Quelques aspects de la théorie des systèmes dynamiques quasipériodiques(8)

Jean-Christophe Yoccoz

Collège de France

18 juin 2014

Preuve du théorème KAM

Théorème: Soit T_0 un tore lagrangien α-quasipériodique de classe C^∞, invariant par le flot d'un Hamiltonien H_0 de classe C^∞.

Preuve du théorème KAM

Théorème: Soit T_0 un tore lagrangien α-quasipériodique de classe C^∞, invariant par le flot d'un Hamiltonien H_0 de classe C^∞.

On suppose que α est diophantien ($\alpha \in HDC$) et que la torsion de T_0 est non dégénérée.

Preuve du théorème KAM

Théorème: Soit T_0 un tore lagrangien α-quasipériodique de classe C^∞, invariant par le flot d'un Hamiltonien H_0 de classe C^∞.

On suppose que α est diophantien ($\alpha \in HDC$) et que la torsion de T_0 est non dégénérée.

Alors, pour tout Hamiltonien H C^∞-proche de H_0, il existe au voisinage de T_0 un tore lagrangien α-quasipériodique T de classe C^∞, invariant par le flot de H.

Preuve du théorème KAM

Théorème: Soit T_0 un tore lagrangien α-quasipériodique de classe C^∞, invariant par le flot d'un Hamiltonien H_0 de classe C^∞.

On suppose que α est diophantien ($\alpha \in HDC$) et que la torsion de T_0 est non dégénérée.

Alors, pour tout Hamiltonien H C^∞-proche de H_0, il existe au voisinage de T_0 un tore lagrangien α-quasipériodique T de classe C^∞, invariant par le flot de H.

Preuve: Comme tout se passe dans un voisinage de T_0, on peut supposer que la variété symplectique ambiante est $\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n$, muni de la forme symplectique standard,

Preuve du théorème KAM

Théorème: Soit T_0 un tore lagrangien α-quasipériodique de classe C^∞, invariant par le flot d'un Hamiltonien H_0 de classe C^∞.

On suppose que α est diophantien ($\alpha \in HDC$) et que la torsion de T_0 est non dégénérée.

Alors, pour tout Hamiltonien H C^∞-proche de H_0, il existe au voisinage de T_0 un tore lagrangien α-quasipériodique T de classe C^∞, invariant par le flot de H.

Preuve: Comme tout se passe dans un voisinage de T_0, on peut supposer que la variété symplectique ambiante est $\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n$, muni de la forme symplectique standard, que $T_0 = \mathbb{T}^n \times \{0\}$,

Preuve du théorème KAM

Théorème: Soit T_0 un tore lagrangien α-quasipériodique de classe C^∞, invariant par le flot d'un Hamiltonien H_0 de classe C^∞.

On suppose que α est diophantien ($\alpha \in HDC$) et que la torsion de T_0 est non dégénérée.

Alors, pour tout Hamiltonien H C^∞-proche de H_0, il existe au voisinage de T_0 un tore lagrangien α-quasipériodique T de classe C^∞, invariant par le flot de H.

Preuve: Comme tout se passe dans un voisinage de T_0, on peut supposer que la variété symplectique ambiante est $\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n$, muni de la forme symplectique standard, que $T_0 = \mathbb{T}^n \times \{0\}$, et que le développement de H_0 le long de T_0 est la forme normale de Birkhoff

Preuve du théorème KAM

Théorème: Soit T_0 un tore lagrangien α-quasipériodique de classe C^∞, invariant par le flot d'un Hamiltonien H_0 de classe C^∞.

On suppose que α est diophantien ($\alpha \in HDC$) et que la torsion de T_0 est non dégénérée.

Alors, pour tout Hamiltonien H C^∞-proche de H_0, il existe au voisinage de T_0 un tore lagrangien α-quasipériodique T de classe C^∞, invariant par le flot de H.

Preuve: Comme tout se passe dans un voisinage de T_0, on peut supposer que la variété symplectique ambiante est $\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n$, muni de la forme symplectique standard, que $T_0 = \mathbb{T}^n \times \{0\}$, et que le développement de H_0 le long de T_0 est la forme normale de Birkhoff

$$H_0(q, p) = \sum_i \alpha_i p_i + \sum_{i,j} B_{ij} p_i p_j + O(\|p\|^3),$$

Preuve du théorème KAM

Théorème: Soit T_0 un tore lagrangien α-quasipériodique de classe C^∞, invariant par le flot d'un Hamiltonien H_0 de classe C^∞.

On suppose que α est diophantien ($\alpha \in HDC$) et que la torsion de T_0 est non dégénérée.

Alors, pour tout Hamiltonien H C^∞-proche de H_0, il existe au voisinage de T_0 un tore lagrangien α-quasipériodique T de classe C^∞, invariant par le flot de H.

Preuve: Comme tout se passe dans un voisinage de T_0, on peut supposer que la variété symplectique ambiante est $\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n$, muni de la forme symplectique standard, que $T_0 = \mathbb{T}^n \times \{0\}$, et que le développement de H_0 le long de T_0 est la forme normale de Birkhoff

$$H_0(q,p) = \sum_i \alpha_i p_i + \sum_{i,j} B_{ij} p_i p_j + O(\|p\|^3),$$

avec une matrice de torsion (B_{ij}) non-dégénérée.

Soit H un hamiltonien proche de H_0.

Soit H un hamiltonien proche de H_0. Pour $P \in \mathbb{R}^n$ voisin de 0, on applique le théorème de conjugaison rectifiée à $H_{(P)}(q,p) := H(q, p+P)$.

Soit H un hamiltonien proche de H_0. Pour $P \in \mathbb{R}^n$ voisin de 0, on applique le théorème de conjugaison rectifiée à $H_{(P)}(q,p) := H(q,p+P)$. Il existe donc $K \in F_\alpha$, $\theta \in E$, $\varphi \in V$, $\beta \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$, dépendant de façon C^∞ de H et P, tels que

Soit H un hamiltonien proche de H_0. Pour $P \in \mathbb{R}^n$ voisin de 0, on applique le théorème de conjugaison rectifiée à $H_{(P)}(q,p) := H(q,p+P)$. Il existe donc $K \in F_\alpha$, $\theta \in E$, $\varphi \in V$, $\beta \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$, dépendant de façon C^∞ de H et P, tels que

$$H_{(P)} = K \circ g_\varphi \circ k_\theta + c + \frac{1}{2\pi} \sum_i \beta_i \sin 2\pi p_i.$$

Soit H un hamiltonien proche de H_0. Pour $P \in \mathbb{R}^n$ voisin de 0, on applique le théorème de conjugaison rectifiée à $H_{(P)}(q,p) := H(q,p+P)$. Il existe donc $K \in F_\alpha$, $\theta \in E$, $\varphi \in V$, $\beta \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$, dépendant de façon C^∞ de H et P, tels que

$$H_{(P)} = K \circ g_\varphi \circ k_\theta + c + \frac{1}{2\pi} \sum_i \beta_i \sin 2\pi p_i.$$

On va montrer qu'il existe un unique $P = P(H)$ voisin de 0 tel que $\beta(H,P) = 0$.

Soit H un hamiltonien proche de H_0. Pour $P \in \mathbb{R}^n$ voisin de 0, on applique le théorème de conjugaison rectifiée à $H_{(P)}(q,p) := H(q, p+P)$. Il existe donc $K \in F_\alpha$, $\theta \in E$, $\varphi \in V$, $\beta \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$, dépendant de façon C^∞ de H et P, tels que

$$H_{(P)} = K \circ g_\varphi \circ k_\theta + c + \frac{1}{2\pi} \sum_i \beta_i \sin 2\pi p_i.$$

On va montrer qu'il existe un unique $P = P(H)$ voisin de 0 tel que $\beta(H,P) = 0$. Ceci entraine les conclusions du théorème KAM.

Soit H un hamiltonien proche de H_0. Pour $P \in \mathbb{R}^n$ voisin de 0, on applique le théorème de conjugaison rectifiée à $H_{(P)}(q,p) := H(q,p+P)$. Il existe donc $K \in F_\alpha$, $\theta \in E$, $\varphi \in V$, $\beta \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$, dépendant de façon C^∞ de H et P, tels que

$$H_{(P)} = K \circ g_\varphi \circ k_\theta + c + \frac{1}{2\pi} \sum_i \beta_i \sin 2\pi p_i.$$

On va montrer qu'il existe un unique $P = P(H)$ voisin de 0 tel que $\beta(H,P) = 0$. Ceci entraine les conclusions du théorème KAM. On observe que $\beta(H_0, 0) = 0$.

Soit H un hamiltonien proche de H_0. Pour $P \in \mathbb{R}^n$ voisin de 0, on applique le théorème de conjugaison rectifiée à $H_{(P)}(q,p) := H(q, p+P)$. Il existe donc $K \in F_\alpha$, $\theta \in E$, $\varphi \in V$, $\beta \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$, dépendant de façon C^∞ de H et P, tels que

$$H_{(P)} = K \circ g_\varphi \circ k_\theta + c + \frac{1}{2\pi} \sum_i \beta_i \sin 2\pi p_i.$$

On va montrer qu'il existe un unique $P = P(H)$ voisin de 0 tel que $\beta(H,P) = 0$. Ceci entraine les conclusions du théorème KAM. On observe que $\beta(H_0, 0) = 0$.

Lemme: On a $\frac{\partial \beta_i}{\partial P_j}(H_0, 0) = 2B_{ij}$.

Soit H un hamiltonien proche de H_0. Pour $P \in \mathbb{R}^n$ voisin de 0, on applique le théorème de conjugaison rectifiée à $H_{(P)}(q,p) := H(q, p+P)$. Il existe donc $K \in F_\alpha$, $\theta \in E$, $\varphi \in V$, $\beta \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$, dépendant de façon C^∞ de H et P, tels que

$$H_{(P)} = K \circ g_\varphi \circ k_\theta + c + \frac{1}{2\pi} \sum_i \beta_i \sin 2\pi p_i.$$

On va montrer qu'il existe un unique $P = P(H)$ voisin de 0 tel que $\beta(H,P) = 0$. Ceci entraine les conclusions du théorème KAM. On observe que $\beta(H_0, 0) = 0$.

Lemme: On a $\frac{\partial \beta_i}{\partial P_j}(H_0, 0) = 2B_{ij}$.

Comme la matrice de torsion est inversible, $\beta(H_0, .)$ est un difféomorphisme local.

Soit H un hamiltonien proche de H_0. Pour $P \in \mathbb{R}^n$ voisin de 0, on applique le théorème de conjugaison rectifiée à $H_{(P)}(q,p) := H(q, p+P)$. Il existe donc $K \in F_\alpha$, $\theta \in E$, $\varphi \in V$, $\beta \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$, dépendant de façon C^∞ de H et P, tels que

$$H_{(P)} = K \circ g_\varphi \circ k_\theta + c + \frac{1}{2\pi} \sum_i \beta_i \sin 2\pi p_i.$$

On va montrer qu'il existe un unique $P = P(H)$ voisin de 0 tel que $\beta(H, P) = 0$. Ceci entraine les conclusions du théorème KAM. On observe que $\beta(H_0, 0) = 0$.

Lemme: On a $\frac{\partial \beta_i}{\partial P_j}(H_0, 0) = 2B_{ij}$.

Comme la matrice de torsion est inversible, $\beta(H_0, .)$ est un difféomorphisme local. C'est aussi le cas de $\beta(H, .)$, qui est C^1-proche de $\beta(H_0, .)$.

Soit H un hamiltonien proche de H_0. Pour $P \in \mathbb{R}^n$ voisin de 0, on applique le théorème de conjugaison rectifiée à $H_{(P)}(q,p) := H(q,p+P)$. Il existe donc $K \in F_\alpha$, $\theta \in E$, $\varphi \in V$, $\beta \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$, dépendant de façon C^∞ de H et P, tels que

$$H_{(P)} = K \circ g_\varphi \circ k_\theta + c + \frac{1}{2\pi} \sum_i \beta_i \sin 2\pi p_i.$$

On va montrer qu'il existe un unique $P = P(H)$ voisin de 0 tel que $\beta(H,P) = 0$. Ceci entraine les conclusions du théorème KAM. On observe que $\beta(H_0, 0) = 0$.

Lemme: On a $\frac{\partial \beta_i}{\partial P_j}(H_0, 0) = 2B_{ij}$.

Comme la matrice de torsion est inversible, $\beta(H_0, .)$ est un difféomorphisme local. C'est aussi le cas de $\beta(H, .)$, qui est C^1-proche de $\beta(H_0, .)$. La propriété recherchée en résulte.

Preuve du lemme

Pour $1 \leqslant j \leqslant n$, on a

$$\frac{\partial H_0}{\partial p_j}(q,p) = \alpha_j + 2\sum_i B_{i\,j} p_i + O(\|p\|^2),$$

Preuve du lemme

Pour $1 \leqslant j \leqslant n$, on a

$$\frac{\partial H_0}{\partial p_j}(q,p) = \alpha_j + 2\sum_i B_{i\,j} p_i + O(\|p\|^2),$$

et donc, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$(H_0 + t\frac{\partial H_0}{\partial p_j})(q,p) = t\alpha_j + \sum_i (\alpha_i + 2tB_{i\,j})p_i + O(\|p\|^2).$$

Preuve du lemme

Pour $1 \leqslant j \leqslant n$, on a

$$\frac{\partial H_0}{\partial p_j}(q,p) = \alpha_j + 2\sum_i B_{i\,j} p_i + O(\|p\|^2),$$

et donc, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$(H_0 + t\frac{\partial H_0}{\partial p_j})(q,p) = t\alpha_j + \sum_i (\alpha_i + 2tB_{i\,j})p_i + O(\|p\|^2).$$

Quand on applique le théorème de conjugaison rectifiée à $H_0 + t\frac{\partial H_0}{\partial p_j}$, on a donc

Preuve du lemme

Pour $1 \leqslant j \leqslant n$, on a

$$\frac{\partial H_0}{\partial p_j}(q,p) = \alpha_j + 2\sum_i B_{i\,j} p_i + O(\|p\|^2),$$

et donc, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$(H_0 + t\frac{\partial H_0}{\partial p_j})(q,p) = t\alpha_j + \sum_i (\alpha_i + 2tB_{i\,j})p_i + O(\|p\|^2).$$

Quand on applique le théorème de conjugaison rectifiée à $H_0 + t\frac{\partial H_0}{\partial p_j}$, on a donc $\theta = 0$, $\varphi = 0$, $c = t\alpha_j$ et

Preuve du lemme

Pour $1 \leqslant j \leqslant n$, on a

$$\frac{\partial H_0}{\partial p_j}(q,p) = \alpha_j + 2\sum_i B_{i\,j} p_i + O(\|p\|^2),$$

et donc, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$(H_0 + t\frac{\partial H_0}{\partial p_j})(q,p) = t\alpha_j + \sum_i (\alpha_i + 2tB_{i\,j})p_i + O(\|p\|^2).$$

Quand on applique le théorème de conjugaison rectifiée à $H_0 + t\frac{\partial H_0}{\partial p_j}$, on a donc $\theta = 0$, $\varphi = 0$, $c = t\alpha_j$ et

$$\beta(H_0 + t\frac{\partial H_0}{\partial p_j}) = 2tB_{i\,j}.$$

Preuve du lemme

Pour $1 \leqslant j \leqslant n$, on a

$$\frac{\partial H_0}{\partial p_j}(q,p) = \alpha_j + 2\sum_i B_{i\,j} p_i + O(\|p\|^2),$$

et donc, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$(H_0 + t\frac{\partial H_0}{\partial p_j})(q,p) = t\alpha_j + \sum_i (\alpha_i + 2tB_{i\,j})p_i + O(\|p\|^2).$$

Quand on applique le théorème de conjugaison rectifiée à $H_0 + t\frac{\partial H_0}{\partial p_j}$, on a donc $\theta = 0$, $\varphi = 0$, $c = t\alpha_j$ et

$$\beta(H_0 + t\frac{\partial H_0}{\partial p_j}) = 2tB_{i\,j}.$$

Le lemme en résulte, et la démonstration du théorème KAM est complète. $\square$

Familles de tores invariants lagrangiens diophantiens

Dans le théorème KAM considéré précédemment, le vecteur de fréquence diophantien $\alpha \in HDC$ est fixé.

Familles de tores invariants lagrangiens diophantiens

Dans le théorème KAM considéré précédemment, le vecteur de fréquence diophantien $\alpha \in$ *HDC* est fixé. Il est important pour les applications de laisser α varier de façon à obtenir une *famille* de tores invariants lagrangiens diophantiens.

Familles de tores invariants lagrangiens diophantiens

Dans le théorème KAM considéré précédemment, le vecteur de fréquence diophantien $\alpha \in HDC$ est fixé. Il est important pour les applications de laisser α varier de façon à obtenir une *famille* de tores invariants lagrangiens diophantiens.

Soit V une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$, et soit $H_0 = H_0(p)$ un hamiltonien complètement intégrable sur $\mathbb{R}^n \times V$.

Familles de tores invariants lagrangiens diophantiens

Dans le théorème KAM considéré précédemment, le vecteur de fréquence diophantien $\alpha \in HDC$ est fixé. Il est important pour les applications de laisser α varier de façon à obtenir une *famille* de tores invariants lagrangiens diophantiens.

Soit V une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$, et soit $H_0 = H_0(p)$ un hamiltonien complètement intégrable sur $\mathbb{R}^n \times V$. Supposons que le Hessien $(\frac{\partial^2 H_0}{\partial p_i \partial p_j})$ soit *non dégénéré* en tout point de V.

Familles de tores invariants lagrangiens diophantiens

Dans le théorème KAM considéré précédemment, le vecteur de fréquence diophantien $\alpha \in HDC$ est fixé. Il est important pour les applications de laisser α varier de façon à obtenir une *famille* de tores invariants lagrangiens diophantiens.

Soit V une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$, et soit $H_0 = H_0(p)$ un hamiltonien complètement intégrable sur $\mathbb{R}^n \times V$. Supposons que le Hessien $(\frac{\partial^2 H_0}{\partial p_i \partial p_j})$ soit *non dégénéré* en tout point de V. L'application $p \mapsto \alpha(p) := (\frac{\partial H_0}{\partial p_i})$ est alors un difféomorphisme local.

Familles de tores invariants lagrangiens diophantiens

Dans le théorème KAM considéré précédemment, le vecteur de fréquence diophantien $\alpha \in HDC$ est fixé. Il est important pour les applications de laisser α varier de façon à obtenir une *famille* de tores invariants lagrangiens diophantiens.

Soit V une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$, et soit $H_0 = H_0(p)$ un hamiltonien complètement intégrable sur $\mathbb{R}^n \times V$. Supposons que le Hessien $(\frac{\partial^2 H_0}{\partial p_i \partial p_j})$ soit *non dégénéré* en tout point de V. L'application $p \mapsto \alpha(p) := (\frac{\partial H_0}{\partial p_i})$ est alors un difféomorphisme local.

En tout point $p_* \in V$ tel que $\alpha(p_*) \in HDC$,

Familles de tores invariants lagrangiens diophantiens

Dans le théorème KAM considéré précédemment, le vecteur de fréquence diophantien $\alpha \in HDC$ est fixé. Il est important pour les applications de laisser α varier de façon à obtenir une *famille* de tores invariants lagrangiens diophantiens.

Soit V une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$, et soit $H_0 = H_0(p)$ un hamiltonien complètement intégrable sur $\mathbb{R}^n \times V$. Supposons que le Hessien $(\frac{\partial^2 H_0}{\partial p_i \partial p_j})$ soit *non dégénéré* en tout point de V. L'application $p \mapsto \alpha(p) := (\frac{\partial H_0}{\partial p_i})$ est alors un difféomorphisme local.

En tout point $p_* \in V$ tel que $\alpha(p_*) \in HDC$, le théorème KAM fournit un voisinage $\mathcal{U}(p_*)$ de H_0 dans $C^\infty(\mathbb{T}^n \times U)$

Familles de tores invariants lagrangiens diophantiens

Dans le théorème KAM considéré précédemment, le vecteur de fréquence diophantien $\alpha \in HDC$ est fixé. Il est important pour les applications de laisser α varier de façon à obtenir une *famille* de tores invariants lagrangiens diophantiens.

Soit V une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$, et soit $H_0 = H_0(p)$ un hamiltonien complètement intégrable sur $\mathbb{R}^n \times V$. Supposons que le Hessien $(\frac{\partial^2 H_0}{\partial p_i \partial p_j})$ soit *non dégénéré* en tout point de V. L'application $p \mapsto \alpha(p) := (\frac{\partial H_0}{\partial p_i})$ est alors un difféomorphisme local.

En tout point $p_* \in V$ tel que $\alpha(p_*) \in HDC$, le théorème KAM fournit un voisinage $\mathcal{U}(p_*)$ de H_0 dans $C^\infty(\mathbb{T}^n \times U)$ tel que tout hamiltonien $H \in \mathcal{U}(p_*)$ ait un tore invariant lagrangien $\alpha(p_*)$-quasipériodique proche de $\{p = p_*\}$.

Familles de tores invariants lagrangiens diophantiens

Dans le théorème KAM considéré précédemment, le vecteur de fréquence diophantien $\alpha \in HDC$ est fixé. Il est important pour les applications de laisser α varier de façon à obtenir une *famille* de tores invariants lagrangiens diophantiens.

Soit V une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$, et soit $H_0 = H_0(p)$ un hamiltonien complètement intégrable sur $\mathbb{R}^n \times V$. Supposons que le Hessien $(\frac{\partial^2 H_0}{\partial p_i \partial p_j})$ soit *non dégénéré* en tout point de V. L'application $p \mapsto \alpha(p) := (\frac{\partial H_0}{\partial p_i})$ est alors un difféomorphisme local.

En tout point $p_* \in V$ tel que $\alpha(p_*) \in HDC$, le théorème KAM fournit un voisinage $\mathcal{U}(p_*)$ de H_0 dans $C^\infty(\mathbb{T}^n \times U)$ tel que tout hamiltonien $H \in \mathcal{U}(p_*)$ ait un tore invariant lagrangien $\alpha(p_*)$-quasipériodique proche de $\{p = p_*\}$.

Comment $\mathcal{U}(p_*)$ dépend-il de p_*?

Etant donné une partie compacte $\widetilde{L} \Subset V$, $\tau \geqslant 0$, Etant donné une partie compacte $\widetilde{L} \Subset V$, $\tau \geqslant 0$, $\gamma > 0$, Etant donné une partie compacte $\widetilde{L} \Subset V$, $\tau \geqslant 0$, $\gamma > 0$, on peut choisir un voisinage $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\widetilde{L}, \gamma, \tau)$ de H_0 de sorte que

Etant donné une partie compacte $\widetilde{L} \Subset V$, $\tau \geqslant 0$, $\gamma > 0$, on peut choisir un voisinage $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\widetilde{L}, \gamma, \tau)$ de H_0 de sorte que $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}(p_*)$ pour tout $p_* \in \widetilde{L}$ tel que $\alpha(p_*) \in HDC(\gamma, \tau)$.

Etant donné une partie compacte $\widetilde{L} \Subset V$, $\tau \geqslant 0$, $\gamma > 0$, on peut choisir un voisinage $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\widetilde{L}, \gamma, \tau)$ de H_0 de sorte que $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}(p_*)$ pour tout $p_* \in \widetilde{L}$ tel que $\alpha(p_*) \in HDC(\gamma, \tau)$.

De plus, le hamiltonien $H \in \mathcal{V}$ étant fixé, la dépendance en p_* du tore $\alpha(p_*)$-quasipériodique ainsi obtenu est lisse au sens de Whitney.

Différentiabilité au sens de Whithey

Pour $\ell \geq 0$, on note $S^\ell(\mathbb{R}^n)$ l'espace des formes multilinéaires symétriques en ℓ variables sur $\mathbb{R}^n$.

Différentiabilité au sens de Whithey

Pour $\ell \geq 0$, on note $S^\ell(\mathbb{R}^n)$ l'espace des formes multilinéaires symétriques en ℓ variables sur $\mathbb{R}^n$.

Définition: Soit m un entier ≥ 0 et soit L une partie fermée de $\mathbb{R}^n$.

Différentiabilité au sens de Whithey

Pour $\ell \geq 0$, on note $S^\ell(\mathbb{R}^n)$ l'espace des formes multilinéaires symétriques en ℓ variables sur $\mathbb{R}^n$.

Définition: Soit m un entier ≥ 0 et soit L une partie fermée de $\mathbb{R}^n$. Une application $F : L \to E$, à valeurs dans un espace de Fréchet E, est C^m au sens de Whitney

Différentiabilité au sens de Whithey

Pour $\ell \geq 0$, on note $S^\ell(\mathbb{R}^n)$ l'espace des formes multilinéaires symétriques en ℓ variables sur $\mathbb{R}^n$.

Définition: Soit m un entier ≥ 0 et soit L une partie fermée de $\mathbb{R}^n$. Une application $F : L \to E$, à valeurs dans un espace de Fréchet E, est C^m au sens de Whitney s'il existe, pour $0 \leq \ell \leq m$, des applications $F_\ell : L \to S^\ell(\mathbb{R}^n) \otimes E$ avec $F_0 = F$

Différentiabilité au sens de Whithey

Pour $\ell \geq 0$, on note $S^\ell(\mathbb{R}^n)$ l'espace des formes multilinéaires symétriques en ℓ variables sur $\mathbb{R}^n$.

Définition: Soit m un entier ≥ 0 et soit L une partie fermée de $\mathbb{R}^n$. Une application $F : L \to E$, à valeurs dans un espace de Fréchet E, est C^m au sens de Whitney s'il existe, pour $0 \leq \ell \leq m$, des applications $F_\ell : L \to S^\ell(\mathbb{R}^n) \otimes E$ avec $F_0 = F$ telles que la "formule de Taylor" soit valable sur L:

Différentiabilité au sens de Whithey

Pour $\ell \geq 0$, on note $S^\ell(\mathbb{R}^n)$ l'espace des formes multilinéaires symétriques en ℓ variables sur $\mathbb{R}^n$.

Définition: Soit m un entier ≥ 0 et soit L une partie fermée de $\mathbb{R}^n$. Une application $F : L \to E$, à valeurs dans un espace de Fréchet E, est C^m au sens de Whitney s'il existe, pour $0 \leq \ell \leq m$, des applications $F_\ell : L \to S^\ell(\mathbb{R}^n) \otimes E$ avec $F_0 = F$ telles que la "formule de Taylor" soit valable sur L: en écrivant, pour $0 \leq i \leq m$, $x, x + h \in L$

Différentiabilité au sens de Whithey

Pour $\ell \geq 0$, on note $S^\ell(\mathbb{R}^n)$ l'espace des formes multilinéaires symétriques en ℓ variables sur $\mathbb{R}^n$.

Définition: Soit m un entier ≥ 0 et soit L une partie fermée de $\mathbb{R}^n$. Une application $F : L \to E$, à valeurs dans un espace de Fréchet E, est C^m au sens de Whitney s'il existe, pour $0 \leq \ell \leq m$, des applications $F_\ell : L \to S^\ell(\mathbb{R}^n) \otimes E$ avec $F_0 = F$ telles que la "formule de Taylor" soit valable sur L: en écrivant, pour $0 \leq i \leq m$, $x, x + h \in L$

$$F_i(x + h) = \sum_{i \leq \ell \leq m} F_\ell(x) \frac{h^{\ell - i}}{(\ell - i)!} + R_i(x, h),$$

Différentiabilité au sens de Whithey

Pour $\ell \geq 0$, on note $S^\ell(\mathbb{R}^n)$ l'espace des formes multilinéaires symétriques en ℓ variables sur $\mathbb{R}^n$.

Définition: Soit m un entier ≥ 0 et soit L une partie fermée de $\mathbb{R}^n$. Une application $F : L \to E$, à valeurs dans un espace de Fréchet E, est C^m au sens de Whitney s'il existe, pour $0 \leq \ell \leq m$, des applications $F_\ell : L \to S^\ell(\mathbb{R}^n) \otimes E$ avec $F_0 = F$ telles que la "formule de Taylor" soit valable sur L: en écrivant, pour $0 \leq i \leq m$, $x, x+h \in L$

$$F_i(x+h) = \sum_{i \leq \ell \leq m} F_\ell(x) \frac{h^{\ell-i}}{(\ell-i)!} + R_i(x,h),$$

le reste $R_i(x,h)$ est $o(\|h\|^{m-i})$, localement uniformément en $x \in L$.

Différentiabilité au sens de Whithey

Pour $\ell \geq 0$, on note $S^\ell(\mathbb{R}^n)$ l'espace des formes multilinéaires symétriques en ℓ variables sur $\mathbb{R}^n$.

Définition: Soit m un entier ≥ 0 et soit L une partie fermée de $\mathbb{R}^n$. Une application $F : L \to E$, à valeurs dans un espace de Fréchet E, est C^m au sens de Whitney s'il existe, pour $0 \leq \ell \leq m$, des applications $F_\ell : L \to S^\ell(\mathbb{R}^n) \otimes E$ avec $F_0 = F$ telles que la "formule de Taylor" soit valable sur L: en écrivant, pour $0 \leq i \leq m$, $x, x+h \in L$

$$F_i(x+h) = \sum_{i \leq \ell \leq m} F_\ell(x) \frac{h^{\ell-i}}{(\ell-i)!} + R_i(x,h),$$

le reste $R_i(x,h)$ est $o(\|h\|^{m-i})$, localement uniformément en $x \in L$.

Théorème d'extension de Whitney: Soit V un voisinage ouvert de L. Une application $F : L \to E$ est C^m au sens de Whitney

Différentiabilité au sens de Whithey

Pour $\ell \geq 0$, on note $S^\ell(\mathbb{R}^n)$ l'espace des formes multilinéaires symétriques en ℓ variables sur $\mathbb{R}^n$.

Définition: Soit m un entier ≥ 0 et soit L une partie fermée de $\mathbb{R}^n$. Une application $F : L \to E$, à valeurs dans un espace de Fréchet E, est C^m au sens de Whitney s'il existe, pour $0 \leq \ell \leq m$, des applications $F_\ell : L \to S^\ell(\mathbb{R}^n) \otimes E$ avec $F_0 = F$ telles que la "formule de Taylor" soit valable sur L: en écrivant, pour $0 \leq i \leq m$, $x, x+h \in L$

$$F_i(x+h) = \sum_{i \leq \ell \leq m} F_\ell(x) \frac{h^{\ell-i}}{(\ell-i)!} + R_i(x,h),$$

le reste $R_i(x,h)$ est $o(\|h\|^{m-i})$, localement uniformément en $x \in L$.

Théorème d'extension de Whitney: Soit V un voisinage ouvert de L. Une application $F : L \to E$ est C^m au sens de Whitney si et seulement si elle est restriction d'une application de classe C^m (au sens usuel) de V dans E.

Dans notre cadre, L est l'ensemble des $p_* \in \widetilde{L}$ tels que $\alpha(p_*) \in HDC(\gamma, \tau)$.

Dans notre cadre, L est l'ensemble des $p_* \in \widetilde{L}$ tels que $\alpha(p_*) \in HDC(\gamma, \tau)$. Un tore lagrangien voisin de $\{p = p_*\}$ est le graphe $\{p = \theta(q)\}$ d'une 1-forme fermée θ sur $\mathbb{T}^n$.

Dans notre cadre, L est l'ensemble des $p_* \in \widetilde{L}$ tels que $\alpha(p_*) \in HDC(\gamma, \tau)$. Un tore lagrangien voisin de $\{p = p_*\}$ est le graphe $\{p = \theta(q)\}$ d'une 1-forme fermée θ sur $\mathbb{T}^n$.

Theorem: (Pöschel 1982)
Sous les hypothèses précédentes, il existe un voisinage $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\widetilde{L}, \gamma, \tau)$ de H_0

Dans notre cadre, L est l'ensemble des $p_* \in \widetilde{L}$ tels que $\alpha(p_*) \in HDC(\gamma, \tau)$. Un tore lagrangien voisin de $\{p = p_*\}$ est le graphe $\{p = \theta(q)\}$ d'une 1-forme fermée θ sur $\mathbb{T}^n$.

Theorem: (Pöschel 1982)
Sous les hypothèses précédentes, il existe un voisinage $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\widetilde{L}, \gamma, \tau)$ de H_0 et, pour tout $H \in \mathcal{V}$, une application $p_* \mapsto \theta_{p_*}$ de L dans le bon espace de Fréchet des 1-formes fermées de classe C^∞ sur $\mathbb{T}^n$

Dans notre cadre, L est l'ensemble des $p_* \in \widetilde{L}$ tels que $\alpha(p_*) \in HDC(\gamma, \tau)$. Un tore lagrangien voisin de $\{p = p_*\}$ est le graphe $\{p = \theta(q)\}$ d'une 1-forme fermée θ sur $\mathbb{T}^n$.

Theorem: (Pöschel 1982)
Sous les hypothèses précédentes, il existe un voisinage $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\widetilde{L}, \gamma, \tau)$ de H_0 et, pour tout $H \in \mathcal{V}$, une application $p_* \mapsto \theta_{p_*}$ de L dans le bon espace de Fréchet des 1-formes fermées de classe C^∞ sur $\mathbb{T}^n$ qui soit C^∞ au sens de Whitney

Dans notre cadre, L est l'ensemble des $p_* \in \widetilde{L}$ tels que $\alpha(p_*) \in HDC(\gamma, \tau)$. Un tore lagrangien voisin de $\{p = p_*\}$ est le graphe $\{p = \theta(q)\}$ d'une 1-forme fermée θ sur $\mathbb{T}^n$.

Theorem: (Pöschel 1982)
Sous les hypothèses précédentes, il existe un voisinage $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\widetilde{L}, \gamma, \tau)$ de H_0 et, pour tout $H \in \mathcal{V}$, une application $p_* \mapsto \theta_{p_*}$ de L dans le bon espace de Fréchet des 1-formes fermées de classe C^∞ sur $\mathbb{T}^n$ qui soit C^∞ au sens de Whitney et telle que le graphe de θ_{p_*} soit, pour tout $p_* \in L$, un tore $\alpha(p_*)$-quasipériodique invariant pour H.

Dans notre cadre, L est l'ensemble des $p_* \in \widetilde{L}$ tels que $\alpha(p_*) \in HDC(\gamma, \tau)$. Un tore lagrangien voisin de $\{p = p_*\}$ est le graphe $\{p = \theta(q)\}$ d'une 1-forme fermée θ sur $\mathbb{T}^n$.

Theorem: (Pöschel 1982)
Sous les hypothèses précédentes, il existe un voisinage $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\widetilde{L}, \gamma, \tau)$ de H_0 et, pour tout $H \in \mathcal{V}$, une application $p_* \mapsto \theta_{p_*}$ de L dans le bon espace de Fréchet des 1-formes fermées de classe C^∞ sur $\mathbb{T}^n$ qui soit C^∞ au sens de Whitney et telle que le graphe de θ_{p_*} soit, pour tout $p_* \in L$, un tore $\alpha(p_*)$-quasipériodique invariant pour H.

Corollaire: (Arnold 1963)
Supposons que le hessien du hamiltonien complètement intégrable H_0 soit non dégénéré.

Dans notre cadre, L est l'ensemble des $p_* \in \widetilde{L}$ tels que $\alpha(p_*) \in HDC(\gamma, \tau)$. Un tore lagrangien voisin de $\{p = p_*\}$ est le graphe $\{p = \theta(q)\}$ d'une 1-forme fermée θ sur $\mathbb{T}^n$.

Theorem: (Pöschel 1982)
Sous les hypothèses précédentes, il existe un voisinage $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\widetilde{L}, \gamma, \tau)$ de H_0 et, pour tout $H \in \mathcal{V}$, une application $p_* \mapsto \theta_{p_*}$ de L dans le bon espace de Fréchet des 1-formes fermées de classe C^∞ sur $\mathbb{T}^n$ qui soit C^∞ au sens de Whitney et telle que le graphe de θ_{p_*} soit, pour tout $p_* \in L$, un tore $\alpha(p_*)$-quasipériodique invariant pour H.

Corollaire: (Arnold 1963)
Supposons que le hessien du hamiltonien complètement intégrable H_0 soit non dégénéré. Alors, l'union des tores lagrangiens diophantiens invariants par un hamiltonien H suffisamment proche de H_0

Dans notre cadre, L est l'ensemble des $p_* \in \widetilde{L}$ tels que $\alpha(p_*) \in HDC(\gamma, \tau)$. Un tore lagrangien voisin de $\{p = p_*\}$ est le graphe $\{p = \theta(q)\}$ d'une 1-forme fermée θ sur $\mathbb{T}^n$.

Theorem: (Pöschel 1982)
Sous les hypothèses précédentes, il existe un voisinage $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\widetilde{L}, \gamma, \tau)$ de H_0 et, pour tout $H \in \mathcal{V}$, une application $p_* \mapsto \theta_{p_*}$ de L dans le bon espace de Fréchet des 1-formes fermées de classe C^∞ sur $\mathbb{T}^n$ qui soit C^∞ au sens de Whitney et telle que le graphe de θ_{p_*} soit, pour tout $p_* \in L$, un tore $\alpha(p_*)$-quasipériodique invariant pour H.

Corollaire: (Arnold 1963)
Supposons que le hessien du hamiltonien complètement intégrable H_0 soit non dégénéré. Alors, l'union des tores lagrangiens diophantiens invariants par un hamiltonien H suffisamment proche de H_0 est une partie de l'espace des phases $\mathbb{T}^n \times U$ de mesure de Lebesgue positive.

Dans notre cadre, L est l'ensemble des $p_* \in \widetilde{L}$ tels que $\alpha(p_*) \in HDC(\gamma, \tau)$. Un tore lagrangien voisin de $\{p = p_*\}$ est le graphe $\{p = \theta(q)\}$ d'une 1-forme fermée θ sur $\mathbb{T}^n$.

Theorem: (Pöschel 1982)
Sous les hypothèses précédentes, il existe un voisinage $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\widetilde{L}, \gamma, \tau)$ de H_0 et, pour tout $H \in \mathcal{V}$, une application $p_* \mapsto \theta_{p_*}$ de L dans le bon espace de Fréchet des 1-formes fermées de classe C^∞ sur $\mathbb{T}^n$ qui soit C^∞ au sens de Whitney et telle que le graphe de θ_{p_*} soit, pour tout $p_* \in L$, un tore $\alpha(p_*)$-quasipériodique invariant pour H.

Corollaire: (Arnold 1963)
Supposons que le hessien du hamiltonien complètement intégrable H_0 soit non dégénéré. Alors, l'union des tores lagrangiens diophantiens invariants par un hamiltonien H suffisamment proche de H_0 est une partie de l'espace des phases $\mathbb{T}^n \times U$ de mesure de Lebesgue positive. En fait, la mesure relative de cette partie tend vers 1 lorsque H tend vers H_0.

Théorème d’inversion locale et différentiabilité au sens de Whitney

On présente une version à paramètres du théorème d’inversion locale de Hamilton qui permet, entre autres applications, d’obtenir le théorème de Pöschel.

Théorème d'inversion locale et différentiabilité au sens de Whitney

On présente une version à paramètres du théorème d'inversion locale de Hamilton qui permet, entre autres applications, d'obtenir le théorème de Pöschel. Le cadre est le suivant

Théorème d'inversion locale et différentiabilité au sens de Whitney

On présente une version à paramètres du théorème d'inversion locale de Hamilton qui permet, entre autres applications, d'obtenir le théorème de Pöschel. Le cadre est le suivant

- E, F sont de bons espaces de Fréchet, U est une partie ouverte de E;

Théorème d'inversion locale et différentiabilité au sens de Whitney

On présente une version à paramètres du théorème d'inversion locale de Hamilton qui permet, entre autres applications, d'obtenir le théorème de Pöschel. Le cadre est le suivant

- E, F sont de bons espaces de Fréchet, U est une partie ouverte de E;
- V est l'espace des paramètres, une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$;

Théorème d'inversion locale et différentiabilité au sens de Whitney

On présente une version à paramètres du théorème d'inversion locale de Hamilton qui permet, entre autres applications, d'obtenir le théorème de Pöschel. Le cadre est le suivant

- E, F sont de bons espaces de Fréchet, U est une partie ouverte de E;
- V est l'espace des paramètres, une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$;
- L est une partie compacte de V;

Théorème d'inversion locale et différentiabilité au sens de Whitney

On présente une version à paramètres du théorème d'inversion locale de Hamilton qui permet, entre autres applications, d'obtenir le théorème de Pöschel. Le cadre est le suivant

- E, F sont de bons espaces de Fréchet, U est une partie ouverte de E;
- V est l'espace des paramètres, une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$;
- L est une partie compacte de V;
- m est un entier au moins égal à 2;

Théorème d'inversion locale et différentiabilité au sens de Whitney

On présente une version à paramètres du théorème d'inversion locale de Hamilton qui permet, entre autres applications, d'obtenir le théorème de Pöschel. Le cadre est le suivant

- E, F sont de bons espaces de Fréchet, U est une partie ouverte de E;
- V est l'espace des paramètres, une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$;
- L est une partie compacte de V;
- m est un entier au moins égal à 2;
- $f : (x, a) \mapsto f_a(x)$ est une application de $U \times V$ dans F, de classe C^m au sens de Gateaux.

On suppose que

On suppose que

- pour chaque $a \in L$, f_a est une bonne application de classe C^2, uniformément en a;

On suppose que

- pour chaque $a \in L$, f_a est une bonne application de classe C^2, uniformément en a;
- pour chaque $a \in L$, il existe un inverse $L_a : U \times F \to E$ de Df_a qui est une bonne application, uniformément en a.

On suppose que

- pour chaque $a \in L$, f_a est une bonne application de classe C^2, uniformément en a;
- pour chaque $a \in L$, il existe un inverse $L_a : U \times F \to E$ de Df_a qui est une bonne application, uniformément en a.

Alors, pour tout $x_0 \in U$, il existe des entiers r_0, r_1 et des réels positifs $\varepsilon_0, \varepsilon_1$ tels que, pour tout $a \in L$,

On suppose que

- pour chaque $a \in L$, f_a est une bonne application de classe C^2, uniformément en a;
- pour chaque $a \in L$, il existe un inverse $L_a : U \times F \to E$ de Df_a qui est une bonne application, uniformément en a.

Alors, pour tout $x_0 \in U$, il existe des entiers r_0, r_1 et des réels positifs $\varepsilon_0, \varepsilon_1$ tels que, pour tout $a \in L$, la restriction de f_a à la boule $B_0 := \{\|x - x_0\|_{r_0} < \varepsilon_0\}$ soit un bon difféomorphisme de classe C^2 sur un ouvert contenant la boule $B_1(a) := \{\|y - f_a(x_0)\|_{r_1} < \varepsilon_1\}$.

On suppose que

- pour chaque $a \in L$, f_a est une bonne application de classe C^2, uniformément en a;
- pour chaque $a \in L$, il existe un inverse $L_a : U \times F \to E$ de Df_a qui est une bonne application, uniformément en a.

Alors, pour tout $x_0 \in U$, il existe des entiers r_0, r_1 et des réels positifs $\varepsilon_0, \varepsilon_1$ tels que, pour tout $a \in L$, la restriction de f_a à la boule $B_0 := \{\|x - x_0\|_{r_0} < \varepsilon_0\}$ soit un bon difféomorphisme de classe C^2 sur un ouvert contenant la boule $B_1(a) := \{\|y - f_a(x_0)\|_{r_1} < \varepsilon_1\}$.

De plus, l'inverse f_a^{-1} est une bonne application de classe C^2 uniformément en a.

On suppose que

- pour chaque $a \in L$, f_a est une bonne application de classe C^2, uniformément en a;
- pour chaque $a \in L$, il existe un inverse $L_a : U \times F \to E$ de Df_a qui est une bonne application, uniformément en a.

Alors, pour tout $x_0 \in U$, il existe des entiers r_0, r_1 et des réels positifs ε_0, ε_1 tels que, pour tout $a \in L$, la restriction de f_a à la boule $B_0 := \{\|x - x_0\|_{r_0} < \varepsilon_0\}$ soit un bon difféomorphisme de classe C^2 sur un ouvert contenant la boule $B_1(a) := \{\|y - f_a(x_0)\|_{r_1} < \varepsilon_1\}$.

De plus, l'inverse f_a^{-1} est une bonne application de classe C^2 uniformément en a.

Enfin, l'application g définie sur $\{(y, a),\ a \in L, y \in B_1(a)\}$ par $g(y, a) := f_a^{-1}(y)$ se prolonge en une application de $F \times V$ dans E qui est de classe C^m au sens de Gateaux.

Conjugaison conditionnelle

Le théorème de conjugaison rectifiée a permis d'écrire de façon unique

$$H(q,p) = K \circ g_{\varphi} \circ k_{\theta}(q,p) + c + \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{n} \beta_i \sin 2\pi p_i,$$

Conjugaison conditionnelle

Le théorème de conjugaison rectifiée a permis d'écrire de façon unique

$$H(q,p) = K \circ g_\varphi \circ k_\theta(q,p) + c + \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{n} \beta_i \sin 2\pi p_i,$$

- α est un vecteur de fréquence diophantien *fixé*;

Conjugaison conditionnelle

Le théorème de conjugaison rectifiée a permis d'écrire de façon unique

$$H(q,p) = K \circ g_\varphi \circ k_\theta(q,p) + c + \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{n} \beta_i \sin 2\pi p_i,$$

- α est un vecteur de fréquence diophantien *fixé*;
- K appartient à l'espace F_α des hamiltoniens de classe C^∞ sur $\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n$ de la forme

$$K(q,p) = \sum_i \alpha_i p_i + O(\|p\|^2)$$

le long de $\mathbb{T}^n \times \{0\}$;

Conjugaison conditionnelle

Le théorème de conjugaison rectifiée a permis d'écrire de façon unique

$$H(q,p) = K \circ g_\varphi \circ k_\theta(q,p) + c + \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{n} \beta_i \sin 2\pi p_i,$$

- α est un vecteur de fréquence diophantien *fixé*;
- K appartient à l'espace F_α des hamiltoniens de classe C^∞ sur $\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n$ de la forme
$$K(q,p) = \sum_i \alpha_i p_i + O(\|p\|^2)$$
le long de $\mathbb{T}^n \times \{0\}$;
- $k_\theta,\ g_\varphi$ sont des symplectomorphismes de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n$ voisins de l'identité;

Conjugaison conditionnelle

Le théorème de conjugaison rectifiée a permis d'écrire de façon unique

$$H(q,p) = K \circ g_\varphi \circ k_\theta(q,p) + c + \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{n} \beta_i \sin 2\pi p_i,$$

- α est un vecteur de fréquence diophantien *fixé*;
- K appartient à l'espace F_α des hamiltoniens de classe C^∞ sur $\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n$ de la forme
$$K(q,p) = \sum_i \alpha_i p_i + O(\|p\|^2)$$
le long de $\mathbb{T}^n \times \{0\}$;
- $k_\theta,\ g_\varphi$ sont des symplectomorphismes de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n$ voisins de l'identité;
- $c \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}^n$;

Conjugaison conditionnelle

Le théorème de conjugaison rectifiée a permis d'écrire de façon unique

$$H(q,p) = K \circ g_\varphi \circ k_\theta(q,p) + c + \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{n} \beta_i \sin 2\pi p_i,$$

- α est un vecteur de fréquence diophantien *fixé*;
- K appartient à l'espace F_α des hamiltoniens de classe C^∞ sur $\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n$ de la forme
$$K(q,p) = \sum_i \alpha_i p_i + O(\|p\|^2)$$
le long de $\mathbb{T}^n \times \{0\}$;
- $k_\theta,\ g_\varphi$ sont des symplectomorphismes de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n$ voisins de l'identité;
- $c \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}^n$;
- H est un hamiltonien de classe C^∞ sur $\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n$, proche d'un élément $K_0 \in F_\alpha$.

Dans l'énoncé suivant, qui ne réclame pas non plus d'hypothèse de torsion, on laisse α varier afin de pouvoir éliminer β.

Dans l'énoncé suivant, qui ne réclame pas non plus d'hypothèse de torsion, on laisse α varier afin de pouvoir éliminer β. On pose $\mathfrak{F} = \bigsqcup_{\alpha \in \mathbb{R}^n} F_\alpha$.

Dans l'énoncé suivant, qui ne réclame pas non plus d'hypothèse de torsion, on laisse α varier afin de pouvoir éliminer β. On pose $\mathfrak{F} = \bigsqcup_{\alpha \in \mathbb{R}^n} F_\alpha$.

Théorème: (Herman (Y.1992), Sevryuk 1995, Fejoz 2004)

Dans l'énoncé suivant, qui ne réclame pas non plus d'hypothèse de torsion, on laisse α varier afin de pouvoir éliminer β. On pose $\mathfrak{F} = \bigsqcup_{\alpha \in \mathbb{R}^n} F_\alpha$.

Théorème: (Herman (Y.1992), Sevryuk 1995, Fejoz 2004) Soient $\gamma > 0$, $\tau \geq 0$, $\alpha_0 \in HDC(\gamma, \tau)$, $K_0 \in F_{\alpha_0}$.

Dans l'énoncé suivant, qui ne réclame pas non plus d'hypothèse de torsion, on laisse α varier afin de pouvoir éliminer β. On pose $\mathfrak{F} = \bigsqcup_{\alpha \in \mathbb{R}^n} F_\alpha$.

Théorème: (Herman (Y.1992), Sevryuk 1995, Fejoz 2004) Soient $\gamma > 0$, $\tau \geq 0$, $\alpha_0 \in HDC(\gamma, \tau)$, $K_0 \in F_{\alpha_0}$. Il existe une application $H \mapsto (K, \theta, \varphi, c)$,

Dans l'énoncé suivant, qui ne réclame pas non plus d'hypothèse de torsion, on laisse α varier afin de pouvoir éliminer β. On pose $\mathfrak{F} = \bigsqcup_{\alpha \in \mathbb{R}^n} F_\alpha$.

Théorème: (Herman (Y.1992), Sevryuk 1995, Fejoz 2004) Soient $\gamma > 0$, $\tau \geq 0$, $\alpha_0 \in HDC(\gamma, \tau)$, $K_0 \in F_{\alpha_0}$. Il existe une application $H \mapsto (K, \theta, \varphi, c)$, de classe C^∞ au sens de Gateaux,

Dans l'énoncé suivant, qui ne réclame pas non plus d'hypothèse de torsion, on laisse α varier afin de pouvoir éliminer β. On pose $\mathfrak{F} = \bigsqcup_{\alpha \in \mathbb{R}^n} F_\alpha$.

Théorème: (Herman (Y.1992), Sevryuk 1995, Fejoz 2004) Soient $\gamma > 0$, $\tau \geq 0$, $\alpha_0 \in HDC(\gamma, \tau)$, $K_0 \in F_{\alpha_0}$. Il existe une application $H \mapsto (K, \theta, \varphi, c)$, de classe C^∞ au sens de Gateaux, définie sur un voisinage de K_0 dans $C^\infty(\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n)$,

Dans l'énoncé suivant, qui ne réclame pas non plus d'hypothèse de torsion, on laisse α varier afin de pouvoir éliminer β. On pose $\mathfrak{F} = \bigsqcup_{\alpha \in \mathbb{R}^n} F_\alpha$.

Théorème: (Herman (Y.1992), Sevryuk 1995, Fejoz 2004) Soient $\gamma > 0$, $\tau \geq 0$, $\alpha_0 \in HDC(\gamma, \tau)$, $K_0 \in F_{\alpha_0}$. Il existe une application $H \mapsto (K, \theta, \varphi, c)$, de classe C^∞ au sens de Gateaux, définie sur un voisinage de K_0 dans $C^\infty(\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n)$, à valeurs dans un voisinage de $(K_0, 0, 0, 0)$ dans $\mathfrak{F} \times C_0^\infty(\mathbb{T}^n) \times (C_0^\infty(\mathbb{T}^n))^n \times \mathbb{R}$

Dans l'énoncé suivant, qui ne réclame pas non plus d'hypothèse de torsion, on laisse α varier afin de pouvoir éliminer β. On pose $\mathfrak{F} = \bigsqcup_{\alpha \in \mathbb{R}^n} F_\alpha$.

Théorème: (Herman (Y.1992), Sevryuk 1995, Fejoz 2004) Soient $\gamma > 0$, $\tau \geq 0$, $\alpha_0 \in HDC(\gamma, \tau)$, $K_0 \in F_{\alpha_0}$. Il existe une application $H \mapsto (K, \theta, \varphi, c)$, de classe C^∞ au sens de Gateaux, définie sur un voisinage de K_0 dans $C^\infty(\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n)$, à valeurs dans un voisinage de $(K_0, 0, 0, 0)$ dans $\mathfrak{F} \times C_0^\infty(\mathbb{T}^n) \times (C_0^\infty(\mathbb{T}^n))^n \times \mathbb{R}$ qui a la propriété suivante:

Dans l'énoncé suivant, qui ne réclame pas non plus d'hypothèse de torsion, on laisse α varier afin de pouvoir éliminer β. On pose $\mathfrak{F} = \bigsqcup_{\alpha \in \mathbb{R}^n} F_\alpha$.

Théorème: (Herman (Y.1992), Sevryuk 1995, Fejoz 2004) Soient $\gamma > 0$, $\tau \geq 0$, $\alpha_0 \in HDC(\gamma, \tau)$, $K_0 \in F_{\alpha_0}$. Il existe une application $H \mapsto (K, \theta, \varphi, c)$, de classe C^∞ au sens de Gateaux, définie sur un voisinage de K_0 dans $C^\infty(\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n)$, à valeurs dans un voisinage de $(K_0, 0, 0, 0)$ dans $\mathfrak{F} \times C_0^\infty(\mathbb{T}^n) \times (C_0^\infty(\mathbb{T}^n))^n \times \mathbb{R}$ qui a la propriété suivante: lorsque $K = K(H)$ appartient à F_α avec $\alpha \in HDC(\gamma, \tau)$, Dans l'énoncé suivant, qui ne réclame pas non plus d'hypothèse de torsion, on laisse α varier afin de pouvoir éliminer β. On pose $\mathfrak{F} = \bigsqcup_{\alpha\in\mathbb{R}^n} F_\alpha$.

Théorème: (Herman (Y.1992), Sevryuk 1995, Fejoz 2004) Soient $\gamma > 0$, $\tau \geq 0$, $\alpha_0 \in HDC(\gamma,\tau)$, $K_0 \in F_{\alpha_0}$. Il existe une application $H \mapsto (K,\theta,\varphi,c)$, de classe C^∞ au sens de Gateaux, définie sur un voisinage de K_0 dans $C^\infty(\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n)$, à valeurs dans un voisinage de $(K_0,0,0,0)$ dans $\mathfrak{F} \times C_0^\infty(\mathbb{T}^n) \times (C_0^\infty(\mathbb{T}^n))^n \times \mathbb{R}$ qui a la propriété suivante: lorsque $K = K(H)$ appartient à F_α avec $\alpha \in HDC(\gamma,\tau)$, on a

$$H = K \circ g_\varphi \circ k_\theta + c.$$

Dans l'énoncé suivant, qui ne réclame pas non plus d'hypothèse de torsion, on laisse α varier afin de pouvoir éliminer β. On pose $\mathfrak{F} = \bigsqcup_{\alpha \in \mathbb{R}^n} F_\alpha$.

Théorème: (Herman (Y.1992), Sevryuk 1995, Fejoz 2004) Soient $\gamma > 0$, $\tau \geq 0$, $\alpha_0 \in HDC(\gamma, \tau)$, $K_0 \in F_{\alpha_0}$. Il existe une application $H \mapsto (K, \theta, \varphi, c)$, de classe C^∞ au sens de Gateaux, définie sur un voisinage de K_0 dans $C^\infty(\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n)$, à valeurs dans un voisinage de $(K_0, 0, 0, 0)$ dans $\mathfrak{F} \times C_0^\infty(\mathbb{T}^n) \times (C_0^\infty(\mathbb{T}^n))^n \times \mathbb{R}$ qui a la propriété suivante: lorsque $K = K(H)$ appartient à F_α avec $\alpha \in HDC(\gamma, \tau)$, on a

$$H = K \circ g_\varphi \circ k_\theta + c.$$

Le tore lagrangien $\{p = -d\theta(q)\}$ est alors invariant par H et α-quasipériodique.

Preuve du théorème de conjugaison conditionnelle

Le théorème précédent résulte facilement d'une combinaison de la preuve du théorème de conjugaison rectifiée et de la version à paramètres Whitney du théorème d'inversion locale.

Preuve du théorème de conjugaison conditionnelle

Le théorème précédent résulte facilement d'une combinaison de la preuve du théorème de conjugaison rectifiée et de la version à paramètres Whitney du théorème d'inversion locale.

On pose $E := C_0^\infty(\mathbb{T}^n)$, $s_i(q,p) := \frac{1}{2\pi} \sin 2\pi p_i$.

Preuve du théorème de conjugaison conditionnelle

Le théorème précédent résulte facilement d'une combinaison de la preuve du théorème de conjugaison rectifiée et de la version à paramètres Whitney du théorème d'inversion locale.

On pose $E := C_0^\infty(\mathbb{T}^n)$, $s_i(q,p) := \frac{1}{2\pi} \sin 2\pi p_i$. La formule

$$(\star) \qquad H = K \circ g_\varphi \circ k_\theta + c + \sum_i \beta_i s_i,$$

Preuve du théorème de conjugaison conditionnelle

Le théorème précédent résulte facilement d'une combinaison de la preuve du théorème de conjugaison rectifiée et de la version à paramètres Whitney du théorème d'inversion locale.

On pose $E := C_0^\infty(\mathbb{T}^n)$, $s_i(q,p) := \frac{1}{2\pi}\sin 2\pi p_i$. La formule

$$(\star) \qquad H = K \circ g_\varphi \circ k_\theta + c + \sum_i \beta_i s_i,$$

définit une application sur un voisinage de $(K_0, 0, 0, 0, 0)$ dans $\mathfrak{F} \times E \times E^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$,

Preuve du théorème de conjugaison conditionnelle

Le théorème précédent résulte facilement d'une combinaison de la preuve du théorème de conjugaison rectifiée et de la version à paramètres Whitney du théorème d'inversion locale.

On pose $E := C_0^\infty(\mathbb{T}^n)$, $s_i(q,p) := \frac{1}{2\pi} \sin 2\pi p_i$. La formule

$$(\star) \qquad H = K \circ g_\varphi \circ k_\theta + c + \sum_i \beta_i s_i,$$

définit une application sur un voisinage de $(K_0, 0, 0, 0, 0)$ dans $\mathfrak{F} \times E \times E^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, à valeurs dans un voisinage de K_0 dans $F := C^\infty(\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n)$.

Preuve du théorème de conjugaison conditionnelle

Le théorème précédent résulte facilement d'une combinaison de la preuve du théorème de conjugaison rectifiée et de la version à paramètres Whitney du théorème d'inversion locale.

On pose $E := C_0^\infty(\mathbb{T}^n)$, $s_i(q,p) := \frac{1}{2\pi} \sin 2\pi p_i$. La formule

$$(\star) \qquad H = K \circ g_\varphi \circ k_\theta + c + \sum_i \beta_i s_i,$$

définit une application sur un voisinage de $(K_0, 0, 0, 0, 0)$ dans $\mathfrak{F} \times E \times E^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, à valeurs dans un voisinage de K_0 dans $F := C^\infty(\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n)$.

Cette application est C^∞ au sens de Gateaux.

Preuve du théorème de conjugaison conditionnelle

Le théorème précédent résulte facilement d'une combinaison de la preuve du théorème de conjugaison rectifiée et de la version à paramètres Whitney du théorème d'inversion locale.

On pose $E := C_0^\infty(\mathbb{T}^n)$, $s_i(q,p) := \frac{1}{2\pi}\sin 2\pi p_i$. La formule

$$(\star) \qquad H = K \circ g_\varphi \circ k_\theta + c + \sum_i \beta_i s_i,$$

définit une application sur un voisinage de $(K_0, 0, 0, 0, 0)$ dans $\mathfrak{F} \times E \times E^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, à valeurs dans un voisinage de K_0 dans $F := C^\infty(\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n)$.

Cette application est C^∞ au sens de Gateaux. On applique la version Whitney du théorème d'inversion locale avec $V := \{\alpha \in \mathbb{R}^n, \|\alpha - \alpha_0\| < \varepsilon\}$, $L := \{\alpha \in HDC(\gamma,\tau), \|\alpha - \alpha_0\| < \varepsilon/2\}$, ε assez petit.

Preuve du théorème de conjugaison conditionnelle

Le théorème précédent résulte facilement d'une combinaison de la preuve du théorème de conjugaison rectifiée et de la version à paramètres Whitney du théorème d'inversion locale.

On pose $E := C_0^\infty(\mathbb{T}^n)$, $s_i(q,p) := \frac{1}{2\pi}\sin 2\pi p_i$. La formule

$$(\star) \qquad H = K \circ g_\varphi \circ k_\theta + c + \sum_i \beta_i s_i,$$

définit une application sur un voisinage de $(K_0, 0, 0, 0, 0)$ dans $\mathfrak{F} \times E \times E^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, à valeurs dans un voisinage de K_0 dans $F := C^\infty(\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n)$.

Cette application est C^∞ au sens de Gateaux. On applique la version Whitney du théorème d'inversion locale avec $V := \{\alpha \in \mathbb{R}^n,\ \|\alpha - \alpha_0\| < \varepsilon\}$, $L := \{\alpha \in HDC(\gamma,\tau),\ \|\alpha - \alpha_0\| < \varepsilon/2\}$, ε assez petit.

Les hypothèses de ce théorème sont satisfaites d'après la preuve du théorème de conjugaison rectifiée.

Il existe donc une application de classe C^∞ au sens de Gateaux $(H, \alpha) \mapsto (K, \theta, \varphi, \beta, c) =: \Psi_\alpha(H)$, Il existe donc une application de classe C^∞ au sens de Gateaux $(H, \alpha) \mapsto (K, \theta, \varphi, \beta, c) =: \Psi_\alpha(H)$, définie dans un voisinage de (K_0, α_0), telle que, Il existe donc une application de classe C^∞ au sens de Gateaux $(H, \alpha) \mapsto (K, \theta, \varphi, \beta, c) =: \Psi_\alpha(H)$, définie dans un voisinage de (K_0, α_0), telle que, pour $\alpha \in HDC(\gamma, \tau)$,

Il existe donc une application de classe C^∞ au sens de Gateaux $(H, \alpha) \mapsto (K, \theta, \varphi, \beta, c) =: \Psi_\alpha(H)$, définie dans un voisinage de (K_0, α_0), telle que, pour $\alpha \in HDC(\gamma, \tau)$, on ait $(\star)$ avec $K \in F_\alpha$.

Il existe donc une application de classe C^∞ au sens de Gateaux $(H, \alpha) \mapsto (K, \theta, \varphi, \beta, c) =: \Psi_\alpha(H)$, définie dans un voisinage de (K_0, α_0), telle que, pour $\alpha \in HDC(\gamma, \tau)$, on ait $(\star)$ avec $K \in F_\alpha$.

Lorsque $H = K_0$, $\alpha \in HDC(\gamma, \tau)$, on a $\theta = 0$, $\varphi = 0$, $c = 0$ et $\beta = \alpha - \alpha_0$.

Il existe donc une application de classe C^∞ au sens de Gateaux $(H, \alpha) \mapsto (K, \theta, \varphi, \beta, c) =: \Psi_\alpha(H)$, définie dans un voisinage de (K_0, α_0), telle que, pour $\alpha \in HDC(\gamma, \tau)$, on ait $(\star)$ avec $K \in F_\alpha$.

Lorsque $H = K_0$, $\alpha \in HDC(\gamma, \tau)$, on a $\theta = 0$, $\varphi = 0$, $c = 0$ et $\beta = \alpha - \alpha_0$. On conclut (en diminuant si nécessaire γ) qu'on a $\frac{\partial \beta}{\partial \alpha}_{|\alpha=\alpha_0} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$.

Il existe donc une application de classe C^∞ au sens de Gateaux $(H, \alpha) \mapsto (K, \theta, \varphi, \beta, c) =: \Psi_\alpha(H)$, définie dans un voisinage de (K_0, α_0), telle que, pour $\alpha \in HDC(\gamma, \tau)$, on ait $(\star)$ avec $K \in F_\alpha$.

Lorsque $H = K_0$, $\alpha \in HDC(\gamma, \tau)$, on a $\theta = 0$, $\varphi = 0$, $c = 0$ et $\beta = \alpha - \alpha_0$. On conclut (en diminuant si nécessaire γ) qu'on a $\frac{\partial \beta}{\partial \alpha}_{|\alpha = \alpha_0} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$.

L'application $\alpha \mapsto \beta(\alpha, H)$ est donc, pour tout H assez voisin de K_0, un difféomorphisme local qui s'annule en un unique point $\alpha(H)$ voisin de α_0.

Il existe donc une application de classe C^∞ au sens de Gateaux $(H,\alpha) \mapsto (K,\theta,\varphi,\beta,c) =: \Psi_\alpha(H)$, définie dans un voisinage de (K_0,α_0), telle que, pour $\alpha \in HDC(\gamma,\tau)$, on ait $(\star)$ avec $K \in F_\alpha$.

Lorsque $H = K_0$, $\alpha \in HDC(\gamma,\tau)$, on a $\theta = 0$, $\varphi = 0$, $c = 0$ et $\beta = \alpha - \alpha_0$. On conclut (en diminuant si nécessaire γ) qu'on a $\frac{\partial \beta}{\partial \alpha}_{|\alpha=\alpha_0} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$.

L'application $\alpha \mapsto \beta(\alpha, H)$ est donc, pour tout H assez voisin de K_0, un difféomorphisme local qui s'annule en un unique point $\alpha(H)$ voisin de α_0.

L'application $H \mapsto \Psi_{\alpha(H)}(H)$ a les propriétés requises. $\square$

Remarques

Remarques

- L'application $H \mapsto (K; \theta, \varphi, c)$ donnée par le théorème n'est pas unique.

Remarques

- L'application $H \mapsto (K; \theta, \varphi, c)$ donnée par le théorème n'est pas unique.
- Comme dans le théorème de conjugaison rectifiée, l'énoncé est formulé sur $\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n$ pour faciliter la preuve, mais tout se passe dans un voisinage de $\mathbb{T}^n \times 0$.

Remarques

- L'application $H \mapsto (K; \theta, \varphi, c)$ donnée par le théorème n'est pas unique.
- Comme dans le théorème de conjugaison rectifiée, l'énoncé est formulé sur $\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n$ pour faciliter la preuve, mais tout se passe dans un voisinage de $\mathbb{T}^n \times 0$.
- Seul des tores invariants lagrangiens exacts sont fournis par le théorème.

Remarques

- L'application $H \mapsto (K; \theta, \varphi, c)$ donnée par le théorème n'est pas unique.
- Comme dans le théorème de conjugaison rectifiée, l'énoncé est formulé sur $\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n$ pour faciliter la preuve, mais tout se passe dans un voisinage de $\mathbb{T}^n \times 0$.
- Seul des tores invariants lagrangiens exacts sont fournis par le théorème. Cependant, pour tout $p_* \in \mathbb{R}^n$ voisin de 0, et tout H voisin de K_0, on peut aussi appliquer le théorème à $H_{p_*}(q,p) := H(q, p + p_*)$. On obtient ainsi des tores cohomologues à $\{p = p_*\}$.

Conjugaison conditionnelle et forme normale de Birkhoff

Soient $\gamma > 0$, $\tau \geq 0$, $\alpha^0 \in HDC(\gamma, \tau)$.

Conjugaison conditionnelle et forme normale de Birkhoff

Soient $\gamma > 0$, $\tau \geq 0$, $\alpha^0 \in HDC(\gamma, \tau)$. Soit T un tore lagrangien α^0-quasipériodique invariant par un hamiltonien K_0.

Conjugaison conditionnelle et forme normale de Birkhoff

Soient $\gamma > 0$, $\tau \geq 0$, $\alpha^0 \in HDC(\gamma, \tau)$. Soit T un tore lagrangien α^0-quasipériodique invariant par un hamiltonien K_0. Après un changement de variables symplectique, on peut supposer que $T = \mathbb{T}^n \times \{0\}$

Conjugaison conditionnelle et forme normale de Birkhoff

Soient $\gamma > 0$, $\tau \geq 0$, $\alpha^0 \in HDC(\gamma, \tau)$. Soit T un tore lagrangien α^0-quasipériodique invariant par un hamiltonien K_0. Après un changement de variables symplectique, on peut supposer que $T = \mathbb{T}^n \times \{0\}$ et que K_0 est sous forme normale de Birkhoff:

$$K_0(q,p) = c_0 + \sum_i \alpha_i^0 p_i + \sum_{2 \leq |\underline{\ell}| \leq N} B_{\underline{\ell}} p^{\underline{\ell}} + O(\|p\|^{N+1}),$$

où on a fixé un grand entier N.

Conjugaison conditionnelle et forme normale de Birkhoff

Soient $\gamma > 0$, $\tau \geq 0$, $\alpha^0 \in HDC(\gamma, \tau)$. Soit T un tore lagrangien α^0-quasipériodique invariant par un hamiltonien K_0. Après un changement de variables symplectique, on peut supposer que $T = \mathbb{T}^n \times \{0\}$ et que K_0 est sous forme normale de Birkhoff:

$$K_0(q,p) = c_0 + \sum_i \alpha_i^0 p_i + \sum_{2 \leq |\underline{\ell}| \leq N} B_{\underline{\ell}} p^{\underline{\ell}} + O(\|p\|^{N+1}),$$

où on a fixé un grand entier N.

Pour $p_* \in \mathbb{R}^n$ voisin de 0, on pose $K_{p_*}(q,p) := K_0(q, p + p_*)$.

Conjugaison conditionnelle et forme normale de Birkhoff

Soient $\gamma > 0$, $\tau \geq 0$, $\alpha^0 \in HDC(\gamma, \tau)$. Soit T un tore lagrangien α^0-quasipériodique invariant par un hamiltonien K_0. Après un changement de variables symplectique, on peut supposer que $T = \mathbb{T}^n \times \{0\}$ et que K_0 est sous forme normale de Birkhoff:

$$K_0(q,p) = c_0 + \sum_i \alpha_i^0 p_i + \sum_{2 \leq |\underline{\ell}| \leq N} B_{\underline{\ell}} p^{\underline{\ell}} + O(\|p\|^{N+1}),$$

où on a fixé un grand entier N.

Pour $p_* \in \mathbb{R}^n$ voisin de 0, on pose $K_{p_*}(q,p) := K_0(q, p + p_*)$. Le théorème de conjugaison conditionnelle fournit une application lisse $p_* \mapsto \alpha(p_*)$ telle que,

Conjugaison conditionnelle et forme normale de Birkhoff

Soient $\gamma > 0$, $\tau \geq 0$, $\alpha^0 \in HDC(\gamma, \tau)$. Soit T un tore lagrangien α^0-quasipériodique invariant par un hamiltonien K_0. Après un changement de variables symplectique, on peut supposer que $T = \mathbb{T}^n \times \{0\}$ et que K_0 est sous forme normale de Birkhoff:

$$K_0(q, p) = c_0 + \sum_i \alpha_i^0 p_i + \sum_{2 \leq |\underline{\ell}| \leq N} B_{\underline{\ell}} p^{\underline{\ell}} + O(\|p\|^{N+1}),$$

où on a fixé un grand entier N.

Pour $p_* \in \mathbb{R}^n$ voisin de 0, on pose $K_{p_*}(q, p) := K_0(q, p + p_*)$. Le théorème de conjugaison conditionnelle fournit une application lisse $p_* \mapsto \alpha(p_*)$ telle que, lorsque $\alpha(p_*) \in HDC(\gamma, \tau)$,

Conjugaison conditionnelle et forme normale de Birkhoff

Soient $\gamma > 0$, $\tau \geq 0$, $\alpha^0 \in HDC(\gamma, \tau)$. Soit T un tore lagrangien α^0-quasipériodique invariant par un hamiltonien K_0. Après un changement de variables symplectique, on peut supposer que $T = \mathbb{T}^n \times \{0\}$ et que K_0 est sous forme normale de Birkhoff:

$$K_0(q,p) = c_0 + \sum_i \alpha_i^0 p_i + \sum_{2 \leq |\underline{\ell}| \leq N} B_{\underline{\ell}} p^{\underline{\ell}} + O(\|p\|^{N+1}),$$

où on a fixé un grand entier N.

Pour $p_* \in \mathbb{R}^n$ voisin de 0, on pose $K_{p_*}(q,p) := K_0(q, p + p_*)$. Le théorème de conjugaison conditionnelle fournit une application lisse $p_* \mapsto \alpha(p_*)$ telle que, lorsque $\alpha(p_*) \in HDC(\gamma, \tau)$, K_0 ait un tore lagrangien $\alpha(p_*)$-quasipériodique cohomologue à $\{p = p_*\}$.

Conjugaison conditionnelle et forme normale de Birkhoff

Soient $\gamma > 0$, $\tau \geq 0$, $\alpha^0 \in HDC(\gamma, \tau)$. Soit T un tore lagrangien α^0-quasipériodique invariant par un hamiltonien K_0. Après un changement de variables symplectique, on peut supposer que $T = \mathbb{T}^n \times \{0\}$ et que K_0 est sous forme normale de Birkhoff:

$$K_0(q,p) = c_0 + \sum_i \alpha_i^0 p_i + \sum_{2 \leq |\underline{\ell}| \leq N} B_{\underline{\ell}} p^{\underline{\ell}} + O(\|p\|^{N+1}),$$

où on a fixé un grand entier N.

Pour $p_* \in \mathbb{R}^n$ voisin de 0, on pose $K_{p_*}(q,p) := K_0(q, p + p_*)$. Le théorème de conjugaison conditionnelle fournit une application lisse $p_* \mapsto \alpha(p_*)$ telle que, lorsque $\alpha(p_*) \in HDC(\gamma, \tau)$, K_0 ait un tore lagrangien $\alpha(p_*)$-quasipériodique cohomologue à $\{p = p_*\}$.

Le $(N-1)$-jet de $\alpha(p_*)$ en 0 est donné par la forme normale de Birkhoff.