Sur l'équation cohomologique pour les champs de vecteurs sur le tore[1]

Michael Robert HERMAN

Proposition. *Soit $X = (X_1, \ldots, X_n)$ un champ de vecteurs de classe C^∞ sur $\mathbb{T}^n$. On suppose que, pour tout $\eta \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$, il existe $c \in \mathbb{R}$ et $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ tels que*

$$\mathcal{L}_X f := \sum_1^n X_i \frac{\partial f}{\partial \theta_i} = \eta + c.$$

Alors le champ de vecteurs X est C^∞-conjugué à un champ de vecteurs constant $\alpha \in \mathbb{R}^n$ satisfaisant à une condition diophantienne.

Soit $(g_t)_{t\in\mathbb{R}}$ le flot associé à X.

Lemme 1. *Le flot g_t est uniquement ergodique.*

Démonstration. Soit $\eta \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$; on a

$$\int_0^T (c + \eta \circ g_t)\, dt = \int_0^T (X.f) \circ g_t \, dt = f \circ g_T - f.$$

Il en résulte que la fonction $\frac{1}{T}\int_0^T \eta \circ g_t \, dt$ converge uniformément vers $-c$ lorsque T tend vers l'infini. Il existe donc une seule mesure de probabilité invariante. $\square$

Lemme 2. *Le flot g_t préserve une forme volume de classe C^∞.*

Démonstration. On cherche une fonction $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$, strictement positive, telle que $\mathcal{L}_X(\varphi d\theta_1 \wedge \ldots \wedge d\theta_n = 0)$, c.-à-d.

$$\sum X_i \frac{\partial}{\partial \theta_i}(Log \varphi) = -\sum \frac{\partial X_i}{\partial \theta_i}.$$

Or par hypothèse, il existe $c \in \mathbb{R}$ et $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ tels que l'on ait

$$\sum X_i \frac{\partial f}{\partial \theta_i} = c - \sum \frac{\partial X_i}{\partial \theta_i}.$$

Montrons que $c = 0$. Comme dans la démonstration du lemme 1, si T tend vers l'infini,

$$\frac{1}{T}\int_0^T \left(\sum \frac{\partial X_i}{\partial \theta_i}\right) \circ g_t \, dt$$

[1] Ce document extrait des archives de Michel Herman, initialement sans titre, a été préparé par F. Laudenbach et J.-C. Yoccoz.

converge unfiformément vers c. Or on a

$$\frac{1}{T}\int_0^T \left(\sum \frac{\partial X_i}{\partial \theta_i}\right)\circ g_t\, dt = \frac{1}{T}\operatorname{Log}\det Dg_T.$$

Comme g_T est un difféomorphisme d'une variété compacte, la fonction $\operatorname{Log}\det Dg_T$ ne peut être partout strictement positive ou négative. Donc $c = 0$ et il suffit de prendre $\varphi = e^f$. $\square$

Corollaire. *Le flot g_t est minimal.*

Démonstration de la proposition. Pour $1 \le j \le n$, en appliquant l'hypothèse de la proposition, il existe $\alpha_j \in \mathbb{R}$ et $\varphi_j \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ tels que

$$\sum X_i \frac{\partial \varphi_j}{\partial \theta_i} = -X_j + \alpha_j.$$

Posons $\Phi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ et $H(\theta) = \theta + \Phi(\theta)$. L'application $H : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ est de classe C^∞ et on a

$$DH\, X = \alpha.$$

Ceci implique

$$H \circ g_t(\theta) = H(\theta) + t\alpha. \tag{6}$$

Comme le flot g_t est minimal, $\det(DH)$ ne peut s'annuler en un point sans s'annuler partout ; or H est homotope à l'identité, donc surjective. Donc $\det(DH)$ ne s'annule pas. On en déduit que H est un revêtement et donc un difféomorphisme de classe C^∞. La formule (6) donne alors :

$$H \circ g_t \circ H^{-1}(\theta) = \theta + t\alpha,$$

ce qui montre que X est C^∞-conjugué au champ de vecteurs constant α.

Le fait que α satisfait à une condition diophantienne se voit comme suit : d'une part, l'hypothèse d'existence d'une solution à l'équation homologique est invariante par conjugaison C^∞; d'autre part, en écrivant l'équation homologique pour un champ de vecteurs constant α en série de Fourier, on obtient que α satisfait à une condition diophantienne. $\square$

Remarque. La proposition reste valable pour un difféomorphisme g de $\mathbb{T}^n$ homotope à l'identité si on remplace l'équation différentielle par l'équation aux différences finies

$$f \circ g - f = c + \eta.$$