Perturbations multidimensionnelles des polynômes quadratiques (1)

Jean-Christophe Yoccoz

Collège de France

3 février 2016

Objet de l'étude

Soit D un entier au moins égal à 1. On souhaite étudier la dynamique d'une application de la forme

$$f_{c,B}(x, y) = (P_c(x), 0) + (B_1(x, y), B_2(x, y)),$$

Objet de l'étude

Soit D un entier au moins égal à 1. On souhaite étudier la dynamique d'une application de la forme

$$f_{c,B}(x,y) = (P_c(x), 0) + (B_1(x,y), B_2(x,y)),$$

où

- $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^D$;

Objet de l'étude

Soit D un entier au moins égal à 1. On souhaite étudier la dynamique d'une application de la forme

$$f_{c,B}(x, y) = (P_c(x), 0) + (B_1(x, y), B_2(x, y)),$$

où

- $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^D$;
- P_c est le polynôme quadratique $P_c(x) = x^2 + c$;

Objet de l'étude

Soit D un entier au moins égal à 1. On souhaite étudier la dynamique d'une application de la forme

$$f_{c,B}(x,y) = (P_c(x), 0) + (B_1(x,y), B_2(x,y)),$$

où

- $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^D$;
- P_c est le polynôme quadratique $P_c(x) = x^2 + c$;
- Le domaine de définition de B_1 et B_2 (et donc aussi de $f_{c,B}$) est une boite $\mathcal{B} := [-3,3] \times \mathfrak{B}(\mho)$, où $\mathfrak{B}(\mho)$ est la boule euclidienne de rayon $\mho \leqslant 1$ centrée à l'origine de $\mathbb{R}^D$.

On suppose que B_1, B_2 sont de classe C^2 et petites dans $\mathcal{B}$.
On posera

$$b = \max(\|B_1\|_{C^2}, \|B_2\|_{C^2}) \ll 1.$$

On suppose que B_1, B_2 sont de classe C^2 et petites dans $\mathcal{B}$. On posera

$$b = \max(\|B_1\|_{C^2}, \|B_2\|_{C^2}) \ll 1.$$

On supposera aussi $b < \mho/2$.

On suppose que B_1, B_2 sont de classe C^2 et petites dans $\mathcal{B}$.
On posera

$$b = \max(\|B_1\|_{C^2}, \|B_2\|_{C^2}) \ll 1.$$

On supposera aussi $b < \mho/2$.

Le paramètre c sera astreint à vérifier les conditions suivantes:

$$c > -2, \quad 0 < b \ll c + 2 \ll 1.$$

On suppose que B_1, B_2 sont de classe C^2 et petites dans $\mathcal{B}$.
On posera

$$b = \max(\|B_1\|_{C^2}, \|B_2\|_{C^2}) \ll 1.$$

On supposera aussi $b < \mho/2$.

Le paramètre c sera astreint à vérifier les conditions suivantes:

$$c > -2, \quad 0 < b \ll c + 2 \ll 1.$$

Exemple: Pour $D = 1$, $\mho = 1$, $B_1(x, y) = \pm by$, $B_2(x, y) = bx$,

$$f_{c,B} = (x^2 + c \pm by, bx),$$

On suppose que B_1, B_2 sont de classe C^2 et petites dans $\mathcal{B}$. On posera

$$b = \max(\|B_1\|_{C^2}, \|B_2\|_{C^2}) \ll 1.$$

On supposera aussi $b < \mho/2$.

Le paramètre c sera astreint à vérifier les conditions suivantes:

$$c > -2, \quad 0 < b \ll c + 2 \ll 1.$$

Exemple: Pour $D = 1$, $\mho = 1$, $B_1(x, y) = \pm by$, $B_2(x, y) = bx$,

$$f_{c,B} = (x^2 + c \pm by, bx),$$

On obtient la famille de difféomorphismes polynomiaux du plan dite famille de Hénon, qui a fait l'objet de nombreuses études.

Quelques rappels sur la dynamique de P_c

Pour $c \in \mathbb{R}$, on désigne par

Quelques rappels sur la dynamique de P_c

Pour $c \in \mathbb{R}$, on désigne par

- K_c l'ensemble de Julia rempli, c'est à dire l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ dont l'orbite sous P_c est bornée;

Quelques rappels sur la dynamique de P_c

Pour $c \in \mathbb{R}$, on désigne par

- K_c l'ensemble de Julia rempli, c'est à dire l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ dont l'orbite sous P_c est bornée;
- E_c le bassin de l'infini, c'est a dire l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ dont l'orbite sous P_c tend vers l'infini.

Quelques rappels sur la dynamique de P_c

Pour $c \in \mathbb{R}$, on désigne par

- K_c l'ensemble de Julia rempli, c'est à dire l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ dont l'orbite sous P_c est bornée;
- E_c le bassin de l'infini, c'est a dire l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ dont l'orbite sous P_c tend vers l'infini.

L'ensemble K_c est compact.

Quelques rappels sur la dynamique de P_c

Pour $c \in \mathbb{R}$, on désigne par

- K_c l'ensemble de Julia rempli, c'est à dire l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ dont l'orbite sous P_c est bornée;
- E_c le bassin de l'infini, c'est a dire l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ dont l'orbite sous P_c tend vers l'infini.

L'ensemble K_c est compact. L'ensemble E_c est ouvert.

Quelques rappels sur la dynamique de P_c

Pour $c \in \mathbb{R}$, on désigne par

- K_c l'ensemble de Julia rempli, c'est à dire l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ dont l'orbite sous P_c est bornée;
- E_c le bassin de l'infini, c'est a dire l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ dont l'orbite sous P_c tend vers l'infini.

L'ensemble K_c est compact. L'ensemble E_c est ouvert. Les deux ensembles sont invariants sous P_c. On a

$$\mathbb{R} = K_c \sqcup E_c.$$

Quelques rappels sur la dynamique de P_c (suite)

- Pour $c > 1/4$, on a $P_c(x) > x, \forall x \in \mathbb{R}$, donc $K_c = \emptyset$, $E_c = \mathbb{R}$.

Quelques rappels sur la dynamique de P_c (suite)

- Pour $c > 1/4$, on a $P_c(x) > x, \forall x \in \mathbb{R}$, donc $K_c = \emptyset$, $E_c = \mathbb{R}$.
- Pour $1/4 \geqslant c \geqslant -2$, on a $K_c = [-\beta(c), \beta(c)]$, où $\beta(c) := \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - 4c})$ est le plus grand point fixe de P_c.

Quelques rappels sur la dynamique de P_c (suite)

- Pour $c > 1/4$, on a $P_c(x) > x, \forall x \in \mathbb{R}$, donc $K_c = \emptyset$, $E_c = \mathbb{R}$.
- Pour $1/4 \geqslant c \geqslant -2$, on a $K_c = [-\beta(c), \beta(c)]$, où $\beta(c) := \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1-4c})$ est le plus grand point fixe de P_c. Le point critique 0 appartient à K_c.

Quelques rappels sur la dynamique de P_c (suite)

- Pour $c > 1/4$, on a $P_c(x) > x, \forall x \in \mathbb{R}$, donc $K_c = \emptyset$, $E_c = \mathbb{R}$.
- Pour $1/4 \geqslant c \geqslant -2$, on a $K_c = [-\beta(c), \beta(c)]$, où $\beta(c) := \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1-4c})$ est le plus grand point fixe de P_c. Le point critique 0 appartient à K_c.
- Pour $-2 > c$, K_c est un ensemble de Cantor.

Quelques rappels sur la dynamique de P_c (suite)

- Pour $c > 1/4$, on a $P_c(x) > x, \forall x \in \mathbb{R}$, donc $K_c = \emptyset$, $E_c = \mathbb{R}$.
- Pour $1/4 \geqslant c \geqslant -2$, on a $K_c = [-\beta(c), \beta(c)]$, où $\beta(c) := \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1-4c})$ est le plus grand point fixe de P_c. Le point critique 0 appartient à K_c.
- Pour $-2 > c$, K_c est un ensemble de Cantor. Le point critique appartient à E_c.

Quelques rappels sur la dynamique de P_c (suite)

- Pour $c > 1/4$, on a $P_c(x) > x, \forall x \in \mathbb{R}$, donc $K_c = \emptyset$, $E_c = \mathbb{R}$.
- Pour $1/4 \geqslant c \geqslant -2$, on a $K_c = [-\beta(c), \beta(c)]$, où $\beta(c) := \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1-4c})$ est le plus grand point fixe de P_c. Le point critique 0 appartient à K_c.
- Pour $-2 > c$, K_c est un ensemble de Cantor. Le point critique appartient à E_c. La dynamique de P_c sur K_c est expansive et topologiquement conjuguée au décalage unilatéral sur deux symboles.

Quelques rappels sur la dynamique de P_c (suite)

Proposition (Fatou) Pour $c \in [-2, 1/4]$, P_c a au plus une orbite non répulsive.

Quelques rappels sur la dynamique de P_c (suite)

Proposition (Fatou) Pour $c \in [-2, 1/4]$, P_c a au plus une orbite non répulsive.

En effet, le bassin d'une telle orbite doit contenir un point critique.

Quelques rappels sur la dynamique de P_c (suite)

Proposition (Fatou) Pour $c \in [-2, 1/4]$, P_c a au plus une orbite non répulsive.

En effet, le bassin d'une telle orbite doit contenir un point critique.

On peut ainsi diviser l'intervalle $[-2, 1/4]$ en trois parties:

Quelques rappels sur la dynamique de P_c (suite)

Proposition (Fatou) Pour $c \in [-2, 1/4]$, P_c a au plus une orbite non répulsive.

En effet, le bassin d'une telle orbite doit contenir un point critique.

On peut ainsi diviser l'intervalle $[-2, 1/4]$ en trois parties:

- une partie ouverte *Hyp* formée des paramètres c tels que P_c ait une orbite périodique attractive.

Quelques rappels sur la dynamique de P_c (suite)

Proposition (Fatou) Pour $c \in [-2, 1/4]$, P_c a au plus une orbite non répulsive.

En effet, le bassin d'une telle orbite doit contenir un point critique.

On peut ainsi diviser l'intervalle $[-2, 1/4]$ en trois parties:

- une partie ouverte *Hyp* formée des paramètres c tels que P_c ait une orbite périodique attractive. L' ensemble de Julia J_c est le complémentaire dans K_c du bassin de l'orbite périodique attractive.

Quelques rappels sur la dynamique de P_c (suite)

Proposition (Fatou) Pour $c \in [-2, 1/4]$, P_c a au plus une orbite non répulsive.

En effet, le bassin d'une telle orbite doit contenir un point critique.

On peut ainsi diviser l'intervalle $[-2, 1/4]$ en trois parties:

- une partie ouverte *Hyp* formée des paramètres c tels que P_c ait une orbite périodique attractive. L' ensemble de Julia J_c est le complémentaire dans K_c du bassin de l'orbite périodique attractive. Il est P_c-invariant, de mesure de Lebesgue nulle et ne contient pas le point critique. La dynamique de P_c sur J_c est expansive.

Quelques rappels sur la dynamique de P_c (suite)

Proposition (Fatou) Pour $c \in [-2, 1/4]$, P_c a au plus une orbite non répulsive.

En effet, le bassin d'une telle orbite doit contenir un point critique.

On peut ainsi diviser l'intervalle $[-2, 1/4]$ en trois parties:

- une partie ouverte *Hyp* formée des paramètres c tels que P_c ait une orbite périodique attractive. L' ensemble de Julia J_c est le complémentaire dans K_c du bassin de l'orbite périodique attractive. Il est P_c-invariant, de mesure de Lebesgue nulle et ne contient pas le point critique. La dynamique de P_c sur J_c est expansive.
- une partie dénombrable discrète *Par* formée des paramètres c tels que P_c ait une orbite périodique parabolique.

Quelques rappels sur la dynamique de P_c (suite)

Proposition (Fatou) Pour $c \in [-2, 1/4]$, P_c a au plus une orbite non répulsive.

En effet, le bassin d'une telle orbite doit contenir un point critique.

On peut ainsi diviser l'intervalle $[-2, 1/4]$ en trois parties:

- une partie ouverte *Hyp* formée des paramètres c tels que P_c ait une orbite périodique attractive. L' ensemble de Julia J_c est le complémentaire dans K_c du bassin de l'orbite périodique attractive. Il est P_c-invariant, de mesure de Lebesgue nulle et ne contient pas le point critique. La dynamique de P_c sur J_c est expansive.
- une partie dénombrable discrète *Par* formée des paramètres c tels que P_c ait une orbite périodique parabolique. Le bassin de l'orbite parabolique est alors de mesure de Lebesgue totale dans K_c.

Quelques rappels sur la dynamique de P_c (suite)

Proposition (Fatou) Pour $c \in [-2, 1/4]$, P_c a au plus une orbite non répulsive.

En effet, le bassin d'une telle orbite doit contenir un point critique.

On peut ainsi diviser l'intervalle $[-2, 1/4]$ en trois parties:

- une partie ouverte *Hyp* formée des paramètres c tels que P_c ait une orbite périodique attractive. L' ensemble de Julia J_c est le complémentaire dans K_c du bassin de l'orbite périodique attractive. Il est P_c-invariant, de mesure de Lebesgue nulle et ne contient pas le point critique. La dynamique de P_c sur J_c est expansive.
- une partie dénombrable discrète *Par* formée des paramètres c tels que P_c ait une orbite périodique parabolique. Le bassin de l'orbite parabolique est alors de mesure de Lebesgue totale dans K_c.
- une partie *Irreg* formée des paramètres c tels que toutes les orbites périodiques de P_c soient répulsives.

Résultats principaux

On note *Sto* l'ensemble des paramètres $c \in [-2, 1/4]$ qui ont la propriété suivante:

Résultats principaux

On note *Sto* l'ensemble des paramètres $c \in [-2, 1/4]$ qui ont la propriété suivante:
P_c possède une mesure de probabilité μ qui soit invariante,

Résultats principaux

On note *Sto* l'ensemble des paramètres $c \in [-2, 1/4]$ qui ont la propriété suivante:
P_c possède une mesure de probabilité μ qui soit invariante, ergodique,

Résultats principaux

On note *Sto* l'ensemble des paramètres $c \in [-2, 1/4]$ qui ont la propriété suivante:
P_c possède une mesure de probabilité μ qui soit invariante, ergodique, absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue,

Résultats principaux

On note *Sto* l'ensemble des paramètres $c \in [-2, 1/4]$ qui ont la propriété suivante:
P_c possède une mesure de probabilité μ qui soit invariante, ergodique, absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, et ait un exposant de Lyapunov θ strictement positif: for μ-presque tout x

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log |DP_c^n(x)| = \theta.$$

Résultats principaux

On note *Sto* l'ensemble des paramètres $c \in [-2, 1/4]$ qui ont la propriété suivante:
P_c possède une mesure de probabilité μ qui soit invariante, ergodique, absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, et ait un exposant de Lyapunov θ strictement positif: for μ-presque tout x

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log |DP_c^n(x)| = \theta.$$

Comme le support de μ est de mesure de Lebesgue positive, on a

$$Sto \subset Irreg.$$

Théorème (Jakobson 1981)

Théorème (Jakobson 1981) L' ensemble *Sto* est de mesure de Lebesgue positive. Plus précisément,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \mathrm{Leb}\,(\mathit{Sto} \cap [-2, -2+\varepsilon]) = 1.$$

Théorème (Jakobson 1981) L' ensemble *Sto* est de mesure de Lebesgue positive. Plus précisément,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \mathrm{Leb}\left(Sto \cap [-2, -2+\varepsilon] \right) = 1.$$

Théorème (Graczyk-Swiatek, Lyubich 1997-8)

Théorème (Jakobson 1981) L' ensemble *Sto* est de mesure de Lebesgue positive. Plus précisément,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \mathrm{Leb}\,(Sto \cap [-2, -2 + \varepsilon]) = 1.$$

Théorème (Graczyk-Swiatek, Lyubich 1997-8) L'ensemble ouvert *Hyp* est dense dans $[-2, 1/4]$.

Théorème (Jakobson 1981) L' ensemble *Sto* est de mesure de Lebesgue positive. Plus précisément,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \mathrm{Leb}\,(Sto \cap [-2, -2 + \varepsilon]) = 1.$$

Théorème (Graczyk-Swiatek, Lyubich 1997-8) L'ensemble ouvert *Hyp* est dense dans $[-2, 1/4]$.

Théorème (Lyubich 2002)

Théorème (Jakobson 1981) L' ensemble *Sto* est de mesure de Lebesgue positive. Plus précisément,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \mathrm{Leb}\,(Sto \cap [-2, -2+\varepsilon]) = 1.$$

Théorème (Graczyk-Swiatek, Lyubich 1997-8) L'ensemble ouvert *Hyp* est dense dans $[-2, 1/4]$.

Théorème (Lyubich 2002) L'ensemble $Irreg \setminus Sto$ est de mesure de Lebesgue nulle.

Théorème (Jakobson 1981) L' ensemble *Sto* est de mesure de Lebesgue positive. Plus précisément,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \mathrm{Leb} \left(Sto \cap [-2, -2 + \varepsilon] \right) = 1.$$

Théorème (Graczyk-Swiatek, Lyubich 1997-8) L'ensemble ouvert *Hyp* est dense dans $[-2, 1/4]$.

Théorème (Lyubich 2002) L'ensemble $Irreg \setminus Sto$ est de mesure de Lebesgue nulle.

Donc $Hyp \cup Sto$ est de mesure totale dans $[-2, 1/4]$, chacun des deux ensembles étant de mesure de Lebesgue positive.

Remarque Pour $c \in (-2, -1]$, l'intervalle $[c, c^2 + c] = [P_c(0), P_c^2(0)]$ est positivement invariant sous P_c.

Remarque Pour $c \in (-2, -1]$, l'intervalle $[c, c^2 + c] = [P_c(0), P_c^2(0)]$ est positivement invariant sous P_c. On a

$$\bigcup_{n \geqslant 0} P_c^{-n}([c, c^2 + c]) = \mathrm{int}(K_c) = (-\beta(c), \beta(c)).$$

Pour les paramètres $c \in Sto$ construits dans la preuve du théorème de Jakobson, le support de la mesure μ est égal à $[c, c^2 + c]$.

Remarque Pour $c \in (-2, -1]$, l'intervalle $[c, c^2 + c] = [P_c(0), P_c^2(0)]$ est positivement invariant sous P_c. On a

$$\bigcup_{n \geqslant 0} P_c^{-n}([c, c^2 + c]) = \mathrm{int}(K_c) = (-\beta(c), \beta(c)).$$

Pour les paramètres $c \in Sto$ construits dans la preuve du théorème de Jakobson, le support de la mesure μ est égal à $[c, c^2 + c]$. Pour ces paramètres, la dynamique de P_c sur $[c, c^2 + c]$ est transitive.

Points fixes de $f_{c,B}$

Pour $c \in [-2, 1/4)$, on note $\beta(c) := \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - 4c})$ et $\alpha(c) := \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - 4c})$ les deux points fixes de P_c.

Points fixes de $f_{c,B}$

Pour $c \in [-2, 1/4)$, on note $\beta(c) := \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1-4c})$ et $\alpha(c) := \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-4c})$ les deux points fixes de P_c.
Pour c proche de -2, on a

$$\beta(c) = 2 - \frac{1}{3}(c+2) + O((c+2)^2), \quad \alpha(c) = -1 + \frac{1}{3}(c+2) + O((c+2)^2).$$

Points fixes de $f_{c,B}$

Pour $c \in [-2, 1/4)$, on note $\beta(c) := \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1-4c})$ et $\alpha(c) := \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-4c})$ les deux points fixes de P_c.
Pour c proche de -2, on a

$$\beta(c) = 2 - \frac{1}{3}(c+2) + O((c+2)^2), \quad \alpha(c) = -1 + \frac{1}{3}(c+2) + O((c+2)^2).$$

Les points fixes de $f_{c,0}$ sont $(\beta(c), 0)$ et $(\alpha(c), 0)$.

Points fixes de $f_{c,B}$

Pour $c \in [-2, 1/4)$, on note $\beta(c) := \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1-4c})$ et $\alpha(c) := \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-4c})$ les deux points fixes de P_c.
Pour c proche de -2, on a

$$\beta(c) = 2 - \frac{1}{3}(c+2) + O((c+2)^2), \quad \alpha(c) = -1 + \frac{1}{3}(c+2) + O((c+2)^2).$$

Les points fixes de $f_{c,0}$ sont $(\beta(c), 0)$ et $(\alpha(c), 0)$.
Par le théorème des fonctions implicites, $f_{c,B}$ a deux points fixes $\boldsymbol{\beta}(c, B)$ et $\boldsymbol{\alpha}(c, B)$ qui vérifient

$$\boldsymbol{\beta}(c, B) = (\beta(c), 0) + O(b), \quad \boldsymbol{\alpha}(c, B) = (\alpha(c), 0) + O(b).$$

Variétés stables des points fixes

La variété stable locale de $\beta = \beta(c, B)$ est l'ensemble

$$W^s_{loc}(\beta) := \{(x,y) \mid |x - \beta(c)| < 2b,\ \|y\| \leqslant \mho, \lim_n f^n_{c,B}(x,y) = \beta\}.$$

Variétés stables des points fixes

La variété stable locale de $\beta = \beta(c, B)$ est l'ensemble

$$W^s_{loc}(\beta) := \{(x, y) \mid |x - \beta(c)| < 2b,\ \|y\| \leqslant \mho, \lim_n f^n_{c,B}(x, y) = \beta\}.$$

D'après le théorème de la variété stable, $W^s_{loc}(\beta)$ est le graphe d'une application de class C^2: $\mathfrak{B}(\mho) \to (\beta(c) - 2b, \beta(c) + 2b)$ qui est $O(b)$ proche d'une constante dans la C^2-topologie.

Variétés stables des points fixes

La variété stable locale de $\beta = \beta(c, B)$ est l'ensemble

$$W^s_{loc}(\beta) := \{(x, y) \mid |x - \beta(c)| < 2b,\ \|y\| \leqslant \mho, \lim_n f^n_{c,B}(x, y) = \beta\}.$$

D'après le théorème de la variété stable, $W^s_{loc}(\beta)$ est le graphe d'une application de class C^2: $\mathfrak{B}(\mho) \to (\beta(c) - 2b, \beta(c) + 2b)$ qui est $O(b)$ proche d'une constante dans la C^2-topologie.

L'image inverse $f^{-1}_{c,B}(W^s_{loc}(\beta))$ a deux composantes connexes.

Variétés stables des points fixes

La variété stable locale de $\beta = \beta(c, B)$ est l'ensemble

$$W^s_{loc}(\beta) := \{(x, y) \mid |x - \beta(c)| < 2b,\ \|y\| \leqslant \mho, \lim_n f^n_{c,B}(x, y) = \beta\}.$$

D'après le théorème de la variété stable, $W^s_{loc}(\beta)$ est le graphe d'une application de class C^2: $\mathfrak{B}(\mho) \to (\beta(c) - 2b, \beta(c) + 2b)$ qui est $O(b)$ proche d'une constante dans la C^2-topologie.

L'image inverse $f^{-1}_{c,B}(W^s_{loc}(\beta))$ a deux composantes connexes. L'une est égale à $W^s_{loc}(\beta)$. L'autre est un graphe $O(b)$ proche de $\{x = -\beta(c)\}$.

Variétés stables des points fixes

La variété stable locale de $\beta = \beta(c, B)$ est l'ensemble

$$W^s_{loc}(\beta) := \{(x,y) \mid |x - \beta(c)| < 2b,\ \|y\| \leqslant \mho, \lim_n f^n_{c,B}(x,y) = \beta\}.$$

D'après le théorème de la variété stable, $W^s_{loc}(\beta)$ est le graphe d'une application de class C^2: $\mathfrak{B}(\mho) \to (\beta(c) - 2b, \beta(c) + 2b)$ qui est $O(b)$ proche d'une constante dans la C^2-topologie.

L'image inverse $f^{-1}_{c,B}(W^s_{loc}(\beta))$ a deux composantes connexes. L'une est égale à $W^s_{loc}(\beta)$. L'autre est un graphe $O(b)$ proche de $\{x = -\beta(c)\}$. On notera (abusivement) $W^s_{loc}(-\beta)$ cette deuxième composante.

Variétés stables des points fixes

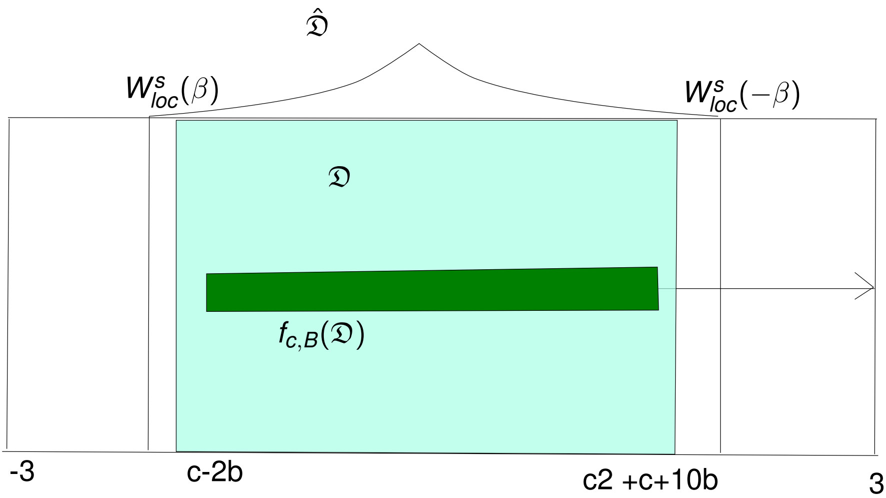
La variété stable locale de $\beta = \beta(c, B)$ est l'ensemble

$$W^s_{loc}(\beta) := \{(x, y) \mid |x - \beta(c)| < 2b,\ \|y\| \leqslant \mho, \lim_n f^n_{c,B}(x, y) = \beta\}.$$

D'après le théorème de la variété stable, $W^s_{loc}(\beta)$ est le graphe d'une application de class C^2: $\mathfrak{B}(\mho) \to (\beta(c) - 2b, \beta(c) + 2b)$ qui est $O(b)$ proche d'une constante dans la C^2-topologie.

L'image inverse $f^{-1}_{c,B}(W^s_{loc}(\beta))$ a deux composantes connexes. L'une est égale à $W^s_{loc}(\beta)$. L'autre est un graphe $O(b)$ proche de $\{x = -\beta(c)\}$. On notera (abusivement) $W^s_{loc}(-\beta)$ cette deuxième composante.

Les mêmes conclusion valent pour l'autre point fixe $\alpha := \alpha(c, B)$ de $f_{c,B}$.



$\hat{\mathfrak{D}}$
$W^s_{loc}(\beta)$
$W^s_{loc}(-\beta)$
$\mathfrak{D}$
$f_{c,B}(\mathfrak{D})$
-3
c-2b
c2 +c+10b
3

L'attracteur potentiel

Dans la figure précédente:

- $\hat{\mathfrak{D}}$ est le tube dans $\{\|y\| \leqslant \mho\}$ borné par $W^s_{loc}(\beta)$ et $W^s_{loc}(-\beta)$.

L'attracteur potentiel

Dans la figure précédente:

- $\hat{\mathfrak{D}}$ est le tube dans $\{\|y\| \leqslant \mho\}$ borné par $W^s_{loc}(\beta)$ et $W^s_{loc}(-\beta)$.
- $\mathfrak{D}$ est le tube dans $\{\|y\| \leqslant \mho\}$ borné par $\{x = c - 2b\}$ et $\{x = c^2 + c + 10b\}$.

L'attracteur potentiel

Dans la figure précédente:

- $\hat{\mathfrak{D}}$ est le tube dans $\{\|y\| \leqslant \mho\}$ borné par $W^s_{loc}(\beta)$ et $W^s_{loc}(-\beta)$.
- $\mathfrak{D}$ est le tube dans $\{\|y\| \leqslant \mho\}$ borné par $\{x = c - 2b\}$ et $\{x = c^2 + c + 10b\}$.

On a

$$\overline{f_{c,B}(\mathfrak{D})} \subset \mathfrak{D}.$$

L'attracteur potentiel

Dans la figure précédente:

- $\hat{\mathfrak{D}}$ est le tube dans $\{\|y\| \leqslant \mho\}$ borné par $W^s_{loc}(\beta)$ et $W^s_{loc}(-\beta)$.
- $\mathfrak{D}$ est le tube dans $\{\|y\| \leqslant \mho\}$ borné par $\{x = c - 2b\}$ et $\{x = c^2 + c + 10b\}$.

On a

$$\overline{f_{c,B}(\mathfrak{D})} \subset \mathfrak{D}.$$

L'attracteur potentiel $\mathfrak{A}$ est la partie compacte

$$\mathfrak{A} := \bigcap_{n \geqslant 0} f^n_{c,B}(\mathfrak{D}) = \bigcap_{n \geqslant 0} f^n_{c,B}(\hat{\mathfrak{D}}).$$

L'objectif principal

Pour chaque entier M assez grand,

L'objectif principal

Pour chaque entier M assez grand, pour tout $b < b(M) \ll 4^{-M}$,

L'objectif principal

Pour chaque entier M assez grand, pour tout $b < b(M) \ll 4^{-M}$, on veut construire un ensemble $E_{M,B}$ de paramètres c (dits fortement réguliers dans la suite) avec les propriétés suivantes:

L'objectif principal

Pour chaque entier M assez grand, pour tout $b < b(M) \ll 4^{-M}$, on veut construire un ensemble $E_{M,B}$ de paramètres c (dits fortement réguliers dans la suite) avec les propriétés suivantes:

- $E_{M,B} \subset [-2 + \aleph\, 4^{-M}, -2 + \aleph\, 4^{1-M}]$ (avec $\aleph := \frac{4\pi^2}{9}$);

L'objectif principal

Pour chaque entier M assez grand, pour tout $b < b(M) \ll 4^{-M}$, on veut construire un ensemble $E_{M,B}$ de paramètres c (dits fortement réguliers dans la suite) avec les propriétés suivantes:

- $E_{M,B} \subset [-2 + \aleph\, 4^{-M}, -2 + \aleph\, 4^{1-M}]$ (avec $\aleph := \frac{4\pi^2}{9}$);
- $\frac{\mathrm{Leb}(E_{M,B})}{\aleph(4^{1-M} - 4^{-M})} \geqslant \delta_M$,

L'objectif principal

Pour chaque entier M assez grand, pour tout $b < b(M) \ll 4^{-M}$, on veut construire un ensemble $E_{M,B}$ de paramètres c (dits fortement réguliers dans la suite) avec les propriétés suivantes:

- $E_{M,B} \subset [-2 + \aleph\, 4^{-M}, -2 + \aleph\, 4^{1-M}]$ (avec $\aleph := \frac{4\pi^2}{9}$);
- $\frac{\mathrm{Leb}(E_{M,B})}{\aleph(4^{1-M} - 4^{-M})} \geqslant \delta_M$, avec $\lim_{M\to\infty} \delta_M = 1$;

L'objectif principal

Pour chaque entier M assez grand, pour tout $b < b(M) \ll 4^{-M}$, on veut construire un ensemble $E_{M,B}$ de paramètres c (dits fortement réguliers dans la suite) avec les propriétés suivantes:

- $E_{M,B} \subset [-2 + \aleph\, 4^{-M}, -2 + \aleph\, 4^{1-M}]$ (avec $\aleph := \frac{4\pi^2}{9}$);
- $\frac{\mathrm{Leb}(E_{M,B})}{\aleph(4^{1-M} - 4^{-M})} \geqslant \delta_M$, avec $\lim_{M\to\infty} \delta_M = 1$;
- Pour $c \in E_{M,B}$, l'attracteur $\mathfrak{A}$ supporte une mesure ergodique physique μ invariante par $f_{c,B}$.

L'objectif principal

Pour chaque entier M assez grand, pour tout $b < b(M) \ll 4^{-M}$, on veut construire un ensemble $E_{M,B}$ de paramètres c (dits fortement réguliers dans la suite) avec les propriétés suivantes:

- $E_{M,B} \subset [-2 + \aleph\, 4^{-M}, -2 + \aleph\, 4^{1-M}]$ (avec $\aleph := \frac{4\pi^2}{9}$);
- $\frac{\mathrm{Leb}(E_{M,B})}{\aleph(4^{1-M} - 4^{-M})} \geqslant \delta_M$, avec $\lim_{M\to\infty} \delta_M = 1$;
- Pour $c \in E_{M,B}$, l'attracteur $\mathfrak{A}$ supporte une mesure ergodique physique μ invariante par $f_{c,B}$. En fait, Lebesgue presque tout point de $\hat{\mathfrak{D}}$ est μ-générique;

L'objectif principal

Pour chaque entier M assez grand, pour tout $b < b(M) \ll 4^{-M}$, on veut construire un ensemble $E_{M,B}$ de paramètres c (dits fortement réguliers dans la suite) avec les propriétés suivantes:

- $E_{M,B} \subset [-2 + \aleph\, 4^{-M}, -2 + \aleph\, 4^{1-M}]$ (avec $\aleph := \frac{4\pi^2}{9}$);
- $\frac{\mathrm{Leb}(E_{M,B})}{\aleph(4^{1-M} - 4^{-M})} \geqslant \delta_M$, avec $\lim_{M\to\infty} \delta_M = 1$;
- Pour $c \in E_{M,B}$, l'attracteur $\mathfrak{A}$ supporte une mesure ergodique physique μ invariante par $f_{c,B}$. En fait, Lebesgue presque tout point de $\hat{\mathfrak{D}}$ est μ-générique;
- La mesure μ a un exposant de Lyapunov strictement positif

L'objectif principal

Pour chaque entier M assez grand, pour tout $b < b(M) \ll 4^{-M}$, on veut construire un ensemble $E_{M,B}$ de paramètres c (dits fortement réguliers dans la suite) avec les propriétés suivantes:

- $E_{M,B} \subset [-2 + \aleph\, 4^{-M}, -2 + \aleph\, 4^{1-M}]$ (avec $\aleph := \frac{4\pi^2}{9}$);
- $\frac{\mathrm{Leb}(E_{M,B})}{\aleph(4^{1-M}-4^{-M})} \geqslant \delta_M$, avec $\lim_{M\to\infty} \delta_M = 1$;
- Pour $c \in E_{M,B}$, l'attracteur $\mathfrak{A}$ supporte une mesure ergodique physique μ invariante par $f_{c,B}$. En fait, Lebesgue presque tout point de $\hat{\mathfrak{D}}$ est μ-générique;
- La mesure μ a un exposant de Lyapunov strictement positif et D exposants strictement négatifs.

Quelques références

Sur le théorème de Jakobson:

- M.Jakobson, *Absolutely continuous invariant measures for one-parameter families of one-dimensional maps*, Comm.Math.Phys 81 (1981), 39-88

Quelques références

Sur le théorème de Jakobson:

- M.Jakobson, *Absolutely continuous invariant measures for one-parameter families of one-dimensional maps*, Comm.Math.Phys 81 (1981), 39-88
- M.Benedicks, L.Carleson, *On iterations of* $1 - ax^2$ *on* $[-1, 1]$, Ann.of Math.122 (1985), 1-25

Quelques références

Sur le théorème de Jakobson:

- M.Jakobson, *Absolutely continuous invariant measures for one-parameter families of one-dimensional maps*, Comm.Math.Phys 81 (1981), 39-88
- M.Benedicks, L.Carleson, *On iterations of* $1 - ax^2$ *on* $[-1, 1]$, Ann.of Math.122 (1985), 1-25
- J-C.Yoccoz, *A proof of Jakobson's theorem*, ma page web sur le site du Collège de France

Quelques références

Sur le théorème de Jakobson:

- M.Jakobson, *Absolutely continuous invariant measures for one-parameter families of one-dimensional maps*, Comm.Math.Phys 81 (1981), 39-88
- M.Benedicks, L.Carleson, *On iterations of* $1 - ax^2$ *on* $[-1, 1]$, Ann.of Math.122 (1985), 1-25
- J-C.Yoccoz, *A proof of Jakobson's theorem*, ma page web sur le site du Collège de France

Applications de type Hénon

- M.Benedicks, L.Carleson, *The dynamics of the Henon map*, Ann.of Math.133 (1991), 73-169

Quelques références

Sur le théorème de Jakobson:

- M.Jakobson, *Absolutely continuous invariant measures for one-parameter families of one-dimensional maps*, Comm.Math.Phys 81 (1981), 39-88
- M.Benedicks, L.Carleson, *On iterations of* $1 - ax^2$ *on* $[-1, 1]$, Ann.of Math.122 (1985), 1-25
- J-C.Yoccoz, *A proof of Jakobson's theorem*, ma page web sur le site du Collège de France

Applications de type Hénon

- M.Benedicks, L.Carleson, *The dynamics of the Henon map*, Ann.of Math.133 (1991), 73-169
- L.Mora, M.Viana, *Abundance of strange attractors*, Acta Math.171 (1993), 1-71

Quelques références

Sur le théorème de Jakobson:

- M.Jakobson, *Absolutely continuous invariant measures for one-parameter families of one-dimensional maps*, Comm.Math.Phys 81 (1981), 39-88
- M.Benedicks, L.Carleson, *On iterations of* $1 - ax^2$ *on* $[-1, 1]$, Ann.of Math.122 (1985), 1-25
- J-C.Yoccoz, *A proof of Jakobson's theorem*, ma page web sur le site du Collège de France

Applications de type Hénon

- M.Benedicks, L.Carleson, *The dynamics of the Henon map*, Ann.of Math.133 (1991), 73-169
- L.Mora, M.Viana, *Abundance of strange attractors*, Acta Math.171 (1993), 1-71
- M.Benedicks, L-S.Young, *Sinai-Bowen-Ruelle measures for certain Hénon maps*, Inventiones Math. 112 (1993), 541-576

Quelques références

Sur le théorème de Jakobson:

- M.Jakobson, *Absolutely continuous invariant measures for one-parameter families of one-dimensional maps*, Comm.Math.Phys 81 (1981), 39-88
- M.Benedicks, L.Carleson, *On iterations of* $1 - ax^2$ *on* $[-1, 1]$, Ann.of Math.122 (1985), 1-25
- J-C.Yoccoz, *A proof of Jakobson's theorem*, ma page web sur le site du Collège de France

Applications de type Hénon

- M.Benedicks, L.Carleson, *The dynamics of the Henon map*, Ann.of Math.133 (1991), 73-169
- L.Mora, M.Viana, *Abundance of strange attractors*, Acta Math.171 (1993), 1-71
- M.Benedicks, L-S.Young, *Sinai-Bowen-Ruelle measures for certain Hénon maps*, Inventiones Math. 112 (1993), 541-576
- M.Benedicks, M.Viana, *Solution of the basin problem for Hénon-like attractors*, Inventiones Math. 143 (2001), 375-434

- Q.D.Wang, L-S.Young, *Attractors with one direction of instability*, Comm.Math.Phys 218 (2001) 1-97
- Q.D.Wang, L-S.Young, *Toward a theory of rank one attractors*, Ann.of Math.167 (2008), 349-480

- Q.D.Wang, L-S.Young, *Attractors with one direction of instability*, Comm.Math.Phys 218 (2001) 1-97
- Q.D.Wang, L-S.Young, *Toward a theory of rank one attractors*, Ann.of Math.167 (2008), 349-480
- P.Berger, *Abundance of non-uniformly hyperbolic Henon-like endomorphisms*, arXiv 0903.1473

- Q.D.Wang, L-S.Young, *Attractors with one direction of instability*, Comm.Math.Phys 218 (2001) 1-97
- Q.D.Wang, L-S.Young, *Toward a theory of rank one attractors*, Ann.of Math.167 (2008), 349-480
- P.Berger, *Abundance of non-uniformly hyperbolic Henon-like endomorphisms*, arXiv 0903.1473
- H.Takahashi, *Abundance of non-uniform hyperbolicity in bifurcations of surface endomorphisms*, Tokyo J. Math. 34 (2011), 53-113

Plan de la preuve du théorème de Jakobson (le cas $b = 0$)

1. Intervalles réguliers et quasiréguliers.

Plan de la preuve du théorème de Jakobson (le cas $b = 0$)

1. Intervalles réguliers et quasiréguliers.
2. Paramètres réguliers;

Plan de la preuve du théorème de Jakobson (le cas $b = 0$)

1. Intervalles réguliers et quasiréguliers.
2. Paramètres réguliers;
3. Paramètres fortement réguliers;

Plan de la preuve du théorème de Jakobson (le cas $b = 0$)

1. Intervalles réguliers et quasiréguliers.
2. Paramètres réguliers;
3. Paramètres fortement réguliers;
4. Abondance des paramètres fortement réguliers.

Intervalles quasiréguliers

Posons $A := (\alpha, -\alpha)$, $\Delta_0 := \{\alpha, -\alpha\}$, $\Delta_n = P_c^{-n}(\Delta_0)$ pour $n > 0$.

Intervalles quasiréguliers

Posons $A := (\alpha, -\alpha)$, $\Delta_0 := \{\alpha, -\alpha\}$, $\Delta_n = P_c^{-n}(\Delta_0)$ pour $n > 0$.
Notons $\mathfrak{I}_n$ l'ensemble des composantes connexes bornées de $\mathbb{R} \setminus \Delta_n$.

Intervalles quasiréguliers

Posons $A := (\alpha, -\alpha)$, $\Delta_0 := \{\alpha, -\alpha\}$, $\Delta_n = P_c^{-n}(\Delta_0)$ pour $n > 0$.

Notons $\mathfrak{I}_n$ l'ensemble des composantes connexes bornées de $\mathbb{R} \setminus \Delta_n$.

L'ensemble Δ_n est symétrique par rapport à 0: $\Delta_n = -\Delta_n$.

Intervalles quasiréguliers

Posons $A := (\alpha, -\alpha)$, $\Delta_0 := \{\alpha, -\alpha\}$, $\Delta_n = P_c^{-n}(\Delta_0)$ pour $n > 0$.

Notons $\mathfrak{I}_n$ l'ensemble des composantes connexes bornées de $\mathbb{R} \setminus \Delta_n$.

L'ensemble Δ_n est symétrique par rapport à 0: $\Delta_n = -\Delta_n$.

L'ensemble $\mathfrak{I}_0$ est constitué d'un seul élément: l'intervalle A.

Intervalles quasiréguliers

Posons $A := (\alpha, -\alpha)$, $\Delta_0 := \{\alpha, -\alpha\}$, $\Delta_n = P_c^{-n}(\Delta_0)$ pour $n > 0$.
Notons $\mathfrak{I}_n$ l'ensemble des composantes connexes bornées de $\mathbb{R} \setminus \Delta_n$.
L'ensemble Δ_n est symétrique par rapport à 0: $\Delta_n = -\Delta_n$.
L'ensemble $\mathfrak{I}_0$ est constitué d'un seul élément: l'intervalle A.

Lemme Soit $I \in \mathfrak{I}_n$ ($n \geqslant 0$). Alors

- soit $I = (-\gamma, \gamma)$, avec $\pm\gamma \in \Delta_n$; $P_{c|I}$ n'est pas inversible;

Intervalles quasiréguliers

Posons $A := (\alpha, -\alpha)$, $\Delta_0 := \{\alpha, -\alpha\}$, $\Delta_n = P_c^{-n}(\Delta_0)$ pour $n > 0$.
Notons $\mathfrak{I}_n$ l'ensemble des composantes connexes bornées de $\mathbb{R} \setminus \Delta_n$.
L'ensemble Δ_n est symétrique par rapport à 0: $\Delta_n = -\Delta_n$.
L'ensemble $\mathfrak{I}_0$ est constitué d'un seul élément: l'intervalle A.

Lemme Soit $I \in \mathfrak{I}_n$ ($n \geqslant 0$). Alors

- soit $I = (-\gamma, \gamma)$, avec $\pm\gamma \in \Delta_n$; $P_{c|I}$ n'est pas inversible;
- soit $P_{c|I}$ est un difféomorphisme sur un intervalle de $\mathfrak{I}_{n-1}$.

Intervalles quasiréguliers

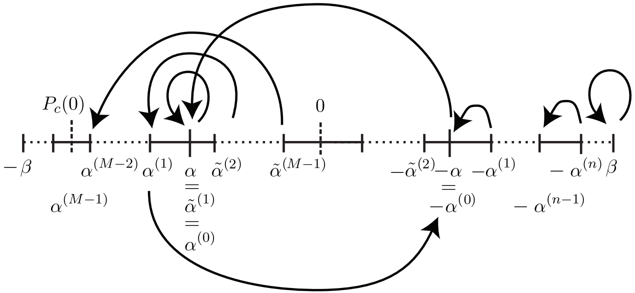
Posons $A := (\alpha, -\alpha)$, $\Delta_0 := \{\alpha, -\alpha\}$, $\Delta_n = P_c^{-n}(\Delta_0)$ pour $n > 0$.
Notons $\mathfrak{I}_n$ l'ensemble des composantes connexes bornées de $\mathbb{R} \setminus \Delta_n$.
L'ensemble Δ_n est symétrique par rapport à 0: $\Delta_n = -\Delta_n$.
L'ensemble $\mathfrak{I}_0$ est constitué d'un seul élément: l'intervalle A.

Lemme Soit $I \in \mathfrak{I}_n$ ($n \geqslant 0$). Alors

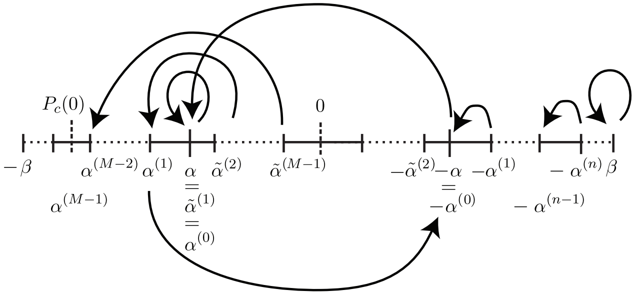
- soit $I = (-\gamma, \gamma)$, avec $\pm\gamma \in \Delta_n$; $P_{c|I}$ n'est pas inversible;
- soit $P_{c|I}$ est un difféomorphisme sur un intervalle de $\mathfrak{I}_{n-1}$.

Définition Un intervalle $I \in \mathfrak{I}_n$ est quasirégulier si $P^n_{c|I}$ est un difféomorphisme sur A.

Elements spéciaux de Δ_n et l'entier M

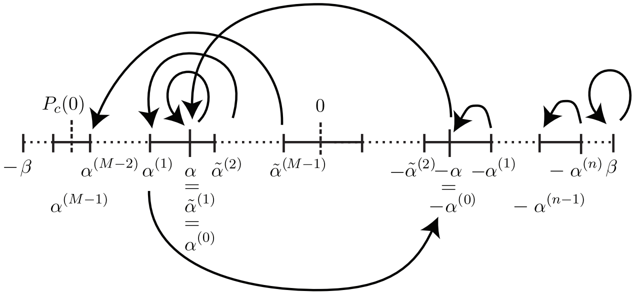


Elements spéciaux de Δ_n et l'entier M



Les points $\alpha^{(n)} \in \Delta_n$ sont définis par $\alpha^{(0)} := \alpha$, $P_c(\pm\alpha^{(n)}) = -\alpha^{(n-1)}$, $\alpha^{(n)} < 0$.

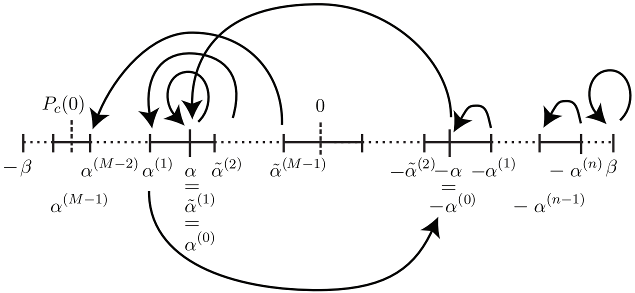
Elements spéciaux de Δ_n et l'entier M



Les points $\alpha^{(n)} \in \Delta_n$ sont définis par $\alpha^{(0)} := \alpha$, $P_c(\pm\alpha^{(n)}) = -\alpha^{(n-1)}$, $\alpha^{(n)} < 0$.

L'entier $M \geqslant 2$ est défini par $P_c(0) \in (\alpha^{(M-1)}, \alpha^{(M-2)})$.

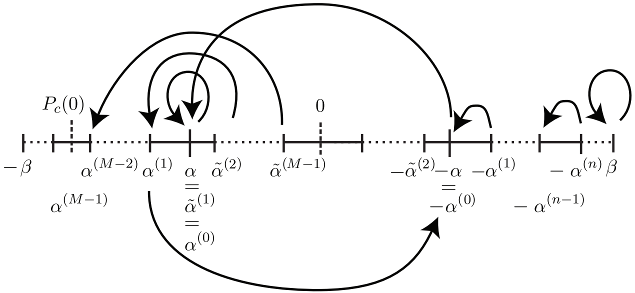
Elements spéciaux de Δ_n et l'entier M



Les points $\alpha^{(n)} \in \Delta_n$ sont définis par $\alpha^{(0)} := \alpha$, $P_c(\pm\alpha^{(n)}) = -\alpha^{(n-1)}$, $\alpha^{(n)} < 0$.

L'entier $M \geqslant 2$ est défini par $P_c(0) \in (\alpha^{(M-1)}, \alpha^{(M-2)})$. C'est le temps de retour du point critique 0 dans A.

Elements spéciaux de Δ_n et l'entier M



Les points $\alpha^{(n)} \in \Delta_n$ sont définis par $\alpha^{(0)} := \alpha$, $P_c(\pm\alpha^{(n)}) = -\alpha^{(n-1)}$, $\alpha^{(n)} < 0$.

L'entier $M \geqslant 2$ est défini par $P_c(0) \in (\alpha^{(M-1)}, \alpha^{(M-2)})$. C'est le temps de retour du point critique 0 dans A.

Les points $\widetilde{\alpha}^{(n)} \in \Delta_n$ $(1 \leqslant n \leqslant M-1)$ sont définis par $P_c(\pm\widetilde{\alpha}^{(n)}) = \alpha^{(n-1)}$, $\widetilde{\alpha}^{(n)} < 0$. On a $\widetilde{\alpha}^{(1)} = \alpha$.

Intervalles réguliers. Paramètres réguliers

Posons $\widehat{A} := (\alpha^{(1)}, -\alpha^{(1)})$. C'est un voisinage de $\overline{A}$.

Intervalles réguliers. Paramètres réguliers

Posons $\widehat{A} := (\alpha^{(1)}, -\alpha^{(1)})$. C'est un voisinage de $\overline{A}$.

Définition Un intervalle quasirégulier $I \in \mathfrak{I}_n$ est régulier

Intervalles réguliers. Paramètres réguliers

Posons $\widehat{A} := (\alpha^{(1)}, -\alpha^{(1)})$. C'est un voisinage de $\overline{A}$.

Définition Un intervalle quasirégulier $I \in \mathfrak{I}_n$ est régulier s'il possède un voisinage qui s'envoie difféomorphiquement par P_c^n sur $\widehat{A}$.

Posons $\widehat{A} := (\alpha^{(1)}, -\alpha^{(1)})$. C'est un voisinage de $\overline{A}$.

Définition Un intervalle quasirégulier $I \in \mathfrak{I}_n$ est régulier s'il possède un voisinage qui s'envoie difféomorphiquement par P_c^n sur $\widehat{A}$. Un point x est n-régulier s'il existe $0 < m \leqslant n$ et un intervalle régulier $I \in \mathfrak{I}_m$ qui contienne x.

Intervalles réguliers. Paramètres réguliers

Posons $\widehat{A} := (\alpha^{(1)}, -\alpha^{(1)})$. C'est un voisinage de $\overline{A}$.

Définition Un intervalle quasirégulier $I \in \mathfrak{I}_n$ est régulier s'il possède un voisinage qui s'envoie difféomorphiquement par P_c^n sur $\widehat{A}$. Un point x est n-régulier s'il existe $0 < m \leqslant n$ et un intervalle régulier $I \in \mathfrak{I}_m$ qui contienne x.

Définition Un paramètre $c \in [-2, -1]$ est régulier

Intervalles réguliers. Paramètres réguliers

Posons $\widehat{A} := (\alpha^{(1)}, -\alpha^{(1)})$. C'est un voisinage de $\overline{A}$.

Définition Un intervalle quasirégulier $I \in \mathfrak{I}_n$ est régulier s'il possède un voisinage qui s'envoie difféomorphiquement par P_c^n sur $\widehat{A}$. Un point x est n-régulier s'il existe $0 < m \leqslant n$ et un intervalle régulier $I \in \mathfrak{I}_m$ qui contienne x.

Définition Un paramètre $c \in [-2, -1]$ est régulier s'il existe des constantes $C, \theta > 0$ telles que la mesure de Lebesgue de l'ensemble des points de A qui ne sont pas n-réguliers est $\leqslant C \exp(-\theta n)$ (pour tout $n \geqslant 0$).

Intervalles réguliers. Paramètres réguliers

Posons $\widehat{A} := (\alpha^{(1)}, -\alpha^{(1)})$. C'est un voisinage de $\overline{A}$.

Définition Un intervalle quasirégulier $I \in \mathfrak{I}_n$ est régulier s'il possède un voisinage qui s'envoie difféomorphiquement par P_c^n sur $\widehat{A}$. Un point x est n-régulier s'il existe $0 < m \leqslant n$ et un intervalle régulier $I \in \mathfrak{I}_m$ qui contienne x.

Définition Un paramètre $c \in [-2, -1]$ est régulier s'il existe des constantes $C, \theta > 0$ telles que la mesure de Lebesgue de l'ensemble des points de A qui ne sont pas n-réguliers est $\leqslant C \exp(-\theta n)$ (pour tout $n \geqslant 0$).

Proposition Un paramètre régulier appartient à *Sto*.

On rappelle que $P_c(0) \in (\alpha^{(M-1)}, \alpha^{(M-2)})$.

L'application de premier retour dans A

On rappelle que $P_c(0) \in (\alpha^{(M-1)}, \alpha^{(M-2)})$. Le temps de premier retour dans A d'un point $x \in A$ est égal à

L'application de premier retour dans A

On rappelle que $P_c(0) \in (\alpha^{(M-1)}, \alpha^{(M-2)})$. Le temps de premier retour dans A d'un point $x \in A$ est égal à

- n (avec $2 \leqslant n < M$) pour $x \in C_n^+ := (\widetilde{\alpha}^{(n-1)}, \widetilde{\alpha}^{(n)})$ et $x \in C_n^- := (-\widetilde{\alpha}^{(n)}, -\widetilde{\alpha}^{(n-1)})$;

L'application de premier retour dans A

On rappelle que $P_c(0) \in (\alpha^{(M-1)}, \alpha^{(M-2)})$. Le temps de premier retour dans A d'un point $x \in A$ est égal à

- n (avec $2 \leqslant n < M$) pour $x \in C_n^+ := (\widetilde{\alpha}^{(n-1)}, \widetilde{\alpha}^{(n)})$ et $x \in C_n^- := (-\widetilde{\alpha}^{(n)}, -\widetilde{\alpha}^{(n-1)})$;
- M pour $x \in (\widetilde{\alpha}^{(M-1)}, -\widetilde{\alpha}^{(M-1)})$.

L’application de premier retour dans A

On rappelle que $P_c(0) \in (\alpha^{(M-1)}, \alpha^{(M-2)})$. Le temps de premier retour dans A d’un point $x \in A$ est égal à

- n (avec $2 \leqslant n < M$) pour $x \in C_n^+ := (\widetilde{\alpha}^{(n-1)}, \widetilde{\alpha}^{(n)})$ et $x \in C_n^- := (-\widetilde{\alpha}^{(n)}, -\widetilde{\alpha}^{(n-1)})$;
- M pour $x \in (\widetilde{\alpha}^{(M-1)}, -\widetilde{\alpha}^{(M-1)})$.

Lemme Les intervalles $C_n^\pm \in \mathfrak{I}_n$ sont quasiréguliers pour $2 \leqslant n < M$,

L'application de premier retour dans A

On rappelle que $P_c(0) \in (\alpha^{(M-1)}, \alpha^{(M-2)})$. Le temps de premier retour dans A d'un point $x \in A$ est égal à

- n (avec $2 \leqslant n < M$) pour $x \in C_n^+ := (\widetilde{\alpha}^{(n-1)}, \widetilde{\alpha}^{(n)})$ et $x \in C_n^- := (-\widetilde{\alpha}^{(n)}, -\widetilde{\alpha}^{(n-1)})$;
- M pour $x \in (\widetilde{\alpha}^{(M-1)}, -\widetilde{\alpha}^{(M-1)})$.

Lemme Les intervalles $C_n^\pm \in \mathfrak{I}_n$ sont quasiréguliers pour $2 \leqslant n < M$, réguliers pour $2 \leqslant n < M - 1$.

L'application de premier retour dans A

On rappelle que $P_c(0) \in (\alpha^{(M-1)}, \alpha^{(M-2)})$. Le temps de premier retour dans A d'un point $x \in A$ est égal à

- n (avec $2 \leqslant n < M$) pour $x \in C_n^+ := (\widetilde{\alpha}^{(n-1)}, \widetilde{\alpha}^{(n)})$ et $x \in C_n^- := (-\widetilde{\alpha}^{(n)}, -\widetilde{\alpha}^{(n-1)})$;
- M pour $x \in (\widetilde{\alpha}^{(M-1)}, -\widetilde{\alpha}^{(M-1)})$.

Lemme Les intervalles $C_n^\pm \in \mathfrak{I}_n$ sont quasiréguliers pour $2 \leqslant n < M$, réguliers pour $2 \leqslant n < M - 1$.

On note R l'application de premier retour dans A.

Paramètres fortement réguliers

Posons $c_1 = P_c^M(0) = R(0) \in A$, $N_1 = M$.

Paramètres fortement réguliers

Posons $c_1 = P_c^M(0) = R(0) \in A$, $N_1 = M$. Pour $k > 1$, on définit par récurrence $c_k \in A$ et des entiers n_{k-1}, N_k de la façon suivante

Paramètres fortement réguliers

Posons $c_1 = P_c^M(0) = R(0) \in A$, $N_1 = M$. Pour $k > 1$, on définit par récurrence $c_k \in A$ et des entiers n_{k-1}, N_k de la façon suivante

- On suppose qu'il existe $n_{k-1} > 0$ et un intervalle régulier $J_{k-1} \in \mathfrak{I}_{n_{k-1}}$ contenant c_{k-1};

Paramètres fortement réguliers

Posons $c_1 = P_c^M(0) = R(0) \in A$, $N_1 = M$. Pour $k > 1$, on définit par récurrence $c_k \in A$ et des entiers n_{k-1}, N_k de la façon suivante

- On suppose qu'il existe $n_{k-1} > 0$ et un intervalle régulier $J_{k-1} \in \mathfrak{I}_{n_{k-1}}$ contenant c_{k-1};
- On choisit la paire (n_{k-1}, J_{k-1}) qui minimise n_{k-1}.

Paramètres fortement réguliers

Posons $c_1 = P_c^M(0) = R(0) \in A$, $N_1 = M$. Pour $k > 1$, on définit par récurrence $c_k \in A$ et des entiers n_{k-1}, N_k de la façon suivante

- On suppose qu'il existe $n_{k-1} > 0$ et un intervalle régulier $J_{k-1} \in \mathfrak{I}_{n_{k-1}}$ contenant c_{k-1};
- On choisit la paire (n_{k-1}, J_{k-1}) qui minimise n_{k-1}.
- On pose $c_k = P_c^{n_{k-1}}(c_{k-1}) \in A$ et $N_k = N_{k-1} + n_{k-1}$.

Paramètres fortement réguliers

Posons $c_1 = P_c^M(0) = R(0) \in A$, $N_1 = M$. Pour $k > 1$, on définit par récurrence $c_k \in A$ et des entiers n_{k-1}, N_k de la façon suivante

- On suppose qu'il existe $n_{k-1} > 0$ et un intervalle régulier $J_{k-1} \in \mathfrak{I}_{n_{k-1}}$ contenant c_{k-1};
- On choisit la paire (n_{k-1}, J_{k-1}) qui minimise n_{k-1}.
- On pose $c_k = P_c^{n_{k-1}}(c_{k-1}) \in A$ et $N_k = N_{k-1} + n_{k-1}$.

On a donc $c_k = P_c^{N_k}(0)$ pour $k \geqslant 1$.

Paramètres fortement réguliers

Posons $c_1 = P_c^M(0) = R(0) \in A$, $N_1 = M$. Pour $k > 1$, on définit par récurrence $c_k \in A$ et des entiers n_{k-1}, N_k de la façon suivante

- On suppose qu'il existe $n_{k-1} > 0$ et un intervalle régulier $J_{k-1} \in \mathfrak{I}_{n_{k-1}}$ contenant c_{k-1};
- On choisit la paire (n_{k-1}, J_{k-1}) qui minimise n_{k-1}.
- On pose $c_k = P_c^{n_{k-1}}(c_{k-1}) \in A$ et $N_k = N_{k-1} + n_{k-1}$.

On a donc $c_k = P_c^{N_k}(0)$ pour $k \geqslant 1$.

Définition Le paramètre c (avec $P_c(0) \in (\alpha^{(M-1)}, \alpha^{(M-2)})$) est fortement régulier

Paramètres fortement réguliers

Posons $c_1 = P_c^M(0) = R(0) \in A$, $N_1 = M$. Pour $k > 1$, on définit par récurrence $c_k \in A$ et des entiers n_{k-1}, N_k de la façon suivante

- On suppose qu'il existe $n_{k-1} > 0$ et un intervalle régulier $J_{k-1} \in \mathfrak{I}_{n_{k-1}}$ contenant c_{k-1};
- On choisit la paire (n_{k-1}, J_{k-1}) qui minimise n_{k-1}.
- On pose $c_k = P_c^{n_{k-1}}(c_{k-1}) \in A$ et $N_k = N_{k-1} + n_{k-1}$.

On a donc $c_k = P_c^{N_k}(0)$ pour $k \geqslant 1$.

Définition Le paramètre c (avec $P_c(0) \in (\alpha^{(M-1)}, \alpha^{(M-2)})$) est fortement régulier si la suite (c_k) est définie pour $k \geqslant 1$

Paramètres fortement réguliers

Posons $c_1 = P_c^M(0) = R(0) \in A$, $N_1 = M$. Pour $k > 1$, on définit par récurrence $c_k \in A$ et des entiers n_{k-1}, N_k de la façon suivante

- On suppose qu'il existe $n_{k-1} > 0$ et un intervalle régulier $J_{k-1} \in \mathfrak{I}_{n_{k-1}}$ contenant c_{k-1};
- On choisit la paire (n_{k-1}, J_{k-1}) qui minimise n_{k-1}.
- On pose $c_k = P_c^{n_{k-1}}(c_{k-1}) \in A$ et $N_k = N_{k-1} + n_{k-1}$.

On a donc $c_k = P_c^{N_k}(0)$ pour $k \geqslant 1$.

Définition   Le paramètre c (avec $P_c(0) \in (\alpha^{(M-1)}, \alpha^{(M-2)})$) est fortement régulier si la suite (c_k) est définie pour $k \geqslant 1$ et si on a, pour tout $k \geqslant 1$

$$\sum_{0<\ell<k, n_\ell > M} n_\ell \leqslant 2^{-\sqrt{M}} N_k.$$

Paramètres fortement réguliers

Posons $c_1 = P_c^M(0) = R(0) \in A$, $N_1 = M$. Pour $k > 1$, on définit par récurrence $c_k \in A$ et des entiers n_{k-1}, N_k de la façon suivante

- On suppose qu'il existe $n_{k-1} > 0$ et un intervalle régulier $J_{k-1} \in \mathfrak{I}_{n_{k-1}}$ contenant c_{k-1};
- On choisit la paire (n_{k-1}, J_{k-1}) qui minimise n_{k-1}.
- On pose $c_k = P_c^{n_{k-1}}(c_{k-1}) \in A$ et $N_k = N_{k-1} + n_{k-1}$.

On a donc $c_k = P_c^{N_k}(0)$ pour $k \geqslant 1$.

Définition   Le paramètre c (avec $P_c(0) \in (\alpha^{(M-1)}, \alpha^{(M-2)})$) est fortement régulier si la suite (c_k) est définie pour $k \geqslant 1$ et si on a, pour tout $k \geqslant 1$

$$\sum_{0<\ell<k, n_\ell > M} n_\ell \leqslant 2^{-\sqrt{M}} N_k.$$

La condition $n_\ell > M$ signifie que $c_\ell \in (\widetilde{\alpha}^{(M-1)}, -\widetilde{\alpha}^{(M-1)})$.

Fin de la preuve

On conclut la preuve du théorème de Jakobson par les deux propositions suivantes.

Fin de la preuve

On conclut la preuve du théorème de Jakobson par les deux propositions suivantes.

Proposition Un paramètre fortement régulier

Fin de la preuve

On conclut la preuve du théorème de Jakobson par les deux propositions suivantes.

Proposition Un paramètre fortement régulier est régulier (donc appartient à l'ensemble *Sto*).

Fin de la preuve

On conclut la preuve du théorème de Jakobson par les deux propositions suivantes.

Proposition   Un paramètre fortement régulier est régulier (donc appartient à l'ensemble *Sto*).

Proposition   La mesure de Lebesgue relative de l'ensemble des paramètres fortement réguliers dans l'intervalle $(-2, -2 + \varepsilon)$ tend vers 1 lorsque ε tend vers 0^+.

Dynamique symbolique pour R. Itinéraire critique

Pour $2 \leqslant n < M$, on a défini $C_n^+ := (\widetilde{\alpha}^{(n-1)}, \widetilde{\alpha}^{(n)})$ et l'intervalle symétrique $C_n^- := (-\widetilde{\alpha}^{(n)}, -\widetilde{\alpha}^{(n-1)})$.

Dynamique symbolique pour R. Itinéraire critique

Pour $2 \leqslant n < M$, on a défini $C_n^+ := (\widetilde{\alpha}^{(n-1)}, \widetilde{\alpha}^{(n)})$ et l'intervalle symétrique $C_n^- := (-\widetilde{\alpha}^{(n)}, -\widetilde{\alpha}^{(n-1)})$. On pose aussi $C_M^+ := (\widetilde{\alpha}^{M-1}, 0)$ et $C_M^- := (0, -\widetilde{\alpha}^{M-1})$.

Dynamique symbolique pour R. Itinéraire critique

Pour $2 \leqslant n < M$, on a défini $C_n^+ := (\widetilde{\alpha}^{(n-1)}, \widetilde{\alpha}^{(n)})$ et l'intervalle symétrique $C_n^- := (-\widetilde{\alpha}^{(n)}, -\widetilde{\alpha}^{(n-1)})$. On pose aussi $C_M^+ := (\widetilde{\alpha}^{M-1}, 0)$ et $C_M^- := (0, -\widetilde{\alpha}^{M-1})$.

Notons $\mathcal{A}$ l'alphabet

$$\mathcal{A} := \{C_n^\varepsilon,\ 2 \leqslant n \leqslant M, \varepsilon \in \{+,-\}\}.$$

Dynamique symbolique pour R. Itinéraire critique

Pour $2 \leqslant n < M$, on a défini $C_n^+ := (\widetilde{\alpha}^{(n-1)}, \widetilde{\alpha}^{(n)})$ et l'intervalle symétrique $C_n^- := (-\widetilde{\alpha}^{(n)}, -\widetilde{\alpha}^{(n-1)})$. On pose aussi $C_M^+ := (\widetilde{\alpha}^{M-1}, 0)$ et $C_M^- := (0, -\widetilde{\alpha}^{M-1})$.

Notons $\mathcal{A}$ l'alphabet

$$\mathcal{A} := \{C_n^\varepsilon,\ 2 \leqslant n \leqslant M, \varepsilon \in \{+,-\}\}.$$

Définition   Pour un point $x \in A$ vérifiant $P_c^n(x) \neq 0, \alpha$ pour tout $n \geqslant 0$, l'itinéraire de x est la suite $\theta(x) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ définie par

$$R^n(x) \in \theta_n(x), \qquad \forall\ n \geqslant 0.$$

Dynamique symbolique pour R. Itinéraire critique

Pour $2 \leqslant n < M$, on a défini $C_n^+ := (\widetilde{\alpha}^{(n-1)}, \widetilde{\alpha}^{(n)})$ et l'intervalle symétrique $C_n^- := (-\widetilde{\alpha}^{(n)}, -\widetilde{\alpha}^{(n-1)})$. On pose aussi $C_M^+ := (\widetilde{\alpha}^{M-1}, 0)$ et $C_M^- := (0, -\widetilde{\alpha}^{M-1})$.

Notons $\mathcal{A}$ l'alphabet

$$\mathcal{A} := \{C_n^\varepsilon,\ 2 \leqslant n \leqslant M, \varepsilon \in \{+,-\}\}.$$

Définition Pour un point $x \in A$ vérifiant $P_c^n(x) \neq 0, \alpha$ pour tout $n \geqslant 0$, l'itinéraire de x est la suite $\theta(x) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ définie par

$$R^n(x) \in \theta_n(x), \qquad \forall\ n \geqslant 0.$$

On suppose que $P_c^n(0) \neq 0, \alpha$ pour tout $n > 0$.

Dynamique symbolique pour R. Itinéraire critique

Pour $2 \leqslant n < M$, on a défini $C_n^+ := (\widetilde{\alpha}^{(n-1)}, \widetilde{\alpha}^{(n)})$ et l'intervalle symétrique $C_n^- := (-\widetilde{\alpha}^{(n)}, -\widetilde{\alpha}^{(n-1)})$. On pose aussi $C_M^+ := (\widetilde{\alpha}^{M-1}, 0)$ et $C_M^- := (0, -\widetilde{\alpha}^{M-1})$.

Notons $\mathcal{A}$ l'alphabet

$$\mathcal{A} := \{C_n^\varepsilon,\ 2 \leqslant n \leqslant M, \varepsilon \in \{+,-\}\}.$$

Définition Pour un point $x \in A$ vérifiant $P_c^n(x) \neq 0, \alpha$ pour tout $n \geqslant 0$, l'itinéraire de x est la suite $\theta(x) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ définie par

$$R^n(x) \in \theta_n(x), \qquad \forall\ n \geqslant 0.$$

On suppose que $P_c^n(0) \neq 0, \alpha$ pour tout $n > 0$.

Définition L'itinéraire critique est la suite $(\Theta_n)_{n>0}$ définie par

$$R^n(0) \in \Theta_n, \qquad \forall n > 0.$$

Mots admissibles, quasiréguliers,réguliers

On note $\Omega := \bigsqcup_{n \geqslant 0} \mathcal{A}^n$ l'ensemble des mots finis dans l'alphabet $\mathcal{A}$.

Mots admissibles, quasiréguliers,réguliers

On note $\Omega := \bigsqcup_{n\geqslant 0} \mathcal{A}^n$ l'ensemble des mots finis dans l'alphabet $\mathcal{A}$. Pour $\omega = (\omega_0, \ldots, \omega_{n-1}) \in \Omega$, on définit

$$I(\omega) := \bigcap_{0\leqslant j<n} R^{-j}(\omega_j).$$

Mots admissibles, quasiréguliers,réguliers

On note $\Omega := \bigsqcup_{n\geqslant 0} \mathcal{A}^n$ l'ensemble des mots finis dans l'alphabet $\mathcal{A}$. Pour $\omega = (\omega_0, \dots, \omega_{n-1}) \in \Omega$, on définit

$$I(\omega) := \bigcap_{0\leqslant j<n} R^{-j}(\omega_j).$$

Comme la restriction de R à chaque C_n^ε ($2 \leqslant n \leqslant M$) est monotone, on a le

Lemme L'ensemble $I(\omega)$ est soit vide, soit un intervalle ouvert.

On note $\Omega := \bigsqcup_{n \geqslant 0} \mathcal{A}^n$ l'ensemble des mots finis dans l'alphabet $\mathcal{A}$. Pour $\omega = (\omega_0, \ldots, \omega_{n-1}) \in \Omega$, on définit

$$I(\omega) := \bigcap_{0 \leqslant j < n} R^{-j}(\omega_j).$$

Comme la restriction de R à chaque C_n^ε $(2 \leqslant n \leqslant M)$ est monotone, on a le

Lemme L'ensemble $I(\omega)$ est soit vide, soit un intervalle ouvert.

Définition Un mot $\omega \in \Omega$ est

- admissible si $I(\omega)$ n'est pas vide;

Mots admissibles, quasiréguliers,réguliers

On note $\Omega := \bigsqcup_{n \geqslant 0} \mathcal{A}^n$ l'ensemble des mots finis dans l'alphabet $\mathcal{A}$. Pour $\omega = (\omega_0, \ldots, \omega_{n-1}) \in \Omega$, on définit

$$I(\omega) := \bigcap_{0 \leqslant j < n} R^{-j}(\omega_j).$$

Comme la restriction de R à chaque C_n^ε $(2 \leqslant n \leqslant M)$ est monotone, on a le

Lemme L'ensemble $I(\omega)$ est soit vide, soit un intervalle ouvert.

Définition Un mot $\omega \in \Omega$ est

- admissible si $I(\omega)$ n'est pas vide;
- quasirégulier si $I(\omega)$ est un intervalle quasirégulier;

Mots admissibles, quasiréguliers,réguliers

On note $\Omega := \bigsqcup_{n \geqslant 0} \mathcal{A}^n$ l'ensemble des mots finis dans l'alphabet $\mathcal{A}$. Pour $\omega = (\omega_0, \ldots, \omega_{n-1}) \in \Omega$, on définit

$$I(\omega) := \bigcap_{0 \leqslant j < n} R^{-j}(\omega_j).$$

Comme la restriction de R à chaque C_n^ε $(2 \leqslant n \leqslant M)$ est monotone, on a le

Lemme L'ensemble $I(\omega)$ est soit vide, soit un intervalle ouvert.

Définition Un mot $\omega \in \Omega$ est

- admissible si $I(\omega)$ n'est pas vide;
- quasirégulier si $I(\omega)$ est un intervalle quasirégulier;
- régulier si $I(\omega)$ est un intervalle régulier.

Mots admissibles, quasiréguliers,réguliers

On note $\Omega := \bigsqcup_{n \geqslant 0} \mathcal{A}^n$ l'ensemble des mots finis dans l'alphabet $\mathcal{A}$. Pour $\omega = (\omega_0, \ldots, \omega_{n-1}) \in \Omega$, on définit

$$I(\omega) := \bigcap_{0 \leqslant j < n} R^{-j}(\omega_j).$$

Comme la restriction de R à chaque C_n^{ε} ($2 \leqslant n \leqslant M$) est monotone, on a le

Lemme L'ensemble $I(\omega)$ est soit vide, soit un intervalle ouvert.

Définition Un mot $\omega \in \Omega$ est

- admissible si $I(\omega)$ n'est pas vide;
- quasirégulier si $I(\omega)$ est un intervalle quasirégulier;
- régulier si $I(\omega)$ est un intervalle régulier.

On verra comment ces propriétés sont reliées à l'itinéraire critique.