TRANSITIVITÉ D'UN CHAMP DE VECTEURS SUR $\mathbb{C}^3$

M. R. HERMAN

[1]

Sur $\mathbb{C}^3$ on considère les champs de vecteurs

$$X : z = (z_1, z_2, z_3) \mapsto (\varphi(z_2, z_3), 2\pi i z_2, -2\pi i\alpha z_3)$$

où $\alpha \in \mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R}, x > 0\}$ et φ est une fonction entière. X définit un flot pour $t \in \mathbb{C}$ (i.e. une action de $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}$-analytique) donné par la formule

$$F_t(z) = (z_1 + \int_0^t \varphi(e^{2\pi i s} z_2, e^{-2\pi i\alpha s} z_3) ds, e^{2\pi i t} z_2, e^{-2\pi i\alpha t} z_3).$$

On a l'intégrale première $|z_2|/|z_3|$ pour F_t.

Proposition. *Il existe $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, φ une fonction entière, $G \subset \mathbb{R}_+^*$ un G_δ-dense tels que si $\mu \in G$ alors $(F_t)_{t\in\mathbb{R}}$, agissant sur $\mathbb{C} \times \{|z_2| = \mu, |z_3| = 1\}$ a une orbite dense ($\Longrightarrow$ $(F_t)_{t\in\mathbb{C}}$, agissant sur $\{(z_1, z_2, z_3), |z_2|/|z_3| = \mu\}$ a une orbite dense).*

Idée de la démonstration

A) On fixe $\mu > 0$ et on pose $T_\mu = \{|z_2| = \mu, |z_3| = 1\}$. Par catégorie de Baire, on construit G_μ^1 un G_δ-dense de fonctions entières sur $\mathbb{C}^2$ avec la topologie compacte ouverte, G_μ^2 un G_δ-dense de $\mathbb{R}_+^*$ tels que si $\varphi \in G_\mu^1$, $\alpha \in G_\mu^2$, le flot $(F_t)_{t\in\mathbb{R}}$ agissant sur $\mathbb{C} \times T_\mu$ a une orbite dense (F est associée à $(\varphi(z_2, z_3), 2\pi i z_2, -2\pi i\alpha)$). On démontre cette partie A) en utilisant la catégorie de Baire par la même méthode que dans mon article avec Fathi, Astérisque vol. 49.

B) Soit $(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+^*$ un ensemble dénombrable dense $G^1 = \cap_{i\in\mathbb{N}} G_{\mu_i}^1$, $G^2 = \cap_{i\in\mathbb{N}} G_{\mu_i}^2$ et $\varphi \in G^1$, $\alpha \in G^2$. Soit

$$G_{\mu,t}(z) = (z + \int_0^t \varphi(e^{2\pi i s} z_2 \mu, e^{-2\pi i\alpha s} z_3) ds, e^{2\pi i t} z_2, e^{-2\pi i\alpha t} z_3).$$

[1] Ce document, extrait des archives de Michel Herman, a été préparé par R. Krikorian. Le titre a été rajouté par le rédacteur.

G_μ laisse invariant $B = \mathbb{C} \times T_1$. L'application

$$\mu \mapsto (t \in [-A, A] \mapsto G_{\mu,t} \in Diff(\mathbb{C} \times T_1))$$

est continue pour tout $A \in \mathbb{R}$: en effet $(t \mapsto G_{\mu,t} \in Homo(\mathbb{R}, Diff(\mathbb{C}\times T_1)) \subset C^0(\mathbb{R} \times B, B)$ et on met la topologie induite par la topologie compacte ouverte sur $C^0(\mathbb{R} \times B, B)$ et $Homo$ désigne les homomorphismes de groupe continus ($B = \mathbb{C} \times T_1$).

Soient

$V = \{H_t \in Homo(\mathbb{R}, Homeo(B)), (H_t)_{t\in\mathbb{R}}$ a une orbite dense agissant sur $B\}$,

$(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une base d'ouverts de B avec $\bar{U}_i$ compact dans B et

$$W_{i,j} = \{H_t, \exists t_0, H_{t_0}(U_i) \cap U_j \neq \emptyset\}.$$

On a $V := \cap_{i,j} W_{i,j}$ est un G_δ et donc

$$G = \{\mu, (G_{\mu,t})_{t\in\mathbb{R}} \text{ a une orbite dense dans } B\}$$

est un G_δ. Comme $G \supset (\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$, G est un G_δ dense.

$\square$

Conséquence

Soit α, φ, $\mu \in G$ donnés par la proposition, z_2 et z_3 tels que $|z_2|/|z_3| = \mu$ et $(F_t(z_1, z_2, z_3))_{t\in\mathbb{R}}$ est dense dans $\mathbb{C}\times T_\mu$ alors $(F_t(z_1, z_2, z_3))_{t\in\mathbb{C}}$ est dense dans $\{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3, |z_2|/|z_3| = \mu\}$. Le flot $(F_t)_{t\in\mathbb{C}}$ n'est *pas complètement intégrable* ($|z_2|/|z_3|$ est la seule intégrale première).

Remarque

On peut trouver $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ et $\varphi \in C^\omega(\mathbb{T}^2, \mathbb{R})$ qui s'étend sur $\mathbb{C}/\mathbb{Z} \times \mathbb{C}/\mathbb{Z} = \mathbb{T}^2 \oplus i\mathbb{R}^2$ en une fonction entière tel que le flot associé au champ de vecteurs $(\varphi, 1, \alpha)$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{T}^2$

$$F_t(u_1, \theta_1, \theta_2) = (u_1 + \int_0^t \varphi(\theta_1 + s, \theta_2 + \alpha s)ds, \theta_1 + t, \theta_2 + \alpha t)$$

a une orbite dense sur $\mathbb{R}\times\mathbb{T}^2$. Le flot (F_t) s'étend sur $\mathbb{C}\times\mathbb{C}/\mathbb{Z}\times\mathbb{C}/\mathbb{Z}$ en une action de $\mathbb{C}$. Le flot $(F_t)_{t\in\mathbb{R}}$ agissant sur $\mathbb{R} \times \mathbb{T}^2$ n'a pas d'intégrale première.