Quelques aspects de la théorie des systèmes dynamiques quasipériodiques(3)

Jean-Christophe Yoccoz

Collège de France

14 mai 2014

Le théorème de Siegel-Brjuno

Soit $F(z) = \lambda z + O(z^2)$ un germe de difféomorphisme holomorphe tel que le point fixe 0 soit indifférent irrationnel. Ecrivons $\lambda = \exp 2\pi i\alpha$.

Le théorème de Siegel-Brjuno

Soit $F(z) = \lambda z + O(z^2)$ un germe de difféomorphisme holomorphe tel que le point fixe 0 soit indifférent irrationnel. Ecrivons $\lambda = \exp 2\pi i\alpha$.

Theorem: (Siegel 1942, Brjuno 1965) Supposons que α soit un nombre de Brjuno. Alors F est analytiquement linéarisable.

Le théorème de Siegel-Brjuno

Soit $F(z) = \lambda z + O(z^2)$ un germe de difféomorphisme holomorphe tel que le point fixe 0 soit indifférent irrationnel. Ecrivons $\lambda = \exp 2\pi i\alpha$.

Theorem: (Siegel 1942, Brjuno 1965) Supposons que α soit un nombre de Brjuno. Alors F est analytiquement linéarisable.

Siegel avait obtenu la même conclusion sous l'hypothèse plus restrictive que $\alpha \in DC$.

Le théorème de Siegel-Brjuno

Soit $F(z) = \lambda z + O(z^2)$ un germe de difféomorphisme holomorphe tel que le point fixe 0 soit indifférent irrationnel. Ecrivons $\lambda = \exp 2\pi i\alpha$.

Theorem: (Siegel 1942, Brjuno 1965) Supposons que α soit un nombre de Brjuno. Alors F est analytiquement linéarisable.

Siegel avait obtenu la même conclusion sous l'hypothèse plus restrictive que $\alpha \in DC$.

La condition de Brjuno dans le théorème précédent est optimale:

Le théorème de Siegel-Brjuno

Soit $F(z) = \lambda z + O(z^2)$ un germe de difféomorphisme holomorphe tel que le point fixe 0 soit indifférent irrationnel. Ecrivons $\lambda = \exp 2\pi i \alpha$.

Theorem: (Siegel 1942, Brjuno 1965) Supposons que α soit un nombre de Brjuno. Alors F est analytiquement linéarisable.

Siegel avait obtenu la même conclusion sous l'hypothèse plus restrictive que $\alpha \in DC$.

La condition de Brjuno dans le théorème précédent est optimale:

Theorem: (Y. 1987) Supposons que α ne soit pas un nombre de Brjuno. Alors le polynôme quadratique $P_\lambda(z) = \lambda z + z^2$ n'est pas analytiquement linéarisable à l'origine.

Disques de Siegel

Soit $F(z) = \lambda z + O(z^2)$ un germe de difféomorphisme holomorphe.

Disques de Siegel

Soit $F(z) = \lambda z + O(z^2)$ un germe de difféomorphisme holomorphe.

On suppose que le point fixe 0 de F est indifférent irrationnel, que F est analytiquement linéarisable et on note $h(z) = z + O(z^2)$ l'application linéarisante telle que $h(\lambda z) = F \circ h(z)$ au voisinage de l'origine.

Disques de Siegel

Soit $F(z) = \lambda z + O(z^2)$ un germe de difféomorphisme holomorphe.

On suppose que le point fixe 0 de F est indifférent irrationnel, que F est analytiquement linéarisable et on note $h(z) = z + O(z^2)$ l'application linéarisante telle que $h(\lambda z) = F \circ h(z)$ au voisinage de l'origine.

Etant donné un voisinage ouvert U de 0 sur lequel F est défini (lorsque F est une fonction entière, on prend $U = \mathbb{C}$), il existe un plus grand disque ouvert $\mathbb{D}$ centré en 0 tel que h soit holomorphe dans $\mathbb{D}$ et vérifie $h(\mathbb{D}) \subset U$.

Disques de Siegel

Soit $F(z) = \lambda z + O(z^2)$ un germe de difféomorphisme holomorphe.

On suppose que le point fixe 0 de F est indifférent irrationnel, que F est analytiquement linéarisable et on note $h(z) = z + O(z^2)$ l'application linéarisante telle que $h(\lambda z) = F \circ h(z)$ au voisinage de l'origine.

Etant donné un voisinage ouvert U de 0 sur lequel F est défini (lorsque F est une fonction entière, on prend $U = \mathbb{C}$), il existe un plus grand disque ouvert $\mathbb{D}$ centré en 0 tel que h soit holomorphe dans $\mathbb{D}$ et vérifie $h(\mathbb{D}) \subset U$.

L'application h est injective dans $\mathbb{D}$ et y vérifie $h(\lambda z) = F \circ h(z)$.

Disques de Siegel

Soit $F(z) = \lambda z + O(z^2)$ un germe de difféomorphisme holomorphe.

On suppose que le point fixe 0 de F est indifférent irrationnel, que F est analytiquement linéarisable et on note $h(z) = z + O(z^2)$ l'application linéarisante telle que $h(\lambda z) = F \circ h(z)$ au voisinage de l'origine.

Etant donné un voisinage ouvert U de 0 sur lequel F est défini (lorsque F est une fonction entière, on prend $U = \mathbb{C}$), il existe un plus grand disque ouvert $\mathbb{D}$ centré en 0 tel que h soit holomorphe dans $\mathbb{D}$ et vérifie $h(\mathbb{D}) \subset U$.

L'application h est injective dans $\mathbb{D}$ et y vérifie $h(\lambda z) = F \circ h(z)$.

Définition: L'image $\Delta = h(\mathbb{D})$ est appelée *disque de Siegel* de F (dans U).

Disques de Siegel

Soit $F(z) = \lambda z + O(z^2)$ un germe de difféomorphisme holomorphe.

On suppose que le point fixe 0 de F est indifférent irrationnel, que F est analytiquement linéarisable et on note $h(z) = z + O(z^2)$ l'application linéarisante telle que $h(\lambda z) = F \circ h(z)$ au voisinage de l'origine.

Etant donné un voisinage ouvert U de 0 sur lequel F est défini (lorsque F est une fonction entière, on prend $U = \mathbb{C}$), il existe un plus grand disque ouvert $\mathbb{D}$ centré en 0 tel que h soit holomorphe dans $\mathbb{D}$ et vérifie $h(\mathbb{D}) \subset U$.

L'application h est injective dans $\mathbb{D}$ et y vérifie $h(\lambda z) = F \circ h(z)$.

Définition: L'image $\Delta = h(\mathbb{D})$ est appelée *disque de Siegel* de F (dans U). Le rayon de $\mathbb{D}$ est le *rayon conforme* de Δ.

Disque de Siegel du polynôme quadratique

Soient α un nombre de Brjuno, $\lambda = \exp 2\pi i\alpha$. On note $R(P_\lambda)$ le rayon conforme du disque de Siegel du polynôme quadratique $P_\lambda(z) = \lambda z + z^2$ (relativement à $U = \mathbb{C}$).

Disque de Siegel du polynôme quadratique

Soient α un nombre de Brjuno, $\lambda = \exp 2\pi i\alpha$. On note $R(P_\lambda)$ le rayon conforme du disque de Siegel du polynôme quadratique $P_\lambda(z) = \lambda z + z^2$ (relativement à $U = \mathbb{C}$).

Soit $F(z) = \lambda z + O(z^2)$ un germe de difféomorphisme holomorphe. Quitte à conjuguer par une homothétie, on suppose que F est holomorphe et injectif (*univalent*) dans le disque unité $\mathbb{D}_1$. On note $R(F)$ le rayon conforme du disque de Siegel de F (relativement à $U = \mathbb{D}_1$).

Disque de Siegel du polynôme quadratique

Soient α un nombre de Brjuno, $\lambda = \exp 2\pi i\alpha$. On note $R(P_\lambda)$ le rayon conforme du disque de Siegel du polynôme quadratique $P_\lambda(z) = \lambda z + z^2$ (relativement à $U = \mathbb{C}$).

Soit $F(z) = \lambda z + O(z^2)$ un germe de difféomorphisme holomorphe. Quitte à conjuguer par une homothétie, on suppose que F est holomorphe et injectif (*univalent*) dans le disque unité $\mathbb{D}_1$. On note $R(F)$ le rayon conforme du disque de Siegel de F (relativement à $U = \mathbb{D}_1$).

Théorème: (Buff-Chéritat, 2004)
On a

$$R(F) \geqslant \frac{1}{10} R(P_\lambda).$$

Eléments de preuve

Préliminaire: On se ramène au cas où le rayon conforme $R(F)$ est égal au rayon de convergence de l'application linéarisante.

Eléments de preuve

Préliminaire: On se ramène au cas où le rayon conforme $R(F)$ est égal au rayon de convergence de l'application linéarisante.

Notons $\mathfrak{S}$ l'espace des fonctions univalentes dans $\mathbb{D}$, ayant en 0 un point fixe de multiplicateur λ.

Eléments de preuve

Préliminaire: On se ramène au cas où le rayon conforme $R(F)$ est égal au rayon de convergence de l'application linéarisante.

Notons $\mathfrak{S}$ l'espace des fonctions univalentes dans $\mathbb{D}$, ayant en 0 un point fixe de multiplicateur λ. La topologie de la convergence uniforme sur les parties compactes de $\mathbb{D}$ en fait un espace compact.

Eléments de preuve

Préliminaire: On se ramène au cas où le rayon conforme $R(F)$ est égal au rayon de convergence de l'application linéarisante.

Notons $\mathfrak{S}$ l'espace des fonctions univalentes dans $\mathbb{D}$, ayant en 0 un point fixe de multiplicateur λ. La topologie de la convergence uniforme sur les parties compactes de $\mathbb{D}$ en fait un espace compact. Notons $\mathfrak{S}_0$ la partie de $\mathfrak{S}$ formée des fonctions de $\mathfrak{S}$ pour lesquelles tout point du bord de $\mathbb{D}$ est une singularité.

Eléments de preuve

Préliminaire: On se ramène au cas où le rayon conforme $R(F)$ est égal au rayon de convergence de l'application linéarisante.

Notons $\mathfrak{S}$ l'espace des fonctions univalentes dans $\mathbb{D}$, ayant en 0 un point fixe de multiplicateur λ. La topologie de la convergence uniforme sur les parties compactes de $\mathbb{D}$ en fait un espace compact. Notons $\mathfrak{S}_0$ la partie de $\mathfrak{S}$ formée des fonctions de $\mathfrak{S}$ pour lesquelles tout point du bord de $\mathbb{D}$ est une singularité. C'est une partie dense de $\mathfrak{S}$.

Eléments de preuve

Préliminaire: On se ramène au cas où le rayon conforme $R(F)$ est égal au rayon de convergence de l'application linéarisante.

Notons $\mathfrak{S}$ l'espace des fonctions univalentes dans $\mathbb{D}$, ayant en 0 un point fixe de multiplicateur λ. La topologie de la convergence uniforme sur les parties compactes de $\mathbb{D}$ en fait un espace compact. Notons $\mathfrak{S}_0$ la partie de $\mathfrak{S}$ formée des fonctions de $\mathfrak{S}$ pour lesquelles tout point du bord de $\mathbb{D}$ est une singularité. C'est une partie dense de $\mathfrak{S}$.

Lemme 1: L'application $F \mapsto R(F)$ est semi-continue supérieurement dans $\mathfrak{S}$.

Préliminaire: On se ramène au cas où le rayon conforme $R(F)$ est égal au rayon de convergence de l'application linéarisante.

Notons $\mathfrak{S}$ l'espace des fonctions univalentes dans $\mathbb{D}$, ayant en 0 un point fixe de multiplicateur λ. La topologie de la convergence uniforme sur les parties compactes de $\mathbb{D}$ en fait un espace compact. Notons $\mathfrak{S}_0$ la partie de $\mathfrak{S}$ formée des fonctions de $\mathfrak{S}$ pour lesquelles tout point du bord de $\mathbb{D}$ est une singularité. C'est une partie dense de $\mathfrak{S}$.

Lemme 1: L'application $F \mapsto R(F)$ est semi-continue supérieurement dans $\mathfrak{S}$.

Lemme 2: Pour $F \in \mathfrak{S}_0$, $R(F)$ est le rayon conforme de l'application linéarisante.

Eléments de preuve

Préliminaire: On se ramène au cas où le rayon conforme $R(F)$ est égal au rayon de convergence de l'application linéarisante.

Notons $\mathfrak{S}$ l'espace des fonctions univalentes dans $\mathbb{D}$, ayant en 0 un point fixe de multiplicateur λ. La topologie de la convergence uniforme sur les parties compactes de $\mathbb{D}$ en fait un espace compact. Notons $\mathfrak{S}_0$ la partie de $\mathfrak{S}$ formée des fonctions de $\mathfrak{S}$ pour lesquelles tout point du bord de $\mathbb{D}$ est une singularité. C'est une partie dense de $\mathfrak{S}$.

Lemme 1: L'application $F \mapsto R(F)$ est semi-continue supérieurement dans $\mathfrak{S}$.

Lemme 2: Pour $F \in \mathfrak{S}_0$, $R(F)$ est le rayon conforme de l'application linéarisante.

On a donc $\inf_{\mathfrak{S}} R(F) = \inf_{\mathfrak{S}_0} R(F)$. Il suffit de démontrer l'estimation de la proposition lorsque $F \in \mathfrak{S}_0$.

On définit une famille reliant, à changement d'échelle près, F à P_λ.

On définit une famille reliant, à changement d'échelle près, F à P_λ.
Ecrivons $F(z) = \lambda z + z^2\,\phi(z)$. Pour $a \in \mathbb{C}$, on pose

$$F_a(z) := F(z) + az^2.$$

On définit une famille reliant, à changement d'échelle près, F à P_λ.
Ecrivons $F(z) = \lambda z + z^2\,\phi(z)$. Pour $a \in \mathbb{C}$, on pose

$$F_a(z) := F(z) + az^2.$$

On a donc $F_0 = F$. Pour $a \neq 0$, en posant $b = 1/a$, définissons

$$\widetilde{F}_b(z) := b^{-1}\,F_a(bz) = \lambda z + z^2 + b\,z^2\,\phi(bz).$$

Posons enfin $\widetilde{F}_0 = P_\lambda$.

On définit une famille reliant, à changement d'échelle près, F à P_λ.
Ecrivons $F(z) = \lambda z + z^2\,\phi(z)$. Pour $a \in \mathbb{C}$, on pose

$$F_a(z) := F(z) + az^2.$$

On a donc $F_0 = F$. Pour $a \neq 0$, en posant $b = 1/a$, définissons

$$\widetilde{F}_b(z) := b^{-1} F_a(bz) = \lambda z + z^2 + b\,z^2\,\phi(bz).$$

Posons enfin $\widetilde{F}_0 = P_\lambda$.
La preuve repose sur les deux faits suivants:

1. Le logarithme du rayon conforme du disque de Siegel de F_a pour $a = 0$ est au moins égal à sa valeur moyenne sur le cercle $\{|a| = 10\}$.

On définit une famille reliant, à changement d'échelle près, F à P_λ.
Ecrivons $F(z) = \lambda z + z^2\,\phi(z)$. Pour $a \in \mathbb{C}$, on pose

$$F_a(z) := F(z) + az^2.$$

On a donc $F_0 = F$. Pour $a \neq 0$, en posant $b = 1/a$, définissons

$$\widetilde{F}_b(z) := b^{-1}\,F_a(bz) = \lambda z + z^2 + b\,z^2\,\phi(bz).$$

Posons enfin $\widetilde{F}_0 = P_\lambda$.
La preuve repose sur les deux faits suivants:

1. Le logarithme du rayon conforme du disque de Siegel de F_a pour $a = 0$ est au moins égal à sa valeur moyenne sur le cercle $\{|a| = 10\}$.
2. Le logarithme du rayon conforme du disque de Siegel de $\widetilde{F}_b$ est une fonction harmonique de b dans un voisinage du disque $\{|b| \leqslant 1/10\}$.

En admettant ces deux faits, on a en effet

$$\log R(F) \geqslant \int_0^1 \log R(F_{10\exp 2\pi i\theta})\, d\theta$$

$$= \int_0^1 \log \frac{R(\widetilde{F}_{\frac{1}{10}\exp -2\pi i\theta})}{10}\, d\theta = \log \frac{R(P_\lambda)}{10}.$$

En admettant ces deux faits, on a en effet

$$\log R(F) \geqslant \int_0^1 \log R(F_{10\exp 2\pi i\theta})\, d\theta$$

$$= \int_0^1 \log \frac{R(\widetilde{F}_{\frac{1}{10}\exp -2\pi i\theta})}{10}\, d\theta = \log \frac{R(P_\lambda)}{10}.$$

La preuve du premier fait est élémentaire: notons $h_a(z) := z(1 + \sum_{n>0} h_n(a) z^n)$ l'application telle que $h_a(\lambda z) = F_a \circ h_a(z)$.

En admettant ces deux faits, on a en effet

$$\log R(F) \geqslant \int_0^1 \log R(F_{10\exp 2\pi i\theta})\, d\theta$$
$$= \int_0^1 \log \frac{R(\widetilde{F}_{\frac{1}{10}\exp -2\pi i\theta})}{10}\, d\theta = \log \frac{R(P_\lambda)}{10}.$$

La preuve du premier fait est élémentaire: notons $h_a(z) := z(1 + \sum_{n>0} h_n(a) z^n)$ l'application telle que $h_a(\lambda z) = F_a \circ h_a(z)$. Une récurrence immédiate montre que h_n est un polynôme de degré n en a.

En admettant ces deux faits, on a en effet

$$\log R(F) \geqslant \int_0^1 \log R(F_{10\exp 2\pi i\theta})\, d\theta$$
$$= \int_0^1 \log \frac{R(\widetilde{F}_{\frac{1}{10}\exp -2\pi i\theta})}{10}\, d\theta = \log \frac{R(P_\lambda)}{10}.$$

La preuve du premier fait est élémentaire: notons $h_a(z) := z(1 + \sum_{n>0} h_n(a) z^n)$ l'application telle que $h_a(\lambda z) = F_a \circ h_a(z)$. Une récurrence immédiate montre que h_n est un polynôme de degré n en a. Comme $h_a(\mathbb{D}_{R(F_a)}) \subset \mathbb{D}_1$, on a $|h_n(a)| [R(F_a)]^{n+1} \leqslant 1$.

En admettant ces deux faits, on a en effet

$$\log R(F) \geqslant \int_0^1 \log R(F_{10\exp 2\pi i\theta})\, d\theta$$
$$= \int_0^1 \log \frac{R(\widetilde{F}_{\frac{1}{10}\exp -2\pi i\theta})}{10}\, d\theta = \log \frac{R(P_\lambda)}{10}.$$

La preuve du premier fait est élémentaire: notons $h_a(z) := z(1 + \sum_{n>0} h_n(a) z^n)$ l'application telle que $h_a(\lambda z) = F_a \circ h_a(z)$. Une récurrence immédiate montre que h_n est un polynôme de degré n en a. Comme $h_a(\mathbb{D}_{R(F_a)}) \subset \mathbb{D}_1$, on a $|h_n(a)| [R(F_a)]^{n+1} \leqslant 1$. On obtient donc

$$\frac{1}{n+1} \log |h_n(0)| \leqslant \frac{1}{n+1} \int_0^1 \log |h_n(10\exp 2\pi i\theta)|\, d\theta$$
$$\leqslant -\int_0^1 \log R(F_{10\exp 2\pi i\theta})\, d\theta$$

d'où on conclut, d'après le lemme 2 ci-dessus, que la première assertion est valide.

d'où on conclut, d'après le lemme 2 ci-dessus, que la première assertion est valide.

La preuve du deuxième fait est plus profonde et ne sera pas donnée ici.

d’où on conclut, d’après le lemme 2 ci-dessus, que la première assertion est valide.

La preuve du deuxième fait est plus profonde et ne sera pas donnée ici. Elle fait appel à la théorie des *applications à allure quadratique* développée à partir de 1985 par A. Douady et J. Hubbard.

d'où on conclut, d'après le lemme 2 ci-dessus, que la première assertion est valide.

La preuve du deuxième fait est plus profonde et ne sera pas donnée ici. Elle fait appel à la théorie des *applications à allure quadratique* développée à partir de 1985 par A. Douady et J. Hubbard.

Le point de départ est l'observation suivante: pour $|b| \leqslant 1/10$, il existe un disque topologique ouvert $D(b)$, relativement compact dans le disque $\mathbb{D}_3 := \{|z| < 3\}$, tel que la restriction de $\widetilde{F}_b$ à $D(b)$ soit un revêtement ramifié de degré deux de $D(b)$ sur $\mathbb{D}_3$.

La fonction de Brjuno

Pour un nombre irrationnel α, on pose $\alpha_n := G^n(\{\alpha\})$, $\beta_n := \prod_{m=0}^{n} \alpha_m = |q_n\alpha - p_n|$ et on définit la *fonction de Brjuno* par

$$\Phi(\alpha) = \sum_{n \geqslant 0} \beta_{n-1} \log \alpha_n^{-1} \in (0, +\infty].$$

La fonction de Brjuno

Pour un nombre irrationnel α, on pose $\alpha_n := G^n(\{\alpha\})$, $\beta_n := \prod_{m=0}^{n} \alpha_m = |q_n\alpha - p_n|$ et on définit la *fonction de Brjuno* par

$$\Phi(\alpha) = \sum_{n \geqslant 0} \beta_{n-1} \log \alpha_n^{-1} \in (0, +\infty].$$

On convient aussi que $\Phi(\alpha) = +\infty$ si α est rationnel.

Propriétés de la fonction de Brjuno

Les propriétés suivantes sont élémentaires:

- $\Phi(\alpha) < +\infty \iff \alpha \in \mathcal{B}$.

Propriétés de la fonction de Brjuno

Les propriétés suivantes sont élémentaires:

- $\Phi(\alpha) < +\infty \iff \alpha \in \mathcal{B}$.
- $\Phi(\alpha + 1) = \Phi(\alpha)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Propriétés de la fonction de Brjuno

Les propriétés suivantes sont élémentaires:

- $\Phi(\alpha) < +\infty \iff \alpha \in \mathcal{B}$.
- $\Phi(\alpha + 1) = \Phi(\alpha)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.
- $\Phi(\alpha) = \log \alpha^{-1} + \alpha\Phi(\alpha^{-1})$, $\forall \alpha \in (0, 1)$.

Propriétés de la fonction de Brjuno

Les propriétés suivantes sont élémentaires:

- $\Phi(\alpha) < +\infty \iff \alpha \in \mathcal{B}$.
- $\Phi(\alpha + 1) = \Phi(\alpha)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.
- $\Phi(\alpha) = \log \alpha^{-1} + \alpha \Phi(\alpha^{-1})$, $\forall \alpha \in (0, 1)$.

Le résultat suivant est plus avancé.

Théorème: (Marmi-Moussa-Y. 1997, 2001) La fonction de Brjuno Φ, considérée comme une fonction sur $\mathbb{T}$, est la *transformée de Hilbert* d'une fonction bornée. Elle appartient donc à l'espace *BMO*($\mathbb{T}$) des fonctions *à oscillation moyenne bornée*.

Transformée de Hilbert et $BMO(\mathbb{T})$

Transformée de Hilbert et $BMO(\mathbb{T})$

La *transformée de Hilbert* d'une fonction $\varphi(\theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{\varphi}(n) \exp 2\pi i n \theta$ sur $\mathbb{T}$ est

Transformée de Hilbert et $BMO(\mathbb{T})$

La *transformée de Hilbert* d'une fonction $\varphi(\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{\varphi}(n) \exp 2\pi i n \theta$ sur $\mathbb{T}$ est

$$(H\varphi)(\theta) := \sum_{n\neq 0} -i \operatorname{sgn}(n)\, \hat{\varphi}(n) \exp 2\pi i n\theta.$$

Transformée de Hilbert et $BMO(\mathbb{T})$

La *transformée de Hilbert* d'une fonction $\varphi(\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{\varphi}(n) \exp 2\pi i n\theta$ sur $\mathbb{T}$ est

$$(H\varphi)(\theta) := \sum_{n\neq 0} -i\,\mathrm{sgn}(n)\,\hat{\varphi}(n) \exp 2\pi i n\theta.$$

C'est une isométrie de $L^2_0(\mathbb{T})$ vérifiant $H^2 = -\mathrm{id}$.

Transformée de Hilbert et $BMO(\mathbb{T})$

La *transformée de Hilbert* d'une fonction $\varphi(\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{\varphi}(n) \exp 2\pi i n\,\theta$ sur $\mathbb{T}$ est

$$(H\varphi)(\theta) := \sum_{n\neq 0} -i\,\mathrm{sgn}(n)\,\hat{\varphi}(n)\exp 2\pi i n\theta.$$

C'est une isométrie de $L^2_0(\mathbb{T})$ vérifiant $H^2 = -\mathrm{id}$.

L'espace $BMO(\mathbb{T})$ est formé des fonctions $\varphi \in L^2(\mathbb{T})$ telles que

$$\sup_{J\subset\mathbb{T}} \frac{1}{|J|}\int_J |\varphi(x) - \varphi_J|dx =: |\varphi|_{BMO} < +\infty,$$

où φ_J désigne la valeur moyenne de φ sur J.

Transformée de Hilbert et $BMO(\mathbb{T})$

La *transformée de Hilbert* d'une fonction $\varphi(\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{\varphi}(n) \exp 2\pi i n\,\theta$ sur $\mathbb{T}$ est

$$(H\varphi)(\theta) := \sum_{n\neq 0} -i\,\mathrm{sgn}(n)\,\hat{\varphi}(n) \exp 2\pi i n\theta.$$

C'est une isométrie de $L^2_0(\mathbb{T})$ vérifiant $H^2 = -\mathrm{id}$.

L'espace $BMO(\mathbb{T})$ est formé des fonctions $\varphi \in L^2(\mathbb{T})$ telles que

$$\sup_{J\subset\mathbb{T}} \frac{1}{|J|} \int_J |\varphi(x) - \varphi_J|\,dx =: |\varphi|_{BMO} < +\infty,$$

où φ_J désigne la valeur moyenne de φ sur J.

L'espace $BMO(\mathbb{T})$ est le plus petit espace stable par H contenant $L^\infty(\mathbb{T})$:

Transformée de Hilbert et $BMO(\mathbb{T})$

La *transformée de Hilbert* d'une fonction $\varphi(\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{\varphi}(n) \exp 2\pi i n\,\theta$ sur $\mathbb{T}$ est

$$(H\varphi)(\theta) := \sum_{n\neq 0} -i\,\mathrm{sgn}(n)\,\hat{\varphi}(n) \exp 2\pi i n\theta.$$

C'est une isométrie de $L^2_0(\mathbb{T})$ vérifiant $H^2 = -\mathrm{id}$.

L'espace $BMO(\mathbb{T})$ est formé des fonctions $\varphi \in L^2(\mathbb{T})$ telles que

$$\sup_{J\subset\mathbb{T}} \frac{1}{|J|}\int_J |\varphi(x) - \varphi_J|dx =: |\varphi|_{BMO} < +\infty,$$

où φ_J désigne la valeur moyenne de φ sur J.

L'espace $BMO(\mathbb{T})$ est le plus petit espace stable par H contenant $L^\infty(\mathbb{T})$: une fonction φ appartient à $BMO(\mathbb{T})$ si et seulement si elle est somme d'une fonction bornée et de la transformée de Hilbert d'une fonction bornée (Fefferman, 1971).

Fonction de Brjuno et polynômes quadratiques

Rappelons que $R(P_\lambda)$ désigne le rayon conforme du polynôme quadratique $P_\lambda(z) = \lambda z + z^2$. On écrit comme précédemment $\lambda = \exp 2\pi i \alpha$.

Fonction de Brjuno et polynômes quadratiques

Rappelons que $R(P_\lambda)$ désigne le rayon conforme du polynôme quadratique $P_\lambda(z) = \lambda z + z^2$. On écrit comme précédemment $\lambda = \exp 2\pi i\alpha$.

Theorem: (Buff-Chéritat 2006) La fonction Ψ définie sur $\mathcal{B}$ par $\Psi(\alpha) = \log R(P_\lambda) + \Phi(\alpha)$ se prolonge en une fonction continue (donc bornée) $\mathbb{Z}$-périodique sur $\mathbb{R}$.

Fonction de Brjuno et polynômes quadratiques

Rappelons que $R(P_\lambda)$ désigne le rayon conforme du polynôme quadratique $P_\lambda(z) = \lambda z + z^2$. On écrit comme précédemment $\lambda = \exp 2\pi i\alpha$.

Theorem: (Buff-Chéritat 2006) La fonction Ψ définie sur $\mathcal{B}$ par $\Psi(\alpha) = \log R(P_\lambda) + \Phi(\alpha)$ se prolonge en une fonction continue (donc bornée) $\mathbb{Z}$-périodique sur $\mathbb{R}$.

Conjecture: (Y. 1988)La transformée de Hilbert de la fonction $\alpha \mapsto \log R(P_\lambda)$ est une fonction bornée.

Rappelons que $R(P_\lambda)$ désigne le rayon conforme du polynôme quadratique $P_\lambda(z) = \lambda z + z^2$. On écrit comme précédemment $\lambda = \exp 2\pi i\alpha$.

Theorem: (Buff-Chéritat 2006) La fonction Ψ définie sur $\mathcal{B}$ par $\Psi(\alpha) = \log R(P_\lambda) + \Phi(\alpha)$ se prolonge en une fonction continue (donc bornée) $\mathbb{Z}$-périodique sur $\mathbb{R}$.

Conjecture: (Y. 1988)La transformée de Hilbert de la fonction $\alpha \mapsto \log R(P_\lambda)$ est une fonction bornée.

Une conjecture postérieure plus forte est

Rappelons que $R(P_\lambda)$ désigne le rayon conforme du polynôme quadratique $P_\lambda(z) = \lambda z + z^2$. On écrit comme précédemment $\lambda = \exp 2\pi i\alpha$.

Theorem: (Buff-Chéritat 2006) La fonction Ψ définie sur $\mathcal{B}$ par $\Psi(\alpha) = \log R(P_\lambda) + \Phi(\alpha)$ se prolonge en une fonction continue (donc bornée) $\mathbb{Z}$-périodique sur $\mathbb{R}$.

Conjecture: (Y. 1988)La transformée de Hilbert de la fonction $\alpha \mapsto \log R(P_\lambda)$ est une fonction bornée.

Une conjecture postérieure plus forte est

Conjecture: (Marmi-Moussa-Y. 1997) La fonction Ψ appartient à $C^{1/2}(\mathbb{T})$.

Une fonction holomorphe remarquable

Pour $0 < |\lambda| < 1$, notons $h_\lambda(z) = z + O(z^2)$ l'application linéarisante du polynôme quadratique $P_\lambda(z) = \lambda z + z^2$, vérifiant $h_\lambda(\lambda z) = P_\lambda \circ h_\lambda(z)$. On note $R(P_\lambda)$ le rayon de convergence de h_λ.

Une fonction holomorphe remarquable

Pour $0 < |\lambda| < 1$, notons $h_\lambda(z) = z + O(z^2)$ l'application linéarisante du polynôme quadratique $P_\lambda(z) = \lambda z + z^2$, vérifiant $h_\lambda(\lambda z) = P_\lambda \circ h_\lambda(z)$. On note $R(P_\lambda)$ le rayon de convergence de h_λ.

Proposition:

1. La fonction h_λ s'étend en une fonction continue et injective sur le disque de convergence fermé $\{|z| \leqslant R(P_\lambda)\}$.

Une fonction holomorphe remarquable

Pour $0 < |\lambda| < 1$, notons $h_\lambda(z) = z + O(z^2)$ l'application linéarisante du polynôme quadratique $P_\lambda(z) = \lambda z + z^2$, vérifiant $h_\lambda(\lambda z) = P_\lambda \circ h_\lambda(z)$. On note $R(P_\lambda)$ le rayon de convergence de h_λ.

Proposition:

1. La fonction h_λ s'étend en une fonction continue et injective sur le disque de convergence fermé $\{|z| \leqslant R(P_\lambda)\}$. Elle possède sur le cercle de convergence $\{|z| = R(P_\lambda)\}$ une unique singularité en un point $\widetilde{U}(\lambda)$ vérifiant $h_\lambda(\widetilde{U}(\lambda)) = -\lambda/2 =: c(\lambda)$, où $c(\lambda)$ est le point critique de P_λ.

Une fonction holomorphe remarquable

Pour $0 < |\lambda| < 1$, notons $h_\lambda(z) = z + O(z^2)$ l'application linéarisante du polynôme quadratique $P_\lambda(z) = \lambda z + z^2$, vérifiant $h_\lambda(\lambda z) = P_\lambda \circ h_\lambda(z)$. On note $R(P_\lambda)$ le rayon de convergence de h_λ.

Proposition:

1. La fonction h_λ s'étend en une fonction continue et injective sur le disque de convergence fermé $\{|z| \leqslant R(P_\lambda)\}$. Elle possède sur le cercle de convergence $\{|z| = R(P_\lambda)\}$ une unique singularité en un point $\widetilde{U}(\lambda)$ vérifiant $h_\lambda(\widetilde{U}(\lambda)) = -\lambda/2 =: c(\lambda)$, où $c(\lambda)$ est le point critique de P_λ.
2. La fonction $\lambda \mapsto U(\lambda) := \lambda^{-1}\widetilde{U}(\lambda)$ s'étend en une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}_1$ qui est limite, uniforme sur les parties compactes de $\mathbb{D}_1$, de la suite $(U_n)_{n\geqslant 0}$ de polynômes définie par

$$U_0 = -1/2, \qquad U_{n+1} = U_n + \lambda^n U_n^2.$$

Preuve de la première partie

Si l'image $h_\lambda(\{|z| < r\})$ ne contient pas la valeur critique $v(\lambda) := -\lambda^2/4$ de P_λ, la formule

$$(\star) \qquad h_\lambda(\lambda^{-1} z) = P_\lambda^{-1}(h_\lambda(z))$$

valable au voisinage de l'origine, permet de définir h_λ sur le disque $\{|z| < |\lambda|^{-1} r\}$, et h_λ est holomorphe et injective sur ce disque.

Preuve de la première partie

Si l'image $h_\lambda(\{|z| < r\})$ ne contient pas la valeur critique $v(\lambda) := -\lambda^2/4$ de P_λ, la formule

$$(\star) \qquad h_\lambda(\lambda^{-1} z) = P_\lambda^{-1}(h_\lambda(z))$$

valable au voisinage de l'origine, permet de définir h_λ sur le disque $\{|z| < |\lambda|^{-1} r\}$, et h_λ est holomorphe et injective sur ce disque.

Il existe donc un unique z_0 dans le disque de convergence $\{|z| < R(P_\lambda)\}$ tel que $h_\lambda(z_0) = v(\lambda)$, et on a $|z_0| = |\lambda| R(P_\lambda)$.

Preuve de la première partie

Si l'image $h_\lambda(\{|z| < r\})$ ne contient pas la valeur critique $v(\lambda) := -\lambda^2/4$ de P_λ, la formule

$$(\star) \qquad h_\lambda(\lambda^{-1}z) = P_\lambda^{-1}(h_\lambda(z))$$

valable au voisinage de l'origine, permet de définir h_λ sur le disque $\{|z| < |\lambda|^{-1}r\}$, et h_λ est holomorphe et injective sur ce disque.

Il existe donc un unique z_0 dans le disque de convergence $\{|z| < R(P_\lambda)\}$ tel que $h_\lambda(z_0) = v(\lambda)$, et on a $|z_0| = |\lambda|R(P_\lambda)$.

La relation $(\star)$, valide dans $\{|z| < |\lambda|R(P_\lambda)\}$ permet de prolonger h_λ par continuité sur le disque fermé $\{|z| \leqslant R(P_\lambda)\}$ et les conclusions de la première partie de la proposition sont facilement vérifiées, avec $\widetilde{U}(\lambda) = \lambda^{-1}z_0$.

Preuve de la deuxième partie

L'équation fonctionnelle $h_\lambda(\lambda z) = P_\lambda \circ h_\lambda(z)$ donne, pour tout $n \geqslant 0$

$$h_\lambda(\lambda^n \widetilde{U}(\lambda)) = P_\lambda^n(c(\lambda)).$$

Preuve de la deuxième partie

L'équation fonctionnelle $h_\lambda(\lambda z) = P_\lambda \circ h_\lambda(z)$ donne, pour tout $n \geqslant 0$

$$h_\lambda(\lambda^n \widetilde{U}(\lambda)) = P_\lambda^n(c(\lambda)).$$

Comme $Dh_\lambda(0) = 1$, on a donc, pour chaque $0 \neq \lambda \in \mathbb{D}^1$

$$\lambda^{-1}\widetilde{U}(\lambda) = \lim_{n \to +\infty} \lambda^{-n-1} P_\lambda^n(c(\lambda)).$$

Preuve de la deuxième partie

L'équation fonctionnelle $h_\lambda(\lambda z) = P_\lambda \circ h_\lambda(z)$ donne, pour tout $n \geqslant 0$

$$h_\lambda(\lambda^n \widetilde{U}(\lambda)) = P_\lambda^n(c(\lambda)).$$

Comme $Dh_\lambda(0) = 1$, on a donc, pour chaque $0 \neq \lambda \in \mathbb{D}^1$

$$\lambda^{-1}\widetilde{U}(\lambda) = \lim_{n \to +\infty} \lambda^{-n-1} P_\lambda^n(c(\lambda)).$$

Or, pour chaque $n \geqslant 0$, l'application

$$\lambda \mapsto \lambda^{-n-1} P_\lambda^n(c(\lambda)) =: U_n(\lambda)$$

est un polynôme de degré $2^n - n - 1$ satisfaisant à la relation de récurrence de la proposition.

Pour voir que la série

$$U - U_0 = \sum_{n \geqslant 0} \lambda^n U_n^2(\lambda)$$

converge uniformément sur les parties compactes de $\mathbb{D}_1$, il suffit de montrer qu'on a, pour tout $n \geqslant 0$, $\lambda \in \mathbb{D}_1$

$$(\diamondsuit) \qquad |U_n(\lambda)| \leqslant 2.$$

Pour voir que la série

$$U - U_0 = \sum_{n \geqslant 0} \lambda^n U_n^2(\lambda)$$

converge uniformément sur les parties compactes de $\mathbb{D}_1$, il suffit de montrer qu'on a, pour tout $n \geqslant 0$, $\lambda \in \mathbb{D}_1$

$$(\diamondsuit) \qquad |U_n(\lambda)| \leqslant 2.$$

Or, pour $0 \neq \lambda \in \mathbb{D}_1$, l'orbite sous P_λ de tout point hors du disque $\{|z| < 2\}$ s'échappe à l'infini, tandis que l'orbite du point critique $c(\lambda)$ converge vers 0. On a donc, pour tous $n \geqslant 0$, $0 < |\lambda| < 1$

$$|P_\lambda^n(c(\lambda))| \leqslant 2.$$

Pour voir que la série

$$U - U_0 = \sum_{n \geqslant 0} \lambda^n U_n^2(\lambda)$$

converge uniformément sur les parties compactes de $\mathbb{D}_1$, il suffit de montrer qu'on a, pour tout $n \geqslant 0$, $\lambda \in \mathbb{D}_1$

$$(\diamondsuit) \qquad |U_n(\lambda)| \leqslant 2.$$

Or, pour $0 \neq \lambda \in \mathbb{D}_1$, l'orbite sous P_λ de tout point hors du disque $\{|z| < 2\}$ s'échappe à l'infini, tandis que l'orbite du point critique $c(\lambda)$ converge vers 0. On a donc, pour tous $n \geqslant 0$, $0 < |\lambda| < 1$

$$|P_\lambda^n(c(\lambda))| \leqslant 2.$$

Par continuité, cette inégalité est encore valide pour $|\lambda| \leqslant 1$.

Pour voir que la série

$$U - U_0 = \sum_{n \geqslant 0} \lambda^n U_n^2(\lambda)$$

converge uniformément sur les parties compactes de $\mathbb{D}_1$, il suffit de montrer qu'on a, pour tout $n \geqslant 0$, $\lambda \in \mathbb{D}_1$

$$(\diamondsuit) \qquad |U_n(\lambda)| \leqslant 2.$$

Or, pour $0 \neq \lambda \in \mathbb{D}_1$, l'orbite sous P_λ de tout point hors du disque $\{|z| < 2\}$ s'échappe à l'infini, tandis que l'orbite du point critique $c(\lambda)$ converge vers 0. On a donc, pour tous $n \geqslant 0$, $0 < |\lambda| < 1$

$$|P_\lambda^n(c(\lambda))| \leqslant 2.$$

Par continuité, cette inégalité est encore valide pour $|\lambda| \leqslant 1$. La relation $(\diamondsuit)$ est ainsi valide sur le cercle $\{|\lambda| = 1\}$, donc aussi dans le disque fermé $\{|\lambda| \leqslant 1\}$.

Valeurs au bord de la fonction U

Pour $0 \neq \lambda \in \mathbb{D}_1$, $|\widetilde{U}(\lambda)| = |\lambda|\,|U(\lambda)|$ est égal au rayon de convergence de l'application linéarisante h_λ. Ceci est encore vrai pour $|\lambda| = 1$!

Valeurs au bord de la fonction U

Pour $0 \neq \lambda \in \mathbb{D}_1$, $|\widetilde{U}(\lambda)| = |\lambda|\,|U(\lambda)|$ est égal au rayon de convergence de l'application linéarisante h_λ. Ceci est encore vrai pour $|\lambda| = 1$!

Soit α un nombre réel, $\lambda_* := \exp 2\pi i\alpha$.

Valeurs au bord de la fonction U

Pour $0 \neq \lambda \in \mathbb{D}_1$, $|\widetilde{U}(\lambda)| = |\lambda|\,|U(\lambda)|$ est égal au rayon de convergence de l'application linéarisante h_λ. Ceci est encore vrai pour $|\lambda| = 1$!

Soit α un nombre réel, $\lambda_* := \exp 2\pi i\alpha$.

Théorème:

1. Si α n'est pas un nombre de Brjuno, la fonction $U(\lambda)$ tend vers 0 lorsque $\lambda \in \mathbb{D}_1$ tend vers λ_*.

Valeurs au bord de la fonction U

Pour $0 \neq \lambda \in \mathbb{D}_1$, $|\widetilde{U}(\lambda)| = |\lambda|\,|U(\lambda)|$ est égal au rayon de convergence de l'application linéarisante h_λ. Ceci est encore vrai pour $|\lambda| = 1$!

Soit α un nombre réel, $\lambda_* := \exp 2\pi i\alpha$.

Théorème:

1. Si α n'est pas un nombre de Brjuno, la fonction $U(\lambda)$ tend vers 0 lorsque $\lambda \in \mathbb{D}_1$ tend vers λ_*.
2. Si α est un nombre de Brjuno, le module $|U(\lambda)|$ tend vers $R(P_{\lambda_*})$ lorsque $\lambda \in \mathbb{D}_1$ tend non-tangentiellement vers λ_*.

Questions ouvertes

La fonction holomorphe U ne s'annule pas dans $\mathbb{D}_1$. La fonction $\arg U$ y est la conjuguée harmonique de $\log |U/U(0)|$. Une conjecture mentionnée précédemment stipulait que la fonction $\arg U$ est (serait) bornée dans $\mathbb{D}_1$. Des expériences numériques suggèrent la question plus précise

Questions ouvertes

La fonction holomorphe U ne s'annule pas dans $\mathbb{D}_1$. La fonction $\arg U$ y est la conjuguée harmonique de $\log |U/U(0)|$. Une conjecture mentionnée précédemment stipulait que la fonction $\arg U$ est (serait) bornée dans $\mathbb{D}_1$. Des expériences numériques suggèrent la question plus précise

Question: La partie réelle $\Re U$ de U est-elle positive dans $\mathbb{D}_1$?

Questions ouvertes

La fonction holomorphe U ne s'annule pas dans $\mathbb{D}_1$. La fonction $\arg U$ y est la conjuguée harmonique de $\log |U/U(0)|$. Une conjecture mentionnée précédemment stipulait que la fonction $\arg U$ est (serait) bornée dans $\mathbb{D}_1$. Des expériences numériques suggèrent la question plus précise

Question: La partie réelle $\Re U$ de U est-elle positive dans $\mathbb{D}_1$?

Le comportement au bord de $\mathbb{D}_1$ de $\arg U$ n'est pas bien compris.

Questions ouvertes

La fonction holomorphe U ne s'annule pas dans $\mathbb{D}_1$. La fonction $\arg U$ y est la conjuguée harmonique de $\log |U/U(0)|$. Une conjecture mentionnée précédemment stipulait que la fonction $\arg U$ est (serait) bornée dans $\mathbb{D}_1$. Des expériences numériques suggèrent la question plus précise

Question: La partie réelle $\Re U$ de U est-elle positive dans $\mathbb{D}_1$?

Le comportement au bord de $\mathbb{D}_1$ de $\arg U$ n'est pas bien compris.

Question: Pour quels $\alpha \in \mathbb{T}$ la fonction $\arg U$ a-t-elle une limite non tangentielle en $\lambda_* := \exp 2\pi i\alpha$?

Questions ouvertes

La fonction holomorphe U ne s'annule pas dans $\mathbb{D}_1$. La fonction $\arg U$ y est la conjuguée harmonique de $\log |U/U(0)|$. Une conjecture mentionnée précédemment stipulait que la fonction $\arg U$ est (serait) bornée dans $\mathbb{D}_1$. Des expériences numériques suggèrent la question plus précise

Question: La partie réelle $\Re U$ de U est-elle positive dans $\mathbb{D}_1$?

Le comportement au bord de $\mathbb{D}_1$ de $\arg U$ n'est pas bien compris.

Question: Pour quels $\alpha \in \mathbb{T}$ la fonction $\arg U$ a-t-elle une limite non tangentielle en $\lambda_* := \exp 2\pi i\alpha$?
Lorsque $\alpha \in \mathcal{B}$, cette limite existe-t-elle si et seulement si le point critique $c(\lambda_*)$ appartient au bord du disque de Siegel de P_{λ_*}?

M. Herman a montré que

M. Herman a montré que

- Pour $\alpha \in$ *DC* (en fait, pour $\alpha \in \mathcal{H} \subsetneq \mathcal{B}$, voir plus tard pour la définition de $\mathcal{H}$), le point critique appartient au bord du disque de Siegel.

M. Herman a montré que

- Pour $\alpha \in DC$ (en fait, pour $\alpha \in \mathcal{H} \subsetneq \mathcal{B}$, voir plus tard pour la définition de $\mathcal{H}$), le point critique appartient au bord du disque de Siegel.
- Il existe des nombres de Brjuno α tels que le point critique n'appartienne pas au bord du disque de Siegel.