Quelques aspects de la théorie des systèmes dynamiques quasipériodiques(9)

Jean-Christophe Yoccoz

Collège de France

25 juin 2014

Non-planarité

Soit $p \mapsto \alpha(p)$ une application de classe C^∞ définie sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^m$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Non-planarité

Soit $p \mapsto \alpha(p)$ une application de classe C^∞ définie sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^m$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. A quelles conditions peut-on trouver un ensemble de mesure de Lebesgue positive de valeurs de p telles que $\alpha(p)$ appartienne à $HDC(\gamma, \tau)$ (pour des constantes $\tau \geq 0$, $\gamma > 0$ appropriées)?

Non-planarité

Soit $p \mapsto \alpha(p)$ une application de classe C^∞ définie sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^m$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. A quelles conditions peut-on trouver un ensemble de mesure de Lebesgue positive de valeurs de p telles que $\alpha(p)$ appartienne à $HDC(\gamma, \tau)$ (pour des constantes $\tau \geq 0$, $\gamma > 0$ appropriées)?

Une condition nécessaire est évidemment que l'image de α ne soit pas contenue dans un hyperplan $\{< k, x >= 0\}$, $k \in \mathbb{Z}^n$, $k \neq 0$.

Non-planarité

Soit $p \mapsto \alpha(p)$ une application de classe C^∞ définie sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^m$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. A quelles conditions peut-on trouver un ensemble de mesure de Lebesgue positive de valeurs de p telles que $\alpha(p)$ appartienne à $HDC(\gamma, \tau)$ (pour des constantes $\tau \geq 0, \gamma > 0$ appropriées)?

Une condition nécessaire est évidemment que l'image de α ne soit pas contenue dans un hyperplan $\{< k, x >= 0\}$, $k \in \mathbb{Z}^n, \ k \neq 0$.

Définition:($m = 1$) Un germe $\alpha : (\mathbb{R}, 0) \to \mathbb{R}^n$ est non-planaire si les vecteurs $\alpha(0), \ldots, D^{n-1}\alpha(0)$ forment une base de $\mathbb{R}^n$.

Non-planarité

Soit $p \mapsto \alpha(p)$ une application de classe C^∞ définie sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^m$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. A quelles conditions peut-on trouver un ensemble de mesure de Lebesgue positive de valeurs de p telles que $\alpha(p)$ appartienne à $HDC(\gamma, \tau)$ (pour des constantes $\tau \geq 0, \gamma > 0$ appropriées)?

Une condition nécessaire est évidemment que l'image de α ne soit pas contenue dans un hyperplan $\{< k, x >= 0\}$, $k \in \mathbb{Z}^n,\ k \neq 0$.

Définition:$(m = 1)$ Un germe $\alpha : (\mathbb{R}, 0) \to \mathbb{R}^n$ est non-planaire si les vecteurs $\alpha(0), \ldots, D^{n-1}\alpha(0)$ forment une base de $\mathbb{R}^n$.

Proposition: *Soit $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^∞ définie sur un intervalle I. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

Non-planarité

Soit $p \mapsto \alpha(p)$ une application de classe C^∞ définie sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^m$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. A quelles conditions peut-on trouver un ensemble de mesure de Lebesgue positive de valeurs de p telles que $\alpha(p)$ appartienne à $HDC(\gamma, \tau)$ (pour des constantes $\tau \geq 0$, $\gamma > 0$ appropriées)?

Une condition nécessaire est évidemment que l'image de α ne soit pas contenue dans un hyperplan $\{< k, x >= 0\}$, $k \in \mathbb{Z}^n$, $k \neq 0$.

Définition:$(m = 1)$ Un germe $\alpha : (\mathbb{R}, 0) \to \mathbb{R}^n$ est non-planaire si les vecteurs $\alpha(0), \ldots, D^{n-1}\alpha(0)$ forment une base de $\mathbb{R}^n$.

Proposition: *Soit $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^∞ définie sur un intervalle I. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

1. *α est non-planaire en tout point d'une partie ouverte et dense de I;*

Non-planarité

Soit $p \mapsto \alpha(p)$ une application de classe C^∞ définie sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^m$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. A quelles conditions peut-on trouver un ensemble de mesure de Lebesgue positive de valeurs de p telles que $\alpha(p)$ appartienne à $HDC(\gamma, \tau)$ (pour des constantes $\tau \geq 0$, $\gamma > 0$ appropriées)?

Une condition nécessaire est évidemment que l'image de α ne soit pas contenue dans un hyperplan $\{< k, x >= 0\}$, $k \in \mathbb{Z}^n$, $k \neq 0$.

Définition:($m = 1$) Un germe $\alpha : (\mathbb{R}, 0) \to \mathbb{R}^n$ est non-planaire si les vecteurs $\alpha(0), \ldots, D^{n-1}\alpha(0)$ forment une base de $\mathbb{R}^n$.

Proposition: *Soit $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^∞ définie sur un intervalle I. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

1. *α est non-planaire en tout point d'une partie ouverte et dense de I;*
2. *pour tout sous-intervalle non trivial J de I, l'image $\alpha(J)$ n'est pas contenue dans un hyperplan de $\mathbb{R}^n$.*

Preuve de la proposition

- S'il existe un sous-intervalle non trivial J et un hyperplan H tels que $\alpha(J) \subset H$,

Preuve de la proposition

- S'il existe un sous-intervalle non trivial J et un hyperplan H tels que $\alpha(J) \subset H$, alors H contient $D^j\alpha(t)$ pour tout $t \in J$, tout $j \geq 0$.

Preuve de la proposition

- S'il existe un sous-intervalle non trivial J et un hyperplan H tels que $\alpha(J) \subset H$, alors H contient $D^j\alpha(t)$ pour tout $t \in J$, tout $j \geq 0$. Donc α n'est non-planaire en aucun point de J.

Preuve de la proposition

- S'il existe un sous-intervalle non trivial J et un hyperplan H tels que $\alpha(J) \subset H$, alors H contient $D^j\alpha(t)$ pour tout $t \in J$, tout $j \geq 0$. Donc α n'est non-planaire en aucun point de J.
- Supposons que α ne soit non-planaire en aucun point d'un sous-intervalle non trivial J de I.

Preuve de la proposition

- S'il existe un sous-intervalle non trivial J et un hyperplan H tels que $\alpha(J) \subset H$, alors H contient $D^j\alpha(t)$ pour tout $t \in J$, tout $j \geq 0$. Donc α n'est non-planaire en aucun point de J.
- Supposons que α ne soit non-planaire en aucun point d'un sous-intervalle non trivial J de I. Soit k le plus grand entier pour lequel il existe $t \in J$ tels que $\alpha(t), \ldots, D^{k-1}\alpha(t)$ soient linéairement indépendants.

Preuve de la proposition

- S'il existe un sous-intervalle non trivial J et un hyperplan H tels que $\alpha(J) \subset H$, alors H contient $D^j\alpha(t)$ pour tout $t \in J$, tout $j \geq 0$. Donc α n'est non-planaire en aucun point de J.
- Supposons que α ne soit non-planaire en aucun point d'un sous-intervalle non trivial J de I. Soit k le plus grand entier pour lequel il existe $t \in J$ tels que $\alpha(t), \ldots, D^{k-1}\alpha(t)$ soient linéairement indépendants. Quitte à diminuer J, on peut supposer que cette propriété a lieu en tout point de J.

Preuve de la proposition

- S'il existe un sous-intervalle non trivial J et un hyperplan H tels que $\alpha(J) \subset H$, alors H contient $D^j\alpha(t)$ pour tout $t \in J$, tout $j \geq 0$. Donc α n'est non-planaire en aucun point de J.
- Supposons que α ne soit non-planaire en aucun point d'un sous-intervalle non trivial J de I. Soit k le plus grand entier pour lequel il existe $t \in J$ tels que $\alpha(t), \ldots, D^{k-1}\alpha(t)$ soient linéairement indépendants. Quitte à diminuer J, on peut supposer que cette propriété a lieu en tout point de J. Notons $F(t)$ le sous-espace engendré par ces k vecteurs et posons

$$\Lambda(t) := \alpha(t) \wedge \ldots \wedge D^{k-1}\alpha(t) \in \Lambda^k \mathbb{R}^n.$$

Preuve de la proposition

- S'il existe un sous-intervalle non trivial J et un hyperplan H tels que $\alpha(J) \subset H$, alors H contient $D^j\alpha(t)$ pour tout $t \in J$, tout $j \geq 0$. Donc α n'est non-planaire en aucun point de J.
- Supposons que α ne soit non-planaire en aucun point d'un sous-intervalle non trivial J de I. Soit k le plus grand entier pour lequel il existe $t \in J$ tels que $\alpha(t), \ldots, D^{k-1}\alpha(t)$ soient linéairement indépendants. Quitte à diminuer J, on peut supposer que cette propriété a lieu en tout point de J. Notons $F(t)$ le sous-espace engendré par ces k vecteurs et posons

  $$\Lambda(t) := \alpha(t) \wedge \ldots \wedge D^{k-1}\alpha(t) \in \Lambda^k \mathbb{R}^n.$$

  Par définition de k, le k-vecteur $D\Lambda(t) = \alpha(t) \wedge \ldots \wedge D^{k-2}\alpha(t) \wedge D^k\alpha(t)$ est un multiple de $\Lambda(t)$ pour tout $t \in J$.

Preuve de la proposition

- S'il existe un sous-intervalle non trivial J et un hyperplan H tels que $\alpha(J) \subset H$, alors H contient $D^j\alpha(t)$ pour tout $t \in J$, tout $j \geq 0$. Donc α n'est non-planaire en aucun point de J.
- Supposons que α ne soit non-planaire en aucun point d'un sous-intervalle non trivial J de I. Soit k le plus grand entier pour lequel il existe $t \in J$ tels que $\alpha(t), \ldots, D^{k-1}\alpha(t)$ soient linéairement indépendants. Quitte à diminuer J, on peut supposer que cette propriété a lieu en tout point de J. Notons $F(t)$ le sous-espace engendré par ces k vecteurs et posons

$$\Lambda(t) := \alpha(t) \wedge \ldots \wedge D^{k-1}\alpha(t) \in \Lambda^k \mathbb{R}^n.$$

  Par définition de k, le k-vecteur $D\Lambda(t) = \alpha(t) \wedge \ldots \wedge D^{k-2}\alpha(t) \wedge D^k\alpha(t)$ est un multiple de $\Lambda(t)$ pour tout $t \in J$. Donc le sous-espace $F(t)$, qui contient $\alpha(t)$, ne dépend pas de $t \in J$.

Le théorème de Pyartli

Soient a, b des constantes avec $b > a > 0$.

Le théorème de Pyartli

Soient a, b des constantes avec $b > a > 0$. Le germe $\alpha : (\mathbb{R}, 0) \to \mathbb{R}^n$ est (a, b) non-planaire en 0 si la matrice A dont les colonnes sont $\alpha(0), \ldots, D^{n-1}\alpha(0)$ vérifie

Soient a, b des constantes avec $b > a > 0$. Le germe $\alpha : (\mathbb{R}, 0) \to \mathbb{R}^n$ est (a, b) non-planaire en 0 si la matrice A dont les colonnes sont $\alpha(0), \ldots, D^{n-1}\alpha(0)$ vérifie

$$\|A\| \leq b, \qquad \|A^{-1}\| \leq a^{-1}.$$

Le théorème de Pyartli

Soient a, b des constantes avec $b > a > 0$. Le germe $\alpha : (\mathbb{R}, 0) \to \mathbb{R}^n$ est (a, b) non-planaire en 0 si la matrice A dont les colonnes sont $\alpha(0), \ldots, D^{n-1}\alpha(0)$ vérifie

$$\|A\| \leq b, \qquad \|A^{-1}\| \leq a^{-1}.$$

Théorème: (Pyartli 1969) *Supposons que $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ soit (a, b) non-planaire en tout point de I.*

Le théorème de Pyartli

Soient a, b des constantes avec $b > a > 0$. Le germe $\alpha : (\mathbb{R}, 0) \to \mathbb{R}^n$ est (a, b) non-planaire en 0 si la matrice A dont les colonnes sont $\alpha(0), \ldots, D^{n-1}\alpha(0)$ vérifie

$$\|A\| \leq b, \qquad \|A^{-1}\| \leq a^{-1}.$$

Théorème: (Pyartli 1969) *Supposons que $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ soit (a, b) non-planaire en tout point de I. Soit $\tau > n(n-2)$. Il existe une constante $C = C(\tau)$ telle que, pour tout $\gamma > 0$, on ait*

Soient a, b des constantes avec $b > a > 0$. Le germe $\alpha : (\mathbb{R}, 0) \to \mathbb{R}^n$ est (a, b) non-planaire en 0 si la matrice A dont les colonnes sont $\alpha(0), \ldots, D^{n-1}\alpha(0)$ vérifie

$$\|A\| \leq b, \qquad \|A^{-1}\| \leq a^{-1}.$$

Théorème: (Pyartli 1969) *Supposons que $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ soit (a, b) non-planaire en tout point de I. Soit $\tau > n(n-2)$. Il existe une constante $C = C(\tau)$ telle que, pour tout $\gamma > 0$, on ait*

$$\mathrm{Leb}\{t \in I,\, \alpha(t) \notin HDC(\gamma, \tau)\} < C(1 + \frac{b}{a}|I|) \left(\frac{\gamma}{a}\right)^{1/(n-1)}.$$

Non dégénérescence faible

Soient a, b des constantes avec $b > a > 0$.

Non dégénérescence faible

Soient a, b des constantes avec $b > a > 0$. Un germe d'application $\alpha : (\mathbb{R}^m, 0) \to \mathbb{R}^n$ de classe C^∞ est (a, b) faiblement non dégénéré en 0

Non dégénérescence faible

Soient a, b des constantes avec $b > a > 0$. Un germe d'application $\alpha : (\mathbb{R}^m, 0) \to \mathbb{R}^n$ de classe C^∞ est (a, b) faiblement non dégénéré en 0 s'il existe un germe de classe C^∞ $\nu : (\mathbb{R}, 0) \to (\mathbb{R}^m, 0)$ tel que $\alpha \circ \nu$ soit (a, b) non planaire en 0.

Non dégénérescence faible

Soient a, b des constantes avec $b > a > 0$. Un germe d'application $\alpha : (\mathbb{R}^m, 0) \to \mathbb{R}^n$ de classe C^∞ est (a, b) faiblement non dégénéré en 0 s'il existe un germe de classe C^∞ $\nu : (\mathbb{R}, 0) \to (\mathbb{R}^m, 0)$ tel que $\alpha \circ \nu$ soit (a, b) non planaire en 0.

Dans le résultat suivant, qui est une conséquence facile du théorème de Pyartli, on désigne par K une partie compacte de $\mathbb{R}^m$ et par α une application de classe C^∞, définie sur un voisinage de K, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Non dégénérescence faible

Soient a, b des constantes avec $b > a > 0$. Un germe d'application $\alpha : (\mathbb{R}^m, 0) \to \mathbb{R}^n$ de classe C^∞ est (a, b) faiblement non dégénéré en 0 s'il existe un germe de classe C^∞ $\nu : (\mathbb{R}, 0) \to (\mathbb{R}^m, 0)$ tel que $\alpha \circ \nu$ soit (a, b) non planaire en 0.

Dans le résultat suivant, qui est une conséquence facile du théorème de Pyartli, on désigne par K une partie compacte de $\mathbb{R}^m$ et par α une application de classe C^∞, définie sur un voisinage de K, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Corollaire: Soit $\tau > n(n-2)$.

Non dégénérescence faible

Soient a, b des constantes avec $b > a > 0$. Un germe d'application $\alpha : (\mathbb{R}^m, 0) \to \mathbb{R}^n$ de classe C^∞ est (a, b) faiblement non dégénéré en 0 s'il existe un germe de classe C^∞ $\nu : (\mathbb{R}, 0) \to (\mathbb{R}^m, 0)$ tel que $\alpha \circ \nu$ soit (a, b) non planaire en 0.

Dans le résultat suivant, qui est une conséquence facile du théorème de Pyartli, on désigne par K une partie compacte de $\mathbb{R}^m$ et par α une application de classe C^∞, définie sur un voisinage de K, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Corollaire: Soit $\tau > n(n-2)$. On suppose qu'il existe des constantes $b > a > 0$ telles que α soit (a, b) faiblement non dégénérée en tout point de K.

Non dégénérescence faible

Soient a, b des constantes avec $b > a > 0$. Un germe d'application $\alpha : (\mathbb{R}^m, 0) \to \mathbb{R}^n$ de classe C^∞ est (a, b) faiblement non dégénéré en 0 s'il existe un germe de classe C^∞ $\nu : (\mathbb{R}, 0) \to (\mathbb{R}^m, 0)$ tel que $\alpha \circ \nu$ soit (a, b) non planaire en 0.

Dans le résultat suivant, qui est une conséquence facile du théorème de Pyartli, on désigne par K une partie compacte de $\mathbb{R}^m$ et par α une application de classe C^∞, définie sur un voisinage de K, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Corollaire: Soit $\tau > n(n-2)$. On suppose qu'il existe des constantes $b > a > 0$ telles que α soit (a, b) faiblement non dégénérée en tout point de K. Alors, pour tout $\gamma > 0$, on a

$$\mathrm{Leb}\{t \in K, \; \alpha(t) \notin HDC(\gamma, \tau)\} < C \frac{b}{a} \left(\frac{\gamma}{a}\right)^{1/(n-1)},$$

avec une constante $C = C(K, n, \tau)$.

Voici une autre application importante du théorème de Pyartli.

Voici une autre application importante du théorème de Pyartli.

Corollaire: Soient $\gamma > 0$, $\tau_0 \geq 0$, $M > m$.

Voici une autre application importante du théorème de Pyartli.

Corollaire: Soient $\gamma > 0$, $\tau_0 \geq 0$, $M > m$. Il existe τ_1, ne dépendant que de n, M, τ_0, tel que, pour tout germe $\alpha : (\mathbb{R}^m, 0) \to \mathbb{R}^n$ faiblement dégénéré en 0 vérifiant $\alpha(0) \in HDC(2\gamma, \tau_0)$,

Voici une autre application importante du théorème de Pyartli.

Corollaire: Soient $\gamma > 0$, $\tau_0 \geq 0$, $M > m$. Il existe τ_1, ne dépendant que de n, M, τ_0, tel que, pour tout germe $\alpha : (\mathbb{R}^m, 0) \to \mathbb{R}^n$ faiblement dégénéré en 0 vérifiant $\alpha(0) \in HDC(2\gamma, \tau_0)$, on ait, lorsque ε tend vers 0

$$\mathrm{Leb}\{t \in \mathbb{R}^m,\ \|t\| < \varepsilon,\ \alpha(t) \notin HDC(\gamma, \tau_1)\} = O(\varepsilon^M).$$

Tores invariants et non dégénérescence faible (I)

Soit U un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et soit $H_0(p)$ un Hamiltonien complètement intégrable sur $\mathbb{T}^n \times U$.

Tores invariants et non dégénérescence faible (I)

Soit U un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et soit $H_0(p)$ un Hamiltonien complètement intégrable sur $\mathbb{T}^n \times U$.

Théorème: On suppose que le vecteur fréquence $p \mapsto \alpha(p) := \nabla H_0(p)$ est faiblement non dégénéré en presque tout point de U. Soit $\varepsilon > 0$.

Tores invariants et non dégénérescence faible (I)

Soit U un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et soit $H_0(p)$ un Hamiltonien complètement intégrable sur $\mathbb{T}^n \times U$.

Théorème: On suppose que le vecteur fréquence $p \mapsto \alpha(p) := \nabla H_0(p)$ est faiblement non dégénéré en presque tout point de U. Soit $\varepsilon > 0$.

Si H est assez proche de H_0 (dans la C^∞-topologie), l'ensemble des points de $\mathbb{T}^n \times U$ qui n'appartiennent pas à un tore lagrangien diophantien invariant par H est de mesure de Lebesgue $< \varepsilon$.

Tores invariants et non dégénérescence faible (II)

Soit $T = \mathbb{T}^n \times \{0\}$ un tore lagrangien diophantien invariant par un hamiltonien H de classe C^∞.

Tores invariants et non dégénérescence faible (II)

Soit $T = \mathbb{T}^n \times \{0\}$ un tore lagrangien diophantien invariant par un hamiltonien H de classe C^∞. Soit $N > 1$.

Tores invariants et non dégénérescence faible (II)

Soit $T = \mathbb{T}^n \times \{0\}$ un tore lagrangien diophantien invariant par un hamiltonien H de classe C^∞. Soit $N > 1$. Après changement symplectique de coordonnées, on peut supposer que H est, au voisinage de T, sous forme normale de Birkhoff:

$$H(q,p) = H_N(p) + R_N(q,p),$$

avec $\deg H_N \leq N$ et $R_N(q,p) = O(\|p\|^{N+1})$.

Tores invariants et non dégénérescence faible (II)

Soit $T = \mathbb{T}^n \times \{0\}$ un tore lagrangien diophantien invariant par un hamiltonien H de classe C^∞. Soit $N > 1$. Après changement symplectique de coordonnées, on peut supposer que H est, au voisinage de T, sous forme normale de Birkhoff:

$$H(q,p) = H_N(p) + R_N(q,p),$$

avec $\deg H_N \leq N$ et $R_N(q,p) = O(\|p\|^{N+1})$.

Théorème: On suppose que l'image du gradient ∇H_N n'est pas contenue dans un hyperplan de $\mathbb{R}^n$.

Tores invariants et non dégénérescence faible (II)

Soit $T = \mathbb{T}^n \times \{0\}$ un tore lagrangien diophantien invariant par un hamiltonien H de classe C^∞. Soit $N > 1$. Après changement symplectique de coordonnées, on peut supposer que H est, au voisinage de T, sous forme normale de Birkhoff:

$$H(q,p) = H_N(p) + R_N(q,p),$$

avec $\deg H_N \leq N$ et $R_N(q,p) = O(\|p\|^{N+1})$.

Théorème: On suppose que l'image du gradient ∇H_N n'est pas contenue dans un hyperplan de $\mathbb{R}^n$. Alors, la mesure de Lebesgue relative des points de $\mathbb{T}^n \times (-\varepsilon, \varepsilon)^n$ qui n'appartiennent pas à un tore lagrangien diophantien invariant par H tend vers 0 lorsque ε tend vers 0.

Stabilité en mesure du système solaire

On considère le problème planétaire à $(1 + n)$ corps de la mécanique céleste.

Stabilité en mesure du système solaire

On considère le problème planétaire à $(1+n)$ corps de la mécanique céleste.

On désigne par m_0 la masse du soleil, par Q_0 sa position et par P_0 son impulsion.

Stabilité en mesure du système solaire

On considère le problème planétaire à $(1 + n)$ corps de la mécanique céleste.

On désigne par m_0 la masse du soleil, par Q_0 sa position et par P_0 son impulsion. Les masses des planètes sont $\varepsilon m_1, \ldots, \varepsilon m_n$, leurs positions $Q_1, \ldots, Q_n$, leurs impulsions $P_1, \ldots, P_n$.

Stabilité en mesure du système solaire

On considère le problème planétaire à $(1+n)$ corps de la mécanique céleste.

On désigne par m_0 la masse du soleil, par Q_0 sa position et par P_0 son impulsion. Les masses des planètes sont $\varepsilon m_1, \ldots, \varepsilon m_n$, leurs positions $Q_1, \ldots, Q_n$, leurs impulsions $P_1, \ldots, P_n$.

Le centre de masse étant fixé à l'origine, on introduit les coordonnées héliocentriques

$$X_j = Q_j - Q_0, \qquad Y_j = \varepsilon^{-1} P_j = m_j \dot{Q}_j, \qquad \forall 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Stabilité en mesure du système solaire

On considère le problème planétaire à $(1+n)$ corps de la mécanique céleste.

On désigne par m_0 la masse du soleil, par Q_0 sa position et par P_0 son impulsion. Les masses des planètes sont $\varepsilon m_1, \ldots, \varepsilon m_n$, leurs positions $Q_1, \ldots, Q_n$, leurs impulsions $P_1, \ldots, P_n$.

Le centre de masse étant fixé à l'origine, on introduit les coordonnées héliocentriques

$$X_j = Q_j - Q_0, \qquad Y_j = \varepsilon^{-1} P_j = m_j \dot{Q}_j, \qquad \forall 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Le Hamiltonien s'écrit alors

$$\begin{aligned} H(X,Y) &= \sum_j \left(\frac{||Y_j||^2}{2\mu_j} - \frac{\mu_j M_j}{||X_j||}\right) + \varepsilon \sum_{j<k} \left(-\frac{m_j m_k}{||X_j - X_k||} + \frac{Y_j . Y_k}{m_0}\right) \\ &= H_{Kep} + \varepsilon H_{per}. \end{aligned}$$

Stabilité en mesure du système solaire

On considère le problème planétaire à $(1+n)$ corps de la mécanique céleste.

On désigne par m_0 la masse du soleil, par Q_0 sa position et par P_0 son impulsion. Les masses des planètes sont $\varepsilon m_1, \dots, \varepsilon m_n$, leurs positions $Q_1, \dots, Q_n$, leurs impulsions $P_1, \dots, P_n$.

Le centre de masse étant fixé à l'origine, on introduit les coordonnées héliocentriques

$$X_j = Q_j - Q_0, \qquad Y_j = \varepsilon^{-1} P_j = m_j \dot{Q}_j, \qquad \forall 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Le Hamiltonien s'écrit alors

$$\begin{aligned} H(X,Y) &= \sum_j \left(\frac{||Y_j||^2}{2\mu_j} - \frac{\mu_j M_j}{||X_j||} \right) + \varepsilon \sum_{j<k} \left(-\frac{m_j m_k}{||X_j - X_k||} + \frac{Y_j . Y_k}{m_0} \right) \\ &= H_{Kep} + \varepsilon H_{per}. \end{aligned}$$

On a posé $M_j = m_0 + \varepsilon m_j$, $\mu_j^{-1} = m_j^{-1} + \varepsilon m_0^{-1}$.

Coordonnées de Poincaré

On s'intéresse à des solutions proches d'orbites circulaires horizontales directes de rayons $a_n^0 < \ldots < a_1^0$.

On s'intéresse à des solutions proches d'orbites circulaires horizontales directes de rayons $a_n^0 < \ldots < a_1^0$.

Selon la première loi de Kepler, pour le Hamiltonien non perturbé H_{Kep}, une telle solution est constituée de n orbites elliptiques presque horizontales, de faible excentricité ε_j, ayant l'origine pour foyer et un demi-grand-axe a_j proche de a_j^0.

Coordonnées de Poincaré

On s'intéresse à des solutions proches d'orbites circulaires horizontales directes de rayons $a_n^0 < \ldots < a_1^0$.

Selon la première loi de Kepler, pour le Hamiltonien non perturbé H_{Kep}, une telle solution est constituée de n orbites elliptiques presque horizontales, de faible excentricité ε_j, ayant l'origine pour foyer et un demi-grand-axe a_j proche de a_j^0.

Les coordonnées de Poincaré $(\lambda_j, \Lambda_j, \xi_j, \eta_j, p_j, q_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ sont particulièrement bien adaptées à cette région de l'espace des phases.

Coordonnées de Poincaré

On s'intéresse à des solutions proches d'orbites circulaires horizontales directes de rayons $a_n^0 < \ldots < a_1^0$.

Selon la première loi de Kepler, pour le Hamiltonien non perturbé H_{Kep}, une telle solution est constituée de n orbites elliptiques presque horizontales, de faible excentricité ε_j, ayant l'origine pour foyer et un demi-grand-axe a_j proche de a_j^0.

Les coordonnées de Poincaré $(\lambda_j, \Lambda_j, \xi_j, \eta_j, p_j, q_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ sont particulièrement bien adaptées à cette région de l'espace des phases. La forme symplectique s'y représente sous la forme standard

$$\omega = \sum_j d\lambda_j \wedge d\Lambda_j + \sum_j d\xi_j \wedge d\eta_j + \sum_j dp_j \wedge dq_j.$$

- $\Lambda_j = \mu_j \sqrt{M_j a_j}$ est le moment angulaire;

- $\Lambda_j = \mu_j \sqrt{M_j a_j}$ est le moment angulaire;
- les coordonnées p_j, q_j décrivent la position dans l'espace du plan (presque horizontal) de l'ellipse:

- $\Lambda_j = \mu_j \sqrt{M_j a_j}$ est le moment angulaire;
- les coordonnées p_j, q_j décrivent la position dans l'espace du plan (presque horizontal) de l'ellipse:

$$z_j := p_j + iq_j := 2\sqrt{\Lambda_j \sqrt{1 - \varepsilon_j^2}} \sin \frac{\iota_j}{2} \exp i\theta_j,$$

- $\Lambda_j = \mu_j \sqrt{M_j a_j}$ est le moment angulaire;
- les coordonnées p_j, q_j décrivent la position dans l'espace du plan (presque horizontal) de l'ellipse:

$$z_j := p_j + iq_j := 2\sqrt{\Lambda_j \sqrt{1 - \varepsilon_j^2}} \sin \frac{\iota_j}{2} \exp i\theta_j,$$

où ι_j est l'inclinaison du plan

- $\Lambda_j = \mu_j \sqrt{M_j a_j}$ est le moment angulaire;
- les coordonnées p_j, q_j décrivent la position dans l'espace du plan (presque horizontal) de l'ellipse:

$$z_j := p_j + iq_j := 2\sqrt{\Lambda_j \sqrt{1 - \varepsilon_j^2}} \sin \frac{\iota_j}{2} \exp i\theta_j,$$

où ι_j est l'inclinaison du plan et θ_j est la longitude du noeud.

- $\Lambda_j = \mu_j \sqrt{M_j a_j}$ est le moment angulaire;
- les coordonnées p_j, q_j décrivent la position dans l'espace du plan (presque horizontal) de l'ellipse:

$$z_j := p_j + iq_j := 2\sqrt{\Lambda_j \sqrt{1-\varepsilon_j^2}} \sin \frac{\iota_j}{2} \exp i\theta_j,$$

  où ι_j est l'inclinaison du plan et θ_j est la longitude du noeud.
- les coordonnées ξ_j, η_j décrivent la position de l'ellipse (presque circulaire) dans son plan:

- $\Lambda_j = \mu_j \sqrt{M_j a_j}$ est le moment angulaire;
- les coordonnées p_j, q_j décrivent la position dans l'espace du plan (presque horizontal) de l'ellipse:

$$z_j := p_j + iq_j := 2\sqrt{\Lambda_j \sqrt{1-\varepsilon_j^2}} \sin \frac{\iota_j}{2} \exp i\theta_j,$$

  où ι_j est l'inclinaison du plan et θ_j est la longitude du noeud.
- les coordonnées ξ_j, η_j décrivent la position de l'ellipse (presque circulaire) dans son plan:

$$r_j := \xi_j + i\eta_j := \sqrt{2\Lambda_j}\sqrt{1-(1-\varepsilon_j^2)^{1/2}} \exp i(\theta_j + g_j),$$

- $\Lambda_j = \mu_j \sqrt{M_j a_j}$ est le moment angulaire;
- les coordonnées p_j, q_j décrivent la position dans l'espace du plan (presque horizontal) de l'ellipse:

$$z_j := p_j + iq_j := 2\sqrt{\Lambda_j \sqrt{1-\varepsilon_j^2}}\, \sin \frac{\iota_j}{2} \exp i\theta_j,$$

  où ι_j est l'inclinaison du plan et θ_j est la longitude du noeud.
- les coordonnées ξ_j, η_j décrivent la position de l'ellipse (presque circulaire) dans son plan:

$$r_j := \xi_j + i\eta_j := \sqrt{2\Lambda_j}\sqrt{1-(1-\varepsilon_j^2)^{1/2}}\, \exp i(\theta_j + g_j),$$

  où g_j est l'argument du périhélie;

- $\Lambda_j = \mu_j \sqrt{M_j a_j}$ est le moment angulaire;
- les coordonnées p_j, q_j décrivent la position dans l'espace du plan (presque horizontal) de l'ellipse:

$$z_j := p_j + iq_j := 2\sqrt{\Lambda_j \sqrt{1 - \varepsilon_j^2}} \sin \frac{\iota_j}{2} \exp i\theta_j,$$

  où ι_j est l'inclinaison du plan et θ_j est la longitude du noeud.
- les coordonnées ξ_j, η_j décrivent la position de l'ellipse (presque circulaire) dans son plan:

$$r_j := \xi_j + i\eta_j := \sqrt{2\Lambda_j} \sqrt{1 - (1 - \varepsilon_j^2)^{1/2}} \exp i(\theta_j + g_j),$$

  où g_j est l'argument du périhélie;
- $\lambda_j = \theta_j + g_j + \ell_j$, où ℓ_j est l'anomalie moyenne.

Théorème: (Arnold 1963; Herman, Fejoz 2004)

Enoncé du théorème

Théorème: (Arnold 1963; Herman, Fejoz 2004)
Pour tout choix de masses $m_0, \ldots, m_n$ et de rayons $a_n^0 < \ldots < a_1^0$,

Enoncé du théorème

Théorème: (Arnold 1963; Herman, Fejoz 2004)
Pour tout choix de masses $m_0, \dots, m_n$ et de rayons $a_n^0 < \dots < a_1^0$, il existe ε_0 tel que, pour $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, le Hamiltonien H ait, au voisinage du tore de dimension n associé à ces orbites circulaires horizontales, un ensemble de grande mesure de Lebesgue relative formé de tores invariants quasipériodiques isotropes de dimension $3n - 1$.

Le système séculaire

Le Hamiltonien non perturbé H_{Kep} prend la forme particulièrement simple

$$H_{Kep} = -\sum_j \frac{\mu_j^3 M_j^2}{2\Lambda_j^2}$$

Le système séculaire

Le Hamiltonien non perturbé H_{Kep} prend la forme particulièrement simple

$$H_{Kep} = -\sum_j \frac{\mu_j^3 M_j^2}{2\Lambda_j^2}$$

ce qui confirme que seules les anomalies moyennes λ_j varient avec le temps,

Le système séculaire

Le Hamiltonien non perturbé H_{Kep} prend la forme particulièrement simple

$$H_{Kep} = -\sum_j \frac{\mu_j^3 M_j^2}{2\Lambda_j^2}$$

ce qui confirme que seules les anomalies moyennes λ_j varient avec le temps, suivant une fréquence

$$\nu_j := \frac{\partial H_{Kep}}{\partial \Lambda_j} = \sqrt{M_j} a_j^{-\frac{3}{2}}$$

(Troisième loi de Kepler).

Le système séculaire

Le Hamiltonien non perturbé H_{Kep} prend la forme particulièrement simple

$$H_{Kep} = -\sum_j \frac{\mu_j^3 M_j^2}{2\Lambda_j^2}$$

ce qui confirme que seules les anomalies moyennes λ_j varient avec le temps, suivant une fréquence

$$\nu_j := \frac{\partial H_{Kep}}{\partial \Lambda_j} = \sqrt{M_j} a_j^{-\frac{3}{2}}$$

(Troisième loi de Kepler).

Le Hamiltonien non perturbé H_{Kep} est donc complètement intégrable, Le Hamiltonien non perturbé H_{Kep} prend la forme particulièrement simple

$$H_{Kep} = -\sum_j \frac{\mu_j^3 M_j^2}{2\Lambda_j^2}$$

ce qui confirme que seules les anomalies moyennes λ_j varient avec le temps, suivant une fréquence

$$\nu_j := \frac{\partial H_{Kep}}{\partial \Lambda_j} = \sqrt{M_j} a_j^{-\frac{3}{2}}$$

(Troisième loi de Kepler).

Le Hamiltonien non perturbé H_{Kep} est donc complètement intégrable, mais très loin d'être non dégénéré, même faiblement.

On extrait de la perturbation sa valeur moyenne par rapport aux λ_j (les variables rapides):

On extrait de la perturbation sa valeur moyenne par rapport aux λ_j (les variables rapides): on écrit $H_{per} = H^1 + H^2$ avec

$$H^1(\Lambda, \xi, \eta, p, q) := \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} H_{per}(\lambda, \Lambda, \xi, \eta, p, q) d\lambda.$$

On extrait de la perturbation sa valeur moyenne par rapport aux λ_j (les variables rapides): on écrit $H_{per} = H^1 + H^2$ avec

$$H^1(\Lambda, \xi, \eta, p, q) := \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} H_{per}(\lambda, \Lambda, \xi, \eta, p, q) d\lambda.$$

D'après la théorie de la moyennisation, l'effet du terme εH^2 (dans le hamiltonien total $H = H_{Kep} + \varepsilon H^1 + \varepsilon H^2$) est $o(\varepsilon)$.

On extrait de la perturbation sa valeur moyenne par rapport aux λ_j (les variables rapides): on écrit $H_{per} = H^1 + H^2$ avec

$$H^1(\Lambda, \xi, \eta, p, q) := \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} H_{per}(\lambda, \Lambda, \xi, \eta, p, q) d\lambda.$$

D'après la théorie de la moyennisation, l'effet du terme εH^2 (dans le hamiltonien total $H = H_{Kep} + \varepsilon H^1 + \varepsilon H^2$) est $o(\varepsilon)$. La partie importante de la perturbation est donc le système séculaire $H^1(\Lambda, \xi, \eta, p, q)$.

On extrait de la perturbation sa valeur moyenne par rapport aux λ_j (les variables rapides): on écrit $H_{per} = H^1 + H^2$ avec

$$H^1(\Lambda, \xi, \eta, p, q) := \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} H_{per}(\lambda, \Lambda, \xi, \eta, p, q) d\lambda.$$

D'après la théorie de la moyennisation, l'effet du terme εH^2 (dans le hamiltonien total $H = H_{Kep} + \varepsilon H^1 + \varepsilon H^2$) est $o(\varepsilon)$. La partie importante de la perturbation est donc le système séculaire $H^1(\Lambda, \xi, \eta, p, q)$.

Comme H^1 ne dépend pas des λ_j, les Λ_j sont conservés par la dynamique de H^1 et peuvent donc être considérés comme des paramètres.

Fréquences du système séculaire

Le hamiltonien H^1 est une fonction paire des $2n$ variables complexes r_j, z_j.

Fréquences du système séculaire

Le hamiltonien H^1 est une fonction paire des $2n$ variables complexes r_j, z_j. L'origine $\{r_j = z_j = 0\}$, qui correspond aux solutions formées d'orbites planétaires circulaires horizontales, est donc un équilibre pour le système séculaire H^1.

Fréquences du système séculaire

Le hamiltonien H^1 est une fonction paire des $2n$ variables complexes r_j, z_j. L'origine $\{r_j = z_j = 0\}$, qui correspond aux solutions formées d'orbites planétaires circulaires horizontales, est donc un équilibre pour le système séculaire H^1.

Lagrange et Laplace ont calculé la partie quadratique de H^1.

Fréquences du système séculaire

Le hamiltonien H^1 est une fonction paire des $2n$ variables complexes r_j, z_j. L'origine $\{r_j = z_j = 0\}$, qui correspond aux solutions formées d'orbites planétaires circulaires horizontales, est donc un équilibre pour le système séculaire H^1.

Lagrange et Laplace ont calculé la partie quadratique de H^1. Il existe des transformations orthogonales $\rho_h,\ \rho_v \in SO(n, \mathbb{R})$ telles que le changement de coordonnées symplectique

$$\rho(\xi, \eta, p, q) = (\rho_h \xi, \rho_h \eta, \rho_v p, \rho_v q)$$

permette d'écrire

Fréquences du système séculaire

Le hamiltonien H^1 est une fonction paire des $2n$ variables complexes r_j, z_j. L'origine $\{r_j = z_j = 0\}$, qui correspond aux solutions formées d'orbites planétaires circulaires horizontales, est donc un équilibre pour le système séculaire H^1.

Lagrange et Laplace ont calculé la partie quadratique de H^1. Il existe des transformations orthogonales $\rho_h,\ \rho_v \in SO(n, \mathbb{R})$ telles que le changement de coordonnées symplectique

$$\rho(\xi, \eta, p, q) = (\rho_h \xi, \rho_h \eta, \rho_v p, \rho_v q)$$

permette d'écrire

$$H^1 \circ \rho\, (\xi, \eta, p, q) = \sum_j \sigma_j (\xi_j^2 + \eta_j^2) + \sum_j \zeta_j (p_j^2 + q_j^2) + R_4.$$

Fréquences du système séculaire

Le hamiltonien H^1 est une fonction paire des $2n$ variables complexes r_j, z_j. L'origine $\{r_j = z_j = 0\}$, qui correspond aux solutions formées d'orbites planétaires circulaires horizontales, est donc un équilibre pour le système séculaire H^1.

Lagrange et Laplace ont calculé la partie quadratique de H^1. Il existe des transformations orthogonales $\rho_h,\ \rho_v \in SO(n, \mathbb{R})$ telles que le changement de coordonnées symplectique

$$\rho(\xi, \eta, p, q) = (\rho_h \xi, \rho_h \eta, \rho_v p, \rho_v q)$$

permette d'écrire

$$H^1 \circ \rho\,(\xi, \eta, p, q) = \sum_j \sigma_j(\xi_j^2 + \eta_j^2) + \sum_j \zeta_j(p_j^2 + q_j^2) + R_4.$$

Le reste R_4 est d'ordre 4 à l'origine. Les nombres $\sigma_1, \ldots, \sigma_n, \zeta_1, \ldots, \zeta_n$ sont les fréquences du système séculaire.

Fréquences du système séculaire

Le hamiltonien H^1 est une fonction paire des $2n$ variables complexes r_j, z_j. L'origine $\{r_j = z_j = 0\}$, qui correspond aux solutions formées d'orbites planétaires circulaires horizontales, est donc un équilibre pour le système séculaire H^1.

Lagrange et Laplace ont calculé la partie quadratique de H^1. Il existe des transformations orthogonales $\rho_h,\ \rho_v \in SO(n, \mathbb{R})$ telles que le changement de coordonnées symplectique

$$\rho(\xi, \eta, p, q) = (\rho_h \xi, \rho_h \eta, \rho_v p, \rho_v q)$$

permette d'écrire

$$H^1 \circ \rho\, (\xi, \eta, p, q) = \sum_j \sigma_j(\xi_j^2 + \eta_j^2) + \sum_j \zeta_j(p_j^2 + q_j^2) + R_4.$$

Le reste R_4 est d'ordre 4 à l'origine. Les nombres $\sigma_1, \ldots, \sigma_n, \zeta_1, \ldots, \zeta_n$ sont les fréquences du système séculaire. Ce sont des fonctions des paramètres Λ_j (c'est-à -dire des a_j).

Le système séculaire planaire

Le sous-espace $\{z_1 = \ldots = z_n = 0\}$ de codimension $2n$ est invariant par H et correspond au système planétaire planaire.

Le système séculaire planaire

Le sous-espace $\{z_1 = \ldots = z_n = 0\}$ de codimension $2n$ est invariant par H et correspond au système planétaire planaire. Les fréquences du système séculaire associé sont $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$.

Le système séculaire planaire

Le sous-espace $\{z_1 = \ldots = z_n = 0\}$ de codimension $2n$ est invariant par H et correspond au système planétaire planaire. Les fréquences du système séculaire associé sont $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$.

On peut montrer que l'application de fréquence

$$\alpha_{planar} : (a_1, \ldots, a_n) \mapsto (\nu_1, \ldots, \nu_n, \sigma_1, \ldots, \sigma_n)$$

Le système séculaire planaire

Le sous-espace $\{z_1 = \ldots = z_n = 0\}$ de codimension $2n$ est invariant par H et correspond au système planétaire planaire. Les fréquences du système séculaire associé sont $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$.

On peut montrer que l'application de fréquence

$$\alpha_{planar} : (a_1, \ldots, a_n) \mapsto (\nu_1, \ldots, \nu_n, \sigma_1, \ldots, \sigma_n)$$

est analytique et faiblement non-dégénérée sur un ouvert de mesure totale de paramètres $(a_1, \ldots, a_n)$.

Le système séculaire planaire

Le sous-espace $\{z_1 = \ldots = z_n = 0\}$ de codimension $2n$ est invariant par H et correspond au système planétaire planaire. Les fréquences du système séculaire associé sont $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$.

On peut montrer que l'application de fréquence

$$\alpha_{planar} : (a_1, \ldots, a_n) \mapsto (\nu_1, \ldots, \nu_n, \sigma_1, \ldots, \sigma_n)$$

est analytique et faiblement non-dégénérée sur un ouvert de mesure totale de paramètres $(a_1, \ldots, a_n)$.
Pour ceci, il est utile de permettre aux a_j de prendre des valeurs complexes et d'étudier, par récurrence sur n, les fréquences σ_j dans ce contexte (Fejoz 2004).

La non-dégénérescence faible de α_{planar} permet, après des réductions préliminaires, d'appliquer le théorème de conjugaison conditionnelle

La non-dégénérescence faible de α_{planar} permet, après des réductions préliminaires, d'appliquer le théorème de conjugaison conditionnelle et d'obtenir, pour ε assez petit, au voisinage des orbites circulaires, un ensemble de grande mesure relative formé de tores lagrangiens diophantiens (de dimension $2n$) pour le système planétaire planaire.

Le système séculaire spatial

Les fréquences du système séculaire spatial ne sont pas linéairement indépendantes.

Le système séculaire spatial

Les fréquences du système séculaire spatial ne sont pas linéairement indépendantes. On a en effet

$$(\star) \qquad \zeta_n = 0, \qquad \sum_j \sigma_j + \sum_j \zeta_j = 0.$$

Le système séculaire spatial

Les fréquences du système séculaire spatial ne sont pas linéairement indépendantes. On a en effet

$$(\star) \qquad \zeta_n = 0, \qquad \sum_j \sigma_j + \sum_j \zeta_j = 0.$$

La première relation est une traduction de l'invariance par rotations du système étudié.

Le système séculaire spatial

Les fréquences du système séculaire spatial ne sont pas linéairement indépendantes. On a en effet

$$(\star) \qquad \zeta_n = 0, \qquad \sum_j \sigma_j + \sum_j \zeta_j = 0.$$

La première relation est une traduction de l'invariance par rotations du système étudié. La deuxième relation est plus mystérieuse: elle avait échappé à Arnold et a été découverte par Herman.

L'application de fréquence

$$\alpha_{spatial} : (a_1, \ldots, a_n) \mapsto (\nu_1, \ldots, \nu_n, \sigma_1, \ldots, \sigma_n, \zeta_1, \ldots, \zeta_n)$$

Le système séculaire spatial

Les fréquences du système séculaire spatial ne sont pas linéairement indépendantes. On a en effet

$$(\star) \qquad \zeta_n = 0, \qquad \sum_j \sigma_j + \sum_j \zeta_j = 0.$$

La première relation est une traduction de l'invariance par rotations du système étudié. La deuxième relation est plus mystérieuse: elle avait échappé à Arnold et a été découverte par Herman.

L'application de fréquence

$$\alpha_{spatial} : (a_1, \ldots, a_n) \mapsto (\nu_1, \ldots, \nu_n, \sigma_1, \ldots, \sigma_n, \zeta_1, \ldots, \zeta_n)$$

n'est donc pas faiblement dégénérée!

Le système séculaire spatial

Les fréquences du système séculaire spatial ne sont pas linéairement indépendantes. On a en effet

$$(\star) \qquad \zeta_n = 0, \qquad \sum_j \sigma_j + \sum_j \zeta_j = 0.$$

La première relation est une traduction de l'invariance par rotations du système étudié. La deuxième relation est plus mystérieuse: elle avait échappé à Arnold et a été découverte par Herman.

L'application de fréquence

$$\alpha_{spatial} : (a_1, \ldots, a_n) \mapsto (\nu_1, \ldots, \nu_n, \sigma_1, \ldots, \sigma_n, \zeta_1, \ldots, \zeta_n)$$

n'est donc pas faiblement dégénérée!

Elle le devient cependant si on la considère comme une application à valeurs dans le sous-espace de codimension 2 défini par $(\star)$.

Réduction du moment cinétique

Le moment cinétique total, qui est proche d'être vertical dans la région de l'espace des phases considérée, est invariant par le flot hamiltonien X_H.

Réduction du moment cinétique

Le moment cinétique total, qui est proche d'être vertical dans la région de l'espace des phases considérée, est invariant par le flot hamiltonien X_H.

L'espace des phases est ainsi feuilleté par des sous-variétés de codimension 3 (de dimension $6n - 3$) associées à une valeur donnée du moment cinétique.

Réduction du moment cinétique

Le moment cinétique total, qui est proche d'être vertical dans la région de l'espace des phases considérée, est invariant par le flot hamiltonien X_H.

L'espace des phases est ainsi feuilleté par des sous-variétés de codimension 3 (de dimension $6n - 3$) associées à une valeur donnée du moment cinétique. On peut par exemple supposer que le moment cinétique est exactement vertical, de norme fixée.

Réduction du moment cinétique

Le moment cinétique total, qui est proche d'être vertical dans la région de l'espace des phases considérée, est invariant par le flot hamiltonien X_H.

L'espace des phases est ainsi feuilleté par des sous-variétés de codimension 3 (de dimension $6n - 3$) associées à une valeur donnée du moment cinétique. On peut par exemple supposer que le moment cinétique est exactement vertical, de norme fixée.

Le groupe à un paramètre de rotations d'axe vertical agit sur la sous-variété invariante correspondante.

Réduction du moment cinétique

Le moment cinétique total, qui est proche d'être vertical dans la région de l'espace des phases considérée, est invariant par le flot hamiltonien X_H.

L'espace des phases est ainsi feuilleté par des sous-variétés de codimension 3 (de dimension $6n - 3$) associées à une valeur donnée du moment cinétique. On peut par exemple supposer que le moment cinétique est exactement vertical, de norme fixée.

Le groupe à un paramètre de rotations d'axe vertical agit sur la sous-variété invariante correspondante. Le quotient de cette sous-variété par ce groupe (réduction symplectique) est une variété de dimension $6n - 4$, naturellement munie d'une forme symplectique.

Réduction du moment cinétique

Le moment cinétique total, qui est proche d'être vertical dans la région de l'espace des phases considérée, est invariant par le flot hamiltonien X_H.

L'espace des phases est ainsi feuilleté par des sous-variétés de codimension 3 (de dimension $6n - 3$) associées à une valeur donnée du moment cinétique. On peut par exemple supposer que le moment cinétique est exactement vertical, de norme fixée.

Le groupe à un paramètre de rotations d'axe vertical agit sur la sous-variété invariante correspondante. Le quotient de cette sous-variété par ce groupe (réduction symplectique) est une variété de dimension $6n - 4$, naturellement munie d'une forme symplectique. Le hamiltonien H induit sur ce quotient un hamiltonien $\overline{H}$.

Fin de la preuve

L'application de fréquence du hamiltonien $\overline{H}$ s'identifie à $\alpha_{spatial}$, à valeurs dans l'espace de dimension $3n - 2$ défini par $(\star)$.

Fin de la preuve

L'application de fréquence du hamiltonien $\overline{H}$ s'identifie à $\alpha_{spatial}$, à valeurs dans l'espace de dimension $3n - 2$ défini par $(\star)$.

La non-dégénérescence de cette application permet de construire un ensemble invariant pour $\overline{H}$, formé de tores lagrangiens diophantiens (de dimension $3n - 2$), au voisinage du tore de dimension $n - 1$ associé aux mouvements circulaires horizontaux de moment cinétique donné.

Fin de la preuve

L'application de fréquence du hamiltonien $\overline{H}$ s'identifie à $\alpha_{spatial}$, à valeurs dans l'espace de dimension $3n-2$ défini par $(\star)$.

La non-dégénérescence de cette application permet de construire un ensemble invariant pour $\overline{H}$, formé de tores lagrangiens diophantiens (de dimension $3n-2$), au voisinage du tore de dimension $n-1$ associé aux mouvements circulaires horizontaux de moment cinétique donné.

Ces tores de dimension $3n-2$ invariants par $\overline{H}$ se relèvent en des tores quasipériodiques de dimension $3n-1$ invariants par le hamiltonien non réduit H.

Fin de la preuve

L'application de fréquence du hamiltonien $\overline{H}$ s'identifie à $\alpha_{spatial}$, à valeurs dans l'espace de dimension $3n - 2$ défini par $(\star)$.

La non-dégénérescence de cette application permet de construire un ensemble invariant pour $\overline{H}$, formé de tores lagrangiens diophantiens (de dimension $3n - 2$), au voisinage du tore de dimension $n - 1$ associé aux mouvements circulaires horizontaux de moment cinétique donné.

Ces tores de dimension $3n - 2$ invariants par $\overline{H}$ se relèvent en des tores quasipériodiques de dimension $3n - 1$ invariants par le hamiltonien non réduit H.
Ceci termine la démonstration du théorème. $\square$