il existe un lot $\underline{\ell}\in\Omega$ tel que les seuls sous-espaces invariants par $A(\underline{\ell}^*)$ et $(A(\underline{\ell}))^2$ soient triviaux.

Sous l'hypothèse sur le groupe de Galois, nous montrons que l'hypothèse de torsion faible implique l'hypothèse de torsion d'Avila-Viana, et donc la simplicité du spectre de Lyapunov du cocycle. La démonstration est assez longue et de nature combinatoire.

6. Le critère de simplicité d'Avila-Viana est un des ingrédients essentiels pour montrer la simplicité du spectre de Lyapunov du cocycle de Kontsevich-Zorich par rapport à la mesure de Lebesgue canonique supportée par une composante connexe d'une strate de l'espace des modules de surfaces de translation.

La version que nous en avons donnée avec Matheus et Möller permet d'obtenir le même résultat pour les mesures canoniques supportées par les $SL(2,\mathbb{R})$-orbites de certains origamis.

Le cas de la strate $\mathcal{H}(2)$ en genre 2, correspondant aux 1-formes ayant un seul zéro double, est le plus simple à traiter. Un théorème difficile de Bainbridge, utilisant des techniques raffinées de géométrie algébrique, affirme que les exposants non triviaux pour tout origami dans $\mathcal{H}(2)$ sont à $\pm\frac{1}{3}$. Notre critère permet de voir de façon que ces exposants sont non nuls.

Le cas de la strate $\mathcal{H}(4)$ en genre 3, correspondant aux 1-formes ayant un seul zéro d'ordre 4, est plus intéressant puisque la formule générale d'Eskin-Kontsevich-Zorich ne permet alors que de calculer la somme des exposants positifs non triviaux. Cette strate de l'espace des modules est constituée de deux composantes connexes appelées respectivement *hyperelliptique* et *non hyperelliptique*. La raison de cette terminologie est que toutes les surfaces de translation dans la première composante connexe possèdent un homéomorphisme affine dont la dérivée est $-\mathrm{id}$.

Une conjecture de V. Delecroix et S. Lelièvre, supportée par des résultats partiels de E. Lanneau et D.M. Nguyen, énumère ce que devraient être les $SL(2,\mathbb{Z})$-orbites d'origamis à N carreaux dans $\mathcal{H}(4)$. Ces orbites devraient être classifiées par leur groupe de monodromie, et lorqu'il existe un homéomorphisme affine dont la dérivée est $-\mathrm{id}$, par les images dans $\mathbb{T}^2$ des points fixes de cette involution (points de Weierstrass). Dans un travail en cours avec Matheus et Möller, nous appliquons notre critère aux familles d'orbites de Delecroix et Lelièvre. Si, comme la conjecture le prévoit, on obtient ainsi tous les origamis dans $\mathcal{H}(4)$, cela devrait permettre de conclure que tous les origamis dans $\mathcal{H}(4)$, sauf peut-être un nombre fini, ont un spectre de Lyapunov simple. Un tel comportement serait donc tout à fait à l'opposé de celui d'origamis ayant un gros groupe d'automorphismes. On notera qu'un origami dans $\mathcal{H}(4)$ ne peut avoir d'automorphisme non trivial.

Invitations, Missions, Conférences

28-30 septembre 2011 : Mission à la Scuola Normale Superiore de Pise.

17 octobre-12 novembre 2011 : Cours « A survey of Chaotic dynamics » à la City University of Hong-Kong.

18 novembre 2011 : Conférence « Billards » dans le cycle « Une question, un chercheur » à l'Institut Henri Poincaré.

22 novembre 2011 : Conférence « Mathematical Billiards », TWAS General Assembly, Trieste.

5-22 décembre 2011 : Cours « Introduction à la théorie des Systèmes Dynamiques », AIMS Sénégal, Mbour (Sénégal).

23 décembre 2011 : Conférence à l'Université de Dakar (Sénégal).

8 février 2012 : Conférence « Une erreur féconde » à l'Université d'Amiens.

16 février 2012 : Conférence lors de la réunion annuelle de l'Académie des Sciences du Maroc, Rabat (Maroc).

5 mars 2012 : Conférence lors de l'inauguration du laboratoire Fibonacci (CNRS-SNS), Pise.

22 mars 2012 : Keynote speaker à la conférence de théorie ergodique de Chapel Hill, (NC) USA.

27 mars-6 avril 2012 : Mission et conférence à l'Institute for computational and experimental research in mathematics, Brown University, Providence (RI), USA.

19 avril 2012 : Conférence à l'Université de Poitiers.

21 mai-1er juin 2012 : co-directeur de l'École de systèmes dynamiques et mini-cours « Birkhoff sums for interval exchange maps » (avec C. Matheus), ICTP, Trieste.

5 juin 2012 : Conférence lors d'un colloque en l'honneur de John Mather, ENS Lyon.

29 juin 2012 : Conférence lors du « First Palis-Balzan International Symposium on Dynamical Systems », IMPA, Rio de Janeiro, Br.

Publications

Matheus C., Yoccoz J.-C., The action of the affine diffeomorphisms on the relative homology group of certain exceptionally symmetric origamis, *J. Mod. Dyn.,* 4, 2010, n° 3, 453-486.

Kim K.-T., Yoccoz J.-C., CR manifolds admitting a CR contraction,. *J. Geom. Anal.,* 21, 2011, n° 2, 476-493.