Non existence de conjugaison différentiable à des rotations pour les difféomorphismes du cercle de classe C^2.[1]

Michael Robert HERMAN

Notations.

On pose $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$; pour $\alpha \in \mathbb{R}$, R_α désigne la translation de $\mathbb{R}$, $\theta \mapsto \theta + \alpha$. On désigne par $C^r(\mathbb{T}^1)$ l'espace des fonctions $\mathbb{Z}$-périodiques de classe C^r de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; pour $r \geq 1$ et $1 \leq p \leq +\infty$, on désigne par $W^{r,p}(\mathbb{T}^1)$ l'espace de Sobolev des fonctions continues $\mathbb{Z}$-périodiques dont les dérivées au sens des distributions jusqu'à l'ordre r appartiennent à $L^p(\mathbb{T}^1)$.

On note
$$D^r(\mathbb{T}^1) = \left\{ f \in Diff^r_+(\mathbb{R}), f - Id \in C^r(\mathbb{T}^1) \right\}$$
le groupe qui est le revêtement universel des difféomorphismes du cercle de classe C^r et préservant l'orientation.

Pour $r \geq 2$ et $1 \leq p \leq +\infty$, on définit
$$D^{r,p}(\mathbb{T}^1) = \left\{ f \in D^{r-1}(\mathbb{T}^1), f - Id \in W^{r,p}(\mathbb{T}^1) \right\} .$$
Avec la C^r-topologie (resp. la $W^{r,p}$-topologie, $p \neq +\infty$), $D^r(\mathbb{T}^1)$ (resp. $D^{r,p}(\mathbb{T}^1)$) est un groupe topologique polonais (i.e. homéomorphe à un espace métrique complet séparable).

On note $\rho(f)$ le nombre de rotation de $f \in D^0(\mathbb{T}^1)$. On pose :

$F^r_\alpha = \{f \in D^r(\mathbb{T}^1), \rho(f) = \alpha\}$
$F^{r,p}_\alpha = F^0_\alpha \cap D^{r,p}(\mathbb{T}^1)$
$O^r_\alpha = \{h \circ R_\alpha \circ h^{-1}, h \in D^r(\mathbb{T}^1)\}$.

On a $O^r_\alpha \subset F^r_\alpha$. L'ensemble F^r_α (resp. $F^{r,p}_\alpha$) est fermé pour la C^r-topologie (resp. la $W^{r,p}$-topologie).

Théorème. *Pour tout α de type constant[2] l'ensemble $F^2_\alpha \setminus O^1_\alpha$ est un G_δ-dense de F^2_α pour la C^2-topologie.*

Pour $f \in D^1(\mathbb{T}^1)$, on pose
$$H_1(f) = \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|D^n f\|_{C^0} .$$
Lemme. *Il existe une suite $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ dans F^∞_α convergeant dans la C^2 topologie vers R_α et telle que $H_1(f_i)$ tende vers $+\infty$.*

Démonstration. Par la proposition d'Yves Meyer [3] il existe une suite $(\varphi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de polynômes trigonométriques de moyenne nulle vérifiant
$$(1) \qquad \lim \|D\varphi_i\|_{C^0} = 0 \, ,$$

[1] Ce document extrait des archives de Michel Herman a été préparé par F. Laudenbach et J.-C. Yoccoz.
[2] Un nombre α est de *type constant* s'il existe $c > 0$ tel que $|\alpha - p/q| > cq^{-2}$ pour tout rationnel p/q.

et telle que la suite ψ_i de polynômes trigonométriques de moyenne nulle définie par

$$\psi_i \circ R_\alpha - \psi_i = \varphi_i,$$

vérifie

$$(2) \qquad \lim \|\psi_i\|_{C^0} = +\infty\,.$$

Quitte à multiplier φ_i par une constante positive, on peut supposer qu'on a aussi

$$(3) \qquad \lim e^{\|\psi_i\|_{C^0}} \|D\varphi_i\|_{C^0} = 0\,.$$

On veut définir $f_i = h_i \circ R_\alpha \circ h_i^{-1}$ de façon à avoir

$$(4) \qquad (\mathrm{Log} Df_i) \circ h_i = \varphi_i = \mathrm{Log} Dh_i \circ R_\alpha - \mathrm{Log} Dh_i\,,$$

et donc

$$Dh_i = \left(\int_0^1 e^{\psi_i(\theta)}\, d\theta \right)^{-1} e^{\psi_i}\,.$$

D'après le théorème d'Yves Meyer [3] (voir aussi [2] chap. V), la semi-norme BMO de ψ_i tend vers 0 ; comme ψ_i est de moyenne nulle, on a

$$(5) \qquad \lim \int_0^1 e^{\psi_i(\theta)}\, d\theta = 1\,.$$

De la formule (4) on tire $\mathrm{Log} Df_i = \varphi_i \circ h_i^{-1}$, et donc

$$f_i(\theta) = c_i + \int_0^\theta e^{\varphi_i \circ h_i^{-1}(t)} dt, \ c_i \in \mathbb{R}\,.$$

Comme on a

$$\int_0^1 e^{\varphi_i \circ h_i^{-1}(t)} dt = \int_0^1 e^{\varphi_i} Dh_i\, dt = \int_0^1 Dh_i \circ R_\alpha\, dt = 1\,,$$

f_i mod. 1 est un difféomorphisme analytique du cercle. Par [1] (chap. 3), il existe un unique $c_i \in \mathbb{R}$ tel que $\rho(f_i) = \alpha$. La suite f_i ainsi construite est donc incluse dans F_α^∞. Il suit de (3) et (5) que

$$\lim D^2 f_i = 0\,,$$

ce qui implique que la suite f_i converge vers R_α dans la C^2-topologie (car les fonctions $Df_i - 1$ et $f_i - R_\alpha$ s'annulent en au moins un point). Le fait que $H_1(f_i)$ tende vers $+\infty$ résulte de (2), de

$$Df_i^n \circ h_i = \frac{Dh_i \circ R_{n\alpha}}{Dh_i}$$

et du fait que la suite $(n\alpha)_{n \in \mathbb{Z}}$ est dense modulo 1. $\diamond$

Démonstration du théorème. Pour $N \in \mathbb{N}$ posons

$$K_N = \left\{ f \in F_\alpha^2, H_1(f) \leq N \right\}\,.$$

Puisque la fonction $f \mapsto H_1(f) \in \mathbb{R} \cup +\infty$ est semi-continue inférieurement pour la C^2-topologie, l'ensemble K_N est fermé. Il suit de [1] (chap. 4) que

$$O_\alpha^1 \cap F_\alpha^2 = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} K_N\,.$$

D'après le lemme, pour tout $N \geq 1$, la translation R_α n'appartient pas à l'intérieur de K_N. Pour tout $h \in D^1(\mathbb{T}^1)$ et $N \geq 1$, il existe N' tel que $h\, K_N\, h^{-1} \subset K_{N'}$. On en déduit que K_N est d'intérieur vide ce qui implique le théorème.

References

[1] M.R. Herman, *Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations,* Publ. IHÉS 49 (1979), 5-233.

[2] M.R. Herman, *Sur les courbes invariantes par les difféomorphismes de l'anneau (vol. 2),* Astérisque 144 (1986), Soc. Math. France.

[3] Y. Meyer, *Sur un problème de Michael Herman,* in : Chicago (1981), Conference on Harmonic Analysis in honour of Antoni Zygmund, ed. by W. Beckner and al., Wadworth, Belmont (1983), vol. II, 708-725.