Quelques aspects de la théorie des systèmes dynamiques quasipériodiques(7)

Jean-Christophe Yoccoz

Collège de France

11 juin 2014

Théorème: (Kolmogorov 1954, Arnold 1963, Moser 1962)

Le théorème KAM

Théorème: (Kolmogorov 1954, Arnold 1963, Moser 1962)
Soit T_0 un tore lagrangien α-quasipériodique de classe C^∞, invariant par le flot d'un Hamiltonien H_0 de classe C^∞.

Le théorème KAM

Théorème: (Kolmogorov 1954, Arnold 1963, Moser 1962)
Soit T_0 un tore lagrangien α-quasipériodique de classe C^∞, invariant par le flot d'un Hamiltonien H_0 de classe C^∞.

On suppose que α est diophantien ($\alpha \in HDC$) et que la torsion de T_0 est non dégénérée.

Théorème: (Kolmogorov 1954, Arnold 1963, Moser 1962)
Soit T_0 un tore lagrangien α-quasipériodique de classe C^∞, invariant par le flot d'un Hamiltonien H_0 de classe C^∞.

On suppose que α est diophantien ($\alpha \in HDC$) et que la torsion de T_0 est non dégénérée.

Alors, pour tout Hamiltonien H C^∞-proche de H_0, il existe au voisinage de T_0 un tore lagrangien α-quasipériodique T de classe C^∞, invariant par le flot de H.

Remarques sur la preuve des théorèmes KAM

La méthode géométrique de renormalisation, présentée dans le cadre de la linéarisation des difféomorphismes analytiques du cercle, présente des difficultés pratiques considérables en dimension supérieure.

Remarques sur la preuve des théorèmes KAM

La méthode géométrique de renormalisation, présentée dans le cadre de la linéarisation des difféomorphismes analytiques du cercle, présente des difficultés pratiques considérables en dimension supérieure.

Ceci est en particulier dû au fait que les changements d'échelles successifs ne sont plus conformes.

Remarques sur la preuve des théorèmes KAM

La méthode géométrique de renormalisation, présentée dans le cadre de la linéarisation des difféomorphismes analytiques du cercle, présente des difficultés pratiques considérables en dimension supérieure.

Ceci est en particulier dû au fait que les changements d'échelles successifs ne sont plus conformes.

L'approche la plus flexible est basée sur des méthodes d'analyse fonctionnelle.

Remarques sur la preuve des théorèmes KAM

La méthode géométrique de renormalisation, présentée dans le cadre de la linéarisation des difféomorphismes analytiques du cercle, présente des difficultés pratiques considérables en dimension supérieure.

Ceci est en particulier dû au fait que les changements d'échelles successifs ne sont plus conformes.

L'approche la plus flexible est basée sur des méthodes d'analyse fonctionnelle.
Dans certains cas (cf. le résultat de Herman sur les difféomorphismes du cercle, basé sur l'utilisation de la dérivée Schwarzienne), le théorème des fonctions implicites usuel (i.e dans les espaces de Banach) peut être utilisé de façon efficace.

Remarques sur la preuve des théorèmes KAM

La méthode géométrique de renormalisation, présentée dans le cadre de la linéarisation des difféomorphismes analytiques du cercle, présente des difficultés pratiques considérables en dimension supérieure.

Ceci est en particulier dû au fait que les changements d'échelles successifs ne sont plus conformes.

L'approche la plus flexible est basée sur des méthodes d'analyse fonctionnelle.
Dans certains cas (cf. le résultat de Herman sur les difféomorphismes du cercle, basé sur l'utilisation de la dérivée Schwarzienne), le théorème des fonctions implicites usuel (i.e dans les espaces de Banach) peut être utilisé de façon efficace.

Mais ce ne semble pas être toujours possible.

La méthode de Nash-Moser

Pour résoudre les équations fonctionnelles associées aux théorèmes KAM, on peut mettre en oeuvre, à la suite de Nash et Moser, un algorithme qui combine la méthode de Newton (qui produit une convergence quadratique vers une solution exacte) avec des opérateurs de lissage (pour compenser les pertes de régularité provoquées par l'inversion de la différentielle dans la méthode de Newton).

La méthode de Nash-Moser

Pour résoudre les équations fonctionnelles associées aux théorèmes KAM, on peut mettre en oeuvre, à la suite de Nash et Moser, un algorithme qui combine la méthode de Newton (qui produit une convergence quadratique vers une solution exacte) avec des opérateurs de lissage (pour compenser les pertes de régularité provoquées par l'inversion de la différentielle dans la méthode de Newton).

La méthode de Nash-Moser peut être implémentée, soit directement sur l'équation fonctionnelle étudiée, soit dans un cadre abstrait.

La méthode de Nash-Moser

Pour résoudre les équations fonctionnelles associées aux théorèmes KAM, on peut mettre en oeuvre, à la suite de Nash et Moser, un algorithme qui combine la méthode de Newton (qui produit une convergence quadratique vers une solution exacte) avec des opérateurs de lissage (pour compenser les pertes de régularité provoquées par l'inversion de la différentielle dans la méthode de Newton).

La méthode de Nash-Moser peut être implémentée, soit directement sur l'équation fonctionnelle étudiée, soit dans un cadre abstrait.

Elle permet alors de démontrer des théorèmes de fonctions implicites qui peuvent ensuite être appliqués dans une grande variété de contextes.

La méthode de Nash-Moser

Pour résoudre les équations fonctionnelles associées aux théorèmes KAM, on peut mettre en oeuvre, à la suite de Nash et Moser, un algorithme qui combine la méthode de Newton (qui produit une convergence quadratique vers une solution exacte) avec des opérateurs de lissage (pour compenser les pertes de régularité provoquées par l'inversion de la différentielle dans la méthode de Newton).

La méthode de Nash-Moser peut être implémentée, soit directement sur l'équation fonctionnelle étudiée, soit dans un cadre abstrait.

Elle permet alors de démontrer des théorèmes de fonctions implicites qui peuvent ensuite être appliqués dans une grande variété de contextes.

Il existe de nombreuses versions de tels théorèmes, tant en régularité C^∞ que C^ω: Hörmander, Sergeraert, Hamilton, Zehnder,. . .

La méthode de Nash-Moser

Pour résoudre les équations fonctionnelles associées aux théorèmes KAM, on peut mettre en oeuvre, à la suite de Nash et Moser, un algorithme qui combine la méthode de Newton (qui produit une convergence quadratique vers une solution exacte) avec des opérateurs de lissage (pour compenser les pertes de régularité provoquées par l'inversion de la différentielle dans la méthode de Newton).

La méthode de Nash-Moser peut être implémentée, soit directement sur l'équation fonctionnelle étudiée, soit dans un cadre abstrait. Elle permet alors de démontrer des théorèmes de fonctions implicites qui peuvent ensuite être appliqués dans une grande variété de contextes.

Il existe de nombreuses versions de tels théorèmes, tant en régularité C^∞ que C^ω: Hörmander, Sergeraert, Hamilton, Zehnder,...

On présente ci-dessous une version due à Hamilton, qui a permis à Herman de donner des preuves simples de nombreux théorèmes KAM.

Bons espaces de Fréchet

Ce sont des espaces de Fréchet possédant certaines des propriétés des espaces de fonctions de classe C^∞.

Bons espaces de Fréchet

Ce sont des espaces de Fréchet possédant certaines des propriétés des espaces de fonctions de classe C^∞.

Un bon espace de Fréchet est un espace vectoriel topologique E muni

Bons espaces de Fréchet

Ce sont des espaces de Fréchet possédant certaines des propriétés des espaces de fonctions de classe C^∞.

Un bon espace de Fréchet est un espace vectoriel topologique E muni

- d'une suite croissante de normes $(\| \quad \|_r)_{r \geqslant 0}$ qui définit la topologie de E et en fait un espace complet;

Bons espaces de Fréchet

Ce sont des espaces de Fréchet possédant certaines des propriétés des espaces de fonctions de classe C^∞.

Un bon espace de Fréchet est un espace vectoriel topologique E muni

- d'une suite croissante de normes $(\| \quad \|_r)_{r \geqslant 0}$ qui définit la topologie de E et en fait un espace complet;
- d'une famille $(S(t))_{t \geqslant 1}$ d'opérateurs linéaires de E dans E qui vérifient, pour $x \in E$, $t \geqslant 1$, $0 \leqslant s \leqslant r$

Bons espaces de Fréchet

Ce sont des espaces de Fréchet possédant certaines des propriétés des espaces de fonctions de classe C^∞.

Un bon espace de Fréchet est un espace vectoriel topologique E muni

- d'une suite croissante de normes $(\| \quad \|_r)_{r \geqslant 0}$ qui définit la topologie de E et en fait un espace complet;
- d'une famille $(S(t))_{t \geqslant 1}$ d'opérateurs linéaires de E dans E qui vérifient, pour $x \in E$, $t \geqslant 1$, $0 \leqslant s \leqslant r$

$$\|S(t)\,x\|_r \leqslant Ct^{r-s}\|x\|_s, \quad \|S(t)\,x - x\|_s \leqslant Ct^{s-r}\|x\|_r,$$

avec une constante $C = C(r, s)$.

Exemple: le bon espace de Fréchet $C^\infty(\mathbb{T}^n)$

Pour une fonction $\phi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ et un entier $r \geqslant 0$, on définit

Exemple: le bon espace de Fréchet $C^\infty(\mathbb{T}^n)$

Pour une fonction $\phi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ et un entier $r \geqslant 0$, on définit

$$\|\phi\|_r := \max_{|\alpha| \leqslant r} \|\partial^\alpha \phi\|_{C^0}.$$

Exemple: le bon espace de Fréchet $C^\infty(\mathbb{T}^n)$

Pour une fonction $\phi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ et un entier $r \geqslant 0$, on définit

$$\|\phi\|_r := \max_{|\alpha| \leqslant r} \|\partial^\alpha \phi\|_{C^0}.$$

Soit $\hat{\chi} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ une fonction paire, à valeurs dans $[0, 1]$, égale à 1 sur $[-1/2, 1/2]^n$ et à 0 hors de $[-1, 1]^n$.

Exemple: le bon espace de Fréchet $C^\infty(\mathbb{T}^n)$

Pour une fonction $\phi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ et un entier $r \geqslant 0$, on définit

$$\|\phi\|_r := \max_{|\alpha| \leqslant r} \|\partial^\alpha \phi\|_{C^0}.$$

Soit $\hat{\chi} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ une fonction paire, à valeurs dans $[0, 1]$, égale à 1 sur $[-1/2, 1/2]^n$ et à 0 hors de $[-1, 1]^n$. Notons χ la transformée de Fourier inverse de $\hat{\chi}$.

Exemple: le bon espace de Fréchet $C^\infty(\mathbb{T}^n)$

Pour une fonction $\phi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ et un entier $r \geqslant 0$, on définit

$$\|\phi\|_r := \max_{|\alpha| \leqslant r} \|\partial^\alpha \phi\|_{C^0}.$$

Soit $\hat{\chi} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ une fonction paire, à valeurs dans $[0, 1]$, égale à 1 sur $[-1/2, 1/2]^n$ et à 0 hors de $[-1, 1]^n$. Notons χ la transformée de Fourier inverse de $\hat{\chi}$. Pour $t \geqslant 1$, on pose $\chi_t(x) = t^n \chi(tx)$.

Exemple: le bon espace de Fréchet $C^\infty(\mathbb{T}^n)$

Pour une fonction $\phi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ et un entier $r \geqslant 0$, on définit

$$\|\phi\|_r := \max_{|\alpha| \leqslant r} \|\partial^\alpha \phi\|_{C^0}.$$

Soit $\hat{\chi} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ une fonction paire, à valeurs dans $[0,1]$, égale à 1 sur $[-1/2, 1/2]^n$ et à 0 hors de $[-1,1]^n$. Notons χ la transformée de Fourier inverse de $\hat{\chi}$. Pour $t \geqslant 1$, on pose $\chi_t(x) = t^n \chi(tx)$.
Pour $\phi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$, on définit

$$S(t)\phi(x) := \phi * \chi_t(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y) \chi_t(x-y)\, dy.$$

Soit E un bon espace de Fréchet.

Inégalités d'interpolation de Hadamard

Soit E un bon espace de Fréchet. Soient $r_0 \leqslant r \leqslant r_1$ des entiers, et soit $u \in [0, 1]$ tel que $r = u\, r_0 + (1 - u)\, r_1$.

Inégalités d'interpolation de Hadamard

Soit E un bon espace de Fréchet. Soient $r_0 \leqslant r \leqslant r_1$ des entiers, et soit $u \in [0,1]$ tel que $r = u\, r_0 + (1-u)\, r_1$. Pour tout $x \in E$, on a

$$\|x\|_r \leqslant C\, \|x\|_{r_0}^{u} \|x\|_{r_1}^{1-u},$$

avec une constante $C = C(r_0, r_1)$.

Soit E un bon espace de Fréchet. Soient $r_0 \leqslant r \leqslant r_1$ des entiers, et soit $u \in [0,1]$ tel que $r = u\, r_0 + (1-u)\, r_1$. Pour tout $x \in E$, on a

$$\|x\|_r \leqslant C\, \|x\|_{r_0}^{u} \|x\|_{r_1}^{1-u},$$

avec une constante $C = C(r_0, r_1)$.

Preuve: On écrit

$$\begin{aligned} \|x\|_r &\leqslant \|S(t)\, x\|_r + \|S(t)\, x - x\|_r \\ &\leqslant C_0 t^{r-r_0} \|x\|_{r_0} + C_1\, t^{r-r_1} \|x\|_{r_1}, \end{aligned}$$

Inégalités d'interpolation de Hadamard

Soit E un bon espace de Fréchet. Soient $r_0 \leqslant r \leqslant r_1$ des entiers, et soit $u \in [0,1]$ tel que $r = u\, r_0 + (1-u)\, r_1$. Pour tout $x \in E$, on a

$$\|x\|_r \leqslant C\, \|x\|_{r_0}^{u} \|x\|_{r_1}^{1-u},$$

avec une constante $C = C(r_0, r_1)$.

Preuve: On écrit

$$\begin{aligned} \|x\|_r &\leqslant \|S(t)\,x\|_r + \|S(t)\,x - x\|_r \\ &\leqslant C_0 t^{r-r_0} \|x\|_{r_0} + C_1 t^{r-r_1} \|x\|_{r_1}, \end{aligned}$$

et on choisit t de façon à minimiser ce majorant.

Différentiabilité au sens de Gateaux

C'est une propriété en général plus faible que la différentiabilité usuelle.

Différentiabilité au sens de Gateaux

C'est une propriété en général plus faible que la différentiabilité usuelle.

Soient E, F des e.v.t., et soit U une partie ouverte de E.

Différentiabilité au sens de Gateaux

C'est une propriété en général plus faible que la différentiabilité usuelle.

Soient E, F des e.v.t., et soit U une partie ouverte de E. Une application *continue* $f : U \to F$ est Gateaux-C^1 s'il existe une application $Df : (x, y) \mapsto Df(x, y)$ de $U \times E$ dans F qui soit continue, linéaire en y, et vérifie

$$Df(x, y) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(f(x + ty) - f(x)), \qquad \forall x \in U, \ y \in E.$$

Différentiabilité au sens de Gateaux

C'est une propriété en général plus faible que la différentiabilité usuelle.
Soient E, F des e.v.t., et soit U une partie ouverte de E. Une application *continue* $f : U \to F$ est Gateaux-C^1 s'il existe une application $Df : (x, y) \mapsto Df(x, y)$ de $U \times E$ dans F qui soit continue, linéaire en y, et vérifie

$$Df(x,y) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(f(x+ty) - f(x)), \qquad \forall x \in U,\ y \in E.$$

Pour $k \geqslant 2$, on définit Gateaux-C^k par récurrence: l'application f est Gateaux-C^k si elle est Gateaux-C^{k-1} et $D^{k-1}f$ est Gateaux-C^1. On pose alors $D^k f := D(D^{k-1}f)$.

Différentiabilité au sens de Gateaux

C'est une propriété en général plus faible que la différentiabilité usuelle.
Soient E, F des e.v.t., et soit U une partie ouverte de E. Une application *continue* $f : U \to F$ est Gateaux-C^1 s'il existe une application $Df : (x, y) \mapsto Df(x, y)$ de $U \times E$ dans F qui soit continue, linéaire en y, et vérifie

$$Df(x,y) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(f(x+ty) - f(x)), \qquad \forall x \in U,\ y \in E.$$

Pour $k \geqslant 2$, on définit Gateaux-C^k par récurrence: l'application f est Gateaux-C^k si elle est Gateaux-C^{k-1} et $D^{k-1}f$ est Gateaux-C^1. On pose alors $D^k f := D(D^{k-1} f)$.

Remarque: Lorsque E est de dimension finie, f est Gateaux-C^k ssi f est de classe C^k au sens usuel.

Bonnes applications

Soient E, F des bons espaces de Fréchet, soit U une partie ouverte de E, et soit $f : U \to F$ une application *continue*.

Bonnes applications

Soient E, F des bons espaces de Fréchet, soit U une partie ouverte de E, et soit $f : U \to F$ une application *continue*.

L'application f est bonne si, pour tout $x_0 \in U$, il existe un voisinage $V \subset U$ de x_0 et un entier r_0 tels qu'on ait

$$\|f(x)\|_r \leqslant C_r(1 + \|x\|_{r+r_0}), \qquad \forall x \in V,\ r \geqslant 0,$$

avec une constante $C_r = C(r, x_0)$.

Bonnes applications

Soient E, F des bons espaces de Fréchet, soit U une partie ouverte de E, et soit $f : U \to F$ une application *continue*.

L'application f est bonne si, pour tout $x_0 \in U$, il existe un voisinage $V \subset U$ de x_0 et un entier r_0 tels qu'on ait

$$\|f(x)\|_r \leqslant C_r(1 + \|x\|_{r+r_0}), \qquad \forall x \in V,\ r \geqslant 0,$$

avec une constante $C_r = C(r, x_0)$.

Soit k en entier positif. L'application f est bonne de classe C^k si f est Gateaux-C^k et $D^j f$ est bonne pour tout $0 \leqslant j \leqslant k$.

Remarques

- Soient E_1, E_2 de bons espaces de Fréchet. Alors $E_1 \times E_2$ est un bon espace de Fréchet.

Remarques

- Soient E_1, E_2 de bons espaces de Fréchet. Alors $E_1 \times E_2$ est un bon espace de Fréchet. On pose en effet

$$\|(x_1, x_2)\|_r := \max(\|x_1\|_r, \|x_2\|_r), \quad S(t)(x_1, x_2) := (S(t)x_1, S(t)x_2).$$

Remarques

- Soient E_1, E_2 de bons espaces de Fréchet. Alors $E_1 \times E_2$ est un bon espace de Fréchet. On pose en effet

$$\|(x_1, x_2)\|_r := \max(\|x_1\|_r, \|x_2\|_r), \quad S(t)(x_1, x_2) := (S(t)x_1, S(t)x_2).$$

- Soit $f : U \to F$ une application Gateaux-C^2. Formellement, $D^2 f$ est une application de $(U \times E) \times (E \times E)$ dans F.

Remarques

- Soient E_1, E_2 de bons espaces de Fréchet. Alors $E_1 \times E_2$ est un bon espace de Fréchet. On pose en effet

$$\|(x_1, x_2)\|_r := \max(\|x_1\|_r, \|x_2\|_r), \quad S(t)(x_1, x_2) := (S(t)x_1, S(t)x_2).$$

- Soit $f : U \to F$ une application Gateaux-C^2. Formellement, $D^2 f$ est une application de $(U \times E) \times (E \times E)$ dans F. Comme $Df(x, y)$ est linéaire en y, on a

$$D^2 f((x, y_0), (y_1, z)) = D^2 f((x, y_0), (y_1, 0)) + Df(x, z).$$

Remarques

- Soient E_1, E_2 de bons espaces de Fréchet. Alors $E_1 \times E_2$ est un bon espace de Fréchet. On pose en effet

$$\|(x_1, x_2)\|_r := \max(\|x_1\|_r, \|x_2\|_r), \quad S(t)(x_1, x_2) := (S(t)x_1, S(t)x_2).$$

- Soit $f : U \to F$ une application Gateaux-C^2. Formellement, $D^2 f$ est une application de $(U \times E) \times (E \times E)$ dans F. Comme $Df(x, y)$ est linéaire en y, on a

$$D^2 f((x, y_0), (y_1, z)) = D^2 f((x, y_0), (y_1, 0)) + Df(x, z).$$

Pour tout $x \in U$, l'application: $(y_0, y_1) \mapsto D^2 f((x, y_0), (y_1, 0))$ est *bilinéaire* et *symétrique*.

- Soient E_0, E_1, F de bons espaces de Fréchet et soit U une partie ouverte de E_0.

- Soient E_0, E_1, F de bons espaces de Fréchet et soit U une partie ouverte de E_0. Une application continue $L : (x, y) \mapsto L(x, y)$ de $U \times E_1$ dans F, linéaire en y, est bonne si et seulement si, pour tout $x_0 \in U$, il existe un voisinage V de x_0 et un entier r_0 tel que

$$\|L(x, y)\|_r \leqslant C_r(\|y\|_{r+r_0} + \|x\|_{r+r_0}\,\|y\|_{r_0}), \quad \forall x \in V,\ y \in E_1, r \geqslant 0.$$

- Soient E_0, E_1, F de bons espaces de Fréchet et soit U une partie ouverte de E_0. Une application continue $L : (x, y) \mapsto L(x, y)$ de $U \times E_1$ dans F, linéaire en y, est bonne si et seulement si, pour tout $x_0 \in U$, il existe un voisinage V de x_0 et un entier r_0 tel que

$$\|L(x,y)\|_r \leqslant C_r(\|y\|_{r+r_0} + \|x\|_{r+r_0}\ \|y\|_{r_0}), \quad \forall x \in V,\ y \in E_1, r \geqslant 0.$$

- De même, une application continue $B(x, y_1, y_2)$ de $U \times E_1 \times E_2$ dans F, bilinéaire en y_1, y_2, est bonne si et seulement si, pour tout $x_0 \in U$, il existe un voisinage V de x_0 et un entier r_0 tel que

$$\|B(x,y_1,y_2)\|_r \leqslant C_r(\|y_1\|_{r+r_0}\|y_2\|_{r_0}+\|y_2\|_{r+r_0}\|y_1\|_{r_0}+\|x\|_{r+r_0}\ \|y_1\|_{r_0}\ \|y_2\|_{r_0}).$$

Le théorème d'inversion locale

Soient E, F deux bons espaces de Fréchet. Soit U une partie ouverte de E et soit $f : U \to F$ une bonne application de classe C^2.

Le théorème d'inversion locale

Soient E, F deux bons espaces de Fréchet. Soit U une partie ouverte de E et soit $f : U \to F$ une bonne application de classe C^2.

Theorem: (Hamilton) Supposons qu'il existe une bonne application $L : U \times F \to E$, linéaire dans la seconde variable, telle que, pour tout $x \in U$, $L(x, .)$ soit l'inverse de $Df(x, .)$.

Le théorème d'inversion locale

Soient E, F deux bons espaces de Fréchet. Soit U une partie ouverte de E et soit $f : U \to F$ une bonne application de classe C^2.

Theorem: (Hamilton) Supposons qu'il existe une bonne application $L : U \times F \to E$, linéaire dans la seconde variable, telle que, pour tout $x \in U$, $L(x, .)$ soit l'inverse de $Df(x, .)$.

Alors, pour tout $x_0 \in U$, il existe un voisinage U_0 de x_0 tel que la restriction de f à U_0 soit une bijection sur un voisinage V_0 de $f(x_0)$,

Le théorème d'inversion locale

Soient E, F deux bons espaces de Fréchet. Soit U une partie ouverte de E et soit $f : U \to F$ une bonne application de classe C^2.

Theorem: (Hamilton) Supposons qu'il existe une bonne application $L : U \times F \to E$, linéaire dans la seconde variable, telle que, pour tout $x \in U$, $L(x, .)$ soit l'inverse de $Df(x, .)$.

Alors, pour tout $x_0 \in U$, il existe un voisinage U_0 de x_0 tel que la restriction de f à U_0 soit une bijection sur un voisinage V_0 de $f(x_0)$, et que l'inverse $f^{-1} : V_0 \to U_0$ soit une bonne application de classe C^2.

Le théorème d'inversion locale

Soient E, F deux bons espaces de Fréchet. Soit U une partie ouverte de E et soit $f : U \to F$ une bonne application de classe C^2.

Theorem: (Hamilton) Supposons qu'il existe une bonne application $L : U \times F \to E$, linéaire dans la seconde variable, telle que, pour tout $x \in U$, $L(x, .)$ soit l'inverse de $Df(x, .)$.

Alors, pour tout $x_0 \in U$, il existe un voisinage U_0 de x_0 tel que la restriction de f à U_0 soit une bijection sur un voisinage V_0 de $f(x_0)$, et que l'inverse $f^{-1} : V_0 \to U_0$ soit une bonne application de classe C^2.

Complement: Soit $k \geqslant 2$. Si f est une bonne application de classe C^k, alors f^{-1} est aussi une bonne application de classe C^k.

Commentaires

Il y a deux grosses différences avec le théorème d'inversion locale standard, dans les espaces de Banach.

Commentaires

Il y a deux grosses différences avec le théorème d'inversion locale standard, dans les espaces de Banach.

1. On suppose que f est de classe C^2, pas seulement C^1.

Commentaires

Il y a deux grosses différences avec le théorème d'inversion locale standard, dans les espaces de Banach.

1. On suppose que f est de classe C^2, pas seulement C^1.
2. On suppose que la différentielle $Df(x,.)$ est inversible pour tout $x \in U$, pas seulement en x_0.

Commentaires

Il y a deux grosses différences avec le théorème d'inversion locale standard, dans les espaces de Banach.

1. On suppose que f est de classe C^2, pas seulement C^1.
2. On suppose que la différentielle $Df(x,.)$ est inversible pour tout $x \in U$, pas seulement en x_0.

   Bien sûr, dans un espace de Banach, les endomorphismes inversibles forment une partie ouverte de l'espace des endomorphismes, donc l'inversibilité de la différentielle en x_0 entraîne l'inversibilité au voisinage de x_0.

Commentaires

Il y a deux grosses différences avec le théorème d'inversion locale standard, dans les espaces de Banach.

1. On suppose que f est de classe C^2, pas seulement C^1.
2. On suppose que la différentielle $Df(x, .)$ est inversible pour tout $x \in U$, pas seulement en x_0.

   Bien sûr, dans un espace de Banach, les endomorphismes inversibles forment une partie ouverte de l'espace des endomorphismes, donc l'inversibilité de la différentielle en x_0 entraîne l'inversibilité au voisinage de x_0. Ce n'est plus le cas dans les espaces de Fréchet.

Commentaires

Il y a deux grosses différences avec le théorème d'inversion locale standard, dans les espaces de Banach.

1. On suppose que f est de classe C^2, pas seulement C^1.
2. On suppose que la différentielle $Df(x, .)$ est inversible pour tout $x \in U$, pas seulement en x_0.

   Bien sûr, dans un espace de Banach, les endomorphismes inversibles forment une partie ouverte de l'espace des endomorphismes, donc l'inversibilité de la différentielle en x_0 entraîne l'inversibilité au voisinage de x_0. Ce n'est plus le cas dans les espaces de Fréchet.

   Exemple: L'application $f \mapsto f \circ f$ de la variété Fréchetique $Diff^\infty(M)$ dans elle-même (M étant une variété compacte) a pour différentielle en $f_0 = \mathrm{id}_M$ l'homothétie $\partial f \mapsto 2\partial f$.

Commentaires

Il y a deux grosses différences avec le théorème d'inversion locale standard, dans les espaces de Banach.

1. On suppose que f est de classe C^2, pas seulement C^1.
2. On suppose que la différentielle $Df(x, .)$ est inversible pour tout $x \in U$, pas seulement en x_0.

   Bien sûr, dans un espace de Banach, les endomorphismes inversibles forment une partie ouverte de l'espace des endomorphismes, donc l'inversibilité de la différentielle en x_0 entraîne l'inversibilité au voisinage de x_0. Ce n'est plus le cas dans les espaces de Fréchet.

   Exemple: L'application $f \mapsto f \circ f$ de la variété Fréchetique $Diff^\infty(M)$ dans elle-même (M étant une variété compacte) a pour différentielle en $f_0 = \mathrm{id}_M$ l'homothétie $\partial f \mapsto 2\partial f$. Néanmoins, l'image de cette application ne contient pas un voisinage de l'identité.

Le théorème des fonctions implicites

Soient E, P, F de bons espaces de Fréchet.

Le théorème des fonctions implicites

Soient E, P, F de bons espaces de Fréchet. Soit W une partie ouverte de $E \times P$ et soit $f : W \to F$ une bonne application de classe C^k ($k \geqslant 2$).

Le théorème des fonctions implicites

Soient E, P, F de bons espaces de Fréchet. Soit W une partie ouverte de $E \times P$ et soit $f : W \to F$ une bonne application de classe C^k ($k \geqslant 2$).

Supposons qu'il existe une bonne application $L : W \times F \to E$, linéaire en la seconde variable, telle que $L(x, p, .)$ soit, pour tout $(x, p) \in W$, l'inverse de la différentielle partielle $\partial_E f(x, p, .)$.

Le théorème des fonctions implicites

Soient E, P, F de bons espaces de Fréchet. Soit W une partie ouverte de $E \times P$ et soit $f : W \to F$ une bonne application de classe C^k ($k \geqslant 2$).

Supposons qu'il existe une bonne application $L : W \times F \to E$, linéaire en la seconde variable, telle que $L(x, p, .)$ soit, pour tout $(x, p) \in W$, l'inverse de la différentielle partielle $\partial_E f(x, p, .)$.

Soit (x_0, p_0) un point de W tel que $f(x_0, p_0) = 0$.

Le théorème des fonctions implicites

Soient E, P, F de bons espaces de Fréchet. Soit W une partie ouverte de $E \times P$ et soit $f : W \to F$ une bonne application de classe C^k ($k \geqslant 2$).

Supposons qu'il existe une bonne application $L : W \times F \to E$, linéaire en la seconde variable, telle que $L(x, p, .)$ soit, pour tout $(x, p) \in W$, l'inverse de la différentielle partielle $\partial_E f(x, p, .)$.

Soit (x_0, p_0) un point de W tel que $f(x_0, p_0) = 0$. Il existe un voisinage V_0 de p_0, un voisinage U_0 de x_0 et une bonne application de classe C^k $g : V_0 \to U_0$ tels que $x = g(p)$ soit, pour tout $p \in V_0$, l'unique solution dans U_0 de l'équation $f(x, p) = 0$.

On va indiquer une preuve d'un résultat énoncé précédemment.

Exemple d’application du théorème d’inversion locale

On va indiquer une preuve d’un résultat énoncé précédemment.

Théorème: Supposons que $\alpha \in \mathbb{R}^n$ appartienne à *HDC*.

Exemple d'application du théorème d'inversion locale

On va indiquer une preuve d'un résultat énoncé précédemment.

Théorème: Supposons que $\alpha \in \mathbb{R}^n$ appartienne à *HDC*. Tout champ de vecteurs X de classe C^∞ sur $\mathbb{T}^n$, assez proche dans la C^∞-topologie du champ constant $X_\alpha := \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial}{\partial q_i}$, s'écrit de façon unique sous la forme

$$X = X_t + Th.X_\alpha,$$

Exemple d'application du théorème d'inversion locale

On va indiquer une preuve d'un résultat énoncé précédemment.

Théorème: Supposons que $\alpha \in \mathbb{R}^n$ appartienne à *HDC*. Tout champ de vecteurs X de classe C^∞ sur $\mathbb{T}^n$, assez proche dans la C^∞-topologie du champ constant $X_\alpha := \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial}{\partial q_i}$, s'écrit de façon unique sous la forme

$$X = X_t + Th.X_\alpha,$$

où $t \in \mathbb{R}^n$ est voisin de 0 et $h \in \mathrm{Diff}^\infty(\mathbb{T}^n)$ est proche de l'identité et vérifie $\int_{\mathbb{T}^n}(h(x) - x)\, dx = 0$.

- On écrit $h = \mathrm{id}_{\mathbb{T}^n} + \psi$, avec ψ appartenant à un voisinage de 0 dans le bon espace de Fréchet $E_0 = C_0^\infty(\mathbb{T}^n, \mathbb{R}^n)$ des fonctions lisses, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, de moyenne nulle.

- On écrit $h = \mathrm{id}_{\mathbb{T}^n} + \psi$, avec ψ appartenant à un voisinage de 0 dans le bon espace de Fréchet $E_0 = C_0^\infty(\mathbb{T}^n, \mathbb{R}^n)$ des fonctions lisses, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, de moyenne nulle.
- On pose $E = E_0 \oplus \mathbb{R}^n$. C'est un bon espace de Fréchet.

- On écrit $h = \mathrm{id}_{\mathbb{T}^n} + \psi$, avec ψ appartenant à un voisinage de 0 dans le bon espace de Fréchet $E_0 = C_0^\infty(\mathbb{T}^n, \mathbb{R}^n)$ des fonctions lisses, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, de moyenne nulle.
- On pose $E = E_0 \oplus \mathbb{R}^n$. C'est un bon espace de Fréchet.
- On note F le bon espace de Fréchet formé des champs de vecteurs lisses sur $\mathbb{T}^n$.

- On écrit $h = \mathrm{id}_{\mathbb{T}^n} + \psi$, avec ψ appartenant à un voisinage de 0 dans le bon espace de Fréchet $E_0 = C_0^\infty(\mathbb{T}^n, \mathbb{R}^n)$ des fonctions lisses, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, de moyenne nulle.
- On pose $E = E_0 \oplus \mathbb{R}^n$. C'est un bon espace de Fréchet.
- On note F le bon espace de Fréchet formé des champs de vecteurs lisses sur $\mathbb{T}^n$. On notera que F s'identifie naturellement à $C^\infty(\mathbb{T}^n, \mathbb{R}^n)$.

- On écrit $h = \mathrm{id}_{\mathbb{T}^n} + \psi$, avec ψ appartenant à un voisinage de 0 dans le bon espace de Fréchet $E_0 = C_0^\infty(\mathbb{T}^n, \mathbb{R}^n)$ des fonctions lisses, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, de moyenne nulle.
- On pose $E = E_0 \oplus \mathbb{R}^n$. C'est un bon espace de Fréchet.
- On note F le bon espace de Fréchet formé des champs de vecteurs lisses sur $\mathbb{T}^n$. On notera que F s'identifie naturellement à $C^\infty(\mathbb{T}^n, \mathbb{R}^n)$.
- Au voisinage de $(0, 0)$ dans E, on définit une application $\Phi : (\psi, t) \mapsto X$ à valeurs dans F par la formule

$$X := X_t + Dh \circ h^{-1}.X_\alpha, \quad h = \mathrm{id}_{\mathbb{T}^n} + \psi.$$

- On écrit $h = \mathrm{id}_{\mathbb{T}^n} + \psi$, avec ψ appartenant à un voisinage de 0 dans le bon espace de Fréchet $E_0 = C_0^\infty(\mathbb{T}^n, \mathbb{R}^n)$ des fonctions lisses, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, de moyenne nulle.
- On pose $E = E_0 \oplus \mathbb{R}^n$. C'est un bon espace de Fréchet.
- On note F le bon espace de Fréchet formé des champs de vecteurs lisses sur $\mathbb{T}^n$. On notera que F s'identifie naturellement à $C^\infty(\mathbb{T}^n, \mathbb{R}^n)$.
- Au voisinage de $(0, 0)$ dans E, on définit une application $\Phi : (\psi, t) \mapsto X$ à valeurs dans F par la formule

$$X := X_t + Dh \circ h^{-1}.X_\alpha, \quad h = \mathrm{id}_{\mathbb{T}^n} + \psi.$$

On va montrer que Φ est un bon difféomorphisme local de classe C^∞.

- On écrit $h = \mathrm{id}_{\mathbb{T}^n} + \psi$, avec ψ appartenant à un voisinage de 0 dans le bon espace de Fréchet $E_0 = C_0^\infty(\mathbb{T}^n, \mathbb{R}^n)$ des fonctions lisses, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, de moyenne nulle.
- On pose $E = E_0 \oplus \mathbb{R}^n$. C'est un bon espace de Fréchet.
- On note F le bon espace de Fréchet formé des champs de vecteurs lisses sur $\mathbb{T}^n$. On notera que F s'identifie naturellement à $C^\infty(\mathbb{T}^n, \mathbb{R}^n)$.
- Au voisinage de $(0,0)$ dans E, on définit une application $\Phi : (\psi, t) \mapsto X$ à valeurs dans F par la formule

$$X := X_t + Dh \circ h^{-1}.X_\alpha, \quad h = \mathrm{id}_{\mathbb{T}^n} + \psi.$$

  On va montrer que Φ est un bon difféomorphisme local de classe C^∞.
- Des vérifications simples (mais fastidieuses) montrent que Φ est une bonne application de classe C^∞.

- La différentielle de Φ en $(0,0) \in E$ est donnée par

$$D\Phi(0,0,\Delta\psi,\Delta t) = \Delta t + D(\Delta\psi).X_\alpha.$$

- La différentielle de Φ en $(0,0) \in E$ est donnée par

$$D\Phi(0,0,\Delta\psi,\Delta t) = \Delta t + D(\Delta\psi).X_\alpha.$$

- Comme α appartient à *HDC*, cette application linéaire de *E* dans *F* est inversible, et son inverse est une bonne application.

- La différentielle de Φ en $(0,0) \in E$ est donnée par

$$D\Phi(0,0,\Delta\psi,\Delta t) = \Delta t + D(\Delta\psi).X_\alpha.$$

- Comme α appartient à *HDC*, cette application linéaire de E dans F est inversible, et son inverse est une bonne application.
- Pour montrer que la différentielle est inversible dans un voisinage de $(0,0) \in E$, on va utiliser l'invariance du problème sous l'action du groupe $\mathrm{Diff}^\infty(\mathbb{T}^n)$.

- La différentielle de Φ en $(0,0) \in E$ est donnée par

$$D\Phi(0,0,\Delta\psi,\Delta t) = \Delta t + D(\Delta\psi).X_\alpha.$$

- Comme α appartient à *HDC*, cette application linéaire de E dans F est inversible, et son inverse est une bonne application.
- Pour montrer que la différentielle est inversible dans un voisinage de $(0,0) \in E$, on va utiliser l'invariance du problème sous l'action du groupe $\mathrm{Diff}^\infty(\mathbb{T}^n)$. Soit $(\Delta\psi, \Delta t)$ un vecteur tangent en (ψ, t).

- La différentielle de Φ en $(0,0) \in E$ est donnée par

$$D\Phi(0,0,\Delta\psi,\Delta t) = \Delta t + D(\Delta\psi).X_\alpha .$$

- Comme α appartient à *HDC*, cette application linéaire de E dans F est inversible, et son inverse est une bonne application.
- Pour montrer que la différentielle est inversible dans un voisinage de $(0,0) \in E$, on va utiliser l'invariance du problème sous l'action du groupe $\mathrm{Diff}^\infty(\mathbb{T}^n)$. Soit $(\Delta\psi, \Delta t)$ un vecteur tangent en (ψ, t). Avec $h = \mathrm{id}_{\mathbb{T}^n} + \psi$, on écrit $\Delta\psi = Dh.\widetilde{\Delta}\psi$.

- La différentielle de Φ en $(0,0) \in E$ est donnée par

$$D\Phi(0,0,\Delta\psi,\Delta t) = \Delta t + D(\Delta\psi).X_\alpha.$$

- Comme α appartient à *HDC*, cette application linéaire de E dans F est inversible, et son inverse est une bonne application.
- Pour montrer que la différentielle est inversible dans un voisinage de $(0,0) \in E$, on va utiliser l'invariance du problème sous l'action du groupe $\mathrm{Diff}^\infty(\mathbb{T}^n)$. Soit $(\Delta\psi, \Delta t)$ un vecteur tangent en (ψ, t). Avec $h = \mathrm{id}_{\mathbb{T}^n} + \psi$, on écrit $\Delta\psi = Dh.\widetilde{\Delta}\psi$. On a alors

$$D\Phi(\psi, t, \Delta\psi, \Delta t) = \Delta t + Th.(D(\widetilde{\Delta}\psi).X_\alpha).$$

- La différentielle de Φ en $(0,0) \in E$ est donnée par

$$D\Phi(0,0,\Delta\psi,\Delta t) = \Delta t + D(\Delta\psi).X_\alpha.$$

- Comme α appartient à HDC, cette application linéaire de E dans F est inversible, et son inverse est une bonne application.
- Pour montrer que la différentielle est inversible dans un voisinage de $(0,0) \in E$, on va utiliser l'invariance du problème sous l'action du groupe $\mathrm{Diff}^\infty(\mathbb{T}^n)$. Soit $(\Delta\psi, \Delta t)$ un vecteur tangent en (ψ, t). Avec $h = \mathrm{id}_{\mathbb{T}^n} + \psi$, on écrit $\Delta\psi = Dh.\widetilde{\Delta}\psi$. On a alors

$$D\Phi(\psi,t,\Delta\psi,\Delta t) = \Delta t + Th.(D(\widetilde{\Delta}\psi).X_\alpha).$$

- L'équation $\Delta X = \Delta t + Th.(D(\widetilde{\Delta}\psi).X_\alpha)$ équivaut à

$$(\star) \qquad T(h^{-1}).(\Delta X - \Delta t) = D(\widetilde{\Delta}\psi).X_\alpha.$$

- Pour résoudre cette équation en $\widetilde{\Delta}\psi$, il faut et il suffit qu'on ait

- Pour résoudre cette équation en $\widetilde{\Delta}\psi$, il faut et il suffit qu'on ait

$$(\star\star) \qquad \int_{\mathbb{T}^n} T(h^{-1}).(\Delta X - \Delta t) = 0.$$

- Pour résoudre cette équation en $\widetilde{\Delta}\psi$, il faut et il suffit qu'on ait

$$(\star\star) \qquad \int_{\mathbb{T}^n} T(h^{-1}).(\Delta X - \Delta t) = 0.$$

- Comme h est C^1-proche de l'identité, il existe, pour tout $\Delta X \in F$, un unique vecteur Δt qui vérifie $(\star\star)$.

- Pour résoudre cette équation en $\widetilde{\Delta}\psi$, il faut et il suffit qu'on ait

$$(\star\star) \qquad \int_{\mathbb{T}^n} T(h^{-1}).(\Delta X - \Delta t) = 0.$$

- Comme h est C^1-proche de l'identité, il existe, pour tout $\Delta X \in F$, un unique vecteur Δt qui vérifie $(\star\star)$.
- Il y a alors une unique solution $\widetilde{\Delta}\psi$ de $(\star)$ telle que $\Delta\psi = Dh.\widetilde{\Delta}\psi$ soit de moyenne nulle (on utilise à nouveau que h est C^1-proche de l'identité).

- Pour résoudre cette équation en $\widetilde{\Delta}\psi$, il faut et il suffit qu'on ait

$$(\star\star) \qquad \int_{\mathbb{T}^n} T(h^{-1}).(\Delta X - \Delta t) = 0.$$

- Comme h est C^1-proche de l'identité, il existe, pour tout $\Delta X \in F$, un unique vecteur Δt qui vérifie $(\star\star)$.
- Il y a alors une unique solution $\widetilde{\Delta}\psi$ de $(\star)$ telle que $\Delta\psi = Dh.\widetilde{\Delta}\psi$ soit de moyenne nulle (on utilise à nouveau que h est C^1-proche de l'identité).
- On a ainsi montré que la différentielle $D\Phi(\psi, t, ., .)$ est inversible lorsque (ψ, t) appartient à un voisinage U de $(0, 0)$.

- Pour résoudre cette équation en $\widetilde{\Delta}\psi$, il faut et il suffit qu'on ait

$$(\star\star) \qquad \int_{\mathbb{T}^n} T(h^{-1}).(\Delta X - \Delta t) = 0.$$

- Comme h est C^1-proche de l'identité, il existe, pour tout $\Delta X \in F$, un unique vecteur Δt qui vérifie $(\star\star)$.
- Il y a alors une unique solution $\widetilde{\Delta}\psi$ de $(\star)$ telle que $\Delta\psi = Dh.\widetilde{\Delta}\psi$ soit de moyenne nulle (on utilise à nouveau que h est C^1-proche de l'identité).
- On a ainsi montré que la différentielle $D\Phi(\psi, t, ., .)$ est inversible lorsque (ψ, t) appartient à un voisinage U de $(0, 0)$.
- On vérifie (!) que l'inverse $L(\psi, t, .)$ est une bonne application de $U \times F$ dans E.

- Pour résoudre cette équation en $\widetilde{\Delta}\psi$, il faut et il suffit qu'on ait

$$(\star\star) \qquad \int_{\mathbb{T}^n} T(h^{-1}).(\Delta X - \Delta t) = 0.$$

- Comme h est C^1-proche de l'identité, il existe, pour tout $\Delta X \in F$, un unique vecteur Δt qui vérifie $(\star\star)$.
- Il y a alors une unique solution $\widetilde{\Delta}\psi$ de $(\star)$ telle que $\Delta\psi = Dh.\widetilde{\Delta}\psi$ soit de moyenne nulle (on utilise à nouveau que h est C^1-proche de l'identité).
- On a ainsi montré que la différentielle $D\Phi(\psi, t, ., .)$ est inversible lorsque (ψ, t) appartient à un voisinage U de $(0, 0)$.
- On vérifie (!) que l'inverse $L(\psi, t, .)$ est une bonne application de $U \times F$ dans E.
- Les hypothèses du théorème d'inversion locale sont ainsi satisfaites.

- Pour résoudre cette équation en $\widetilde{\Delta}\psi$, il faut et il suffit qu'on ait

$$(\star\star) \qquad \int_{\mathbb{T}^n} T(h^{-1}).(\Delta X - \Delta t) = 0.$$

- Comme h est C^1-proche de l'identité, il existe, pour tout $\Delta X \in F$, un unique vecteur Δt qui vérifie $(\star\star)$.
- Il y a alors une unique solution $\widetilde{\Delta}\psi$ de $(\star)$ telle que $\Delta\psi = Dh.\widetilde{\Delta}\psi$ soit de moyenne nulle (on utilise à nouveau que h est C^1-proche de l'identité).
- On a ainsi montré que la différentielle $D\Phi(\psi, t, ., .)$ est inversible lorsque (ψ, t) appartient à un voisinage U de $(0, 0)$.
- On vérifie (!) que l'inverse $L(\psi, t, .)$ est une bonne application de $U \times F$ dans E.
- Les hypothèses du théorème d'inversion locale sont ainsi satisfaites. L'application Φ est donc un bon difféomorphisme local de classe C^∞, ce qu'il fallait démontrer. $\square$

Conjugaison rectifiée

On va présenter un résultat intermédiaire, présent sous diverses formes dans les travaux de Moser, Herman, Fejoz, dont on peut déduire diverses formes de théorèmes KAM.

Conjugaison rectifiée

On va présenter un résultat intermédiaire, présent sous diverses formes dans les travaux de Moser, Herman, Fejoz, dont on peut déduire diverses formes de théorèmes KAM. Le mérite de ce résultat est de ne demander *aucune hypothèse de torsion*.

Conjugaison rectifiée

On va présenter un résultat intermédiaire, présent sous diverses formes dans les travaux de Moser, Herman, Fejoz, dont on peut déduire diverses formes de théorèmes KAM. Le mérite de ce résultat est de ne demander *aucune hypothèse de torsion*.

- $\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n$ (coordonnées (q_i, p_i)) est muni de la forme symplectique standard $\omega = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i$.

Conjugaison rectifiée

On va présenter un résultat intermédiaire, présent sous diverses formes dans les travaux de Moser, Herman, Fejoz, dont on peut déduire diverses formes de théorèmes KAM. Le mérite de ce résultat est de ne demander *aucune hypothèse de torsion*.

- $\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n$ (coordonnées (q_i, p_i)) est muni de la forme symplectique standard $\omega = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i$.
- $F := C^\infty(\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n)$ est le bon espace de Fréchet des Hamiltoniens sur cette variété symplectique.

Conjugaison rectifiée

On va présenter un résultat intermédiaire, présent sous diverses formes dans les travaux de Moser, Herman, Fejoz, dont on peut déduire diverses formes de théorèmes KAM. Le mérite de ce résultat est de ne demander *aucune hypothèse de torsion*.

- $\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n$ (coordonnées (q_i, p_i)) est muni de la forme symplectique standard $\omega = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i$.
- $F := C^\infty(\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n)$ est le bon espace de Fréchet des Hamiltoniens sur cette variété symplectique.
- $\alpha \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur de fréquence diophantien.

Conjugaison rectifiée

On va présenter un résultat intermédiaire, présent sous diverses formes dans les travaux de Moser, Herman, Fejoz, dont on peut déduire diverses formes de théorèmes KAM. Le mérite de ce résultat est de ne demander *aucune hypothèse de torsion*.

- $\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n$ (coordonnées (q_i, p_i)) est muni de la forme symplectique standard $\omega = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i$.
- $F := C^\infty(\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n)$ est le bon espace de Fréchet des Hamiltoniens sur cette variété symplectique.
- $\alpha \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur de fréquence diophantien.
- F_α est le sous-espace (affine) de F formé des hamiltoniens K de la forme

$$K(q,p) = \sum_{i=1}^n \alpha_i p_i + O(\|p\|^2).$$

Conjugaison rectifiée

On va présenter un résultat intermédiaire, présent sous diverses formes dans les travaux de Moser, Herman, Fejoz, dont on peut déduire diverses formes de théorèmes KAM. Le mérite de ce résultat est de ne demander *aucune hypothèse de torsion*.

- $\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n$ (coordonnées (q_i, p_i)) est muni de la forme symplectique standard $\omega = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i$.
- $F := C^\infty(\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n)$ est le bon espace de Fréchet des Hamiltoniens sur cette variété symplectique.
- $\alpha \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur de fréquence diophantien.
- F_α est le sous-espace (affine) de F formé des hamiltoniens K de la forme
$$K(q,p) = \sum_{i=1}^n \alpha_i p_i + O(\|p\|^2).$$
En d'autres termes, le champ de vecteurs associé X_K préserve le tore lagrangien $\{p = 0\}$ et la restriction de X_K à ce tore est le champ constant X_α.

Conjugaison rectifiée

On va présenter un résultat intermédiaire, présent sous diverses formes dans les travaux de Moser, Herman, Fejoz, dont on peut déduire diverses formes de théorèmes KAM. Le mérite de ce résultat est de ne demander *aucune hypothèse de torsion*.

- $\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n$ (coordonnées (q_i, p_i)) est muni de la forme symplectique standard $\omega = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i$.
- $F := C^\infty(\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n)$ est le bon espace de Fréchet des Hamiltoniens sur cette variété symplectique.
- $\alpha \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur de fréquence diophantien.
- F_α est le sous-espace (affine) de F formé des hamiltoniens K de la forme
$$K(q,p) = \sum_{i=1}^n \alpha_i p_i + O(\|p\|^2).$$
En d'autres termes, le champ de vecteurs associé X_K préserve le tore lagrangien $\{p = 0\}$ et la restriction de X_K à ce tore est le champ constant X_α. Le sous-espace F_α de F est un bon espace de Fréchet.

Soit $K_0 \in F_\alpha$. On va montrer que tout hamiltonien $H \in F$ assez proche de K_0 s'écrit de façon essentiellement unique sous la forme

Soit $K_0 \in F_\alpha$. On va montrer que tout hamiltonien $H \in F$ assez proche de K_0 s'écrit de façon essentiellement unique sous la forme

$$(\star) \quad H(q,p) = K \circ g_\varphi \circ k_\theta(q,p) + c + \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{n} \beta_i \sin 2\pi p_i,$$

où

Soit $K_0 \in F_\alpha$. On va montrer que tout hamiltonien $H \in F$ assez proche de K_0 s'écrit de façon essentiellement unique sous la forme

$$(\star) \quad H(q,p) = K \circ g_\varphi \circ k_\theta(q,p) + c + \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{n} \beta_i \sin 2\pi p_i,$$

où

- $K \in F_\alpha$ est proche de K_0;

Soit $K_0 \in F_\alpha$. On va montrer que tout hamiltonien $H \in F$ assez proche de K_0 s'écrit de façon essentiellement unique sous la forme

$$(\star) \quad H(q,p) = K \circ g_\varphi \circ k_\theta(q,p) + c + \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{n} \beta_i \sin 2\pi p_i,$$

où

- $K \in F_\alpha$ est proche de K_0;
- $c \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}^n$ sont proches de 0;

Soit $K_0 \in F_\alpha$. On va montrer que tout hamiltonien $H \in F$ assez proche de K_0 s'écrit de façon essentiellement unique sous la forme

$$(\star) \quad H(q,p) = K \circ g_\varphi \circ k_\theta(q,p) + c + \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{n} \beta_i \sin 2\pi p_i,$$

où

- $K \in F_\alpha$ est proche de K_0;
- $c \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}^n$ sont proches de 0;
- $k_\theta(q,p) := (q, p + d\theta(q))$ est un symplectomorphisme de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n$;

Soit $K_0 \in F_\alpha$. On va montrer que tout hamiltonien $H \in F$ assez proche de K_0 s'écrit de façon essentiellement unique sous la forme

$$(\star) \quad H(q,p) = K \circ g_\varphi \circ k_\theta(q,p) + c + \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{n} \beta_i \sin 2\pi p_i,$$

où

- $K \in F_\alpha$ est proche de K_0;
- $c \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}^n$ sont proches de 0;
- $k_\theta(q,p) := (q, p + d\theta(q))$ est un symplectomorphisme de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n$;
- θ appartient à un voisinage de 0 dans le bon espace de Fréchet $E := C_0^\infty(\mathbb{T}^n)$ des fonctions lisses de moyenne nulle;

Soit $K_0 \in F_\alpha$. On va montrer que tout hamiltonien $H \in F$ assez proche de K_0 s'écrit de façon essentiellement unique sous la forme

$$(\star) \quad H(q,p) = K \circ g_\varphi \circ k_\theta(q,p) + c + \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{n} \beta_i \sin 2\pi p_i,$$

où

- $K \in F_\alpha$ est proche de K_0;
- $c \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}^n$ sont proches de 0;
- $k_\theta(q,p) := (q, p + d\theta(q))$ est un symplectomorphisme de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n$;
- θ appartient à un voisinage de 0 dans le bon espace de Fréchet $E := C_0^\infty(\mathbb{T}^n)$ des fonctions lisses de moyenne nulle;
- φ appartient à un voisinage de 0 dans E^n; on note h le difféomorphisme $h := \mathrm{id}_{\mathbb{T}^n} + \varphi$ voisin de l'identité de $\mathbb{T}^n$,

Soit $K_0 \in F_\alpha$. On va montrer que tout hamiltonien $H \in F$ assez proche de K_0 s'écrit de façon essentiellement unique sous la forme

$$(\star) \quad H(q,p) = K \circ g_\varphi \circ k_\theta(q,p) + c + \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{n} \beta_i \sin 2\pi p_i,$$

où

- $K \in F_\alpha$ est proche de K_0;
- $c \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}^n$ sont proches de 0;
- $k_\theta(q,p) := (q, p + d\theta(q))$ est un symplectomorphisme de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n$;
- θ appartient à un voisinage de 0 dans le bon espace de Fréchet $E := C_0^\infty(\mathbb{T}^n)$ des fonctions lisses de moyenne nulle;
- φ appartient à un voisinage de 0 dans E^n; on note h le difféomorphisme $h := \mathrm{id}_{\mathbb{T}^n} + \varphi$ voisin de l'identité de $\mathbb{T}^n$, et g_φ un symplectomorphisme de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n$ qui coïncide avec T^*h au voisinage de la section nulle $\mathbb{T}^n \times \{0\} \subset \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$.

Lorsque $\beta = 0$, le hamiltonien perturbé est donc, à une constante additive près, déduit d'un hamiltonien $K \in F_\alpha$ par le symplectomorphisme $g_\varphi \circ k_\theta$.

Lorsque $\beta = 0$, le hamiltonien perturbé est donc, à une constante additive près, déduit d'un hamiltonien $K \in F_\alpha$ par le symplectomorphisme $g_\varphi \circ k_\theta$. Il possède donc un tore lagrangien invariant α-quasipériodique voisin de $\{p = 0\}$.

Lorsque $\beta = 0$, le hamiltonien perturbé est donc, à une constante additive près, déduit d'un hamiltonien $K \in F_\alpha$ par le symplectomorphisme $g_\varphi \circ k_\theta$. Il possède donc un tore lagrangien invariant α-quasipériodique voisin de $\{p = 0\}$.

Plus précisément, on construit une bonne application de classe C^∞ $\varphi \mapsto g_\varphi$

Lorsque $\beta = 0$, le hamiltonien perturbé est donc, à une constante additive près, déduit d'un hamiltonien $K \in F_\alpha$ par le symplectomorphisme $g_\varphi \circ k_\theta$. Il possède donc un tore lagrangien invariant α-quasipériodique voisin de $\{p = 0\}$.

Plus précisément, on construit une bonne application de classe C^∞ $\varphi \mapsto g_\varphi$

- définie sur un voisinage V de 0 dans E^n,

Lorsque $\beta = 0$, le hamiltonien perturbé est donc, à une constante additive près, déduit d'un hamiltonien $K \in F_\alpha$ par le symplectomorphisme $g_\varphi \circ k_\theta$. Il possède donc un tore lagrangien invariant α-quasipériodique voisin de $\{p = 0\}$.

Plus précisément, on construit une bonne application de classe C^∞ $\varphi \mapsto g_\varphi$

- définie sur un voisinage V de 0 dans E^n,
- à valeurs dans un voisinage de l'identité dans le groupe des symplectomorphismes de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n$,

Lorsque $\beta = 0$, le hamiltonien perturbé est donc, à une constante additive près, déduit d'un hamiltonien $K \in F_\alpha$ par le symplectomorphisme $g_\varphi \circ k_\theta$. Il possède donc un tore lagrangien invariant α-quasipériodique voisin de $\{p = 0\}$.

Plus précisément, on construit une bonne application de classe C^∞ $\varphi \mapsto g_\varphi$

- définie sur un voisinage V de 0 dans E^n,
- à valeurs dans un voisinage de l'identité dans le groupe des symplectomorphismes de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n$,
- telle qu'on ait $g_\varphi(q, p) = T^* h(q, p)$ pour $\|p\|$ assez petit.

Lorsque $\beta = 0$, le hamiltonien perturbé est donc, à une constante additive près, déduit d'un hamiltonien $K \in F_\alpha$ par le symplectomorphisme $g_\varphi \circ k_\theta$. Il possède donc un tore lagrangien invariant α-quasipériodique voisin de $\{p = 0\}$.

Plus précisément, on construit une bonne application de classe C^∞ $\varphi \mapsto g_\varphi$

- définie sur un voisinage V de 0 dans E^n,
- à valeurs dans un voisinage de l'identité dans le groupe des symplectomorphismes de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n$,
- telle qu'on ait $g_\varphi(q, p) = T^* h(q, p)$ pour $\|p\|$ assez petit.

La formule $(\star)$ définit alors une bonne application de classe C^∞ $\Phi : (K, \theta, \varphi, \beta, c) \mapsto H$.

Lorsque $\beta = 0$, le hamiltonien perturbé est donc, à une constante additive près, déduit d'un hamiltonien $K \in F_\alpha$ par le symplectomorphisme $g_\varphi \circ k_\theta$. Il possède donc un tore lagrangien invariant α-quasipériodique voisin de $\{p = 0\}$.

Plus précisément, on construit une bonne application de classe C^∞ $\varphi \mapsto g_\varphi$

- définie sur un voisinage V de 0 dans E^n,
- à valeurs dans un voisinage de l'identité dans le groupe des symplectomorphismes de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n$,
- telle qu'on ait $g_\varphi(q,p) = T^* h(q,p)$ pour $\|p\|$ assez petit.

La formule $(\star)$ définit alors une bonne application de classe C^∞ $\Phi : (K, \theta, \varphi, \beta, c) \mapsto H$. Son domaine est $F_\alpha \times E \times V \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ et elle prend ses valeurs dans F.

Lorsque $\beta = 0$, le hamiltonien perturbé est donc, à une constante additive près, déduit d'un hamiltonien $K \in F_\alpha$ par le symplectomorphisme $g_\varphi \circ k_\theta$. Il possède donc un tore lagrangien invariant α-quasipériodique voisin de $\{p = 0\}$.

Plus précisément, on construit une bonne application de classe C^∞ $\varphi \mapsto g_\varphi$

- définie sur un voisinage V de 0 dans E^n,
- à valeurs dans un voisinage de l'identité dans le groupe des symplectomorphismes de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n$,
- telle qu'on ait $g_\varphi(q, p) = T^* h(q, p)$ pour $\|p\|$ assez petit.

La formule $(\star)$ définit alors une bonne application de classe C^∞ $\Phi : (K, \theta, \varphi, \beta, c) \mapsto H$. Son domaine est $F_\alpha \times E \times V \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ et elle prend ses valeurs dans F.

Théorème: L'application Φ est un bon difféomorphisme de classe C^∞ d'un voisinage de $(K_0, 0, 0, 0, 0)$ sur un voisinage de K_0 dans F.

Esquisse de preuve

- Il s'agit de montrer que la différentielle

$$\Delta H := D\Phi(K, \theta, \varphi, \beta, c, \Delta K, \Delta\theta, \Delta\varphi, \Delta\beta, \Delta c)$$

Esquisse de preuve

- Il s'agit de montrer que la différentielle

$$\Delta H := D\Phi(K, \theta, \varphi, \beta, c, \Delta K, \Delta\theta, \Delta\varphi, \Delta\beta, \Delta c)$$

est inversible dans un voisinage de $(K_0, 0, 0, 0, 0)$, et que son inverse est une bonne application.

Esquisse de preuve

- Il s'agit de montrer que la différentielle

$$\Delta H := D\Phi(K, \theta, \varphi, \beta, c, \Delta K, \Delta\theta, \Delta\varphi, \Delta\beta, \Delta c)$$

est inversible dans un voisinage de $(K_0, 0, 0, 0, 0)$, et que son inverse est une bonne application.

- On pose $G(\theta, \varphi) := g_\varphi \circ k_\theta$.

Esquisse de preuve

- Il s'agit de montrer que la différentielle

$$\Delta H := D\Phi(K, \theta, \varphi, \beta, c, \Delta K, \Delta\theta, \Delta\varphi, \Delta\beta, \Delta c)$$

  est inversible dans un voisinage de $(K_0, 0, 0, 0, 0)$, et que son inverse est une bonne application.
- On pose $G(\theta, \varphi) := g_\varphi \circ k_\theta$. On va d'abord supposer que $\theta = 0$, $\varphi = 0$, c'est-à-dire que $G(\theta, \varphi) = \mathrm{id}_{\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n}$.

Esquisse de preuve

- Il s'agit de montrer que la différentielle

$$\Delta H := D\Phi(K, \theta, \varphi, \beta, c, \Delta K, \Delta\theta, \Delta\varphi, \Delta\beta, \Delta c)$$

  est inversible dans un voisinage de $(K_0, 0, 0, 0, 0)$, et que son inverse est une bonne application.
- On pose $G(\theta, \varphi) := g_\varphi \circ k_\theta$. On va d'abord supposer que $\theta = 0$, $\varphi = 0$, c'est-à-dire que $G(\theta, \varphi) = \mathrm{id}_{\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n}$.
- La différentielle $\Delta G := DG(0, 0, \Delta\theta, \Delta\varphi)$ est un champ de vecteurs sur $\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n$ qui est donné au voisinage de $\mathbb{T}^n \times \{0\}$ par la formule

Esquisse de preuve

- Il s'agit de montrer que la différentielle

$$\Delta H := D\Phi(K, \theta, \varphi, \beta, c, \Delta K, \Delta\theta, \Delta\varphi, \Delta\beta, \Delta c)$$

  est inversible dans un voisinage de $(K_0, 0, 0, 0, 0)$, et que son inverse est une bonne application.
- On pose $G(\theta, \varphi) := g_\varphi \circ k_\theta$. On va d'abord supposer que $\theta = 0$, $\varphi = 0$, c'est-à-dire que $G(\theta, \varphi) = \mathrm{id}_{\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n}$.
- La différentielle $\Delta G := DG(0, 0, \Delta\theta, \Delta\varphi)$ est un champ de vecteurs sur $\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n$ qui est donné au voisinage de $\mathbb{T}^n \times \{0\}$ par la formule

$$\Delta G(q, p) = \sum_i \Delta\varphi_i(q) \frac{\partial}{\partial q_i} + \sum_i (\frac{\partial \Delta\theta}{\partial q_i}(q) - \sum_j p_j \frac{\partial \Delta\varphi_j}{\partial q_i}) \frac{\partial}{\partial p_i}.$$

- Posons $s_i(q,p) := \frac{1}{2\pi} \sin 2\pi p_i$. On a

$$(E) \quad \Delta H = \Delta K + \Delta G.K + \Delta c + \sum_i \Delta\beta_i \, s_i.$$

- Posons $s_i(q,p) := \frac{1}{2\pi} \sin 2\pi p_i$. On a

$$(E) \quad \Delta H = \Delta K + \Delta G.K + \Delta c + \sum_i \Delta\beta_i \, s_i.$$

- On écrit

$$\Delta H(q,p) = \Delta_0 H(q) + \sum_j p_j \Delta_{1,j} H(q) + \Delta_2 H(q,p),$$

où $\Delta_2 H$ s'annule à l'ordre 2 le long de $\mathbb{T}^n \times \{0\}$.

- Posons $s_i(q,p) := \frac{1}{2\pi}\sin 2\pi p_i$. On a

$$(E) \quad \Delta H = \Delta K + \Delta G.K + \Delta c + \sum_i \Delta\beta_i\, s_i.$$

- On écrit

$$\Delta H(q,p) = \Delta_0 H(q) + \sum_j p_j \Delta_{1,j} H(q) + \Delta_2 H(q,p),$$

  où $\Delta_2 H$ s'annule à l'ordre 2 le long de $\mathbb{T}^n \times \{0\}$.
- L'espace linéaire associé à l'espace affine F_α est précisément l'espace des hamiltoniens ΔK qui s'annulent à l'ordre 2 le long de $\mathbb{T}^n \times \{0\}$.

- Posons $s_i(q,p) := \frac{1}{2\pi} \sin 2\pi p_i$. On a

$$(E) \quad \Delta H = \Delta K + \Delta G.K + \Delta c + \sum_i \Delta\beta_i \, s_i.$$

- On écrit

$$\Delta H(q,p) = \Delta_0 H(q) + \sum_j p_j \Delta_{1,j} H(q) + \Delta_2 H(q,p),$$

où $\Delta_2 H$ s'annule à l'ordre 2 le long de $\mathbb{T}^n \times \{0\}$.

- L'espace linéaire associé à l'espace affine F_α est précisément l'espace des hamiltoniens ΔK qui s'annulent à l'ordre 2 le long de $\mathbb{T}^n \times \{0\}$.
- Les termes d'ordre 0 dans (E) conduisent à

$$(E_0) \quad \Delta_0 H = \sum_i \alpha_i \frac{\partial \Delta\theta}{\partial q_i} + \Delta c,$$

- Posons $s_i(q,p) := \frac{1}{2\pi} \sin 2\pi p_i$. On a

$$(E) \quad \Delta H = \Delta K + \Delta G.K + \Delta c + \sum_i \Delta\beta_i \, s_i.$$

- On écrit

$$\Delta H(q,p) = \Delta_0 H(q) + \sum_j p_j \Delta_{1,j} H(q) + \Delta_2 H(q,p),$$

où $\Delta_2 H$ s'annule à l'ordre 2 le long de $\mathbb{T}^n \times \{0\}$.

- L'espace linéaire associé à l'espace affine F_α est précisément l'espace des hamiltoniens ΔK qui s'annulent à l'ordre 2 le long de $\mathbb{T}^n \times \{0\}$.
- Les termes d'ordre 0 dans (E) conduisent à

$$(E_0) \quad \Delta_0 H = \sum_i \alpha_i \frac{\partial \Delta\theta}{\partial q_i} + \Delta c,$$

qu'on résout (de façon unique) en Δc, $\Delta\theta$, puisque $\alpha \in HDC$.

- Pour écrire l'équation concernant les termes d'ordre 1, on développe K à l'ordre 2:

- Pour écrire l'équation concernant les termes d'ordre 1, on développe K à l'ordre 2:

$$K(q,p) = \sum_i \alpha_i \, p_i + \sum_{i,j} b_{i\,j}(q) p_i p_j + O(\|p\|^3),$$

- Pour écrire l'équation concernant les termes d'ordre 1, on développe K à l'ordre 2:

$$K(q,p) = \sum_i \alpha_i\, p_i + \sum_{i,j} b_{i\,j}(q) p_i p_j + O(\|p\|^3),$$

et on obtient

$$(E_{1,j}) \quad \Delta_{1,j} H = 2 \sum_i \frac{\partial \Delta\theta}{\partial q_i}\, b_{i\,j} - \sum_i \alpha_i \frac{\partial \Delta\varphi_j}{\partial q_i} + \Delta\beta_j.$$

- Pour écrire l'équation concernant les termes d'ordre 1, on développe K à l'ordre 2:

$$K(q,p) = \sum_i \alpha_i \, p_i + \sum_{i,j} b_{i\,j}(q) p_i p_j + O(\|p\|^3),$$

et on obtient

$$(E_{1,j}) \quad \Delta_{1,j} H = 2 \sum_i \frac{\partial \Delta\theta}{\partial q_i} \, b_{i\,j} - \sum_i \alpha_i \frac{\partial \Delta\varphi_j}{\partial q_i} + \Delta\beta_j.$$

- On doit donc avoir

$$\Delta\beta_j = \int_{\mathbb{T}^n} (\Delta_{1,j} H - 2 \sum_i \frac{\partial \Delta\theta}{\partial q_i} \, b_{i\,j}),$$

- Pour écrire l'équation concernant les termes d'ordre 1, on développe K à l'ordre 2:

$$K(q,p) = \sum_i \alpha_i\, p_i + \sum_{i,j} b_{i\,j}(q) p_i p_j + O(\|p\|^3),$$

et on obtient

$$(E_{1,j}) \quad \Delta_{1,j} H = 2 \sum_i \frac{\partial \Delta\theta}{\partial q_i}\, b_{i\,j} - \sum_i \alpha_i \frac{\partial \Delta\varphi_j}{\partial q_i} + \Delta\beta_j.$$

- On doit donc avoir

$$\Delta\beta_j = \int_{\mathbb{T}^n} (\Delta_{1,j} H - 2 \sum_i \frac{\partial \Delta\theta}{\partial q_i}\, b_{i\,j}),$$

et l'équation $(E_{1,j})$ détermine ensuite de façon unique $\Delta\varphi_j$.

- Lorsque $G := G(\theta, \varphi)$ n'est pas égal à l'identité,

- Lorsque $G := G(\theta, \varphi)$ n'est pas égal à l'identité, on pose

$$h = \mathrm{id}_{\mathbb{T}^n} + \varphi, \quad \widetilde{\Delta}\varphi := \Delta\varphi \circ h^{-1}, \quad \widetilde{\Delta}\theta := \Delta\theta \circ h^{-1}.$$

- Lorsque $G := G(\theta, \varphi)$ n'est pas égal à l'identité, on pose

$$h = \mathrm{id}_{\mathbb{T}^n} + \varphi, \quad \widetilde{\Delta}\varphi := \Delta\varphi \circ h^{-1}, \quad \widetilde{\Delta}\theta := \Delta\theta \circ h^{-1}.$$

- On écrit $DG(\theta, \varphi, \Delta\theta, \Delta\varphi) =: \Delta G \circ G$ où le champ de vecteurs ΔG est maintenant donné au voisinage de $\mathbb{T}^n \times \{0\}$ par

- Lorsque $G := G(\theta, \varphi)$ n'est pas égal à l'identité, on pose

$$h = \mathrm{id}_{\mathbb{T}^n} + \varphi, \quad \widetilde{\Delta}\varphi := \Delta\varphi \circ h^{-1}, \quad \widetilde{\Delta}\theta := \Delta\theta \circ h^{-1}.$$

- On écrit $DG(\theta, \varphi, \Delta\theta, \Delta\varphi) =: \Delta G \circ G$ où le champ de vecteurs ΔG est maintenant donné au voisinage de $\mathbb{T}^n \times \{0\}$ par

$$\Delta G(q,p) = \sum_i \widetilde{\Delta}\varphi_i(q) \frac{\partial}{\partial q_i} + \sum_i \left(\frac{\partial \widetilde{\Delta}\theta}{\partial q_i}(q) - \sum_j p_j \frac{\partial \widetilde{\Delta}\varphi_j}{\partial q_i} \right) \frac{\partial}{\partial p_i}.$$

- Lorsque $G := G(\theta, \varphi)$ n'est pas égal à l'identité, on pose

$$h = \mathrm{id}_{\mathbb{T}^n} + \varphi, \quad \widetilde{\Delta}\varphi := \Delta\varphi \circ h^{-1}, \quad \widetilde{\Delta}\theta := \Delta\theta \circ h^{-1}.$$

- On écrit $DG(\theta, \varphi, \Delta\theta, \Delta\varphi) =: \Delta G \circ G$ où le champ de vecteurs ΔG est maintenant donné au voisinage de $\mathbb{T}^n \times \{0\}$ par

$$\Delta G(q,p) = \sum_i \widetilde{\Delta}\varphi_i(q) \frac{\partial}{\partial q_i} + \sum_i \left(\frac{\partial \widetilde{\Delta}\theta}{\partial q_i}(q) - \sum_j p_j \frac{\partial \widetilde{\Delta}\varphi_j}{\partial q_i}\right) \frac{\partial}{\partial p_i}.$$

- Posons $\widetilde{\Delta}H := \Delta H \circ G^{-1}$, $\widetilde{s}_i(q,p) := s_i \circ G^{-1}(q,p)$.

- Lorsque $G := G(\theta, \varphi)$ n'est pas égal à l'identité, on pose

$$h = \mathrm{id}_{\mathbb{T}^n} + \varphi, \quad \widetilde{\Delta}\varphi := \Delta\varphi \circ h^{-1}, \quad \widetilde{\Delta}\theta := \Delta\theta \circ h^{-1}.$$

- On écrit $DG(\theta, \varphi, \Delta\theta, \Delta\varphi) =: \Delta G \circ G$ où le champ de vecteurs ΔG est maintenant donné au voisinage de $\mathbb{T}^n \times \{0\}$ par

$$\Delta G(q,p) = \sum_i \widetilde{\Delta}\varphi_i(q) \frac{\partial}{\partial q_i} + \sum_i \Big(\frac{\partial \widetilde{\Delta}\theta}{\partial q_i}(q) - \sum_j p_j \frac{\partial \widetilde{\Delta}\varphi_j}{\partial q_i} \Big) \frac{\partial}{\partial p_i}.$$

- Posons $\widetilde{\Delta} H := \Delta H \circ G^{-1}$, $\widetilde{s}_i(q,p) := s_i \circ G^{-1}(q,p)$. On a

$$(\widetilde{E}) \qquad \widetilde{\Delta} H := \Delta K + \Delta G.K + \Delta c + \sum_i \Delta\beta_i \, \widetilde{s}_i.$$

- Le développement le long de $\mathbb{T}^n \times \{0\}$ conduit maintenant à

$$(\widetilde{E}_0) \quad \widetilde{\Delta}_0 H = \sum_i \alpha_i \frac{\partial \widetilde{\Delta}\theta}{\partial q_i} + \Delta c + \sum_i \Delta\beta_i \, \widetilde{s}_i(.,0),$$

- Le développement le long de $\mathbb{T}^n \times \{0\}$ conduit maintenant à

$$(\widetilde{E}_0) \quad \widetilde{\Delta}_0 H = \sum_i \alpha_i \frac{\partial \widetilde{\Delta}\theta}{\partial q_i} + \Delta c + \sum_i \Delta\beta_i \, \widetilde{s}_i(.,0),$$

$$(\widetilde{E}_{1,j}) \quad \widetilde{\Delta}_{1,j} H = 2 \sum_i \frac{\partial \widetilde{\Delta}\theta}{\partial q_i} \, b_{ij} - \sum_i \alpha_i \frac{\partial \widetilde{\Delta}\varphi_j}{\partial q_i} + \sum_i \Delta\beta_i \, \frac{\partial \widetilde{s}_i}{\partial p_j}(.,0).$$

- Le développement le long de $\mathbb{T}^n \times \{0\}$ conduit maintenant à

$$(\widetilde{E}_0) \quad \widetilde{\Delta}_0 H = \sum_i \alpha_i \frac{\partial \widetilde{\Delta}\theta}{\partial q_i} + \Delta c + \sum_i \Delta\beta_i \, \widetilde{s}_i(.,0),$$

$$(\widetilde{E}_{1,j}) \quad \widetilde{\Delta}_{1,j} H = 2 \sum_i \frac{\partial \widetilde{\Delta}\theta}{\partial q_i} \, b_{ij} - \sum_i \alpha_i \frac{\partial \widetilde{\Delta}\varphi_j}{\partial q_i} + \sum_i \Delta\beta_i \, \frac{\partial \widetilde{s}_i}{\partial p_j}(.,0).$$

- Il faut avoir

$$(\widetilde{M}_0) \quad \int_{\mathbb{T}^n} \widetilde{\Delta}_0 H = \Delta c + \sum_i \Delta\beta_i \, \int_{\mathbb{T}^n} \widetilde{s}_i(.,0),$$

- Le développement le long de $\mathbb{T}^n \times \{0\}$ conduit maintenant à

$$(\widetilde{E}_0) \quad \widetilde{\Delta}_0 H = \sum_i \alpha_i \frac{\partial \widetilde{\Delta}\theta}{\partial q_i} + \Delta c + \sum_i \Delta\beta_i \, \widetilde{s}_i(.,0),$$

$$(\widetilde{E}_{1,j}) \quad \widetilde{\Delta}_{1,j} H = 2 \sum_i \frac{\partial \widetilde{\Delta}\theta}{\partial q_i} \, b_{i\,j} - \sum_i \alpha_i \frac{\partial \widetilde{\Delta}\varphi_j}{\partial q_i} + \sum_i \Delta\beta_i \, \frac{\partial \widetilde{s}_i}{\partial p_j}(.,0).$$

- Il faut avoir

$$(\widetilde{M}_0) \quad \int_{\mathbb{T}^n} \widetilde{\Delta}_0 H = \Delta c + \sum_i \Delta\beta_i \int_{\mathbb{T}^n} \widetilde{s}_i(.,0),$$

$$(\widetilde{M}_{1,j}) \quad \int_{\mathbb{T}^n} (\widetilde{\Delta}_{1,j} H - 2 \sum_i \frac{\partial \widetilde{\Delta}\theta}{\partial q_i} \, b_{i\,j}) = \sum_i \Delta\beta_i \int_{\mathbb{T}^n} \frac{\partial \widetilde{s}_i}{\partial p_j}(.,0).$$

- Les coefficients $a_i := \int_{\mathbb{T}^n} \widetilde{s}_i(.,0)$ sont petits

- Les coefficients $a_i := \int_{\mathbb{T}^n} \widetilde{s}_i(.,0)$ sont petits et la matrice $m_{ij} := \int_{\mathbb{T}^n} \frac{\partial \widetilde{s}_i}{\partial p_j}(.,0)$ est proche de l'identité.

- Les coefficients $a_i := \int_{\mathbb{T}^n} \widetilde{s}_i(.,0)$ sont petits et la matrice $m_{ij} := \int_{\mathbb{T}^n} \frac{\partial \widetilde{s}_i}{\partial p_j}(.,0)$ est proche de l'identité.
- Etant donné $\Delta\beta \in \mathbb{R}^n$, l'équation $(\widetilde{M}_0)$ détermine Δc

- Les coefficients $a_i := \int_{\mathbb{T}^n} \widetilde{s}_i(.,0)$ sont petits et la matrice $m_{ij} := \int_{\mathbb{T}^n} \frac{\partial \widetilde{s}_i}{\partial p_j}(.,0)$ est proche de l'identité.
- Etant donné $\Delta\beta \in \mathbb{R}^n$, l'équation $(\widetilde{M}_0)$ détermine Δc puis $(\widetilde{E}_0)$ détermine $\widetilde{\Delta}\theta$.

- Les coefficients $a_i := \int_{\mathbb{T}^n} \widetilde{s}_i(.,0)$ sont petits et la matrice $m_{ij} := \int_{\mathbb{T}^n} \frac{\partial \widetilde{s}_i}{\partial p_j}(.,0)$ est proche de l'identité.
- Etant donné $\Delta\beta \in \mathbb{R}^n$, l'équation $(\widetilde{M}_0)$ détermine Δc puis $(\widetilde{E}_0)$ détermine $\widetilde{\Delta}\theta$. L'équation $(\widetilde{M}_{1,j})$ détermine alors un nouveau vecteur $\widehat{\Delta}\beta$.

- Les coefficients $a_i := \int_{\mathbb{T}^n} \widetilde{s}_i(.,0)$ sont petits et la matrice $m_{ij} := \int_{\mathbb{T}^n} \frac{\partial \widetilde{s}_i}{\partial p_j}(.,0)$ est proche de l'identité.
- Etant donné $\Delta\beta \in \mathbb{R}^n$, l'équation $(\widetilde{M}_0)$ détermine Δc puis $(\widetilde{E}_0)$ détermine $\widetilde{\Delta}\theta$. L'équation $(\widetilde{M}_{1,j})$ détermine alors un nouveau vecteur $\widehat{\Delta}\beta$.
- Comme a est petit et m proche de l'identité, l'application $\Delta\beta \mapsto \widehat{\Delta}\beta$ est une contraction

- Les coefficients $a_i := \int_{\mathbb{T}^n} \widetilde{s}_i(.,0)$ sont petits et la matrice $m_{ij} := \int_{\mathbb{T}^n} \frac{\partial \widetilde{s}_i}{\partial p_j}(.,0)$ est proche de l'identité.
- Etant donné $\Delta\beta \in \mathbb{R}^n$, l'équation $(\widetilde{M}_0)$ détermine Δc puis $(\widetilde{E}_0)$ détermine $\widetilde{\Delta}\theta$. L'équation $(\widetilde{M}_{1,j})$ détermine alors un nouveau vecteur $\widehat{\Delta}\beta$.
- Comme a est petit et m proche de l'identité, l'application $\Delta\beta \mapsto \widehat{\Delta}\beta$ est une contraction et a donc un unique point fixe.

- Les coefficients $a_i := \int_{\mathbb{T}^n} \widetilde{s}_i(.,0)$ sont petits et la matrice $m_{ij} := \int_{\mathbb{T}^n} \frac{\partial \widetilde{s}_i}{\partial p_j}(.,0)$ est proche de l'identité.
- Etant donné $\Delta\beta \in \mathbb{R}^n$, l'équation $(\widetilde{M}_0)$ détermine Δc puis $(\widetilde{E}_0)$ détermine $\widetilde{\Delta}\theta$. L'équation $(\widetilde{M}_{1,j})$ détermine alors un nouveau vecteur $\widehat{\Delta}\beta$.
- Comme a est petit et m proche de l'identité, l'application $\Delta\beta \mapsto \widehat{\Delta}\beta$ est une contraction et a donc un unique point fixe. Le système formé par $(\widetilde{E}_0), (\widetilde{M}_{1,j})$ a une unique solution $(\Delta\beta, \Delta c, \widetilde{\Delta}\theta)$.

- Les coefficients $a_i := \int_{\mathbb{T}^n} \widetilde{s}_i(.,0)$ sont petits et la matrice $m_{ij} := \int_{\mathbb{T}^n} \frac{\partial \widetilde{s}_i}{\partial p_j}(.,0)$ est proche de l'identité.
- Etant donné $\Delta\beta \in \mathbb{R}^n$, l'équation $(\widetilde{M}_0)$ détermine Δc puis $(\widetilde{E}_0)$ détermine $\widetilde{\Delta}\theta$. L'équation $(\widetilde{M}_{1,j})$ détermine alors un nouveau vecteur $\widehat{\Delta}\beta$.
- Comme a est petit et m proche de l'identité, l'application $\Delta\beta \mapsto \widehat{\Delta}\beta$ est une contraction et a donc un unique point fixe. Le système formé par $(\widetilde{E}_0), (\widetilde{M}_{1,j})$ a une unique solution $(\Delta\beta, \Delta c, \widetilde{\Delta}\theta)$. On obtient finalement $\widetilde{\Delta}\varphi_j$ à partir de $(\widetilde{E}_{1,j})$.

- Les coefficients $a_i := \int_{\mathbb{T}^n} \widetilde{s}_i(.,0)$ sont petits et la matrice $m_{ij} := \int_{\mathbb{T}^n} \frac{\partial \widetilde{s}_i}{\partial p_j}(.,0)$ est proche de l'identité.
- Etant donné $\Delta\beta \in \mathbb{R}^n$, l'équation $(\widetilde{M}_0)$ détermine Δc puis $(\widetilde{E}_0)$ détermine $\widetilde{\Delta}\theta$. L'équation $(\widetilde{M}_{1,j})$ détermine alors un nouveau vecteur $\widehat{\Delta}\beta$.
- Comme a est petit et m proche de l'identité, l'application $\Delta\beta \mapsto \widehat{\Delta}\beta$ est une contraction et a donc un unique point fixe. Le système formé par $(\widetilde{E}_0), (\widetilde{M}_{1,j})$ a une unique solution $(\Delta\beta, \Delta c, \widetilde{\Delta}\theta)$. On obtient finalement $\widetilde{\Delta}\varphi_j$ à partir de $(\widetilde{E}_{1,j})$.
- On a ainsi construit l'inverse de la différentielle de Φ dans le voisinage de $(K_0, 0, 0, 0, 0)$.

- Les coefficients $a_i := \int_{\mathbb{T}^n} \widetilde{s}_i(.,0)$ sont petits et la matrice $m_{ij} := \int_{\mathbb{T}^n} \frac{\partial \widetilde{s}_i}{\partial p_j}(.,0)$ est proche de l'identité.
- Etant donné $\Delta\beta \in \mathbb{R}^n$, l'équation $(\widetilde{M}_0)$ détermine Δc puis $(\widetilde{E}_0)$ détermine $\widetilde{\Delta}\theta$. L'équation $(\widetilde{M}_{1,j})$ détermine alors un nouveau vecteur $\widehat{\Delta}\beta$.
- Comme a est petit et m proche de l'identité, l'application $\Delta\beta \mapsto \widehat{\Delta}\beta$ est une contraction et a donc un unique point fixe. Le système formé par $(\widetilde{E}_0), (\widetilde{M}_{1,j})$ a une unique solution $(\Delta\beta, \Delta c, \widetilde{\Delta}\theta)$. On obtient finalement $\widetilde{\Delta}\varphi_j$ à partir de $(\widetilde{E}_{1,j})$.
- On a ainsi construit l'inverse de la différentielle de Φ dans le voisinage de $(K_0, 0, 0, 0, 0)$. Il reste à vérifier que c'est une bonne application ... $\square$