CONJUGAISON QUASI SYMÉTRIQUE DES HOMÉOMORPHISMES ANALYTIQUES DU CERCLE À DES ROTATIONS

M.R. HERMAN

Version très très préliminaire[1]

1. On désigne par $\mathcal{D}^{0,\omega}(\mathbb{T}^1)$ le monoïde

$$\left\{f \in \mathcal{D}^0(\mathbb{T}^1),\ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ est } \mathbb{R}\text{-analytique}\right\}$$

où

$$\mathcal{D}^0(\mathbb{T}^1) = \left\{f \in \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R}),\ f(x+1) = f(x)+1, \forall x \in \mathbb{R}\right\}.$$

Théorème 1. *Si $f \in \mathcal{D}^{0,\omega}(\mathbb{T}^1)$, et $\rho(f) = \alpha$ est un nombre de type constant, alors*

$$f = h \circ R_\alpha \circ h^{-1} \quad \textit{où} \quad h \in \mathcal{D}^{\mathrm{qs}}(\mathbb{T}^1)$$

i.e. h est un homéomorphisme de $\mathcal{D}^0(\mathbb{T}^1)$ quasi symétrique et $R_\alpha(x) = x + \alpha$.

2. Si $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, on désigne par $(p_n/q_n)_{n\geqslant 0}$ les réduites de α. On pose

$$\begin{aligned} \widehat{f}^{q_n} &= f^{q_n} - p_n, \\ I_n(x) &= [x, \widehat{f}^{q_n}(x)], \\ J_n(x) &= [x, \widehat{f}^{2q_n}(x)]. \end{aligned}$$

On rappelle que les intervalles

$$(1) \quad f^j(I_n(x)) \bmod 1 \text{ pour } 0 \leqslant j < q_{n+1}$$

sont d'intérieurs 2 à 2 disjoints, et

$$(2) \quad f^j(I_n(x)) \bmod 1 \text{ pour } 0 \leqslant j < 2q_{n+1}$$

est un recouvrement de $\mathbb{T}^1$ de multiplicité au plus 2.
(0) D'autre part si $p/q \in \mathbb{Q}$, $(p,q) = 1$, est réduite de α, $-p/q$ est réduite de $-\alpha$.

Date: 1987 ?

[1] Le présent document est la transcription de notes manuscrites d'Herman. Elle a été effectuée par Arnaud Chéritat, qui a signalées en rouge des corrections mineures et ajouté quelques notes.

3.

Proposition 1. *On suppose que $f \in \mathcal{D}^0(\mathbb{T}^1)$ vérifie:*

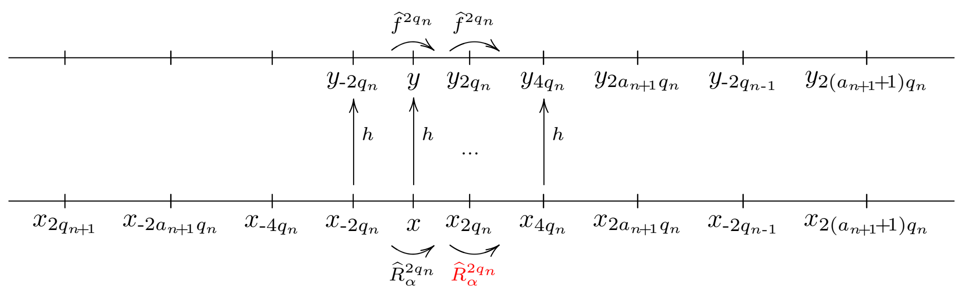
- $\rho(f) = \alpha$ *est un nombre de type constant ;*
- *Il existe $C_1 > 1$ tel que pour tout $n \geqslant 0$ et $y \in [0,1]$,*

$$\text{(4)} \qquad \frac{1}{C_1} \leqslant \frac{|J_n(y)|}{\left|\widehat{f}^{-2q_n}(J_n(y))\right|} \leqslant C_1;$$

alors $f = h \circ R_\alpha \circ h^{-1}$ où $h \in \mathcal{D}^{\mathrm{qs}}(\mathbb{T}^1)$ et $\widehat{f}^{q_n} = f^{q_n} - p_n$.

La démonstration est la même que celle de [1]. Il n'est pas difficile de prouver que (4) implique que $f = h \circ R_\alpha \circ h^{-1}$, $h \in \mathcal{D}^0(\mathbb{T}^1)$. On peut aussi dans le théorème 1 utiliser le théorème de J.C. Yoccoz si on préfère.

On a si n est pair (si n est impair on renverse l'orientation) l'ordre des points[2] :



On raisonne comme dans [1] en utilisant que (4) et $\sup a_{n+1} < +\infty$ impliquent que tous les rapports des longueurs des intervalles $(y_{2kq_n}, y_{2(k+1)q_n})$ dans la figure sont majorés et minorés. Preque tout ce qui suit est essentiellement fait par Świątek [2] à l'exception des § 8 et 9 (Świątek raisonne seulement sur les cycles périodiques quand $\rho(f) = p/q \in \mathbb{Q}$ et ne regarde pas le cas $\rho(f) = \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ ni (4) mais cela suit très simplement de ce qu'il fait).

4.

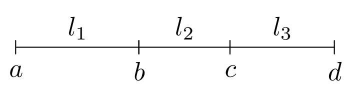
On désigne par $\mathcal{L} = \left\{(a,b,\dots,d) \in \mathbb{R}^4,\ a < b < c < d\right\}$. Si $l \in \mathcal{L}$, on pose

$$b(l) = \frac{b-a}{c-a} \Big/ \frac{d-b}{d-c}\,.$$

C'est le birapport des 4 points

$$(b,c,a,d)$$

(le birapport de (a,b,c,d) est égal à $\frac{c-a}{c-b} \Big/ \frac{d-a}{d-b}$).



Si $l_1 = b-a$, $l_2 = c-b$, $l_3 = d-c$ on a

$$b(l) = \frac{l_1}{l_1+l_2}\ \frac{l_3}{l_2+l_3}$$

d'où

$$\text{(5)} \qquad b(l) < 1.$$

Si $l_2 \leqslant l_1$, $l_2 \leqslant l_3$,

$$\text{(6)} \qquad b(l) = \frac{1}{1+\frac{l_2}{l_1}}\ \frac{1}{1+\frac{l_2}{l_3}} \geqslant \frac{1}{4}$$

[2] où $x \in \mathbb{R}$, $y = h(x)$, $x_k = \widehat{R}_\alpha^k(x)$ et $y_k = \widehat{f}_\alpha^k(y) = h(x_k)$

Si $0 < \delta \leqslant b(l)$, on a $b(l) \leqslant l_1/l_2$, $b(l) \leqslant l_3/l_2$, et donc

$$(7) \quad \frac{l_2}{l_1} \leqslant \delta^{-1}$$

$$(8) \quad \frac{l_3}{l_2} \geqslant \delta.$$

5. Si $l \in \mathcal{L}$ et $h \in \mathcal{D}^0(\mathbb{T}^1)$,

$$D(l,h) = \frac{b\big(h(l)\big)}{b(l)}.$$

où si $l = (a,b,c,d)$, $h(l) = (h(a),h(b),h(c),h(d))$. On a si $h,g \in \mathcal{D}^0(\mathbb{T}^1)$:

$$\mathrm{D}\left(l, h\circ g\right) = \mathrm{D}\left(g(l),h\right)\mathrm{D}\left(l,g\right)$$

$$(9) \quad \mathrm{D}(l,h^n) = \prod_{j=0}^{n-1} \mathrm{D}\left(h^j(l),h\right).$$

Si $h \in \mathcal{D}^1(\mathbb{T}^1)$ il existe $1 \leqslant C(h) < +\infty$ tel que pour tout $l \in \mathcal{L}$ on ait

$$C(h)^{-1} \leqslant \mathrm{D}(h,l) \leqslant C(h)$$

où

$$\big(C(h)\big)^{1/4} \leqslant \sup\left(\|Df\|_{C^0}, \|(Df)^{-1}\|_{C^0}\right)$$

convient par la formule de la moyenne.

6.

Proposition 2. *Si $f \in \mathcal{D}^{0,\omega}(\mathbb{T}^1)$ alors*

$$(10) \quad \sup_{l\in\mathcal{L}} \mathrm{D}(l,f) < +\infty.$$

Démonstration : Soit

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1 &= \big\{(a,b,c,+\infty),\ -\infty < a < b < c < +\infty\big\}\\ \mathcal{L}_2 &= \big\{(-\infty,b,c,d),\ -\infty < b < c < d < +\infty\big\}\end{aligned}$$

On définit si $l \in \mathcal{L}_1$

$$b(l) = \frac{b-a}{c-a}.$$

Il suffit de démontrer

$$(11) \quad \sup_{l\in\mathcal{L}_1} \mathrm{D}(l,f) < +\infty$$

pour avoir la proposition.

Si $l \in \mathcal{L}_1$

$$(12) \quad \mathrm{D}(l,f) = \frac{c-a}{f(c)-f(a)}\ \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Si $\delta > 0$ est fixé, par uniforme continuité de f^{-1}, on a

$$(13) \quad \sup_{\substack{l\in\mathcal{L}_1\\ c-a\geqslant\delta}} \mathrm{D}(l,f) < +\infty$$

(on majore $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ par $\|Df\|_{C^0}$).

Soient $0 \leqslant \check{c}_1 < \ldots < \check{c}_k < 1$ les points critiques de f sur $[0,1[$, $\varepsilon > 0$ et

$$U_{2\varepsilon} = \big\{x,\ |x-\check{c}_j| < 2\varepsilon,\ j = 1,\ldots,k\big\}.$$

(14) On suppose $\varepsilon > 0$ est assez petit pour que $U_{2\varepsilon}$ soit une union de k intervalles disjoints et on suppose que $\check{c}_{j+1} - \check{c}_j - 4\varepsilon > 2\varepsilon$, $j = 1, \ldots, k$ avec la convention $\check{c}_{k+1} = \check{c}_1 + 1$.

Si $c - a \geqslant \varepsilon$ on majore (12) en utilisant (13).

Si $c - a \leqslant \varepsilon$ et l'intervalle (a, c) n'est pas inclus dans $U_{2\varepsilon}$ on majore (12) par

$$\|Df\|_{C^0} \sup_{y \notin U_\varepsilon} \frac{1}{Df(y)}.$$

Si $c - a \leqslant \varepsilon$ et l'intervalle $(a, c) \subset U_{2\varepsilon}$, quitte à supposer $\varepsilon > 0$ assez petit, on peut composer à droite f par un difféomorphisme analytique h sur un voisinage de $\check{c}_j$ vérifiant $h(\check{c}_j) = \check{c}_j$ et se ramener à démontrer (11) pour g_s où

$$g_s(x) = x^n + s$$

avec $n \in \mathbb{N}^*$, n impair et $s \in \mathbb{R}$. Il suffit de montrer (11) pour $g = x^n$. On pose $b = a + l_1$, $c = a + l_1 + l_2$, $l_j > 0$. Si $a = 0$ on a

$$\mathrm{D}(l, g) \leqslant 1 \qquad l = (0, b, c, +\infty).$$

Si $a \neq 0$. On pose

$$\frac{l_1}{a} = x_1, \quad \frac{l_2}{a} = x_2,$$

$x_1 \cdot x_2 > 0$ et $l = (a, b, c, +\infty)$. On a

$$\mathrm{D}(l, g) = \frac{P(x_1 + 1)}{P(x_1 + x_2 + 1)}$$

où $P(x) = 1 + \cdots + x^{n-1}$. Puisque n est impair, on a $P(x) > 0$ (si $P(g) = 0$ alors $z^n = 1$, $z \neq 1$).

Si $x_1 > 0$, comme $x_2 > 0$ on a

$$\frac{P(x_1 + 1)}{P(x_1 + x_2 + 1)} < 1.$$

Si $x_1 < -A$, $A \gg 1$ comme $x_2 < 0$, $x_2 \mapsto P(x_1 + x_2 + 1)$ est décroissante. On a

$$\frac{P(x_1 + 1)}{P(x_1 + x_2 + 1)} \leqslant 1.$$

Si $-A < x_1 < 0$ on a

$$\frac{P(x_1 + 1)}{P(x_1 + x_2 + 1)} \leqslant \sup_{|x| < A} P(x + 1) / \inf_{x \in \mathbb{R}} P(x) < +\infty.$$

$\blacksquare$

7. On a le théorème de G. Świątek

Théorème 2. *On se donne $p \geqslant 2$ un entier, $f \in \mathcal{D}^{0,\omega}(\mathbb{T}^1)$, alors il existe $C(f, p) > 1$ tel que si $(l_i)_{0 \leqslant i \leqslant j-1}$ vérifie : $l_i \in \mathcal{L}$, $l_i = (a_i, b_i, c_i, d_i)$, chaque $x \in \mathbb{T}^1$ appartient à au plus p intervalles (a_i, d_i) mod 1 ; alors*

$$\prod_{i=0}^{j-1} \mathrm{D}(l_i, f) \leqslant C(f, p).$$

Le point important c'est que $C(f, p)$ ne dépend pas de $(l_i)_{0 \leqslant i \leqslant j-1}$ ni de j.

Démonstration : voir pages 6–7.

8.

Corollaire. *Si $f \in \mathcal{D}^{0,\omega}(\mathbb{T}^1)$, $\rho(f) = \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ il existe $C_1(f) \geqslant 1$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, si*

$$l(x) = \begin{cases} \big(\widehat{f}^{-q_n}(x), x, \widehat{f}^{q_n}(x), \widehat{f}^{2q_n}(x)\big) & n \text{ pair} \\ \big(\widehat{f}^{2q_n}(x), \widehat{f}^{q_n}(x), x, \widehat{f}^{-q_n}(x)\big) & n \text{ impair} \end{cases}$$

alors pour tout $0 \leqslant j < pq_{n+1}$ et $p \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\text{(15)} \qquad \mathrm{D}(l(x), f^j) \leqslant C_1(f)^p.$$

Démonstration : Si $p = 1$ cela résulte de (1) de (9) et du théorème précédent. Le cas $p = 1$ avec 5 implique le corollaire. ■

9. Démonstration du théorème 1.

Il suffit de démontrer (4). Soit z tel que $|\widehat{f}^{q_n}(z) - z| = \min_{x\in\mathbb{R}} |\widehat{f}^{q_n(x)} - x|$. On a

$$b\big(l(z)\big) = \mathrm{D}\left(f^{-j}\big(l(z)\big), f^j\right) b\Big(f^{-j}\big(l(z)\big)\Big).$$

Par (15) et (6), si $0 \leqslant j < pq_{n+1}$, $p \in \mathbb{N}^*$

$$\text{(16)} \qquad \frac{1}{4} \leqslant b\big(l(z)\big) \leqslant C_1(f)^p \, b\big(f^{-j}(l(z))\big).$$

Pour $j \in \mathbb{N}$, on pose

$$z_{-j} = f^{-j}(z) \bmod 1.$$

Si $k \in \mathbb{Z}$ et j est fixé on convient que[3]

$$z_{-j+kq_n} = \widehat{f}^{kq_n}(z_{-j}),$$

avec la convention $z_0 = z$ et des abus évidents de notation.

On fixe

$$p = 7 \text{ et } \delta_0 = \frac{1}{4\big(C_1(f)\big)^7}.$$

Quitte à renverser l'orientation on peut supposer n pair. Les points z_{-j+iq_n} sont ordonnés dans $\mathbb{R}$ pour $i \geqslant 0$, $i \in \mathbb{N}$, comme suit :

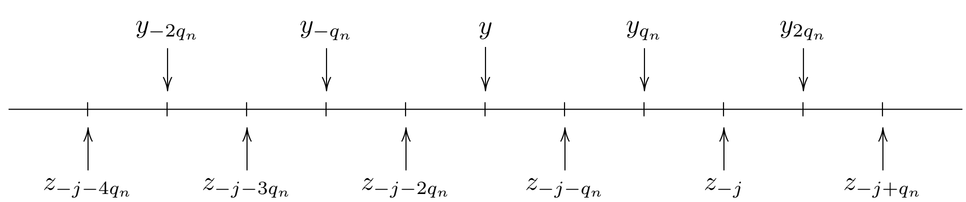
$$z_{-j-iq_n} < z_{-j-(i-1)q_n} < \ldots < z_{-j} < z_{-j+q_n} < z_{-j+2q_n}.$$

Pour $0 \leqslant j < 7q_{n+1}$ on a en utilisant (16), (7) et (8)

$$\text{(17)} \qquad \frac{-z_{-j+q_n} + z_{-j+2q_n}}{z_{-j+q_n} - z_{-j}} \geqslant \delta_0 \,,$$

$$\text{(18)} \qquad \frac{-z_{-j} + z_{-j+q_n}}{z_{-j} - z_{-j-q_n}} \leqslant \delta_0^{-1}.$$

On considère les points z_{-j+iq_n}, $i = -4, \ldots, 1$ et $y \in (z_{-j-2q_n}, z_{-j-q_n})$.



---

[3] Dans l'original, il y a une distinction entre $Z_{\ldots}$ et $z_{\ldots}$

Si $0 < j < 2q_{n+1}$ et $y_{kq_n} = \widehat{f}^k(y)$ alors les points sont ordonnés comme dans la figure ci-dessus. Soient $a_1 = z_{-j-3q_n} - z_{-j-4q_n}, \dots, a_5 = z_{-j+q_n} - z_{-j}$. Par (17) et (18) on a

$$\delta_0 \leqslant \frac{a_{i+1}}{a_i} \leqslant \delta_0^{-1}, \quad i = 1, \dots, 4.$$

On en déduit que

$$\frac{z_{-j} - z_{-j-q_n}}{z_{-j-q_n} - z_{-j-4q_n}} \leqslant \frac{-y + y_{2q_n}}{y - y_{-2q_n}} \leqslant \frac{z_{-j+q_n} - z_{-j-2q_n}}{z_{-j-2q_n} - z_{-j-3q_n}}$$

et donc

$$(19) \quad C(\delta_0)^{-1} \leqslant \frac{-y + y_{2q_n}}{y - y_{-2q_n}} \leqslant C(\delta_0)$$

où $C(\delta_0) > 1$ est une constante ne dépendant que de δ_0.

Par (2) et (0) pour tout $y \in \mathbb{T}^1$, il existe $0 \leqslant j < 2q_{n+1}$ tel que

$$y \in (z_{-j-2q_n}, z_{-j-q_n}) \bmod 1.$$

L'inégalité (19) implique (4) et suppose seulement que $\rho(f) = \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Le théorème 1 suit de la proposition 1 quand α est un nombre de type constant.

Remarques

1. L'inégalité (4) est vraie si $f \in \mathcal{D}^{0,\omega}(\mathbb{T}^1)$, $\rho(f) = \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. (4) implique le résultat de J. C. Yoccoz [3] i.e. le théorème de Denjoy.

2. L'inégalité (4) avec l'inégalité de J. C. Yoccoz si $f \in \mathcal{D}^{0,\omega}(\mathbb{T}^1)$, $\rho(f) = \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

$$C(\delta_0) \geqslant \frac{\left|f^{2q_n}(I_n(y))\right|}{\left|I_n(y)\right|} \geqslant C_2(f)\left(Df^{4q_n}(y)\right)^{1/2}$$

où $C_2(f)$ est une constante > 0 indépendante de n. Ceci implique que l'application $\overline{f} : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{T}^1$ induite sur $\mathbb{T}^1$ par f est conservative pour la mesure de Haar m : si B est m-mesurable alors les ensembles $\left(\overline{f}^{-j}(B)\right)_{j \in \mathbb{N}}$ ne sont pas deux à deux disjoints si $m(B) > 0$.

Démonstration du théorème 2.

On suppose $\varepsilon > 0$ assez petit vérifiant (14) et sur $U_{2\varepsilon} - \{c_1, \dots, c_k\}$, $S_f < 0$ ($\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{Df}}$ est strictement convexe sur $U_{2\varepsilon} - \{c_1, \dots, c_k\}$). On pose $J = \{0, \dots, j-1\}$. Soit

$$J_1 = \{i \in J,\ d_i - a_i \geqslant \varepsilon\}.$$

On a

$$\# J_1 \leqslant \frac{p}{\varepsilon}$$

et par la proposition 2

$$\prod_{i \in J_1} D(l_i, f) \leqslant K_1(f, p)$$

où K_1, K_2, K_3 sont des constantes ne dépendant que de f et p. Soit

$$J_2 = \{i \in J - J_1,\ (a_i, d_i) \bmod 1 \text{ contient un point critique } \check{c}_{k_1} \text{ de } f \text{ sur } [0,1[\}.$$

On a

$$\# J_2 \leqslant pk$$

où

$$k = \#\{\text{points critiques de } f \text{ sur } [0,1[\}.$$

La proposition 2 implique

$$\prod_{i \in J_2} D(l_i, f) \leqslant K_2(f, p).$$

Soit
$$J_3 = \{i \in J - J_1 - J_2,\ (a_i, d_i) \text{ n'est pas inclus dans } U_{2\varepsilon}\}.$$
On a
$$\log \prod_{i \in J_3} D(l_i, f) \leqslant \sum_{i \in J_3} 2 \operatorname{var}_{[a_i,d_i]}(\log Df) \leqslant 2p \operatorname*{var}_{[0,1]-U_\varepsilon} \log(Df) < \log\big(K_3(f,p)\big).$$
Soit
$$J_4 = J - J_1 - J_2 - J_3.$$
Si $i \in J_4$, $(a_i, b_i) \subset U_{2\varepsilon}$. Par le lemme suivant,
$$\prod_{i \in J_4} D(l_i, f) \leqslant 1$$
et on peut prendre $C(f,p) = K_1K_2K_3$ où $C(f,p)$ est indépendant des l_i et de l'entier j. ∎

Lemme. *Soit $f : [a,d] \to \mathbb{R}$ $\quad C^3$, $Df > 0$ et vérifiant*
$$S(f) = \frac{D^3 f}{Df} - \frac{3}{2}\left(\frac{D^2 f}{Df}\right)^2 < 0$$
(et donc $\frac{1}{\sqrt{Df}}$ est strictement convexe). Si $l = a < b < c < d$ on a
$$D(l, f) \leqslant 1.$$

<u>Démonstration</u> : En composant f à gauche et droite par des applications affines on peut supposer que
$$\begin{array}{cc} a = 0 & d = 1 \\ f(0) = 0 & f(1) = 1. \end{array}$$
Soit
$$\phi_\lambda(x) = \frac{x}{\lambda x + 1 - \lambda}, \quad 1 - \frac{1}{\lambda} \notin [0,1].$$
On a $\phi_\lambda(0) = 0$, $\phi_\lambda(1) = 1$, ϕ_λ préserve les birapports et si $0 < x < 1$,
$$\begin{array}{ccc} \phi_\lambda(x) \longrightarrow 0 & \text{si} & \lambda \longrightarrow -\infty, \\ \phi_\lambda^{-1}(x) \longrightarrow 1 & \text{si} & \lambda \longrightarrow -\infty. \end{array}$$

En considérant
$$\phi_\lambda^{\pm 1} \circ f = f_\lambda$$
on a
$$D(l, \phi_\lambda^{\pm 1} \circ f) = D(l, f).$$
On peut supposer que $f = f_\lambda$ vérifie
$$\begin{aligned} &f(0) = 0 < f(b) = b < c < f(1) = 1, \\ &Sf < 0. \end{aligned}$$
Puisque $\frac{1}{\sqrt{Df}}$ est strictement convexe, f n'a pas d'autres points fixes que 0, b et 1. On veut montrer que $f(c) > c$. Si on avait $f(c) < c$ on aurait $f(x) < x$ sur $]b,1[$ et $f(x) > x$ sur $]0,b[$ (si on avait $f(x) < x$ sur $]0,b[$ par le théorème de Rolle, il existerait $0 < y_1 < b < y_2 < 1$ tels que l'on ait $Df(y_1) = Df(b) = Df(y_2)$). On a donc $Df(b) \leqslant 1$, $Df(0) \geqslant 1$ et $Df(1) \geqslant 1$. Ceci contredit
$$Df(b) > \min\big(Df(0), Df(1)\big).$$
∎

References

[1] M.R. Herman. *Conjugaison quasi symétrique des difféomorphismes du cercle à des rotations et applications aux disques singuliers de Siegel*. Manuscrit.[4]

[2] G. Świątek. *Rational rotation numbers for maps of the circle*. Preprint, Univ. Varsovie.[5]

[3] J.C. Yoccoz. *Il n'y a pas de contre-exemple de Denjoy analytique.* CRAS t. 298 (1984), 141–144.

---

[4] 1986 ?

[5] Paru : Comm. Math. Phys., 119 (1988) 109–128.