Quelques aspects de la théorie des systèmes dynamiques hyperboliques(4)

Jean-Christophe Yoccoz

Collège de France

11 février 2015

De $\Sigma_{\mathcal{B}}^{+}$ à $\Sigma_{\mathcal{B}}$

Proposition: (Livsic) Toute fonction hölderienne $\varphi : \Sigma_{\mathcal{B}} \to \mathbb{R}$ peut s'écrire

$$\varphi = \varphi^{+} + \xi - \xi \circ \sigma,$$

où les fonctions $\varphi^{+} \in C(\Sigma_{\mathcal{B}}^{+})$ et $\xi \in C(\Sigma_{\mathcal{B}})$ sont hölderiennes.

De $\Sigma_{\mathcal{B}}^{+}$ à $\Sigma_{\mathcal{B}}$

Proposition: (Livsic) Toute fonction hölderienne $\varphi : \Sigma_{\mathcal{B}} \to \mathbb{R}$ peut s'écrire

$$\varphi = \varphi^{+} + \xi - \xi \circ \sigma,$$

où les fonctions $\varphi^{+} \in C(\Sigma_{\mathcal{B}}^{+})$ et $\xi \in C(\Sigma_{\mathcal{B}})$ sont hölderiennes.

On a alors, pour tout $\underline{\theta} \in \Sigma_{\mathcal{B}}$, tout $n \geqslant 0$

$$|\sum_{0}^{n-1} \varphi(\sigma^{j}(\underline{\theta})) - \sum_{0}^{n-1} \varphi^{+}(\sigma^{j}(\underline{\theta}))| \leqslant 2||\xi||_{\infty};$$

De $\Sigma_{\mathcal{B}}^{+}$ à $\Sigma_{\mathcal{B}}$

Proposition: (Livsic) Toute fonction hölderienne $\varphi : \Sigma_{\mathcal{B}} \to \mathbb{R}$ peut s'écrire

$$\varphi = \varphi^{+} + \xi - \xi \circ \sigma,$$

où les fonctions $\varphi^{+} \in C(\Sigma_{\mathcal{B}}^{+})$ et $\xi \in C(\Sigma_{\mathcal{B}})$ sont hölderiennes.

On a alors, pour tout $\underline{\theta} \in \Sigma_{\mathcal{B}}$, tout $n \geqslant 0$

$$|\sum_{0}^{n-1} \varphi(\sigma^{j}(\underline{\theta})) - \sum_{0}^{n-1} \varphi^{+}(\sigma^{j}(\underline{\theta}))| \leqslant 2||\xi||_{\infty};$$

Si $\underline{x}$ est un point fixe de σ^{m}, on a aussi

$$\sum_{0}^{m-1} \varphi(\sigma^{j}(\underline{x})) = \sum_{0}^{m-1} \varphi^{+}(\sigma^{j}(\underline{x})).$$

Une version élémentaire de l'opérateur de transfert

Identifions $\mathbb{R}^{\mathcal{A}}$ à l'espace des fonctions $\varphi(\underline{\theta})$ sur $\Sigma_{\mathcal{B}}$ (ou $\Sigma_{\mathcal{B}}^{+}$) qui ne dépendent que de θ_0

Une version élémentaire de l'opérateur de transfert

Identifions $\mathbb{R}^{\mathcal{A}}$ à l'espace des fonctions $\varphi(\underline{\theta})$ sur $\Sigma_{\mathcal{B}}$ (ou $\Sigma_{\mathcal{B}}^{+}$) qui ne dépendent que de θ_0 et $\mathbb{R}^{\mathcal{B}}$ à l'espace des fonctions qui ne dépendent que de θ_0, θ_1.

Une version élémentaire de l'opérateur de transfert

Identifions $\mathbb{R}^{\mathcal{A}}$ à l'espace des fonctions $\varphi(\underline{\theta})$ sur $\Sigma_{\mathcal{B}}$ (ou $\Sigma_{\mathcal{B}}^{+}$) qui ne dépendent que de θ_0 et $\mathbb{R}^{\mathcal{B}}$ à l'espace des fonctions qui ne dépendent que de θ_0, θ_1.

Soit $\varphi = (\varphi_{\alpha_0,\alpha_1})_{(\alpha_0,\alpha_1)\in\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{B}} \subset C(\Sigma_{\mathcal{B}}^{+})$.

Une version élémentaire de l'opérateur de transfert

Identifions $\mathbb{R}^{\mathcal{A}}$ à l'espace des fonctions $\varphi(\underline{\theta})$ sur $\Sigma_{\mathcal{B}}$ (ou $\Sigma_{\mathcal{B}}^{+}$) qui ne dépendent que de θ_0 et $\mathbb{R}^{\mathcal{B}}$ à l'espace des fonctions qui ne dépendent que de θ_0, θ_1.

Soit $\varphi = (\varphi_{\alpha_0,\alpha_1})_{(\alpha_0,\alpha_1)\in\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{B}} \subset C(\Sigma_{\mathcal{B}}^{+})$. L'opérateur de transfert $\mathcal{L}_{\varphi}$ envoie $\mathbb{R}^{\mathcal{A}}$ dans lui même

Une version élémentaire de l'opérateur de transfert

Identifions $\mathbb{R}^{\mathcal{A}}$ à l'espace des fonctions $\varphi(\underline{\theta})$ sur $\Sigma_{\mathcal{B}}$ (ou $\Sigma_{\mathcal{B}}^{+}$) qui ne dépendent que de θ_0 et $\mathbb{R}^{\mathcal{B}}$ à l'espace des fonctions qui ne dépendent que de θ_0, θ_1.

Soit $\varphi = (\varphi_{\alpha_0,\alpha_1})_{(\alpha_0,\alpha_1)\in\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{B}} \subset C(\Sigma_{\mathcal{B}}^{+})$. L'opérateur de transfert $\mathcal{L}_{\varphi}$ envoie $\mathbb{R}^{\mathcal{A}}$ dans lui même et la matrice de cette restriction est égale à $M_{\varphi} = (\exp \varphi_{\alpha_1,\alpha_0})$ (les coefficients sont nuls si $(\alpha_0, \alpha_1) \notin \mathcal{B}$).

Une version élémentaire de l'opérateur de transfert

Identifions $\mathbb{R}^{\mathcal{A}}$ à l'espace des fonctions $\varphi(\underline{\theta})$ sur $\Sigma_{\mathcal{B}}$ (ou $\Sigma_{\mathcal{B}}^{+}$) qui ne dépendent que de θ_0 et $\mathbb{R}^{\mathcal{B}}$ à l'espace des fonctions qui ne dépendent que de θ_0, θ_1.

Soit $\varphi = (\varphi_{\alpha_0,\alpha_1})_{(\alpha_0,\alpha_1)\in\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{B}} \subset C(\Sigma_{\mathcal{B}}^{+})$. L'opérateur de transfert $\mathcal{L}_\varphi$ envoie $\mathbb{R}^{\mathcal{A}}$ dans lui même et la matrice de cette restriction est égale à $M_\varphi = (\exp \varphi_{\alpha_1,\alpha_0})$ (les coefficients sont nuls si $(\alpha_0, \alpha_1) \notin \mathcal{B}$).

Posons $\Phi = \exp \varphi$. Un calcul simple donne

Une version élémentaire de l'opérateur de transfert

Identifions $\mathbb{R}^{\mathcal{A}}$ à l'espace des fonctions $\varphi(\underline{\theta})$ sur $\Sigma_{\mathcal{B}}$ (ou $\Sigma_{\mathcal{B}}^{+}$) qui ne dépendent que de θ_0 et $\mathbb{R}^{\mathcal{B}}$ à l'espace des fonctions qui ne dépendent que de θ_0, θ_1.

Soit $\varphi = (\varphi_{\alpha_0,\alpha_1})_{(\alpha_0,\alpha_1)\in\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{B}} \subset C(\Sigma_{\mathcal{B}}^{+})$. L'opérateur de transfert $\mathcal{L}_{\varphi}$ envoie $\mathbb{R}^{\mathcal{A}}$ dans lui même et la matrice de cette restriction est égale à $M_{\varphi} = (\exp \varphi_{\alpha_1,\alpha_0})$ (les coefficients sont nuls si $(\alpha_0, \alpha_1) \notin \mathcal{B}$).

Posons $\Phi = \exp \varphi$. Un calcul simple donne

$$\zeta_{\sigma,\Phi}(z) = \det(1 - zM_{\varphi})^{-1}.$$

Ce qu'on souhaite faire

Lorsque φ est une fonction hölderienne plus générale sur $\Sigma_{\mathcal{B}}$, le théorème de Livsic permet d'écrire $\varphi = \varphi^+ + \xi - \xi \circ \sigma$.

Ce qu'on souhaite faire

Lorsque φ est une fonction hölderienne plus générale sur $\Sigma_{\mathcal{B}}$, le théorème de Livsic permet d'écrire $\varphi = \varphi^+ + \xi - \xi \circ \sigma$.

On souhaite présenter la fonction zeta $\zeta_{\sigma,\exp\varphi}$ comme l'inverse d'un "déterminant" $\det(1 - z\mathcal{L}_{\varphi^+})$.

Ce qu'on souhaite faire

Lorsque φ est une fonction hölderienne plus générale sur $\Sigma_{\mathcal{B}}$, le théorème de Livsic permet d'écrire $\varphi = \varphi^+ + \xi - \xi \circ \sigma$.

On souhaite présenter la fonction zeta $\zeta_{\sigma,\exp\varphi}$ comme l'inverse d'un "déterminant" $\det(1 - z\mathcal{L}_{\varphi^+})$.

Les valeurs propres de $\mathcal{L}_{\varphi^+}$ correspondent alors aux inverses des pôles de $\zeta_{\sigma,\exp\varphi}$.

Ce qu'on souhaite faire

Lorsque φ est une fonction hölderienne plus générale sur $\Sigma_{\mathcal{B}}$, le théorème de Livsic permet d'écrire $\varphi = \varphi^+ + \xi - \xi \circ \sigma$.

On souhaite présenter la fonction zeta $\zeta_{\sigma, \exp \varphi}$ comme l'inverse d'un "déterminant" $\det(1 - z\mathcal{L}_{\varphi^+})$.

Les valeurs propres de $\mathcal{L}_{\varphi^+}$ correspondent alors aux inverses des pôles de $\zeta_{\sigma, \exp \varphi}$.

Il y a de nombreux résultats partiels. La difficulté principale est de choisir un "bon" espace fonctionnel où opère $\mathcal{L}_{\varphi^+}$.

Le théorème de Perron-Frobenius

Théorème: (Perron-Frobenius) Soit $M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ une matrice à coefficients strictement positifs.

Le théorème de Perron-Frobenius

Théorème: (Perron-Frobenius) Soit $M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ une matrice à coefficients strictement positifs. Il existe une valeur propre strictement positive λ de M,

Le théorème de Perron-Frobenius

Théorème: (Perron-Frobenius) Soit $M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ une matrice à coefficients strictement positifs. Il existe une valeur propre strictement positive λ de M, des vecteurs strictement positifs $h \in \mathbb{R}^d$, $\mu \in (\mathbb{R}^d)^*$ tels que

Le théorème de Perron-Frobenius

Théorème: (Perron-Frobenius) Soit $M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ une matrice à coefficients strictement positifs. Il existe une valeur propre strictement positive λ de M, des vecteurs strictement positifs $h \in \mathbb{R}^d$, $\mu \in (\mathbb{R}^d)^*$ tels que

1. $M.h = \lambda h, \; M^{tr}.\mu = \lambda\mu$;

Le théorème de Perron-Frobenius

Théorème: (Perron-Frobenius) Soit $M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ une matrice à coefficients strictement positifs. Il existe une valeur propre strictement positive λ de M, des vecteurs strictement positifs $h \in \mathbb{R}^d$, $\mu \in (\mathbb{R}^d)^*$ tels que

1. $M.h = \lambda h,\ M^{tr}.\mu = \lambda\mu$;
2. (Trou spectral) λ est une valeur simple de M;

Le théorème de Perron-Frobenius

Théorème: (Perron-Frobenius) Soit $M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ une matrice à coefficients strictement positifs. Il existe une valeur propre strictement positive λ de M, des vecteurs strictement positifs $h \in \mathbb{R}^d$, $\mu \in (\mathbb{R}^d)^*$ tels que

1. $M.h = \lambda h, \; M^{tr}.\mu = \lambda\mu$;
2. (Trou spectral) λ est une valeur simple de M; les autres valeurs propres de M sont celles de la restriction de M au noyau de μ; elles sont de module $< \lambda$;

Théorème: (Perron-Frobenius) Soit $M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ une matrice à coefficients strictement positifs. Il existe une valeur propre strictement positive λ de M, des vecteurs strictement positifs $h \in \mathbb{R}^d$, $\mu \in (\mathbb{R}^d)^*$ tels que

1. $M.h = \lambda h, \; M^{tr}.\mu = \lambda \mu$;
2. (Trou spectral) λ est une valeur simple de M; les autres valeurs propres de M sont celles de la restriction de M au noyau de μ; elles sont de module $< \lambda$;
3. (Normalisation) $\sum_j \mu_j = 1, \; \sum_j \mu_j h_j = 1$.

Le théorème de Perron-Frobenius

Théorème: (Perron-Frobenius) Soit $M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ une matrice à coefficients strictement positifs. Il existe une valeur propre strictement positive λ de M, des vecteurs strictement positifs $h \in \mathbb{R}^d$, $\mu \in (\mathbb{R}^d)^*$ tels que

1. $M.h = \lambda h,\ M^{tr}.\mu = \lambda\mu$;
2. (Trou spectral) λ est une valeur simple de M; les autres valeurs propres de M sont celles de la restriction de M au noyau de μ; elles sont de module $< \lambda$;
3. (Normalisation) $\sum_j \mu_j = 1,\ \sum_j \mu_j h_j = 1$.

Corollaire: Pour tout $v \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\lim_{n \to +\infty} \lambda^{-n} M^n.v = \mu(v)h,$$

Le théorème de Perron-Frobenius

Théorème: (Perron-Frobenius) Soit $M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ une matrice à coefficients strictement positifs. Il existe une valeur propre strictement positive λ de M, des vecteurs strictement positifs $h \in \mathbb{R}^d$, $\mu \in (\mathbb{R}^d)^*$ tels que

1. $M.h = \lambda h, \; M^{tr}.\mu = \lambda\mu$;
2. (Trou spectral) λ est une valeur simple de M; les autres valeurs propres de M sont celles de la restriction de M au noyau de μ; elles sont de module $< \lambda$;
3. (Normalisation) $\sum_j \mu_j = 1, \; \sum_j \mu_j h_j = 1$.

Corollaire: Pour tout $v \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\lim_{n \to +\infty} \lambda^{-n} M^n.v = \mu(v)h,$$

et la convergence est exponentiellement rapide.

Le théorème de Ruelle-Perron-Frobenius

Soit $(\Sigma_{\mathcal{B}}^{+}, \sigma)$ un un sous-décalage unilatéral topologiquement mélangeant.

Le théorème de Ruelle-Perron-Frobenius

Soit $(\Sigma_{\mathcal{B}}^{+}, \sigma)$ un un sous-décalage unilatéral topologiquement mélangeant.
Soit $\varphi^{+} : \Sigma_{\mathcal{B}}^{+} \to \mathbb{R}$ une fonction hölderienne d'exposant $\beta > 0$.

Le théorème de Ruelle-Perron-Frobenius

Soit $(\Sigma_{\mathcal{B}}^{+}, \sigma)$ un un sous-décalage unilatéral topologiquement mélangeant. Soit $\varphi^{+} : \Sigma_{\mathcal{B}}^{+} \to \mathbb{R}$ une fonction hölderienne d'exposant $\beta > 0$. Soit $\beta' \in (0, \beta)$. Notons E l'espace de Banach des fonctions sur $\Sigma_{\mathcal{B}}^{+}$ qui sont hölderiennes d'exposant β'.

Le théorème de Ruelle-Perron-Frobenius

Soit $(\Sigma^+_{\mathcal{B}}, \sigma)$ un un sous-décalage unilatéral topologiquement mélangeant. Soit $\varphi^+ : \Sigma^+_{\mathcal{B}} \to \mathbb{R}$ une fonction hölderienne d'exposant $\beta > 0$. Soit $\beta' \in (0, \beta)$. Notons E l'espace de Banach des fonctions sur $\Sigma^+_{\mathcal{B}}$ qui sont hölderiennes d'exposant β'. L'opérateur de transfert $\mathcal{L}_{\varphi^+}$ définit un opérateur de E dans E.

Le théorème de Ruelle-Perron-Frobenius

Soit $(\Sigma_{\mathcal{B}}^{+}, \sigma)$ un un sous-décalage unilatéral topologiquement mélangeant. Soit $\varphi^{+} : \Sigma_{\mathcal{B}}^{+} \to \mathbb{R}$ une fonction hölderienne d'exposant $\beta > 0$. Soit $\beta' \in (0, \beta)$. Notons E l'espace de Banach des fonctions sur $\Sigma_{\mathcal{B}}^{+}$ qui sont hölderiennes d'exposant β'. L'opérateur de transfert $\mathcal{L}_{\varphi^{+}}$ définit un opérateur de E dans E.

Théorème: (Ruelle) Il existe une valeur propre strictement positive λ de $\mathcal{L}_{\varphi^{+}\,|E}$,

Le théorème de Ruelle-Perron-Frobenius

Soit $(\Sigma^+_{\mathcal{B}}, \sigma)$ un un sous-décalage unilatéral topologiquement mélangeant. Soit $\varphi^+ : \Sigma^+_{\mathcal{B}} \to \mathbb{R}$ une fonction hölderienne d'exposant $\beta > 0$. Soit $\beta' \in (0, \beta)$. Notons E l'espace de Banach des fonctions sur $\Sigma^+_{\mathcal{B}}$ qui sont hölderiennes d'exposant β'. L'opérateur de transfert $\mathcal{L}_{\varphi^+}$ définit un opérateur de E dans E.

Théorème: (Ruelle) Il existe une valeur propre strictement positive λ de $\mathcal{L}_{\varphi^+ \,|E}$, une fonction strictement positive $h \in E$,

Le théorème de Ruelle-Perron-Frobenius

Soit $(\Sigma_{\mathcal{B}}^+, \sigma)$ un un sous-décalage unilatéral topologiquement mélangeant. Soit $\varphi^+ : \Sigma_{\mathcal{B}}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction hölderienne d'exposant $\beta > 0$. Soit $\beta' \in (0, \beta)$. Notons E l'espace de Banach des fonctions sur $\Sigma_{\mathcal{B}}^+$ qui sont hölderiennes d'exposant β'. L'opérateur de transfert $\mathcal{L}_{\varphi^+}$ définit un opérateur de E dans E.

Théorème: (Ruelle) Il existe une valeur propre strictement positive λ de $\mathcal{L}_{\varphi^+ \,|E}$, une fonction strictement positive $h \in E$, une mesure de probabilité borélienne μ sur $\Sigma_{\mathcal{B}}^+$ de support total telles que

Le théorème de Ruelle-Perron-Frobenius

Soit $(\Sigma_{\mathcal{B}}^{+}, \sigma)$ un un sous-décalage unilatéral topologiquement mélangeant. Soit $\varphi^{+} : \Sigma_{\mathcal{B}}^{+} \to \mathbb{R}$ une fonction hölderienne d'exposant $\beta > 0$. Soit $\beta' \in (0, \beta)$. Notons E l'espace de Banach des fonctions sur $\Sigma_{\mathcal{B}}^{+}$ qui sont hölderiennes d'exposant β'. L'opérateur de transfert $\mathcal{L}_{\varphi^{+}}$ définit un opérateur de E dans E.

Théorème: (Ruelle) Il existe une valeur propre strictement positive λ de $\mathcal{L}_{\varphi^{+}\,|E}$, une fonction strictement positive $h \in E$, une mesure de probabilité borélienne μ sur $\Sigma_{\mathcal{B}}^{+}$ de support total telles que

1. $\mathcal{L}_{\varphi^{+}}(h) = \lambda h, \quad \int \mathcal{L}_{\varphi^{+}}(\psi)\, d\mu = \lambda \int \psi\, d\mu, \quad \forall \psi \in C(\Sigma_{\mathcal{B}}^{+});$

Le théorème de Ruelle-Perron-Frobenius

Soit $(\Sigma^+_{\mathcal{B}}, \sigma)$ un un sous-décalage unilatéral topologiquement mélangeant. Soit $\varphi^+ : \Sigma^+_{\mathcal{B}} \to \mathbb{R}$ une fonction hölderienne d'exposant $\beta > 0$. Soit $\beta' \in (0, \beta)$. Notons E l'espace de Banach des fonctions sur $\Sigma^+_{\mathcal{B}}$ qui sont hölderiennes d'exposant β'. L'opérateur de transfert $\mathcal{L}_{\varphi^+}$ définit un opérateur de E dans E.

Théorème: (Ruelle) Il existe une valeur propre strictement positive λ de $\mathcal{L}_{\varphi^+\,|E}$, une fonction strictement positive $h \in E$, une mesure de probabilité borélienne μ sur $\Sigma^+_{\mathcal{B}}$ de support total telles que

1. $\mathcal{L}_{\varphi^+}(h) = \lambda h, \quad \int \mathcal{L}_{\varphi^+}(\psi)\, d\mu = \lambda \int \psi\, d\mu, \quad \forall \psi \in C(\Sigma^+_{\mathcal{B}})$;
2. (Trou spectral) λ est valeur simple de $\mathcal{L}_{\varphi^+\,|E}$;

Le théorème de Ruelle-Perron-Frobenius

Soit $(\Sigma_{\mathcal{B}}^+, \sigma)$ un un sous-décalage unilatéral topologiquement mélangeant. Soit $\varphi^+ : \Sigma_{\mathcal{B}}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction hölderienne d'exposant $\beta > 0$. Soit $\beta' \in (0, \beta)$. Notons E l'espace de Banach des fonctions sur $\Sigma_{\mathcal{B}}^+$ qui sont hölderiennes d'exposant β'. L'opérateur de transfert $\mathcal{L}_{\varphi^+}$ définit un opérateur de E dans E.

Théorème: (Ruelle) Il existe une valeur propre strictement positive λ de $\mathcal{L}_{\varphi^+ \,|E}$, une fonction strictement positive $h \in E$, une mesure de probabilité borélienne μ sur $\Sigma_{\mathcal{B}}^+$ de support total telles que

1. $\mathcal{L}_{\varphi^+}(h) = \lambda h, \quad \int \mathcal{L}_{\varphi^+}(\psi)\, d\mu = \lambda \int \psi \, d\mu, \quad \forall \psi \in C(\Sigma_{\mathcal{B}}^+)$;
2. (Trou spectral) λ est valeur simple de $\mathcal{L}_{\varphi^+ \,|E}$; le rayon spectral de la restriction de $\mathcal{L}_{\varphi^+ \,|E}$ au noyau de μ est $< \lambda$;

Le théorème de Ruelle-Perron-Frobenius

Soit $(\Sigma_{\mathcal{B}}^{+}, \sigma)$ un un sous-décalage unilatéral topologiquement mélangeant. Soit $\varphi^{+} : \Sigma_{\mathcal{B}}^{+} \to \mathbb{R}$ une fonction hölderienne d'exposant $\beta > 0$. Soit $\beta' \in (0, \beta)$. Notons E l'espace de Banach des fonctions sur $\Sigma_{\mathcal{B}}^{+}$ qui sont hölderiennes d'exposant β'. L'opérateur de transfert $\mathcal{L}_{\varphi^{+}}$ définit un opérateur de E dans E.

Théorème: (Ruelle) Il existe une valeur propre strictement positive λ de $\mathcal{L}_{\varphi^{+}|E}$, une fonction strictement positive $h \in E$, une mesure de probabilité borélienne μ sur $\Sigma_{\mathcal{B}}^{+}$ de support total telles que

1. $\mathcal{L}_{\varphi^{+}}(h) = \lambda h, \quad \int \mathcal{L}_{\varphi^{+}}(\psi)\, d\mu = \lambda \int \psi \, d\mu, \quad \forall \psi \in C(\Sigma_{\mathcal{B}}^{+})$;
2. (Trou spectral) λ est valeur simple de $\mathcal{L}_{\varphi^{+}|E}$; le rayon spectral de la restriction de $\mathcal{L}_{\varphi^{+}|E}$ au noyau de μ est $< \lambda$;
3. (Normalisation) $\int h \, d\mu = 1 (= \int d\mu)$.

Compléments

Corollaire: Pour toute fonction $\psi \in E$, on a

$$\lim_{n \to +\infty} \lambda^{-n} \mathcal{L}^n_{\varphi^+}(\psi) = \left(\int \psi \, d\mu\right) h;$$

Compléments

Corollaire: Pour toute fonction $\psi \in E$, on a

$$\lim_{n \to +\infty} \lambda^{-n} \mathcal{L}^n_{\varphi^+}(\psi) = (\int \psi \, d\mu) \, h;$$

avec une convergence uniforme exponentiellement rapide.

Compléments

Corollaire: Pour toute fonction $\psi \in E$, on a

$$\lim_{n \to +\infty} \lambda^{-n} \mathcal{L}^n_{\varphi^+}(\psi) = (\int \psi \, d\mu) \, h;$$

avec une convergence uniforme exponentiellement rapide.

Corollaire: $\lambda = \exp(P(\varphi^+))$.

Compléments

Corollaire: Pour toute fonction $\psi \in E$, on a

$$\lim_{n \to +\infty} \lambda^{-n} \mathcal{L}^n_{\varphi^+}(\psi) = (\int \psi \, d\mu) \, h;$$

avec une convergence uniforme exponentiellement rapide.

Corollaire: $\lambda = \exp(P(\varphi^+))$.

Corollaire: Pour tout borélien $A \subset \Sigma^+_{\mathcal{B}}$ tel que la restriction $\sigma_{|A}$ soit injective, on a

$$\mu(\sigma(A)) = \lambda \int_A \exp(-\varphi^+) \, d\mu.$$

Compléments

Corollaire: Pour toute fonction $\psi \in E$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \lambda^{-n}\mathcal{L}^n_{\varphi^+}(\psi) = (\int \psi \, d\mu)\, h;$$

avec une convergence uniforme exponentiellement rapide.

Corollaire: $\lambda = \exp(P(\varphi^+))$.

Corollaire: Pour tout borélien $A \subset \Sigma^+_{\mathcal{B}}$ tel que la restriction $\sigma_{|A}$ soit injective, on a

$$\mu(\sigma(A)) = \lambda \int_A \exp(-\varphi^+)\, d\mu.$$

Corollaire: La mesure de probabilité $\nu := h\mu$ est invariante par σ et ergodique.

Compléments

Corollaire: Pour toute fonction $\psi \in E$, on a

$$\lim_{n \to +\infty} \lambda^{-n} \mathcal{L}^n_{\varphi^+}(\psi) = (\int \psi \, d\mu) \, h;$$

avec une convergence uniforme exponentiellement rapide.

Corollaire: $\lambda = \exp(P(\varphi^+))$.

Corollaire: Pour tout borélien $A \subset \Sigma^+_{\mathcal{B}}$ tel que la restriction $\sigma_{|A}$ soit injective, on a

$$\mu(\sigma(A)) = \lambda \int_A \exp(-\varphi^+) \, d\mu.$$

Corollaire: La mesure de probabilité $\nu := h\mu$ est invariante par σ et ergodique.

La mesure ν est la *mesure de Gibbs* ou *mesure d'équilibre* associée au *potentiel* φ^+.

Propriétés de la mesure invariante $\nu := h\mu$

Pour $\underline{\theta} \in \Sigma_{\mathcal{B}}^{+}$, $n \geqslant 0$, posons

$$C_n(\underline{\theta}) = \{\underline{\omega} \in \Sigma_{\mathcal{B}}^{+},\ \theta_j = \omega_j,\ \forall 0 \leqslant j < n\}.$$

Propriétés de la mesure invariante $\nu := h\mu$

Pour $\underline{\theta} \in \Sigma_{\mathcal{B}}^+$, $n \geqslant 0$, posons

$$C_n(\underline{\theta}) = \{\underline{\omega} \in \Sigma_{\mathcal{B}}^+,\ \theta_j = \omega_j,\ \forall 0 \leqslant j < n\}.$$

Proposition: Il existe une constante $C > 1$ telle qu'on ait, pour tous $\underline{\theta} \in \Sigma_{\mathcal{B}}^+$, $n \geqslant 0$

$$C > \frac{\nu(C_n(\underline{\theta}))}{\exp\left[\sum_0^{n-1} \varphi^+(\sigma_j(\underline{\theta})) - nP(\varphi^+)\right]} > C^{-1}.$$

Propriétés de la mesure invariante $\nu := h\mu$

Pour $\underline{\theta} \in \Sigma_{\mathcal{B}}^{+}$, $n \geqslant 0$, posons

$$C_n(\underline{\theta}) = \{\underline{\omega} \in \Sigma_{\mathcal{B}}^{+},\ \theta_j = \omega_j,\ \forall 0 \leqslant j < n\}.$$

Proposition: Il existe une constante $C > 1$ telle qu'on ait, pour tous $\underline{\theta} \in \Sigma_{\mathcal{B}}^{+}$, $n \geqslant 0$

$$C > \frac{\nu(C_n(\underline{\theta}))}{\exp\left[\sum_0^{n-1} \varphi^+(\sigma_j(\underline{\theta})) - nP(\varphi^+)\right]} > C^{-1}.$$

La même estimation vaut pour μ.

Propriétés de la mesure invariante $\nu := h\mu$

Pour $\underline{\theta} \in \Sigma^+_{\mathcal{B}}$, $n \geqslant 0$, posons

$$C_n(\underline{\theta}) = \{\underline{\omega} \in \Sigma^+_{\mathcal{B}},\ \theta_j = \omega_j,\ \forall 0 \leqslant j < n\}.$$

Proposition: Il existe une constante $C > 1$ telle qu'on ait, pour tous $\underline{\theta} \in \Sigma^+_{\mathcal{B}}$, $n \geqslant 0$

$$C > \frac{\nu(C_n(\underline{\theta}))}{\exp\left[\sum_0^{n-1} \varphi^+(\sigma_j(\underline{\theta})) - nP(\varphi^+)\right]} > C^{-1}.$$

La même estimation vaut pour μ.

Proposition: Pour toute mesure de probabilité σ-invariante m sur $\Sigma^+_{\mathcal{B}}$, on a

$$P(\varphi^+) \ = \ h_\nu(\sigma) + \int \varphi^+ \, d\nu \geqslant h_m(\sigma) + \int \varphi^+ \, dm,$$

où $h_m(\sigma)$ est *l'entropie métrique* de σ par rapport à m.

Application (I): le théorème de Sinai

Un difféomorphisme d'Anosov linéaire A de $\mathbb{T}^d$ préserve la mesure de Lebesgue,

Application (I): le théorème de Sinai

Un difféomorphisme d'Anosov linéaire A de $\mathbb{T}^d$ préserve la mesure de Lebesgue, et est ergodique par rapport à cette mesure.

Application (I): le théorème de Sinai

Un difféomorphisme d'Anosov linéaire A de $\mathbb{T}^d$ préserve la mesure de Lebesgue, et est ergodique par rapport à cette mesure. Le théorème ergodique de Birkhoff permet donc de d'analyser les moyennes de Birkhoff de presque toute orbite de A.

Application (I): le théorème de Sinai

Un difféomorphisme d'Anosov linéaire A de $\mathbb{T}^d$ préserve la mesure de Lebesgue, et est ergodique par rapport à cette mesure. Le théorème ergodique de Birkhoff permet donc de d'analyser les moyennes de Birkhoff de presque toute orbite de A.

Un difféomorphisme d'Anosov f de $\mathbb{T}^d$, lisse, homotope à A, ne possède en général pas de mesure de probabilité invariante qui soit absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

Application (I): le théorème de Sinai

Un difféomorphisme d'Anosov linéaire A de $\mathbb{T}^d$ préserve la mesure de Lebesgue, et est ergodique par rapport à cette mesure. Le théorème ergodique de Birkhoff permet donc de d'analyser les moyennes de Birkhoff de presque toute orbite de A.

Un difféomorphisme d'Anosov f de $\mathbb{T}^d$, lisse, homotope à A, ne possède en général pas de mesure de probabilité invariante qui soit absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

En particulier, l' homéomorphisme de $\mathbb{T}^d$ qui conjugue f et A n'est en général pas absolument continu.

Application (I): le théorème de Sinai

Un difféomorphisme d'Anosov linéaire A de $\mathbb{T}^d$ préserve la mesure de Lebesgue, et est ergodique par rapport à cette mesure. Le théorème ergodique de Birkhoff permet donc de d'analyser les moyennes de Birkhoff de presque toute orbite de A.

Un difféomorphisme d'Anosov f de $\mathbb{T}^d$, lisse, homotope à A, ne possède en général pas de mesure de probabilité invariante qui soit absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

En particulier, l' homéomorphisme de $\mathbb{T}^d$ qui conjugue f et A n'est en général pas absolument continu.

Quel est le comportement des moyennes de Birkhoff de f pour presque toute condition initiale

Application (I): le théorème de Sinai

Un difféomorphisme d'Anosov linéaire A de $\mathbb{T}^d$ préserve la mesure de Lebesgue, et est ergodique par rapport à cette mesure. Le théorème ergodique de Birkhoff permet donc de d'analyser les moyennes de Birkhoff de presque toute orbite de A.

Un difféomorphisme d'Anosov f de $\mathbb{T}^d$, lisse, homotope à A, ne possède en général pas de mesure de probabilité invariante qui soit absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

En particulier, l' homéomorphisme de $\mathbb{T}^d$ qui conjugue f et A n'est en général pas absolument continu.

Quel est le comportement des moyennes de Birkhoff de f pour presque toute condition initiale (par rapport à la mesure de Lebesgue)?

Théorème: (Sinai) Soit f un difféomorphisme d'Anosov de $\mathbb{T}^d$ de classe C^r, r réel > 1.

Théorème: (Sinai) Soit f un difféomorphisme d'Anosov de $\mathbb{T}^d$ de classe C^r, r réel > 1. Il existe des mesures de probabilité f-invariantes ν^+, ν^- sur $\mathbb{T}^d$ telles que,

Théorème: (Sinai) Soit f un difféomorphisme d'Anosov de $\mathbb{T}^d$ de classe C^r, r réel > 1. Il existe des mesures de probabilité f-invariantes ν^+, ν^- sur $\mathbb{T}^d$ telles que, pour toute fonction $\psi \in C(\mathbb{T}^d)$ et Lebesgue presque tout point $x \in \mathbb{T}^d$, on ait

Théorème: (Sinai) Soit f un difféomorphisme d'Anosov de $\mathbb{T}^d$ de classe C^r, r réel > 1. Il existe des mesures de probabilité f-invariantes ν^+, ν^- sur $\mathbb{T}^d$ telles que, pour toute fonction $\psi \in C(\mathbb{T}^d)$ et Lebesgue presque tout point $x \in \mathbb{T}^d$, on ait

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{0}^{n-1} \psi(f^j(x)) = \int \psi \, d\nu^+, \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{0}^{n-1} \psi(f^{-j}(x)) = \int \psi \, d\nu^-.$$

Théorème: (Sinai) Soit f un difféomorphisme d'Anosov de $\mathbb{T}^d$ de classe C^r, r réel > 1. Il existe des mesures de probabilité f-invariantes ν^+, ν^- sur $\mathbb{T}^d$ telles que, pour toute fonction $\psi \in C(\mathbb{T}^d)$ et Lebesgue presque tout point $x \in \mathbb{T}^d$, on ait

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_0^{n-1} \psi(f^j(x)) = \int \psi \, d\nu^+, \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_0^{n-1} \psi(f^{-j}(x)) = \int \psi \, d\nu^-.$$

De plus, ces mesures sont égales si et seulement si f admet une mesure de probabilité invariante qui soit équivalente à la mesure de Lebesgue.

Théorème: (Sinai) Soit f un difféomorphisme d'Anosov de $\mathbb{T}^d$ de classe C^r, r réel > 1. Il existe des mesures de probabilité f-invariantes ν^+, ν^- sur $\mathbb{T}^d$ telles que, pour toute fonction $\psi \in C(\mathbb{T}^d)$ et Lebesgue presque tout point $x \in \mathbb{T}^d$, on ait

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_0^{n-1} \psi(f^j(x)) = \int \psi \, d\nu^+, \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_0^{n-1} \psi(f^{-j}(x)) = \int \psi \, d\nu^-.$$

De plus, ces mesures sont égales si et seulement si f admet une mesure de probabilité invariante qui soit équivalente à la mesure de Lebesgue.

Cette mesure de probabilité est alors égale à $\nu^+ = \nu^-$.

Indication de preuve

1. On choisit une partition de Markov $(R_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ de $\mathbb{T}^d$, ce qui définit une semi-conjugaison entre un sous-décalage de type fini $(\Sigma_{\mathcal{B}}, \sigma)$ et f.

Indication de preuve

1. On choisit une partition de Markov $(R_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ de $\mathbb{T}^d$, ce qui définit une semi-conjugaison entre un sous-décalage de type fini $(\Sigma_{\mathcal{B}}, \sigma)$ et f.
2. On montre que le feuilletage stable de $\mathbb{T}^d$ par les variétés stables de f est absolument continu dans le sens suivant:

Indication de preuve

1. On choisit une partition de Markov $(R_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ de $\mathbb{T}^d$, ce qui définit une semi-conjugaison entre un sous-décalage de type fini $(\Sigma_{\mathcal{B}}, \sigma)$ et f.
2. On montre que le feuilletage stable de $\mathbb{T}^d$ par les variétés stables de f est absolument continu dans le sens suivant: pour tous $\alpha \in \mathcal{A}$, $x, y \in R_\alpha$, l'application d'holonomie de $W^u(x, R_\alpha)$ vers $W^u(y, R_\alpha)$ le long du feuilletage stable est absolument continue.

Indication de preuve

1. On choisit une partition de Markov $(R_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ de $\mathbb{T}^d$, ce qui définit une semi-conjugaison entre un sous-décalage de type fini $(\Sigma_{\mathcal{B}}, \sigma)$ et f.
2. On montre que le feuilletage stable de $\mathbb{T}^d$ par les variétés stables de f est absolument continu dans le sens suivant: pour tous $\alpha \in \mathcal{A}$, $x, y \in R_\alpha$, l'application d'holonomie de $W^u(x, R_\alpha)$ vers $W^u(y, R_\alpha)$ le long du feuilletage stable est absolument continue.
3. Notons J_u le Jacobien instable de f, considéré comme fonction sur $\Sigma_{\mathcal{B}}$. C'est une fonction hölderienne car $r > 1$.

Indication de preuve

1. On choisit une partition de Markov $(R_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ de $\mathbb{T}^d$, ce qui définit une semi-conjugaison entre un sous-décalage de type fini $(\Sigma_{\mathcal{B}}, \sigma)$ et f.
2. On montre que le feuilletage stable de $\mathbb{T}^d$ par les variétés stables de f est absolument continu dans le sens suivant: pour tous $\alpha \in \mathcal{A}$, $x, y \in R_\alpha$, l'application d'holonomie de $W^u(x, R_\alpha)$ vers $W^u(y, R_\alpha)$ le long du feuilletage stable est absolument continue.
3. Notons J_u le Jacobien instable de f, considéré comme fonction sur $\Sigma_{\mathcal{B}}$. C'est une fonction hölderienne car $r > 1$.
4. Ecrivons $-\log J_u = \varphi_u^+ + \xi - \xi \circ \sigma$, où φ_u^+, ξ sont des fonctions hölderiennes sur $\Sigma_{\mathcal{B}}^+$, $\Sigma_{\mathcal{B}}$ respectivement.

Indication de preuve

1. On choisit une partition de Markov $(R_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ de $\mathbb{T}^d$, ce qui définit une semi-conjugaison entre un sous-décalage de type fini $(\Sigma_{\mathcal{B}}, \sigma)$ et f.
2. On montre que le feuilletage stable de $\mathbb{T}^d$ par les variétés stables de f est absolument continu dans le sens suivant: pour tous $\alpha \in \mathcal{A}$, $x, y \in R_\alpha$, l'application d'holonomie de $W^u(x, R_\alpha)$ vers $W^u(y, R_\alpha)$ le long du feuilletage stable est absolument continue.
3. Notons J_u le Jacobien instable de f, considéré comme fonction sur $\Sigma_{\mathcal{B}}$. C'est une fonction hölderienne car $r > 1$.
4. Ecrivons $-\log J_u = \varphi_u^+ + \xi - \xi\circ\sigma$, où φ_u^+, ξ sont des fonctions hölderiennes sur $\Sigma_{\mathcal{B}}^+$, $\Sigma_{\mathcal{B}}$ respectivement.
5. Considérons l'opérateur de transfert associé au potentiel φ_u^+.

Indication de preuve

1. On choisit une partition de Markov $(R_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ de $\mathbb{T}^d$, ce qui définit une semi-conjugaison entre un sous-décalage de type fini $(\Sigma_{\mathcal{B}}, \sigma)$ et f.
2. On montre que le feuilletage stable de $\mathbb{T}^d$ par les variétés stables de f est absolument continu dans le sens suivant: pour tous $\alpha \in \mathcal{A}$, $x, y \in R_\alpha$, l'application d'holonomie de $W^u(x, R_\alpha)$ vers $W^u(y, R_\alpha)$ le long du feuilletage stable est absolument continue.
3. Notons J_u le Jacobien instable de f, considéré comme fonction sur $\Sigma_{\mathcal{B}}$. C'est une fonction hölderienne car $r > 1$.
4. Ecrivons $-\log J_u = \varphi_u^+ + \xi - \xi \circ \sigma$, où φ_u^+, ξ sont des fonctions hölderiennes sur $\Sigma_{\mathcal{B}}^+$, $\Sigma_{\mathcal{B}}$ respectivement.
5. Considérons l'opérateur de transfert associé au potentiel φ_u^+. Notons λ la valeur propre dominante, μ, ν les mesures de probabilité associées.

6 Les propriétés de ν vues auparavant montrent qu'on doit avoir $P(\varphi_u^+) = 0$, $\lambda = 1$,

6 Les propriétés de ν vues auparavant montrent qu'on doit avoir $P(\varphi_u^+) = 0$, $\lambda = 1$, et que μ, ν vues comme mesure sur $W^u(x, R_\alpha)$, doivent être équivalentes à la mesure de Lebesgue.

6 Les propriétés de ν vues auparavant montrent qu'on doit avoir $P(\varphi_u^+) = 0$, $\lambda = 1$, et que μ, ν vues comme mesure sur $W^u(x, R_\alpha)$, doivent être équivalentes à la mesure de Lebesgue.

7 On conclut finalement que ν est la mesure ν^+ de l'énoncé du théorème.

6 Les propriétés de ν vues auparavant montrent qu'on doit avoir $P(\varphi_u^+) = 0$, $\lambda = 1$, et que μ, ν vues comme mesure sur $W^u(x, R_\alpha)$, doivent être équivalentes à la mesure de Lebesgue.

7 On conclut finalement que ν est la mesure ν^+ de l'énoncé du théorème. On obtient ν^- de façon similaire en remplaçant f par f^{-1}.

Plus généralement, lorsque K est ensemble basique qui est un attracteur (par exemple le solénoïde),

6 Les propriétés de ν vues auparavant montrent qu'on doit avoir $P(\varphi_u^+) = 0$, $\lambda = 1$, et que μ, ν vues comme mesure sur $W^u(x, R_\alpha)$, doivent être équivalentes à la mesure de Lebesgue.

7 On conclut finalement que ν est la mesure ν^+ de l'énoncé du théorème. On obtient ν^- de façon similaire en remplaçant f par f^{-1}.

Plus généralement, lorsque K est ensemble basique qui est un attracteur (par exemple le solénoïde), la même démonstration produit une mesure de probabilité invariante qui décrit le comportement des moyennes de Birkhoff (en temps positif!)pour presque toute condition initiale dans le bassin de K

6 Les propriétés de ν vues auparavant montrent qu'on doit avoir $P(\varphi_u^+) = 0$, $\lambda = 1$, et que μ, ν vues comme mesure sur $W^u(x, R_\alpha)$, doivent être équivalentes à la mesure de Lebesgue.

7 On conclut finalement que ν est la mesure ν^+ de l'énoncé du théorème. On obtient ν^- de façon similaire en remplaçant f par f^{-1}.

Plus généralement, lorsque K est ensemble basique qui est un attracteur (par exemple le solénoïde), la même démonstration produit une mesure de probabilité invariante qui décrit le comportement des moyennes de Birkhoff (en temps positif!)pour presque toute condition initiale dans le bassin de K (au sens de la mesure de Lebesgue).

Application (II): Calculs de dimension de Hausdorff

Considérons à nouveau la famille de Hénon $H_{b,c}$ pour $b > 0$ et $c \ll 0$.

Application (II): Calculs de dimension de Hausdorff

Considérons à nouveau la famille de Hénon $H_{b,c}$ pour $b > 0$ et $c \ll 0$. L'ensemble $K_{b,c}$ des points d'orbite bornée est un ensemble basique de type selle sur lequel la dynamique de $H_{b,c}$ est conjuguée au décalage complet sur 2 symboles.

Application (II): Calculs de dimension de Hausdorff

Considérons à nouveau la famille de Hénon $H_{b,c}$ pour $b > 0$ et $c \ll 0$. L'ensemble $K_{b,c}$ des points d'orbite bornée est un ensemble basique de type selle sur lequel la dynamique de $H_{b,c}$ est conjuguée au décalage complet sur 2 symboles.

Proposition: Il existe un réel $r > 1$ tel que les applications d'holonomie associées aux laminations formées par les variétés stables et instables de $H_{b,c}$ sont de classe C^r au sens de Whitney.

Application (II): Calculs de dimension de Hausdorff

Considérons à nouveau la famille de Hénon $H_{b,c}$ pour $b > 0$ et $c \ll 0$. L'ensemble $K_{b,c}$ des points d'orbite bornée est un ensemble basique de type selle sur lequel la dynamique de $H_{b,c}$ est conjuguée au décalage complet sur 2 symboles.

Proposition: Il existe un réel $r > 1$ tel que les applications d'holonomie associées aux laminations formées par les variétés stables et instables de $H_{b,c}$ sont de classe C^r au sens de Whitney.

Par conséquent, la dimension de Hausdorff d_s de l'intersection de $K_{b,c}$ avec une variété instable locale $W^u_{loc}(x)$ est indépendante de x.

Application (II): Calculs de dimension de Hausdorff

Considérons à nouveau la famille de Hénon $H_{b,c}$ pour $b > 0$ et $c \ll 0$. L'ensemble $K_{b,c}$ des points d'orbite bornée est un ensemble basique de type selle sur lequel la dynamique de $H_{b,c}$ est conjuguée au décalage complet sur 2 symboles.

Proposition: Il existe un réel $r > 1$ tel que les applications d'holonomie associées aux laminations formées par les variétés stables et instables de $H_{b,c}$ sont de classe C^r au sens de Whitney.

Par conséquent, la dimension de Hausdorff d_s de l'intersection de $K_{b,c}$ avec une variété instable locale $W^u_{loc}(x)$ est indépendante de x. On l'appelle *dimension transverse stable* de $K_{b,c}$.

Application (II): Calculs de dimension de Hausdorff

Considérons à nouveau la famille de Hénon $H_{b,c}$ pour $b > 0$ et $c \ll 0$. L'ensemble $K_{b,c}$ des points d'orbite bornée est un ensemble basique de type selle sur lequel la dynamique de $H_{b,c}$ est conjuguée au décalage complet sur 2 symboles.

Proposition: Il existe un réel $r > 1$ tel que les applications d'holonomie associées aux laminations formées par les variétés stables et instables de $H_{b,c}$ sont de classe C^r au sens de Whitney.

Par conséquent, la dimension de Hausdorff d_s de l'intersection de $K_{b,c}$ avec une variété instable locale $W^u_{loc}(x)$ est indépendante de x. On l'appelle *dimension transverse stable* de $K_{b,c}$. On définit de façon similaire la *dimension transverse instable* de $K_{b,c}$.

Application (II): Calculs de dimension de Hausdorff

Considérons à nouveau la famille de Hénon $H_{b,c}$ pour $b > 0$ et $c \ll 0$. L'ensemble $K_{b,c}$ des points d'orbite bornée est un ensemble basique de type selle sur lequel la dynamique de $H_{b,c}$ est conjuguée au décalage complet sur 2 symboles.

Proposition: Il existe un réel $r > 1$ tel que les applications d'holonomie associées aux laminations formées par les variétés stables et instables de $H_{b,c}$ sont de classe C^r au sens de Whitney.

Par conséquent, la dimension de Hausdorff d_s de l'intersection de $K_{b,c}$ avec une variété instable locale $W^u_{loc}(x)$ est indépendante de x. On l'appelle *dimension transverse stable* de $K_{b,c}$. On définit de façon similaire la *dimension transverse instable* de $K_{b,c}$.

Théorème: (Ruelle) Les dimensions d_s, d_u sont des fonctions analytiques des paramètres b, c, dans le domaine ouvert de paramètres où $K_{b,c}$ est un fer à cheval.

Indication de preuve

1. Identifions $(K_{b,c}, H_{b,c})$ au décalage complet sur deux symboles $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, \sigma)$.

Indication de preuve

1. Identifions $(K_{b,c}, H_{b,c})$ au décalage complet sur deux symboles $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, \sigma)$.
2. Notons comme précédemment J_u le Jacobien instable de $H_{b,c}$

Indication de preuve

1. Identifions $(K_{b,c}, H_{b,c})$ au décalage complet sur deux symboles $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, \sigma)$.
2. Notons comme précédemment J_u le Jacobien instable de $H_{b,c}$ et écrivons comme précédemment $-\log J_u = \varphi_u^+ + \xi - \xi \circ \sigma$, où φ_u^+, ξ sont des fonctions hölderiennes sur $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}_+}$, $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ respectivement.

Indication de preuve

1. Identifions $(K_{b,c}, H_{b,c})$ au décalage complet sur deux symboles $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, \sigma)$.
2. Notons comme précédemment J_u le Jacobien instable de $H_{b,c}$ et écrivons comme précédemment $-\log J_u = \varphi_u^+ + \xi - \xi \circ \sigma$, où φ_u^+, ξ sont des fonctions hölderiennes sur $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}_+}$, $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ respectivement. Il est possible de choisir ξ de sorte que φ_u^+ soit strictement négative sur $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}_+}$.

Indication de preuve

1. Identifions $(K_{b,c}, H_{b,c})$ au décalage complet sur deux symboles $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, \sigma)$.
2. Notons comme précédemment J_u le Jacobien instable de $H_{b,c}$ et écrivons comme précédemment $-\log J_u = \varphi_u^+ + \xi - \xi \circ \sigma$, où φ_u^+, ξ sont des fonctions hölderiennes sur $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}_+}$, $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ respectivement. Il est possible de choisir ξ de sorte que φ_u^+ soit strictement négative sur $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}_+}$.
3. Pour $t \in \mathbb{R}$, notons $L_{b,c,t}$ l'opérateur de transfert associé au potentiel $t\varphi_u^+$.

Indication de preuve

1. Identifions $(K_{b,c}, H_{b,c})$ au décalage complet sur deux symboles $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, \sigma)$.
2. Notons comme précédemment J_u le Jacobien instable de $H_{b,c}$ et écrivons comme précédemment $-\log J_u = \varphi_u^+ + \xi - \xi \circ \sigma$, où φ_u^+, ξ sont des fonctions hölderiennes sur $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}_+}$, $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ respectivement. Il est possible de choisir ξ de sorte que φ_u^+ soit strictement négative sur $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}_+}$.
3. Pour $t \in \mathbb{R}$, notons $L_{b,c,t}$ l'opérateur de transfert associé au potentiel $t\varphi_u^+$. Notons $\lambda(b, c, t)$ la valeur propre dominante de $L_{b,c,t}$, et $\mu(b, c, t)$, $\nu(b, c, t)$ les mesures de probabilité associées.

Indication de preuve

1. Identifions $(K_{b,c}, H_{b,c})$ au décalage complet sur deux symboles $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, \sigma)$.
2. Notons comme précédemment J_u le Jacobien instable de $H_{b,c}$ et écrivons comme précédemment $-\log J_u = \varphi_u^+ + \xi - \xi \circ \sigma$, où φ_u^+, ξ sont des fonctions hölderiennes sur $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}_+}$, $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ respectivement. Il est possible de choisir ξ de sorte que φ_u^+ soit strictement négative sur $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}_+}$.
3. Pour $t \in \mathbb{R}$, notons $L_{b,c,t}$ l'opérateur de transfert associé au potentiel $t\varphi_u^+$. Notons $\lambda(b, c, t)$ la valeur propre dominante de $L_{b,c,t}$, et $\mu(b, c, t)$, $\nu(b, c, t)$ les mesures de probabilité associées.
4. L'application $(b, c, t) \mapsto L_{b,c,t}$ est analytique, donc l'application $(b, c, t) \mapsto \lambda(b, c, t)$ l'est aussi.

5 L'inégalité $\frac{\partial}{\partial t}\lambda(t) < 0,\ \forall(b, c, t)$ résulte de $\varphi_u^+ < 0$.

5 L'inégalité $\frac{\partial}{\partial t}\lambda(t) < 0,\ \forall(b, c, t)$ résulte de $\varphi_u^+ < 0$. On a d'autre part

$$\lambda(b, c, 0) \equiv 2, \quad \lambda(b, c, 1) < 1, \quad \forall(b, c).$$

5 L'inégalité $\frac{\partial}{\partial t}\lambda(t) < 0, \ \forall(b,c,t)$ résulte de $\varphi_u^+ < 0$. On a d'autre part

$$\lambda(b,c,0) \equiv 2, \quad \lambda(b,c,1) < 1, \quad \forall(b,c).$$

Donc il existe un unique $t^* = t^*(b,c) \in (0,1)$ tel qu'on ait

$$\lambda(b,c,t^*) = 1.$$

5 L'inégalité $\frac{\partial}{\partial t}\lambda(t) < 0,\ \forall(b,c,t)$ résulte de $\varphi_u^+ < 0$. On a d'autre part

$$\lambda(b,c,0) \equiv 2, \quad \lambda(b,c,1) < 1, \quad \forall(b,c).$$

Donc il existe un unique $t^* = t^*(b,c) \in (0,1)$ tel qu'on ait

$$\lambda(b,c,t^*) = 1.$$

6 L'application $(b,c) \mapsto t^*(b,c)$ est analytique d'après le théorème des fonctions implicites.

5 L'inégalité $\frac{\partial}{\partial t}\lambda(t) < 0,\ \forall(b,c,t)$ résulte de $\varphi_u^+ < 0$. On a d'autre part

$$\lambda(b,c,0) \equiv 2, \quad \lambda(b,c,1) < 1, \quad \forall(b,c).$$

Donc il existe un unique $t^* = t^*(b,c) \in (0,1)$ tel qu'on ait

$$\lambda(b,c,t^*) = 1.$$

6 L'application $(b,c) \mapsto t^*(b,c)$ est analytique d'après le théorème des fonctions implicites.

7 La mesure $\mu(b,c,t^*(b,c))$ est proportionnelle à la mesure de Hausdorff en dimension $t^*(b,c)$.

5 L'inégalité $\frac{\partial}{\partial t}\lambda(t) < 0,\ \forall(b, c, t)$ résulte de $\varphi_u^+ < 0$. On a d'autre part

$$\lambda(b, c, 0) \equiv 2, \quad \lambda(b, c, 1) < 1, \quad \forall(b, c).$$

Donc il existe un unique $t^* = t^*(b, c) \in (0, 1)$ tel qu'on ait

$$\lambda(b, c, t^*) = 1.$$

6 L'application $(b, c) \mapsto t^*(b, c)$ est analytique d'après le théorème des fonctions implicites.

7 La mesure $\mu(b, c, t^*(b, c))$ est proportionnelle à la mesure de Hausdorff en dimension $t^*(b, c)$. On conclut donc que la dimension transverse stable d_s de $K_{b,c}$ est égale à $t^*(b, c)$, ce qui termine la démonstration du théorème.

5 L'inégalité $\frac{\partial}{\partial t}\lambda(t) < 0,\ \forall(b,c,t)$ résulte de $\varphi_u^+ < 0$. On a d'autre part

$$\lambda(b,c,0) \equiv 2, \quad \lambda(b,c,1) < 1, \quad \forall(b,c).$$

Donc il existe un unique $t^* = t^*(b,c) \in (0,1)$ tel qu'on ait

$$\lambda(b,c,t^*) = 1.$$

6 L'application $(b,c) \mapsto t^*(b,c)$ est analytique d'après le théorème des fonctions implicites.

7 La mesure $\mu(b,c,t^*(b,c))$ est proportionnelle à la mesure de Hausdorff en dimension $t^*(b,c)$. On conclut donc que la dimension transverse stable d_s de $K_{b,c}$ est égale à $t^*(b,c)$, ce qui termine la démonstration du théorème.

Remarque: Malheureusement, cet argument n'est valable que lorsque f est *transversalement conforme*.

Entropie topologique

Soient X un espace topologique compact et $f : X \to X$ une application continue.

Entropie topologique

Soient X un espace topologique compact et $f : X \to X$ une application continue.

Pour un recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de X, notons $|\mathcal{U}|$ le nombre minimal d'éléments d'un sous-recouvrement de $\mathcal{U}$.

Entropie topologique

Soient X un espace topologique compact et $f : X \to X$ une application continue.

Pour un recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de X, notons $|\mathcal{U}|$ le nombre minimal d'éléments d'un sous-recouvrement de $\mathcal{U}$. Notons $f^*\mathcal{U}$ le recouvrement par les ouverts $f^{-1}(U)$, $U \in \mathcal{U}$.

Entropie topologique

Soient X un espace topologique compact et $f : X \to X$ une application continue.

Pour un recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de X, notons $|\mathcal{U}|$ le nombre minimal d'éléments d'un sous-recouvrement de $\mathcal{U}$. Notons $f^*\mathcal{U}$ le recouvrement par les ouverts $f^{-1}(U)$, $U \in \mathcal{U}$. Observons qu'on a $|f^*\mathcal{U}| \leqslant |\mathcal{U}|$.

Entropie topologique

Soient X un espace topologique compact et $f : X \to X$ une application continue.

Pour un recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de X, notons $|\mathcal{U}|$ le nombre minimal d'éléments d'un sous-recouvrement de $\mathcal{U}$. Notons $f^*\mathcal{U}$ le recouvrement par les ouverts $f^{-1}(U)$, $U \in \mathcal{U}$. Observons qu'on a $|f^*\mathcal{U}| \leqslant |\mathcal{U}|$.
Pour deux recouvrements $\mathcal{U}, \mathcal{V}$, notons $\mathcal{U} \vee \mathcal{V}$ le recouvrement ouvert par les ensembles $U \cap V$, $U \in \mathcal{U}$, $V \in \mathcal{V}$.

Entropie topologique

Soient X un espace topologique compact et $f : X \to X$ une application continue.

Pour un recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de X, notons $|\mathcal{U}|$ le nombre minimal d'éléments d'un sous-recouvrement de $\mathcal{U}$. Notons $f^*\mathcal{U}$ le recouvrement par les ouverts $f^{-1}(U)$, $U \in \mathcal{U}$. Observons qu'on a $|f^*\mathcal{U}| \leqslant |\mathcal{U}|$.

Pour deux recouvrements $\mathcal{U}, \mathcal{V}$, notons $\mathcal{U} \vee \mathcal{V}$ le recouvrement ouvert par les ensembles $U \cap V$, $U \in \mathcal{U}$, $V \in \mathcal{V}$. On a $|\mathcal{U} \vee \mathcal{V}| \leqslant |\mathcal{U}|\,|\mathcal{V}|$.

Entropie topologique

Soient X un espace topologique compact et $f : X \to X$ une application continue.

Pour un recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de X, notons $|\mathcal{U}|$ le nombre minimal d'éléments d'un sous-recouvrement de $\mathcal{U}$. Notons $f^*\mathcal{U}$ le recouvrement par les ouverts $f^{-1}(U)$, $U \in \mathcal{U}$. Observons qu'on a $|f^*\mathcal{U}| \leqslant |\mathcal{U}|$.
Pour deux recouvrements $\mathcal{U}, \mathcal{V}$, notons $\mathcal{U} \vee \mathcal{V}$ le recouvrement ouvert par les ensembles $U \cap V$, $U \in \mathcal{U}$, $V \in \mathcal{V}$. On a $|\mathcal{U} \vee \mathcal{V}| \leqslant |\mathcal{U}|\,|\mathcal{V}|$.

Pour $n \geqslant 1$ et un recouvrement ouvert $\mathcal{U}$, définissons

$$\vee^n\mathcal{U} := \mathcal{U} \vee f^*\mathcal{U} \vee \ldots \vee (f^{n-1})^*\mathcal{U}.$$

Entropie topologique

Soient X un espace topologique compact et $f : X \to X$ une application continue.

Pour un recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de X, notons $|\mathcal{U}|$ le nombre minimal d'éléments d'un sous-recouvrement de $\mathcal{U}$. Notons $f^*\mathcal{U}$ le recouvrement par les ouverts $f^{-1}(U)$, $U \in \mathcal{U}$. Observons qu'on a $|f^*\mathcal{U}| \leqslant |\mathcal{U}|$.
Pour deux recouvrements $\mathcal{U}, \mathcal{V}$, notons $\mathcal{U} \vee \mathcal{V}$ le recouvrement ouvert par les ensembles $U \cap V$, $U \in \mathcal{U}$, $V \in \mathcal{V}$. On a $|\mathcal{U} \vee \mathcal{V}| \leqslant |\mathcal{U}|\,|\mathcal{V}|$.

Pour $n \geqslant 1$ et un recouvrement ouvert $\mathcal{U}$, définissons

$$\vee^n\mathcal{U} := \mathcal{U} \vee f^*\mathcal{U} \vee \ldots \vee (f^{n-1})^*\mathcal{U}.$$

La suite $|\vee^n \mathcal{U}|$ est sous-multiplicative:

Entropie topologique

Soient X un espace topologique compact et $f : X \to X$ une application continue.

Pour un recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de X, notons $|\mathcal{U}|$ le nombre minimal d'éléments d'un sous-recouvrement de $\mathcal{U}$. Notons $f^*\mathcal{U}$ le recouvrement par les ouverts $f^{-1}(U)$, $U \in \mathcal{U}$. Observons qu'on a $|f^*\mathcal{U}| \leqslant |\mathcal{U}|$.
Pour deux recouvrements $\mathcal{U}, \mathcal{V}$, notons $\mathcal{U} \vee \mathcal{V}$ le recouvrement ouvert par les ensembles $U \cap V$, $U \in \mathcal{U}$, $V \in \mathcal{V}$. On a $|\mathcal{U} \vee \mathcal{V}| \leqslant |\mathcal{U}|\,|\mathcal{V}|$.

Pour $n \geqslant 1$ et un recouvrement ouvert $\mathcal{U}$, définissons

$$\vee^n\mathcal{U} := \mathcal{U} \vee f^*\mathcal{U} \vee \ldots \vee (f^{n-1})^*\mathcal{U}.$$

La suite $|\vee^n \mathcal{U}|$ est sous-multiplicative:

$$|\vee^{m+n}\mathcal{U}| \leqslant |\vee^m \mathcal{U}|\,|\vee^n \mathcal{U}|.$$

Entropie topologique

Soient X un espace topologique compact et $f : X \to X$ une application continue.

Pour un recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de X, notons $|\mathcal{U}|$ le nombre minimal d'éléments d'un sous-recouvrement de $\mathcal{U}$. Notons $f^*\mathcal{U}$ le recouvrement par les ouverts $f^{-1}(U)$, $U \in \mathcal{U}$. Observons qu'on a $|f^*\mathcal{U}| \leqslant |\mathcal{U}|$.
Pour deux recouvrements $\mathcal{U}, \mathcal{V}$, notons $\mathcal{U} \vee \mathcal{V}$ le recouvrement ouvert par les ensembles $U \cap V$, $U \in \mathcal{U}$, $V \in \mathcal{V}$. On a $|\mathcal{U} \vee \mathcal{V}| \leqslant |\mathcal{U}|\,|\mathcal{V}|$.

Pour $n \geqslant 1$ et un recouvrement ouvert $\mathcal{U}$, définissons

$$\vee^n\mathcal{U} := \mathcal{U} \vee f^*\mathcal{U} \vee \ldots \vee (f^{n-1})^*\mathcal{U}.$$

La suite $|\vee^n \mathcal{U}|$ est sous-multiplicative:

$$|\vee^{m+n} \mathcal{U}| \leqslant |\vee^m \mathcal{U}|\,|\vee^n \mathcal{U}|.$$

Par conséquent, la limite suivante existe

$$h(f, \mathcal{U}) := \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log |\vee^n \mathcal{U}| = \inf_{n \geqslant 1} \frac{1}{n} \log |\vee^n \mathcal{U}|.$$

Définition: L'*entropie topologique* $h(f)$ de f est définie par

$$h(f) = \sup_{\mathcal{U}} h(f, \mathcal{U}) \in [0, +\infty].$$

Définition: L'*entropie topologique* $h(f)$ de f est définie par

$$h(f) = \sup_{\mathcal{U}} h(f, \mathcal{U}) \in [0, +\infty].$$

Voici quelques propriétés élémentaires de l'entropie topologique.

Définition: L'*entropie topologique* $h(f)$ de f est définie par

$$h(f) = \sup_{\mathcal{U}} h(f, \mathcal{U}) \in [0, +\infty].$$

Voici quelques propriétés élémentaires de l'entropie topologique.

- $h(f^k) = kh(f)$ for $k \geqslant 1$.

Définition: L'*entropie topologique* $h(f)$ de f est définie par

$$h(f) = \sup_{\mathcal{U}} h(f, \mathcal{U}) \in [0, +\infty].$$

Voici quelques propriétés élémentaires de l'entropie topologique.

- $h(f^k) = kh(f)$ for $k \geqslant 1$.
- $h(f^{-1}) = h(f)$ si f est un homéomorphisme.

Définition: L'*entropie topologique* $h(f)$ de f est définie par

$$h(f) = \sup_{\mathcal{U}} h(f, \mathcal{U}) \in [0, +\infty].$$

Voici quelques propriétés élémentaires de l'entropie topologique.

- $h(f^k) = kh(f)$ for $k \geqslant 1$.
- $h(f^{-1}) = h(f)$ si f est un homéomorphisme.
- L'entropie topologique est invariante par conjugaison topologique.

Définition: L'*entropie topologique* $h(f)$ de f est définie par

$$h(f) = \sup_{\mathcal{U}} h(f, \mathcal{U}) \in [0, +\infty].$$

Voici quelques propriétés élémentaires de l'entropie topologique.

- $h(f^k) = kh(f)$ for $k \geqslant 1$.
- $h(f^{-1}) = h(f)$ si f est un homéomorphisme.
- L'entropie topologique est invariante par conjugaison topologique. Plus généralement, si $g : Y \to Y$ est une autre application continue d'un espace compact dans lui-même et $h : X \to Y$ est une semi-conjugaison entre f et g, alors on a $h(g) \leqslant h(f)$.

Définitions alternatives

Soient (X, d) un espace métrique compact et $f : X \to X$ une application continue.

Définitions alternatives

Soient (X, d) un espace métrique compact et $f : X \to X$ une application continue.

Pour $n \geqslant 1$, définissons une distance d_n sur X par

$$d_n(x, y) = \max_{0 \leqslant j < n} d(f^j(x), f^j(y)).$$

Définitions alternatives

Soient (X, d) un espace métrique compact et $f : X \to X$ une application continue.

Pour $n \geqslant 1$, définissons une distance d_n sur X par

$$d_n(x, y) = \max_{0 \leqslant j < n} d(f^j(x), f^j(y)).$$

Pour $\varepsilon > 0$, $n \geqslant 1$, notons

Définitions alternatives

Soient (X, d) un espace métrique compact et $f : X \to X$ une application continue.

Pour $n \geqslant 1$, définissons une distance d_n sur X par

$$d_n(x, y) = \max_{0 \leqslant j < n} d(f^j(x), f^j(y)).$$

Pour $\varepsilon > 0$, $n \geqslant 1$, notons

- $r_n(\varepsilon)$ le nombre maximal de points de X dont les d_n-distances mutuelles sont $\geqslant \varepsilon$;

Définitions alternatives

Soient (X, d) un espace métrique compact et $f : X \to X$ une application continue.

Pour $n \geqslant 1$, définissons une distance d_n sur X par

$$d_n(x, y) = \max_{0 \leqslant j < n} d(f^j(x), f^j(y)).$$

Pour $\varepsilon > 0$, $n \geqslant 1$, notons

- $r_n(\varepsilon)$ le nombre maximal de points de X dont les d_n-distances mutuelles sont $\geqslant \varepsilon$;
- $s_n(\varepsilon)$ la cardinalité minimale d'un recouvrement de X par des d_n-boules ouvertes de rayon ε.

Définitions alternatives

Soient (X, d) un espace métrique compact et $f : X \to X$ une application continue.

Pour $n \geqslant 1$, définissons une distance d_n sur X par

$$d_n(x, y) = \max_{0 \leqslant j < n} d(f^j(x), f^j(y)).$$

Pour $\varepsilon > 0$, $n \geqslant 1$, notons

- $r_n(\varepsilon)$ le nombre maximal de points de X dont les d_n-distances mutuelles sont $\geqslant \varepsilon$;
- $s_n(\varepsilon)$ la cardinalité minimale d'un recouvrement de X par des d_n-boules ouvertes de rayon ε.

Pour $\varepsilon > 0$, $n \geqslant 1$, on a

$$r_n(2\varepsilon) \leqslant s_n(\varepsilon) \leqslant r_n(\varepsilon).$$

On a

$$h(f) = \lim_{\varepsilon \to 0} \liminf_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log r_n(\varepsilon)$$

On a

$$h(f) = \lim_{\varepsilon \to 0} \liminf_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log r_n(\varepsilon)$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log r_n(\varepsilon)$$

On a

$$
\begin{aligned}
h(f) &= \lim_{\varepsilon\to 0} \liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log r_n(\varepsilon) \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log r_n(\varepsilon) \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log s_n(\varepsilon)
\end{aligned}
$$

On a

$$
\begin{aligned}
h(f) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \liminf_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log r_n(\varepsilon) \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log r_n(\varepsilon) \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \liminf_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log s_n(\varepsilon) \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log s_n(\varepsilon).
\end{aligned}
$$

On a

$$h(f) = \lim_{\varepsilon \to 0} \liminf_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log r_n(\varepsilon)$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log r_n(\varepsilon)$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \liminf_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log s_n(\varepsilon)$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log s_n(\varepsilon).$$

Remarque: Fréquemment, les liminf et limsup sont égales et ne dépendent pas de ε dès que celui-ci est assez petit.

Exemples

- L'entropie topologique du décalage complet, unilatéral ou bilatéral, sur un alphabet fini $\mathcal{A}$, est égale à $\log(\#\mathcal{A})$.

Exemples

- L'entropie topologique du décalage complet, unilatéral ou bilatéral, sur un alphabet fini $\mathcal{A}$, est égale à $\log(\#\mathcal{A})$.
- Pour un sous-décalage de type fini transitif $(\Sigma_{\mathcal{B}}, \sigma)$, l'entropie topologique est égale à $\log \lambda$, où λ désigne la valeur propre dominante associée par le théorème de Perron-Frobenius à la matrice $A_{\mathcal{B}}$.

Exemples

- L'entropie topologique du décalage complet, unilatéral ou bilatéral, sur un alphabet fini $\mathcal{A}$, est égale à $\log(\#\mathcal{A})$.
- Pour un sous-décalage de type fini transitif $(\Sigma_{\mathcal{B}}, \sigma)$, l'entropie topologique est égale à $\log \lambda$, où λ désigne la valeur propre dominante associée par le théorème de Perron-Frobenius à la matrice $A_{\mathcal{B}}$.
- Pour une application rationnelle de degré d agissant sur la sphère de Riemann $\bar{\mathbb{C}}$, l'entropie topologique est égale à $\log d$.

Exemples

- L'entropie topologique du décalage complet, unilatéral ou bilatéral, sur un alphabet fini $\mathcal{A}$, est égale à $\log(\#\mathcal{A})$.
- Pour un sous-décalage de type fini transitif $(\Sigma_{\mathcal{B}}, \sigma)$, l'entropie topologique est égale à $\log \lambda$, où λ désigne la valeur propre dominante associée par le théorème de Perron-Frobenius à la matrice $A_{\mathcal{B}}$.
- Pour une application rationnelle de degré d agissant sur la sphère de Riemann $\bar{\mathbb{C}}$, l'entropie topologique est égale à $\log d$.
- Pour un difféomorphisme d'Anosov f de $\mathbb{T}^d$, l'entropie topologique est égale à $\log \Lambda$, où Λ désigne le rayon spectral de l'action de f sur l'homologie de $\mathbb{T}^d$.

Exemples

- L'entropie topologique du décalage complet, unilatéral ou bilatéral, sur un alphabet fini $\mathcal{A}$, est égale à $\log(\#\mathcal{A})$.
- Pour un sous-décalage de type fini transitif $(\Sigma_{\mathcal{B}}, \sigma)$, l'entropie topologique est égale à $\log \lambda$, où λ désigne la valeur propre dominante associée par le théorème de Perron-Frobenius à la matrice $A_{\mathcal{B}}$.
- Pour une application rationnelle de degré d agissant sur la sphère de Riemann $\bar{\mathbb{C}}$, l'entropie topologique est égale à $\log d$.
- Pour un difféomorphisme d'Anosov f de $\mathbb{T}^d$, l'entropie topologique est égale à $\log \Lambda$, où Λ désigne le rayon spectral de l'action de f sur l'homologie de $\mathbb{T}^d$.
- Pour un ensemble basique (K, f), l'entropie topologique est la même que celle d' un sous-décalage de type fini qui lui est associé par le choix d'une partition de Markov de K.