Équations différentielles et systèmes dynamiques

M. Jean-Christophe Yoccoz, membre de l'Institut
(Académie des Sciences), professeur

Cours : cocycles uniformément hyperboliques

1. Le cours a présenté des résultats obtenus en collaboration avec A. Avila et J. Bochi.

Soient X un espace topologique, f un homéomorphisme de X, et $p: E \to X$ un fibré vectoriel de base X. Un **cocycle linéaire** au-dessus de f est un isomorphisme F de E vérifiant $f \circ p = p \circ F$. Un tel cocycle est **uniformément hyperbolique** s'il existe $0 < \lambda < 1, c > 0$ et une décomposition F-invariante

$E = E^s \oplus E^u$ vérifiant

$$\|F^n(v_s)\| \le c\lambda^n \|v_s\| \text{ pour } n \ge 0,\ v_s \in E^s,$$
$$\|F^{-n}(v_u)\| \le c\lambda^n \|v_u\| \text{ pour } n \ge 0,\ v_u \in E^u.$$

On va considérer la situation spécifique suivante : X est un sous-décalage de type fini Σ sur un alphabet fini $\mathcal{A}$, f est le décalage $\sigma : \Sigma \to \Sigma$, E est le produit $\Sigma \times \mathbf{R}^2$, et F est déterminé par une application $A : \Sigma \to SL(2,\mathbf{R})$ qui ne dépend que de la lettre en position zéro dans un élément de Σ. Le cocycle F est donc déterminé par une famille $(A_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}} \in (SL(2,\mathbf{R}))^{\mathcal{A}}$ via la formule

$$F^n(x,v) = (\sigma^n(x), A^n(x)v),$$

avec
$$A^n(x) = A_{x_{n-1}} \dots A_{x_0} \quad \text{si } n \ge 0,$$
$$= A^{-1}_{x_n} \dots A^{-1}_{x_{-1}} \quad \text{si } n < 0.$$

Le sous-décalage Σ étant fixé, l'espace des paramètres est donc $(SL(2,\mathbf{R}))^{\mathcal{A}}$. Les cocycles uniformément hyperboliques correspondent à une partie ouverte $\mathcal{H}$ qu'on se propose d'étudier.

2. Un critère classique d'uniforme hyperbolicité est basé sur l'existence d'un champ de cônes vérifiant certaines propriétés. Dans la situation considérée, nous avons découvert un critère alternatif, d'emploi plus simple, basé sur la notion de multicône. Nous appelons multicône une partie ouverte de $\mathbf{P}^1 = \mathbf{P}^1(R)$, non vide et distincte de $\mathbf{P}^1$, qui a un nombre fini de composantes connexes. Le critère est plus simple à énoncer lorsque Σ est un décalage complet. Dans ce cas, le cocycle associé à $(A_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ est uniformément hyperbolique si et seulement s'il existe un multicône M tel que $A_\alpha \bar{M}$ est contenu dans M pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$.

Dans le cas général d'un décalage de type fini, la condition est qu'il existe des multicônes $M_\alpha, \alpha \in \mathcal{A}$ tels que $A_\beta \bar{M}_\alpha \subset M_\beta$ pour chaque transition admissible $\alpha \to \beta$.

Pour voir que ces conditions impliquent l'uniforme hyperbolicité, on fait appel à un autre critère d'uniforme hyperbolicité (valable pour les cocycles à valeurs dans $SL(2, \mathbf{R})$ sur une base compacte) : il faut et il suffit que la norme des produits $A^n(x)$ croisse de façon uniformément exponentielle. Cette croissance est obtenue en munissant les multicônes de leur métrique de Hilbert.

Supposons inversement que le cocycle défini par $(A_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ soit uniformément hyperbolique. Pour $x \in \Sigma$, notons $e^s(x)$, $e^u(x)$ les directions stables et instables (considérées comme des points de $\mathbf{P}^1$).

Lorsque Σ est un décalage complet, posons $K^s = e^s(\Sigma)$, $K^u = e^u(\Sigma)$. Appelons **noyau instable** (resp. **stable**) la partie $\mathcal{U}$ (resp. $\mathcal{S}$) de $\mathbf{P}^1$ dont le complémentaire est l'union des composantes connexes de $\mathbf{P}^1 - K^u$ qui rencontrent K^s (resp. des composantes connexes de $\mathbf{P}^1 - K^s$ qui rencontrent K^u). Alors $\mathcal{S}$ et $\mathcal{U}$ sont des parties compactes non vides et disjointes de $\mathbf{P}^1$ qui n'ont qu'un nombre fini de composantes connexes. De plus, les composantes connexes de $\mathcal{U}$ et $\mathcal{S}$ sont alternées pour l'ordre cyclique de $\mathbf{P}^1$ et on a $A_\alpha\mathcal{U} \subset \mathcal{U}, A_\alpha^{-1}\mathcal{S} \subset \mathcal{S}$ pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$. Le multicône M est alors un épaississement approprié de $\mathcal{U}$ (ne rencontrant pas $\mathcal{S}$).

Lorsque Σ est un décalage de type fini général, on doit définir, pour chaque $\alpha \in \mathcal{A}$

$$K_\alpha^s = e^s(\{x \in \Sigma, x_0 = \alpha\}),$$

$$K_\alpha^u = e^u(\{x \in \Sigma, x_{-1} = \alpha\}).$$

Le noyau instable (resp. stable) $\mathcal{U}_\alpha$ (resp. $\mathcal{S}_\alpha$) est alors le complémentaire de l'union des composantes connexes de $\mathbf{P}^1 - K_\alpha^u$ qui rencontrent $A_\alpha K_\alpha^s$ (resp. des composantes connexes de $\mathbf{P}^1 - K_\alpha^s$ qui rencontrent $A_\alpha^{-1}K_\alpha^u$). Les parties $\mathcal{U}_\alpha$, $\mathcal{S}_\alpha$ sont compactes non vides et n'ont qu'un nombre fini de composantes connexes. Les parties $\mathcal{U}_\alpha$ et $\mathcal{A}_\alpha\mathcal{S}_\alpha$ sont disjointes et leurs composantes connexes sont alternées. On a $A_\beta\mathcal{U}_\alpha \subset \mathcal{U}_\beta$, $A_\alpha^{-1}\mathcal{S}_\beta \subset \mathcal{S}_\alpha$ pour chaque transition admissible $\alpha \to \beta$. Le multicône M_α est un épaississement approprié de $\mathcal{U}_\alpha$.

On notera que les cônes stables et instables dépendent continûment des paramètres. En particulier, le nombre de composantes connexes, et la façon dont elles sont envoyées les unes dans les autres par les A_α, restent les mêmes dans une composante connexe du lieu d'hyperbolicité $\mathcal{H}$.

3. On suppose dans cette section que Σ est un décalage complet sur $N \geq 2$ symboles. Une composante connexe de $\mathcal{H}$ est dite principale s'il existe $(\varepsilon_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}} \in \{-1,+1\}^{\mathcal{A}}$ tel que $(\varepsilon_\alpha \mathcal{A})_{\alpha\in\mathcal{A}}$ appartienne à cette composante pour toute matrice A telle que $TrA > 2$. Il y a 2^N composantes principales ; leur union est notée $\mathcal{H}_0$.

On montre aisément qu'un N-uplet hyperbolique $(A_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ appartient à $\mathcal{H}_0$ si et seulement si le cône instable $\mathcal{U}$ est connexe. D'autre part, si un N-uplet $(A_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ appartient à la frontière $\partial\mathcal{H}_0$, alors soit l'une des matrices A_α est parabolique, soit il existe des indices distincts α, β tels que $u_{A_\alpha} = s_{A_\beta}$. On a désigné par u_A (resp. s_A) la direction stable (resp. instable) d'une matrice hyperbolique A ; lorsque A est parabolique mais distincte de $\pm\, id$, on notera $u_A = s_A$ l'unique direction invariante.

4. Nous décrivons dans cette section le lieu d'hyperbolicité $\mathcal{H}$ lorsque Σ est le décalage complet sur 2 symboles.

Considérons la partie ouverte H_{id} de $(SL(2,\mathbf{R}))^2$ formée des matrices (A, B) telles que $|Tr\,A| > 2$, $|Tr\,B| > 2$, $|Tr\,AB| > 2$, $TrA\,TrB\,TrAB < 0$. Notons H_{id}^+ la partie de H_{id} formée des matrices telles que $TrA > 2$, $TrB > 2$, $TrAB < -2$.

On montre que H_{id} est contenu dans $\mathcal{H} - \mathcal{H}_0$. En fait, H_{id}^+ est l'union de deux composantes connexes de $\mathcal{H}$ qui se déduisent l'une de l'autre par une conjugaison renversant l'orientation de $\mathbf{P}^1$ et H_{id} est donc union de huit composantes de $\mathcal{H}$. Les éléments de H_{id} sont exactement les paires $(A,B) \in \mathcal{H}$ telles que le noyau instable $\mathcal{U}$ a deux composantes connexes.

Pour décrire toutes les composantes connexes de $\mathcal{H}$, on introduit les difféomorphismes de $(SL(2,\mathbf{R}))^2$

$$F_+(A, B) = (A, AB),$$

$$F_-(A, B) = (BA, B),$$

et on note $\mathcal{M}$ le monoïde (libre) engendré par F_+, F_-. Pour $F \in \mathcal{M}$, on pose $H_F = F^{-1}(H_{id})$. Chaque H_F a donc 8 composantes connexes.

Théorème – *Les composantes de $\mathcal{H}$ sont exactement les composantes de $\mathcal{H}_0$ et les composantes des H_F, F décrivant $\mathcal{M}$. Deux composantes connexes distinctes sont d'adhérences disjointes. De plus, une partie compacte de $(SL(2,\mathbf{R}))^2$ ne rencontre qu'un nombre fini de composantes connexes.*

On désigne par $\mathcal{E}$ l'ensemble des paramètres $(A_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ tels qu'il existe un point périodique x de Σ (de période n) telle que la matrice $A^n(x)$ associée soit elliptique. C'est une partie ouverte de l'espace des paramètres, disjointe de $\mathcal{H}$.

Pour un sous-décalage de type fini général, Avila a montré que $\mathcal{E}$ est dense dans le complémentaire de $\mathcal{H}$. Pour le décalage complet sur deux symboles, on a un résultat plus précis.

Théorème – On a $\partial\mathcal{E} = \partial\mathcal{H} = (\mathcal{H} \cup \mathcal{E})^c$.

Indiquons quel est le lemme principal dans la démonstration des théorèmes précédents. On dit qu'une paire (A, B) est tordue si A et B ne sont pas elliptiques et (A, B) n'appartient pas à $\bar{\mathcal{H}}_0$.

Lemme – *Si (A, B) est tordue, alors une et une seule des quatre propriétés suivantes est satisfaite :*

i) AB est elliptique ;

ii) $(A,B) \in \bar{H}_{id}$;

iii) (A, AB) est tordue ;

iv) (BA, B) est tordue.

Ceci étant, on veut montrer que $(SL(2, \mathbf{R}))^2$ est l'union disjointe de $\bar{\mathcal{H}}_0$, $\mathcal{E}$ et des $\bar{H}_F$, $F \in \mathcal{M}$. On prend donc une paire (A, B) qui n'appartient pas à $\bar{\mathcal{H}}_0 \cup \mathcal{E}$ et on applique le lemme. Le cas i) est impossible par hypothèse. Si on se trouve dans les cas iii) ou iv) on applique à nouveau le lemme à la paire obtenue. Il s'agit de voir qu'on ne peut indéfiniment éviter le cas ii), ce qui résulte de l'étude de la dynamique sur les triplets $(tr\,A, tr\,B, tr\,AB)$ au cours de ce processus.

5. On dispose d'une description explicite des multicônes correspondant aux composantes non principales de $\mathcal{H}$ pour le décalage complet sur 2 symboles.

Notons $\mathcal{M}^*$ le monoïde opposé de $\mathcal{M}$; pour $F \in \mathcal{M}^*$, posons $j(F) = p/q$, où q désigne la longueur du mot $F(AB)$ et p le nombre d'occurences de B dans ce mot. L'application j est une bijection de $\mathcal{M}^*$ sur $\mathbf{Q} \cap (0,1)$.

Fixons $p/q \in \mathbf{Q} \cap (0,1)$. Posons $I_A = [0,\ 1 - p/q)$, $I_B = [1 - p/q,\ 1)$, et notons $\theta : [0,1] \to \{A, B\}$ l'application qui vaut A sur I_A et B sur I_B.

Notons $R_{p/q}$ l'application $x \mapsto x + p/q \mod 1$. Pour $x \in [0,1)$, posons $\Theta(x) = (\theta(R^i_{p/q}x))_{0 \le i < q}$. L'image $\Theta([0,1)) =: \mathcal{O}(p/q)$ est un ensemble de q mots de longueur q qui se déduisent les uns des autres par permutation cyclique.

Soit $[p_0/q_0, p_1/q_1]$ l'intervalle de Farey dont p/q est le centre. On munit l'union disjointe $\mathcal{O} := \mathcal{O}(p/q) \sqcup \mathcal{O}(p_0/q_0) \sqcup \mathcal{O}(p_1/q_1)$ de l'ordre cyclique suivant (où Θ_0, Θ_1 sont définis à partir de p_0/q_0, p_1/q_1 comme l'a été Θ à partir de p/q) : on commence par $\Theta_0(0)$, $\Theta(0)$, $\Theta_1(0)$ puis on rencontre alternativement, par ordre lexicographique croissant, les mots $\Theta(R^i_{p/q}(0))$ et $\Theta_1(R^i_{p_1/q_1}(0))$, $0 < i < q_1$, puis le mot $\Theta(R^{q_1}_{p/q}(0)) = \Theta(1 - \frac{1}{q})$, et enfin alternativement, par ordre lexicographique décroissant, les mots $\Theta_0(R^{-j}_{p_0/q_0}(0))$ et $\Theta(R^{-j}_{p/q}(0))$, $0 < j < q_0$.

Si (A, B) appartient à une composante connexe de $\mathcal{H}$ associée à p/q, les cônes stable et instable ont chacun q composantes connexes, et les $2q$ composantes connexes du complémentaire de $\mathcal{S} \sqcup \mathcal{U}$ sont naturellement paramétrées par $\mathcal{O}$: pour $C \in \mathcal{O}$, il existe une composante de $(\mathcal{S} \sqcup \mathcal{U})^c$ dont les extrémités sont s_C et u_C.

6. On suppose dans cette section que $\sum$ est un décalage complet sur $N \geq 2$ symboles. On a remarqué plus haut que le nombre de composantes de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{U}$, ainsi que la dynamique induite par les A_α sur les composantes de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{U}$, restent invariants par déformation donc constants dans chaque composante connexe de $\mathcal{H}$.

Pour formaliser ceci, on introduit la notion de multicône combinatoire : un ensemble fini $M = M_u \sqcup M_s$ muni d'un ordre cyclique tel que M_u et M_s soient de même cardinal et alternés. On appelle rang de M le cardinal $q = \#M_s = \#M_u$. Les éléments de M_s (reps. M_u) correspondent aux composantes de $\mathcal{S}$ (resp. $\mathcal{U}$).

On appelle **correspondance monotone** une partie C de $M \times M$ telle que

i) $C \subset (M_s \times M_s) \cup (M_u \times M_u)$;

ii) $C \cap (M_s \times M_s)$ est le graphe $\{(C_s(x_s),\ x_s),\ x_s \in C_s\}$ d'une application $C_s:\ M_s \to M_s$;

iii) $C \cap (M_u \times M_u)$ est le graphe $\{(x_u,\ C_u\ (x_u)),\ x_u \in C_u\}$ d'une application $C_u : M_u \to M_u$;

iv) C peut être muni d'un ordre cyclique tel que l'élément suivant (x, y) est soit (x^{++}, y), soit (x^+, y^+), soit (x, y^{++}) (on note x^+ l'élément suivant x pour l'ordre cyclique de M).

Les correspondances monotones forment un monoïde associatif $C(M)$ pour la composition.

On dit qu'une correspondance monotone est constante si C_s et C_u le sont.

Notons F_N le monoïde libre à N générateurs (indexés par l'alphabet $\mathcal{A}$. Chaque $\mathcal{A}_\alpha$ définit une correspondance monotone C^α, donc on a un homomorphisme de F_N dans $C(M)$.

Cet homomorphisme possède de plus les propriétés suivantes : il est **hyperbolique**, c'est-à-dire que l'image de tout mot assez long est une correspondance constante ; et il est **réduit**, c'est-à-dire que les images des C_u^α recouvrent M_u et les images des C_s^α recouvrent M_s.

En résumé, à chaque composante de $\mathcal{H}$ est associée un multicône combinatoire M et un morphisme hyperbolique réduit de F_N dans $C(M)$.

Inversement, lorsque $N = 2$, tout morphisme hyperbolique réduit est associé à exactement 4 composantes de $\mathcal{H}$ (se déduisant les unes des autres par changements de signes).

Par contre, on peut construire des exemples de morphismes hyperboliques réduits avec $N > 2$ qui ne sont associés à aucune composante de $\mathcal{H}$.

7. On revient dans cette section au cadre général d'un décalage $\sum$ de type fini. Soient alors H une composante connexe du lieu d'hyperbolicité $\mathcal{H}$, et $(A_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ un paramètre appartenant à ∂H.

THÉORÈME – *L'une au moins des deux propriétés suivantes a lieu :*
i) il existe un point périodique x de $\sum$*, de période k, tel que* $|trA^k(x)| = 2$ *;*
ii) (connexion hétérocline) il existe des points périodiques x, y de $\sum$*, de période respective k et l, un entier* $n \geq 0$ *et un point* $z \in W^u_{\text{loc}}(x) \cap \sigma^{-n} W^s_{\text{loc}}(y)$ *tels que* $A^k(x)$, $A^l(y)$ *soient hyperboliques et on ait :*

$$A^n(z) \cdot u(A^k(x)) = s(A^l(y)).$$

De plus, les entiers k, l, n sont majorés par une constante ne dépendant que de H.

COROLLAIRE – *Chaque composante connexe de* $\mathcal{H}$ *est un ensemble semi-algébrique. Le bord de chaque composante est aussi semi-algébrique.*

Par contre, $\mathcal{H}$ lui-même n'est pas (en général) semi-algébrique, puisqu'il a une infinité de composantes connexes. Lorsque $\sum$ est un décalage complet, H n'est pas une composante principale, et $(A_\alpha) \in \partial H$ comme ci-dessus, on peut montrer qu'aucun produit des A_α ne peut être égal à $\pm$ *id*.

8. On a vu que, pour le décalage complet sur 2 symboles, toute partie compacte de l'espace des paramètres ne rencontre qu'un nombre fini de composantes connexes de $\mathcal{H}$. Ceci n'est plus vrai quand on considère le décalage complet sur 3 symboles, en raison d'un phénomène de bifurcation hétérocline.

On a étudié une occurrence de ce phénomène : on a un triplet $(A_0, B_0, C_0) \in (SL(2, \mathbf{R}))^3$ avec $(A_0, B_0) \in H^+_{id}$ $C_0 u_{B_0} = s_{A_0}$. Localement dans l'espace des paramètres, l'hypersurface $\{Cu_B = s_A\}$ sépare un voisinage V de (A_0, B_0, C_0) en deux composantes ; l'une est contenue dans $\mathcal{H}$ tandis que l'autre rencontre $\mathcal{H}$ suivant une suite de composantes connexes dont les combinatoires associées sont de plus en plus compliquées.

9. De nombreuses questions concernant $\mathcal{H}$ et ses composantes connexes restent ouvertes, même pour les décalages complets sur $N \geq 3$ symboles.

Mentionnons ici simplement l'une d'entre elles : existe-t-il des composantes connexes H de $\mathcal{H}$ qui soient bornées modulo conjugaison, c'est-à-dire telles qu'il existe une partie compacte K de $(SL(2, R))^N$ vérifiant $H \subset \bigcup_g gKg^{-1}$?

On dispose d'un critère intéressant pour tester cette propriété : une partie Z de $(SL(2,\mathbf{R}))^N$ est bornée modulo conjugaison si et seulement si chacune des fonctions trA_α, $trA_\alpha A_\beta$ est bornée sur Z.

On aimerait aussi savoir si on a toujours $\partial\mathcal{H} = \partial\mathcal{E} = (\mathcal{H} \sqcup \mathcal{E})^c$, comme c'est le cas pour le décalage complet sur 2 symboles.

Conférences, Missions

11 octobre 2007 : Colloquium à l'Université de Provence.

26 novembre-7 décembre 2007 : Mission à l'Instituto de Matematica Pura e Aplicada à Rio de Janeiro, Brésil.

17 décembre-21 décembre 2007 : Mission à la Scuola Normale Superiore de Pise, Italie.

4-8 février 2008 : Mini-cours de 4 conférences dans le cadre d'une École d'hiver à Séville, Espagne.

5 mars 2008 : Conférence lors de la journée de Rham à l'École Polytechnique de Lausanne, Suisse.

16 avril 2008 : Colloquium à l'Université Paris-Nord.

5-16 mai 2008 : Mission à l'Université de Montréal, Canada. Titulaire de la chaire Aisenstadt, j'ai donné 4 conférences dans ce cadre, et une cinquième lors d'un workshop la semaine suivante.

26-30 mai 2008 : Coorganisateur d'un colloque à la mémoire d'Adrien Douady à l'IHP, Paris.

2-6 juin 2008 : Une conférence lors d'un workshop "Dynamique dans l'espace de Teichmüller" à Roscoff.

14 juin 2008 : Conférence au Séminaire Bourbaki, IHP, Paris.

7-18 juillet 2008 : Co-directeur d'une école d'été en Systèmes dynamiques à l'ICTP, Trieste, Italie.

Publications

– Ensembles de Julia de mesure positive et disques de Siegel des polynômes quadratiques [d'après X. Buff et A. Chéritat], Séminaire Bourbaki, Volume 2005/2006, exposé n° 966, Astérisque (311), 2007, 385-401.

– Exponential mixing for the Teichmüller flow, Publ. Math. IHES (104), 143-211 (avec A. Avila et S. Gouezel).