Équations différentielles et systèmes dynamiques

M. Jean-Christophe Yoccoz, membre de l'Institut
(Académie des sciences), professeur

Cours : Linéarisation des échanges d'intervalles généralisés

Le cours portait cette année sur des résultats sur les échanges d'intervalles généralisés obtenus en collaboration avec Stefano Marmi (Scuola normale Superiore, Pisa) et Pierre Moussa (CEA, Saclay).

1. Soit $\mathcal{A}$ un alphabet fini, de cardinal $d \geqslant 2$ et soient

$$I = \bigsqcup_{\mathcal{A}} I_\alpha^t = \bigsqcup_{\mathcal{A}} I_\alpha^b$$

deux partitions *mod.* 0 en intervalles ouverts non vides d'un intervalle ouvert borné I.

Un *échange d'intervalles standard* (resp. *généralisé*) est une transformation T définie sur $\sqcup_{\mathcal{A}} I_\alpha^t$ et dont la restriction à I_α^t envoie cet intervalle sur I_α^b par une translation (resp. par un homéomorphisme préservant l'orientation).

Soit r un entier positif, ou $+\infty$. Un échange d'intervalles généralisé est de classe C^r si sa restriction a chacun des I_α^t se prolonge en un difféomorphisme de classe C^r de l'adhérence de I_α^t sur l'adhérence de I_α^b.

On dit que T est normalisé si $I = (0,1)$.

L'ordre dans lequel apparaissent les intervalles dans les deux partitions est codé par deux applications π_t, π_b: $\mathcal{A} \to \{1 \cdots d\}$. La paire $\pi = (\pi_t, \pi_b)$ est la *donnée combinatoire* de T. On suppose toujours que cette donnée est *irréductible :*

$$\pi_t^{-1}(\{1 \cdots k\}) \neq \pi_b^{-1}(\{1 \cdots k\}) \qquad \forall 1 \leqslant k < d.$$

Lorsque $d = 2$, un échange d'intervalles standard normalisé s'identifie à une rotation sur le cercle $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, et un échange d'intervalles généralisé à un homéomorphisme du cercle préservant l'orientation.

Le fil conducteur de nos investigations sur la dynamique des échanges d'intervalles généralisés est la question suivante : quelles sont les parties de la théorie des homéomorphismes et difféomorphismes du cercle qui s'étendent aux échanges d'intervalles généralisés de données combinatoires plus générales ?

2. Rappelons quelques points saillants dans l'étude de la dynamique des difféomorphismes du cercle préservant l'orientation.

Le premier groupe de résultats est attaché au nom de Poincaré et est centré sur la définition du nombre de rotation d'un homéomorphisme du cercle f préservant l'orientation. Poincaré établit la dichotomie suivante :

- lorsque f possède au moins une orbite périodique, toutes les orbites périodiques ont la même période ; de plus, il existe une rotation d'ordre fini $R_{\frac{p}{q}}$ telle que les orbites périodiques de f sont cycliquement ordonnées comme les orbites de $R_{\frac{p}{q}}$;
- lorsque f ne possède pas d'orbite périodique, il existe une rotation irrationnelle R_α telle que toutes les orbites de f sont cycliquement ordonnées comme les orbites de la rotation R_α ; de plus, f est alors semi-conjugué à la rotation R_α.

Dans le second cas, la semi-conjugaison h est une application continue de degré 1 du cercle dans lui-même qui est croissante au sens large et vérifie $h \circ f = R_\alpha \circ h$. L'image inverse d'un point par h est soit un point, soit un intervalle non trivial $J \subset \mathbb{T}$, qui est alors disjoint de ses images successives par f: on dit que f est un intervalle errant.

Le second groupe de résultats est largement l'œuvre de Denjoy et clarifie les circonstances sous lesquelles un difféomorphisme sans orbite périodique peut avoir un intervalle errant.

D'une part, si f est un difféomorphisme C^1 par morceaux sans orbite périodique, et si la dérivée Df est une fonction de variation bornée (par exemple lipschitzienne), alors f n'a pas d'intervalle errant et est donc topologiquement conjugué à une rotation irrationnelle.

D'autre part, pour tout nombre irrationnel $\alpha \in \mathbb{T}$, il existe un difféomorphisme f de nombre de rotation α qui a des intervalles errants et est de classe C^s pour tout $s < 2$.

Le troisième groupe de résultats se rattache à la théorie KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser) et aux problèmes de petits diviseurs ; Arnold (pour le cas local) et Herman (pour le cas global) en ont été les initiateurs. Sous une hypothèse diophantienne sur le nombre de rotation α, et une hypothèse de régularité sur le difféomorphisme f, on montre que la conjugaison de f à la rotation R_α (donnée par les résultats de Poincaré et Denjoy) est régulière. Il existe de nombreuses versions de tels théorèmes ; en voici une, utile pour comparaison ultérieure avec le cas des échanges d'intervalles généralisés.

On dit qu'un nombre irrationnel α est de type Roth si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $C = C(\varepsilon) > 0$ telle qu'on ait, pour tout rationnel $\frac{p}{q}$:

$$| \alpha - \frac{p}{q} | > C q^{-2-\varepsilon}.$$

Un théorème célèbre de Roth affirme que tout nombre algébrique irrationnel vérifie cette condition. Par ailleurs, presque tout nombre irrationnel α est de type Roth.

Le théorème de linéarisation est alors le suivant : soit $r > 2$; si f est un difféomorphisme du cercle de classe C^r, préservant l'orientation, dont le nombre de rotation α est de type Roth, alors la conjugaison entre f et la rotation R_α est de classe C^s pour tout $s < r - 1$.

3. La définition du nombre de rotation, au moins dans le cas irrationnel, peut être étendue aux échanges d'intervalles généralisés. Elle repose sur un algorithme de renormalisation introduit il y a une trentaine d'années par Rauzy et Veech. Cet algorithme et ses propriétés ont fait l'objet de plusieurs cours précédents. On ne rappellera ici que les points les plus importants.

Soient T un échange d'intervalles généralisé, $I = \bigsqcup_{\mathcal{A}} I^t_\alpha = \bigsqcup_{\mathcal{A}} I^b_\alpha$ les partitions associées. Les points séparant les I^t_α (resp. les I^b_α) sont appelés *singularités* de T (resp. de T^{-1}). Une *connexion* est une orbite de T joignant une singularité de T^{-1} à une singularité de T. Un échange **standard** est *irrationnel* s'il ne possède pas de connexion.

Keane a montré qu'un échange d'intervalles standard sans connexion est minimal.

Pour un échange d'intervalles généralisé sans connexion T, le pas élémentaire de l'algorithme de Rauzy-Veech associe à T l'échange d'intervalles généralisé $\widehat{T}$ défini comme suit : $\widehat{T}$ est l'application de premier retour de T sur l'intervalle $\widehat{I}$ qui a la même extrémité gauche que T et a pour extrémité droite la plus grande singularité (de T ou T^{-1}). Les partitions associées à $\widehat{T}$ sont naturellement indexées par le même alphabet $\mathcal{A}$ que pour T. L'échange $\widehat{T}$ n'a pas de connexion, ce qui permet d'itérer l'algorithme.

Les données combinatoires qu'on peut obtenir par itération de l'algorithme forment les sommets d'un *diagramme de Rauzy*, les flèches du diagramme représentent les transitions possibles. L'itération de l'algorithme, à partir d'un échange d'intervalles généralisé sans connexion T, produit donc un chemin infini γ_T dans le diagramme de Rauzy, issu du sommet associé à la donnée combinatoire de T. C'est ce chemin qu'on appellera *nombre de rotation* de T.

Il n'est pas difficile de caractériser les chemins infinis obtenus à partir d'échanges d'intervalles standard irrationnels : à chaque flèche du diagramme est naturellement associée une lettre de $\mathcal{A}$; les chemins infinis $\underline{\gamma}$ obtenus à partir d'échanges d'intervalles standard irrationnels sont exactement ceux, dits ∞-*complets*, pour lesquels chaque lettre de $\mathcal{A}$ est associée à un nombre infini de flèches de $\underline{\gamma}$. Un chemin fini est de même dit *complet* si chaque lettre de $\mathcal{A}$ est associée à au moins une flèche du chemin.

On dit alors qu'un échange d'intervalles généralisé T est *irrationnel* s'il est sans connexion et si son nombre de rotation γ_T est ∞-complet. On dispose d'un résultat qui généralise le théorème de semi-conjugaison de Poincaré : soient T un échange d'intervalles généralisé irrationnel, et T_0 un échange d'intervalles standard de même nombre de rotation que T ; alors il existe une application continue h, croissante au sens large, qui envoie l'intervalle de définition de T sur celui de T_0 et vérifie $h \circ T = T_0 \circ h$.

4. La suspension d'un échange d'intervalles produit un flot sur une surface orientable connexe compacte M et une partie finie non vide $\Sigma \subset M$. Le genre $g \geqslant 1$ de M et le nombre $s \geqslant 1$ de points de Σ ne dépendent que de la donnée combinatoire de l'échange d'intervalles considéré, et même seulement du diagramme de Rauzy dont cette donnée combinatoire est un sommet.

Un échange d'intervalles généralisé irrationnel suffisamment lisse peut-il posséder des intervalles errants ? Lorsque la donnée combinatoire est de genre 1, on se ramène aisément au cas du cercle. On conclut qu'un échange d'intervalles généralisé irrationnel de classe C^2 ne peut présenter d'intervalle errant et est donc topologiquement conjugué à un échange d'intervalles standard de même nombre de rotation.

Par contre, une série de résultats (Levitt ; Camelier-Gutierrez ; Bressaud-Hubert-Maass ; Marmi-Moussa-Y.) ont montré que, lorsque la donnée combinatoire est de genre au moins 2, la plupart des échanges d'intervalles affines possèdent des intervalles errants. On consultera en particulier le résumé du cours de l'année 2008-2009 à ce sujet.

5. Le résultat principal sur lequel était centré le cours est un théorème de linéarisation que nous présentons d'abord sous une forme simplifiée.

Soit T_0 un échange d'intervalles standard. Un échange d'intervalles généralisé T est une *déformation simple* de T_0 si les partitions associées à T et T_0 sont les mêmes et si T coïncide avec T_0 au voisinage des singularités de T_0 (qui sont aussi celles de T).

Théorème : *Soit π une donnée combinatoire, et soient g, s les entiers associés. Soit r un entier au moins égal à 2. Presque tout échange d'intervalles standard irrationnel T_0 de donnée combinatoire π a la propriété suivante : parmi les déformations simples de T_0 de classe C^{r+3}, celles qui sont conjuguées à T_0 par un difféomorphisme de classe C^r proche de l'identité forment une sous-variété de classe C^1 de codimension $(g-1)(2r+1)+s$.*

Remarques

• Le même énoncé est encore conjecturalement valide lorsque $r = 1$, mais la méthode de preuve (évoquée ci-après) ne semble pas s'adapter facilement.

• La condition de mesure totale imposée à T_0 est une condition diophantienne (type Roth restreint) définie ci-après.

• Les constructions d'échanges d'intervalles affines possédant des intervalles errants suggèrent que, pour presque tout T_0, la codimension de la classe de conjugaison C^0 de T_0 pourrait être $3(g-1)+s$, ce qui est aussi la codimension attendue de la classe de conjugaison C^1 de T_0. Il est donc raisonnable de conjecturer le résultat de rigidité suivant : pour presque tout T_0, une déformation simple de T_0 qui est C^0-conjuguée à T_0 est C^1-conjuguée à T_0.

• L'ensemble des échanges d'intervalles généralisés (ou des déformations simples) qui ont un nombre de rotation irrationnel donné est très mal compris. On ne sait pas par exemple si cet ensemble est une sous-variété topologique de codimension $2(g-1)+s$.

• Il existe une version du théorème, évoquée ci-après, s'appliquant à des échanges qui ne sont pas des déformations simples.

6. Soit π une donnée combinatoire. Notons $\mathcal{A}^{(2)}$ le produit $\mathcal{A} \times \{L, R\}$. La donnée π détermine une permutation σ de $\mathcal{A}^{(2)}$ dont on peut identifier les cycles avec les points de Σ. Pour $v \in \mathcal{A}^{(2)}$, posons $\varepsilon(v) = +1$(resp. $\varepsilon(v) = -1$) lorsque la seconde coordonnée de v est R (resp. L).

Soit r un entier positif ou nul ; on notera $C^r(\sqcup I_\alpha^t)$ l'ensemble des fonctions de classe C^r sur $\sqcup I_\alpha^t$ dont la restriction à chaque I_α^t s'étend en une fonction de classe C^r sur l'adhérence de I_α^t. Pour $\alpha \in \mathcal{A}$, $\varphi \in C^0(\sqcup I_\alpha^t)$, on note $\varphi(\alpha, R)$ la limite de φ à l'extrémité droite de I_α^t, $\varphi(\alpha, L)$ la limite à l'extrémité gauche. On définit alors, pour tout cycle C de σ :

$$(\partial\varphi)_C := \sum_{v \in C} \varepsilon(v)\varphi(v).$$

On définit ainsi un opérateur $\partial : C^0(\sqcup I_\alpha^t) \to \mathbb{R}^\Sigma$. Si T est un échange d'intervalles de donnée combinatoire π associé à la partition $I = \sqcup I_\alpha^t$, on vérifie qu'on a, pour tout $\psi \in C^0(\bar{I})$

$$\partial\psi = \partial(\psi \circ T).$$

En d'autres termes, ∂ est une obstruction à ce que $\varphi \in C^0(\sqcup I_\alpha^t)$ soit le cobord d'une fonction $\psi \in C^0(\bar{I})$.

Définissons maintenant une version non linéaire de ∂. Notons J^r le groupe des r-jets en 0 des difféomorphismes de $\mathbb{R}$, préservant l'orientation et fixant 0. Soit T un échange d'intervalles généralisé de classe C^r de donnée combinatoire π, et soient $I = \sqcup_{\mathcal{A}} I_\alpha^t = \sqcup_{\mathcal{A}} I_\alpha^b$ les partitions associées. Pour $\alpha \in \mathcal{A}$, notons $t_{\alpha,R}^t$ la translation qui ramène l'extrémité droite de I_α^t en 0 ; définissons de façon similaire $t_{\alpha,L}^t$, $t_{\alpha,R}^b$, $t_{\alpha,L}^b$. Désignons alors, pour $v \in \mathcal{A}^{(2)}$, par $j(T, v)$ le r-jet en 0 de $t_v^b \circ T \circ (t_v^t)^{-1}$. Pour un cycle $C = \{v_1, v_2 = \sigma(v_1), \ldots, v_\kappa\}$ de σ, considérons le produit dans J^r

$$j^r(T, C) := j(T, v_1)^{\varepsilon(v_1)} \ldots j(T, v_\kappa)^{\varepsilon(v_\kappa)}.$$

Il est facile de voir que , pour $h \in \mathrm{Diff}_+^r(\bar{I})$, et pour tout cycle C de σ, $j^r(T, C)$ et $j^r(h \circ T \circ h^{-1}, C)$ sont conjugués dans J^r . En particulier, une condition **nécessaire** pour que T soit ainsi conjugué à un échange d'intervalles standard est qu'on ait $j^r(T, C) = 1$ pour tout $C \in \Sigma$. Cette condition est aussi nécessaire pour que T soit conjugué à une déformation simple d'un échange d'intervalles standard.

Inversement, si T_0 est standard irrationnel, et si T est un échange d'intervalles généralisé de classe C^r suffisamment voisin de T_0 vérifiant $j^r(T, C) = 1$ pour tout $C \in \Sigma$, on peut conjuguer T à une déformation simple de T_0 par un difféomorphisme dans $\mathrm{Diff}_+^r(\bar{I})$.

Ceci permet, dans l'énoncé du théorème, de remplacer l'hypothèse que T est une déformation simple de T_0 par la condition qu'on ait $j^{r+3}(T, C) = 1$ pour tout $C \in \Sigma$; la classe de C^r-conjugaison de T_0 vérifie a priori $j^r(T, C) = 1$.

7. Dans cette section, on introduit la condition diophantienne (de mesure totale) que doit satisfaire l'échange d'intervalles standard irrationnel T_0 dans l'énoncé du théorème.

Le cocycle de Kontsevich-Zorich associe à toute flèche γ d'un diagramme de Rauzy une matrice $B_\gamma \in SL(\mathbb{Z}^{\mathcal{A}})$. A un chemin fini $\underline{\gamma}$ composé des flèches $\gamma_1, \dots \gamma_n$, on associe alors

$$B_{\underline{\gamma}} = B_{\gamma_n} \dots B_{\gamma_1}.$$

Ceci étant, soit γ_{T_0} le nombre de rotation d'un échange d'intervalles standard irrationnel T_0. Décomposons-le

$$\gamma_{T_0} = \underline{\gamma}(1) * \dots * \underline{\gamma}(n) * \dots$$

en une concaténation infinie de chemins complets de longueur minimale. Notons $Z(n)$ la matrice $B_{\underline{\gamma}(n)}$ et $B(n)$ la matrice $B_{\underline{\gamma}(1)*\dots*\underline{\gamma}(n)} = Z(n) \dots Z(1)$. Introduisons les quatre propriétés suivantes :

(a) Pour tout $\tau > 0$, on a $|| Z(n+1) || = O(|| B(n) ||^\tau)$.

(b) Il existe un nombre réel $\theta > 0$, et un hyperplan $\Gamma_0 \subset \mathbb{R}^{\mathcal{A}}$, tels qu'on ait

$$|| B(n)_{|\Gamma_0} || = O(|| B(n) ||^{1-\theta}).$$

(c) Définissons le sous espace stable

$$\Gamma_s = \{ v \in \mathbb{R}^{\mathcal{A}}, \limsup_{n \to +\infty} \frac{\log || B(n) v ||}{\log || B(n) ||} < 0 \}$$

et $\Gamma_s^{(n)} := B(n) \Gamma_s$ pour $n \geqslant 0$. Pour $0 \leqslant m \leqslant n$, notons $B(m,n)$ l'opérateur $B_{\underline{\gamma}(m+1)*\dots*\underline{\gamma}(n)} = Z(n) \dots Z(m+1)$, $B_s(m,n)$ sa restriction à $\Gamma_s^{(m)}$ et $B_\flat(m,n)$ l'opérateur induit de $\mathbb{R}^{\mathcal{A}} / \Gamma_s^{(m)}$ dans $\mathbb{R}^{\mathcal{A}} / \Gamma_s^{(n)}$. On demande qu'on ait, pour tout $\tau > 0$

$$|| B_s(m,n) || = O(|| B(n) ||^\tau), \quad || (B_\flat(m,n))^{-1} || = O(|| B(n) ||^\tau).$$

(d) $\dim \Gamma_s = g$.

On dira que T_0 (ou γ_{T_0}) est *de type Roth* si les propriétés (a),(b),(c) sont vérifiées. Si la propriété (d) l'est aussi, on dira que T_0 est *de type Roth restreint*.

Remarques

• Lorsque $d = 2$, les propriétés (b), (c), (d) sont automatiquement vérifiées. La propriété (a) est vérifiée si et seulement si le nombre de rotation est de type Roth au sens classique du terme.

• Chacune des propriétés (a), (b), (c), (d) est vérifiée par un ensemble d'échanges d'intervalles standard qui est de mesure totale.

Une version plus précise de notre résultat affirme que tout échange d'intervalles standard T_0 qui est de type Roth restreint vérifie les conclusions du théorème.

8. La linéarisation de l'équation de conjugaison conduit à l'équation cohomologique qui avait fait l'objet d'un cours précédent. On a besoin d'un résultat qui améliore légèrement celui qui avait été présenté à l'époque.

Soient T_0 un échange d'intervalles standard, $I = \bigsqcup_{\mathcal{A}} I^t_\alpha = \bigsqcup_{\mathcal{A}} I^b_\alpha$ les partitions associées, r un entier au moins égal à 1. On notera $\Gamma(r)$ l'espace des fonctions définies sur $\bigsqcup_{\mathcal{A}} I^t_\alpha$ dont la restriction à chacun des I^t_α est un polynôme réel de degré $< r$. C'est un espace vectoriel de dimension rd. Le sous-espace $\Gamma_\partial(r)$, constitué des fonctions $\varphi \in \Gamma(r)$ telles que $\partial D^j \varphi = 0$ pour $0 \leqslant j < r$, est de dimension $(2g - 1)$ $r + 1$; on note $\Gamma_T(r)$ le sous-espace de $\Gamma_\partial(r)$ constitué des fonctions φ qui s'écrivent $\varphi = \psi - \psi \circ T_0$, avec $\psi \in C^{r-1}(\overline{I})$. Lorsque la condition (d) de la section précédente est satisfaite par T_0, la dimension de $\Gamma_T(r)$ est $g + r - 1$.

Notons $C^{r+1}_\partial(\sqcup I^t_\alpha)$ le sous-espace de $C^{r+1}(\sqcup I^t_\alpha)$ constitué des fonctions φ telles que $\partial D^j \varphi = 0$ pour $0 \leqslant j < r$. Supposons que T_0 soit de type Roth restreint. Il existe alors un homomorphisme continu $\Pi : C^{r+1}_\partial(\sqcup I^t_\alpha) \to \Gamma_\partial(r) / \Gamma_T(r)$ qui prolonge la projection de $\Gamma_\partial(r)$ sur $\Gamma_\partial(r) / \Gamma_T(r)$, et un homomorphisme continu L du noyau de Π à valeurs dans $C^{r-1}(\overline{I})$ tels qu'on ait, pour tout $\varphi \in C^{r+1}_\partial(\sqcup I^t_\alpha)$ vérifiant $\Pi(\varphi) = 0$:

$$\varphi = L(\varphi) \circ T_0 - L(\varphi).$$

En d'autres termes, la codimension dans $C^{r+1}_\partial(\sqcup I^t_\alpha)$ de l'espace des cobords $\{\psi \circ T_0 - \psi, \psi \in C^{r-1}(\overline{I})$ est égale à la dimension de $\Gamma_\partial(r) / \Gamma_T(r)$, soit $(g - 1)(2r - 1) + 1$. Si l'on exige de plus que la fonction ψ s'annule aux extrémités de I et aux points séparant les I^t_α, la codimension de l'espace des cobords correspondants est $(g - 1)(2r - 1) + s$. C'est ce résultat qui détermine la codimension de la classe de conjugaison dans l'énoncé du théorème.

9. Nous indiquons dans cette dernière section les grandes lignes de la démonstration du théorème, à partir du résultat de la section précédente sur l'équation cohomologique. Nous adaptons une méthode introduite par Michael Herman pour démontrer un théorème de conjugaison locale pour les difféomorphisme du cercle. nous ne traitons ici que le cas où l'entier r est au moins égal à 3 ; le cas $r = 2$, similaire dans son principe, recèle quelques difficultés supplémentaires.

Rappelons que la dérivée schwarzienne d'un difféomorphisme de classe C^3 préservant l'orientation est donnée par :

$$Sf := D^2 \log Df - \frac{1}{2}(D \log Df)^2.$$

La dérivée schwarzienne d'une composition est donnée par

$$S(f \circ g) = (Sf \circ g)(Dg)^2 + Sg$$

Si un difféomorphisme $h \in \mathrm{Diff}^r_+(\bar{I})$ conjugue un échange d'intervalles généralisé T à T_0

$$T \circ h = h \circ T_0$$

alors, en prenant les dérivées schwarziennes des deux termes de cette égalité, on obtient

$$(ST \circ h)(Dh)^2 = Sh \circ T_0 - Sh.$$

L'idée est de commencer par résoudre cette dernière équation (à une fonction dans $\Gamma(r-2)$ près) à l'aide d'un théorème de point fixe. Soit T_0 un échange d'intervalles standard de type Roth restreint et soit T une simple déformation de T_0 de classe C^{r+3}, proche de T_0 dans la C^{r+3}-topologie. Soit h un difféomorphisme dans $\mathrm{Diff}^r_+(\bar{I})$. Le résultat de la section précédente permet d'écrire

$$(ST \circ h)(Dh)^2 = \psi \circ T_0 - \psi + \chi,$$

avec $\psi \in C^{r-3}(\bar{I})$, s'annulant à l'extrémité gauche u_0 de I, et χ appartenant à un supplémentaire fixé à l'avance de $\Gamma_T(r-2)$ dans $\Gamma_\partial(r-2)$. Pour tout choix de nombres réels c_0, c_1 proches de 0, on définit un difféomorphisme $\hat{h} \in \mathrm{Diff}^r_+(\bar{I})$ par les conditions

$$S\hat{h} = \psi + c_0, \quad D \log D\hat{h}(u_0) = c_1.$$

L'application $(T, h, c_0, c_1) \to \hat{h}$, définie au voisinage de $(T_0, \mathrm{id}, 0, 0)$, est de classe C^1. Sa dérivée partielle par rapport à h s'annule lorsque $T = T_0$. C'est donc, lorsque T est assez voisin de T_0, une contraction dans la variable h qui possède un unique point fixe $h^* = h^*(T, c_0, c_1)$.

Pour que h^* soit effectivement une conjugaison entre T et T_0, il faut et il suffit d'une part qu'on ait $\chi = 0$, et d'autre part que l'application $T \circ h^* \circ T_0^{-1}$ soit un difféomorphisme de classe C^2 de $\bar{I}$, fixant les singularités de T_0^{-1} ; pour que cette deuxième condition soit vérifiée, il faut et il suffit que h^* fixe les singularités de T_0, et que, en chacune des singularités de T_0^{-1}, les 2-jets de $T \circ h^* \circ T_0^{-1}$ à gauche et à droite sont égaux.

L'analyse de ces conditions permet de conclure en utilisant le théorème des fonctions implicites.

Invitations, missions, conférences

7-11 septembre 2009 : conférences à l'Instituto de Matemetica Pura e Aplicada (Rio De Janeiro) dans le cadre de la commémoration de l'accord Brésil-France en mathématiques.

14-18 septembre 2009 : conférences à l'Académie des sciences du Brésil (Rio de Janeiro) dans le cadre de l'année de la France au Brésil.

19-23 octobre 2009 : mission à la Scuola Normale Superiore (Pise) et conférence pour l'ouverture de l'année académique.

14 janvier 2010 : conférence à l'IHP (Paris) lors du colloque en l'honneur de Marc Chaperon.

25 février-5 mars 2010 : Conférence lors du Congrès en l'honneur de Jacob Palis à Buzios (Brésil).

11 mars 2010 : conférence aux Rencontres non-linéaires à l'IHP (Paris).

29 mars-11 juin 2010 : Cours « Non-Uniformly hyperbolic horseshoes » (9 séances de 1 h 30) à l'Institut Mittag-Leffler (Stockholm) dans le cadre du semestre thématique « Dynamique et EDP » dont j'étais codirecteur avec M. Benedicks, H. Eliasson et J. Schmelling.

12 mai 2010 : leçon inaugurale de la chaire « Tage Erlander » au KTH (Stockholm).

17-18 juin 2010 : conférence lors de la « Smalefest » en l'honneur de Steve Smale aux Tuileries d'Affiac (Minervois).

24-25 juin 2010 : conférence lors des Journées en l'honneur de Michèle Loday à Angers.

29 juin-9 juillet 2010 : mission au Hausdorff Institute for Mathemetics (Bonn).

Publications

Yoccoz J.-C., Moreira C.G., « Tangences homoclines stables pour des ensembles hyperboliques de grande dimension fractale », *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.*, 4, 43, 2010, 1-68.

Yoccoz J.-C., « Échanges d'intervalles et surfaces de translation », *Astérisque*, n° 326 (S. Bourbaki), 2009, 387-409.

Yoccoz J.-C., Palis, J., « Non-uniformly hyperbolic horseshoes arising from bifurcations of Poincaré heteroclinic cycles », *Publ. Math. I.H.E.S.*, n° 110, 2009, 1-217.