Une démonstration simple d'un cas particulier du théorème de C.L.C. Siegel[1][2]

Michael Robert HERMAN

Pour $r > 0$, on pose

$$\mathbb{D}_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \le r\}, \quad \mathbb{S}_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r\}.$$

1. Les espaces $O^{k,2}(\mathbb{D}_1)$, $k \in \mathbb{N}$.

On pose

$$O^{k,2}(\mathbb{D}_1) = \{\varphi \in L^2(S^1) \mid \varphi(\theta) = \sum_{n\ge 0} a_n e^{2\pi i n\theta}, \sum_{n\ge 0} n^{2k}|a_k|^2 < +\infty\}.$$

On note $\|D_\theta^k\varphi\|_{L^2}^2 = \sum_{n\ge 1}(2\pi n)^{2k}|a_k|^2$ et $\|\varphi\|_{O^{k,2}}^2 = |a_0|^2 + \|D_\theta^k\varphi\|_{L^2}^2$. Cette norme fait de $O^{k,2}(\mathbb{D}_1)$ un espace de Hilbert.

A chaque $\varphi \in O^{k,2}(\mathbb{D}_1)$ on associe son *extension* au disque

$$\tilde\varphi(z) = \sum_{n\ge 0} a_n z^n, \quad |z| < 1.$$

Par la théorie des espaces de Hardy H^2, on identifie ainsi $O^{k,2}(\mathbb{D}_1)$ à l'espace $\widetilde{O}^{k,2}(\mathbb{D}_1)$ des fonctions $\tilde\varphi$, holomorphes sur $\{|z| < 1\}$ et vérifiant

$$\sup_{r<1} \|D_\theta^k\tilde\varphi\|_{L^2(S_r)} < +\infty.$$

Remarque. Pour $k \ge 1$, on a l'équivalence

$$\varphi \in O^{k,2}(\mathbb{D}_1) \Leftrightarrow D_z\tilde\varphi \in \widetilde{O}^{k-1,2}(\mathbb{D}_1)$$

et alors

$$\widetilde{D_\theta\varphi} = 2\pi i z D_z\tilde\varphi.$$

De plus la norme

$$\sup_{r<1} \|D_z^k\tilde\varphi\|_{L^2(S_r)} + \sup_{r<1} \|\tilde\varphi\|_{L^2(S_r)}$$

est équivalente à la norme de $O^{k,2}(\mathbb{D}_1)$.

2. Les espaces $O^{k+\beta}(\mathbb{D}^1)$, $k \in \mathbb{N}$, $0 < \beta < 1$.

On note $\widetilde{O^{k+\beta}}(\mathbb{D}_1)$ l'espace des fonctions de classe $C^{k+\beta}$ sur $\mathbb{D}_1$ qui sont holomorphes sur le disque ouvert. On note $O^{k+\beta}(\mathbb{D}_1)$ l'espace des fonctions de classe $C^{k+\beta}$ sur S^1 dont les coefficients de Fourier d'indice strictement négatif sont nuls. Pour les normes naturelles, ces espaces

[1] Ce document extrait des archives de Michel Herman a été préparé par F. Laudenbach et J.-C. Yoccoz.

[2] Le lecteur pourra comparer la démonstration qui suit à celle donnée par Herman pour les difféomorphismes du cercle dans [3].

sont des espaces de Banach, et même des algèbres de Banach.

Proposition 1. L'inclusion de $\widetilde{O^{k+\beta}}(\mathbb{D}_1)$ dans $O^{k+\beta}(\mathbb{D}_1)$ est un isomorphisme d'espace de Banach.

Démonstration. Soit $\varphi \in O^{k+\beta}(\mathbb{D}_1)$. Au moyen d'opérateurs de convolution [2, chapitre 4] on écrit $\varphi = \sum_{p\geq 1} \varphi_p$ où les φ_p sont des polynômes trigonométriques vérifiant :

$$\mathrm{supp}(\hat{\varphi}_p) \subset \{2^{p-1} - 1 \leq n < 2^{p+1}\},$$

$$\|\varphi_p\|_{C^0} \leq const.2^{-p(k+\beta)}\|\varphi_p\|_{C^{k+\beta}}\,.$$

L'inégalité de Bernstein et le principe du maximum impliquent qu'un polynôme P de degré n vérifie :

$$\|DP\|_{C^0(S^1)} \leq const.n\|P\|_{C^0(S^1)}.$$

Les deux inégalités précédentes impliquent que $\tilde{\varphi} := \sum \tilde{\varphi}_p$ appartient à $O^k(\mathbb{D}_1)$. Le fait que $D^k(\tilde{\varphi})$ vérifie une condition de Hölder d'exposant β résulte d'arguments classiques [2, chapitre 4]. $\diamond$

3. Faits de la nature.

a) Si $\varphi \in O^{1,2}(\mathbb{D}_1)$, alors $\varphi \in O^{1/2}(\mathbb{D}_1)$ et on a :

$$\|\varphi\|_{O^{1/2}(\mathbb{D}_1)} \leq const.\|\varphi\|_{O^{1,2}(\mathbb{D}_1)}.$$

En effet, φ est absolument continu sur S^1 et on a donc $\varphi(\theta)-\varphi(\theta_0) = \int_{\theta_0}^{\theta} D\varphi(t)dt$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a $|\varphi(\theta) - \varphi(\theta_0)| \leq \|D\varphi\|_{L^2(S^1)}|\theta - \theta_0|^{\frac{1}{2}}$.

b) Soient $B \subset \mathbb{C}$ un ensemble compact, g une fonction holomorphe sur un voisinage de B et $\varphi \in O^{k,2}(\mathbb{D}_1)$, $k \geq 1$ vérifiant $\varphi(\mathbb{D}_1) \subset int(B)$. Alors on a $g \circ \varphi \in O^{k,2}(\mathbb{D}_1)$ et

$$\|D^k(g\circ\varphi)\|_{L^2(\mathbb{S}_1)} \leq C\left(\|\varphi\|^k_{O^{k,2}(\mathbb{D}_1)} + \|\varphi\|_{O^{k,2}(\mathbb{D}_1)}\right)\|g\|_{C^k(B)}$$

où C est une constante dépendant de k. Cela se voit en passant par $\widetilde{O}^{k,2}(\mathbb{D}_1)$.

c) Soient B, g comme ci-dessus et $\varphi \in O^{k+\beta}(\mathbb{D}_1)$ vérifiant $\varphi(\mathbb{D}_1) \subset int(B)$. Alors on a $g \circ \varphi \in O^{k+\beta}(\mathbb{D}_1)$ et

$$\|D(g\circ\varphi)\|_{C^{k-1+\beta}(\mathbb{S}_1)} \leq C\left(\|\varphi\|^k_{C^{k+\beta}} + \|\varphi\|_{C^{k+\beta}}\right)\|g\|_{C^{k+\beta}(B)}$$

où C est une constante dépendant de k.

d) Pour $k \geq 1$ et $0 < \delta \leq 1/2$, posons

$$K^{k,2}_\delta = \{h \in O^{k,2}(\mathbb{D}_1) \mid h(0) = 0, Dh(0) = 1, \|h - Id\|_{O^{k,2}(\mathbb{D}_1)} \leq \delta\}.$$

Pour la topologie faible de $O^{k,2}(\mathbb{D}_1)$, $K^{k,2}_\delta$ est un ensemble compact convexe métrisable. Si une suite h_i dans $K^{k,2}_\delta$ tend faiblement vers une limite h, alors h_i tend vers h dans la topologie

$C^{k-1/2-\varepsilon}$ pour tout $\varepsilon > 0$; cela résulte du a) ci-dessus.

e) Pour $0 < \beta < 1$ et $k \geq 1$, posons

$$K^{k+\beta} = \{h \in O^{k+\beta}(\mathbb{D}_1) \mid h(0) = 0, Dh(0) = 1, \|h - Id\|_{O^{k+\beta}(\mathbb{D}_1)} \leq \frac{1}{2}\}.$$

Pour la topologie C^k, $K^{k+\beta}$ est un ensemble compact convexe.

f) Pour $k \geq 1$, $O^{k,2}(\mathbb{D}_1)$ est une algèbre de Banach pour le produit des fonctions. Cela suit de son identification à $\widetilde{O}^{k,2}(\mathbb{D}_1)$ et du a) ci-dessus.

4. Propositions préliminaires.

Soient $\alpha \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ un nombre de type constant et $\lambda = e^{2\pi i\alpha}$. On rappelle que cela signifie qu'il existe une constante $\gamma > 0$ telle que $|\alpha - p/q| \geq \gamma/q^2$ pour tout rationnel p/q. La meilleure constante γ s'appelle la constante de Markov de α. On a $\gamma < 1$.

Proposition 2. *Soit $\eta \in O^{k,2}(\mathbb{D}_1)$, $k \geq 1$, tel que $\tilde{\eta}(0) = 0$. Alors il existe une unique fonction $\psi \in O^{k-1,2}(\mathbb{D}_1)$ vérifiant $\tilde{\psi}(0) = 0$ et*

$$\tilde{\psi}(z) - \tilde{\psi}(\lambda z) = \tilde{\eta}(z).$$

De plus on a

$$\|\psi\|_{O^{k-1,2}(\mathbb{D}_1)} \leq \frac{C}{\gamma}\|\eta\|_{O^{k,2}(\mathbb{D}_1)}$$

où C est une constante.

Démonstration. Elle est élémentaire et laissée en exercice. $\diamond$

Proposition 2 bis. *Soit $\eta \in O^{k+\beta}(\mathbb{D}_1)$, $k \geq 1, 0 < \beta < 1$, tel que $\tilde{\eta}(0) = 0$. Alors il existe une unique fonction $\psi \in O^{k-1+\beta}(\mathbb{D}_1)$ vérifiant $\tilde{\psi}(0) = 0$ et*

$$\tilde{\psi}(z) - \tilde{\psi}(\lambda z) = \tilde{\eta}(z).$$

De plus on a

$$\|\psi\|_{O^{k-1+\beta}(\mathbb{D}_1)} \leq \frac{C_\beta}{\gamma}\|\eta\|_{O^{k+\beta}(\mathbb{D}_1)}$$

où C_β est une constante.

Démonstration. Voir [2, chapitre 4]. $\diamond$

5. Une démonstration.

Nous allons donner une démonstration simple du théorème de C. L. Siegel de linéarisation des germes de difféomorphismes holomorphes dans le cas d'un nombre de rotation de type constant.

Théorème. *Soient $r > 0$, $f(z) = \lambda z + \dots$ une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}_r$. On suppose que $\lambda = e^{2\pi i\alpha}$ avec un nombre α de type constant de constante de Markov γ. Alors il existe une constante $c > 0$ indépendante de f et une fonction holomorphe $h(z) = z + \dots$ sur $\mathbb{D}_{c\gamma r}$ telle l'on ait*

$$h^{-1} \circ f \circ h(z) = \lambda z.$$

Démonstration. Quitte à conjuguer f par une homothétie, on peut écrire $f = \lambda f_1$, $f_1(z) = z + \dots$, avec f_1 holomorphe sur un voisinage de $\mathbb{D}_2$ et

$$\|f_1 - Id\|_{C^0(\mathbb{D}_2)} \leq \varepsilon\gamma.$$

où $\varepsilon > 0$ sera déterminé dans la suite.

On cherche une conjugaison $h \in K_\delta^{2,2}$ où $\delta > 0$ est choisi pour qu'on ait $h(\mathbb{D}_1) \subset \mathbb{D}_{3/2}$ (voir 3.a) ci-dessus). La fonction h doit vérifier $\lambda(f_1 \circ h)(z) = h(\lambda z)$, soit en dérivant

$$\mathrm{Log} Df_1 \circ h(z) = \mathrm{Log} Dh(\lambda z) - \mathrm{Log} Dh(z).$$

Pour $h \in K_\delta^{2,2}$, on a $\mathrm{Log} Df_1 \circ h(0) = \mathrm{Log} Dh(0) = 0$ et, d'après 3.b), $\mathrm{Log} Df_1 \circ h \in O^{2,2}(\mathbb{D}_1)$. D'après la proposition 2, il existe une unique fonction $\psi \in O^{1,2}(\mathbb{D}_1)$ vérifiant $\tilde{\psi}(0) = 0$ et

$$\tilde{\psi}(\lambda z) - \tilde{\psi}(z) = \mathrm{Log} Df_1 \circ h(z).$$

De plus, on a

$$(1) \quad \|\psi\|_{O^{1,2}(\mathbb{D}_1)} \leq \frac{C}{\gamma} \|\mathrm{Log} Df_1 \circ h\|_{O^{2,2}(\mathbb{D}_1)}.$$

On a $\|\mathrm{Log} Df_1\|_{C^2(\mathbb{D}_{3/2})} \leq const.\varepsilon\gamma$. D'après 3.b), comme $h \in K_\delta^{2,2}$, on a donc : $\|\mathrm{Log} Df_1 \circ h\|_{O^{2,2}(\mathbb{D}_1)} \leq const.\varepsilon\gamma$. Il suit alors de l'inégalité (1) que

$$\|\psi\|_{O^{1,2}(\mathbb{D}_1)} \leq const.\varepsilon.$$

D'après 3.a) on a

$$\|\psi\|_{O^{1/2}(\mathbb{D}_1)} \leq const.\varepsilon.$$

Posons $g(z) = \int_0^z e^{\psi(u)} du = z + \dots$. On a $g \in O^{2,2}(\mathbb{D}_1)$ et même $g \in K_\delta^{2,2}$ si $\varepsilon > 0$ est assez petit.

Nous avons défini ainsi une application $\Phi : K_\delta^{2,2} \to K_\delta^{2,2}, \Phi(h) = g$ où g est l'unique élément de $K_\delta^{2,2}$ vérifiant

$$(2) \quad Df_1 \circ h(z)\, Dg(z) = Dg(\lambda z).$$

Lemme. *L'application Φ est continue pour la topologie faible.*

Démonstration. Comme $K_\delta^{2,2}$ est compact métrisable pour la topologie faible, il suffit de voir que si une suite $h_i \in K_\delta^{2,2}$ converge vers une limite h et si $\Phi(h_i)$ converge vers une limite ℓ, alors $\Phi(h) = \ell$. Par la relation (2) et 3.d), ℓ vérifie $Df_1 \circ h(z)\, D\ell(z) = D\ell(\lambda z)$. Il résulte de l'unicité que $\Phi(h) = \ell$. $\diamond$

Fin de la démonstration.

Par le théorème de Schauder - Tychonov, Φ a un point fixe $h \in K_\delta^{2,2}$. Cet élément h vérifie donc

$$\lambda D(f_1 \circ h)(z) = \lambda Dh(\lambda z).$$

Cela donne $f \circ h(z) = h(\lambda z) + const.$. Or $f(0) = 0 = h(0)$, donc cette constante est nulle. $\diamond$

6. Remarques.

1. La même démonstration marche en remplaçant $K_\delta^{2,2}$ par $K^{1+\beta}$, $0 < \beta < 1$, en utilisant 3.e) et la proposition 2bis (qui est plus compliquée que la proposition 2).

2. Il n'est pas difficile de voir que, si ε est assez petit, l'application $\Phi : K_\delta^{2,2} \to K_\delta^{2,2}$ est une contraction lipschitzienne pour la norme de $O^{2,2}(\mathbb{D}_1)$. Plus précisément on a

$$\|\Phi(h_1) - \Phi(h_2)\| \leq const.\frac{\varepsilon}{\gamma}\|h_1 - h_2\|.$$

Pour voir ceci, il suffit de remarquer que, pour une fonction holomorphe g donnée sur $\mathbb{D}_2$ et $k \geq 1$, l'application $L_g : \varphi \mapsto g \circ \varphi$

$$\{\varphi \in O^{k,2}(\mathbb{D}_1), \|\varphi\|_{C^0} \leq \frac{3}{2}\} \to O^{k,2}(\mathbb{D}_1)$$

est holomorphe et vérifie $DL_g(\varphi).\Delta\varphi = Dg \circ \varphi.\Delta\varphi$.

Ceci donne une autre démonstration du théorème (mais, je le pense, avec de moins bonnes constantes). Cette remarque a été faite indépendamment par Adrien Douady.

3. Par la même méthode, on peut donner une démonstration simple du théorème d'Arnold pour les difféomorphismes $\mathbb{R}$-analytiques du cercle, dans le cas où le nombre de rotation est de type constant : si $f \in \mathrm{Diff}_+^\omega(\mathbb{T}^1)$ est ≪assez proche≫ de $R_\alpha : \theta \mapsto \theta + \alpha$ avec α de type constant, alors il existe $t \in \mathbb{T}^1$ et $h \in \mathrm{Diff}_+^\omega(\mathbb{T}^1)$ tels que l'on ait $f = R_t \circ h^{-1} \circ R_\alpha \circ h$. Pour le théorème d'Arnold, le lecteur peut consulter l'appendice de [1].

[1] M. R. Herman, *Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations*, Publ. I.H.É.S. 49 (1979), 5 - 233.

[2] M. R. Herman, Sur les courbes invariantes par les difféomorphismes de l'anneau, vol. 1 Astérisque 103-104 (1983).

[3] M. R. Herman, Simple proofs of local conjugacy theorems for diffeomorphisms of the circle with almost every rotation number, Bol. Soc. Brasil. Mat. 16 (1) (1985), 45 - 83.