Équations différentielles et systèmes dynamiques

M. Jean-Christophe YOCCOZ, membre de l'Institut
(Académie des sciences), professeur

COURS : SURFACES À PETITS CARREAUX

On se proposait dans ce cours d'entamer une étude des surfaces à petits carreaux, aussi appelées *origamis*, qui sera poursuivie dans les années ultérieures.

1. La première partie du cours a été consacrée à une présentation des différents points de vue sur les surfaces à petits carreaux, qui conduisent à plusieurs définitions équivalentes.

Du point de vue topologique, une *surface à petits carreaux* est un revêtement connexe fini $\pi : M \to \mathbb{T}^2 := \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$ non ramifié au dessus de $\mathbb{T}^2 - \{0\}$. Les *carreaux* sont les composantes connexes de $\pi^{-1}((0,1)^2)$. L'ensemble (fini) des carreaux de M est noté $Sq(M)$.

Un *morphisme* entre deux surface à petits carreaux $\pi : M \to \mathbb{T}^2$ et $\pi' : M' \to \mathbb{T}^2$ est une application continue p de M dans M' telle que $\pi = \pi' \circ p$. L'application p est alors un revêtement qui n'est pas ramifié dans $M - \pi^{-1}(0)$. Un *isomorphisme* entre π et π' est un homéomorphisme de M sur M' tel que $\pi = \pi' \circ p$.

Une surface à petits carreaux $\pi : M \to \mathbb{T}^2$ est *primitive* si, pour tout morphisme p de π vers une autre surface à petits carreaux $\pi' : M' \to \mathbb{T}^2$, on a $d^o(p) = 1$ (et p est donc un isomorphisme) ou $d^o(\pi') = 1$.

Une surface à petits carreaux $\pi : M \to \mathbb{T}^2$ est *réduite* si, pour tout revêtement $p : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ et toute application $\pi' : M \to \mathbb{T}^2$ qui est une surface à petits carreaux et vérifie $\pi = p \circ \pi'$, on a $d^o(p) = 1$.

Un origami primitif est réduit. L'inverse n'est en général pas vrai.

2. Soit $\pi : M \to \mathbb{T}^2$ une surface à petits carreaux. Pour $q \in Sq(M)$, notons $r(q)$ le carreau de M dont le bord gauche coïncide avec le bord droit de M. De même, notons $u(q)$ le carreau de M dont le bord inférieur coïncide avec le bord supérieur de M. Les applications r et u engendrent un sous-groupe du groupe des permutations de $Sq(M)$ qui agit transitivement sur M : cela résulte de la connexité de M.

Inversement, la donnée des applications r et u permet de reconstruire l'origami à isomorphisme près.

Du point de vue combinatoire, on est donc amené à voir un origami comme un triplet $(\mathcal{O},r,u)$, où $\mathcal{O}$ est un ensemble fini, et r,u sont des bijections de $\mathcal{O}$ engendrant un sous-groupe transitif du groupe des permutations $\mathcal{S}(\mathcal{O})$. Un morphisme de $(\mathcal{O},r,u)$ vers $(\mathcal{O}',r',u')$ devient alors une application $p:\mathcal{O}\to\mathcal{O}'$ vérifiant $p\circ r=r'\circ p$, $p\circ u=u'\circ p$.

On dit qu'un sous-groupe G de $\mathcal{S}(\mathcal{O})$ est *primitif* si, pour toute partie J de $\mathcal{O}$ telle que $1<\#J<\#\mathcal{O}$, il existe $g\in G$ tel que $g(J)$ rencontre J suivant un ensemble non vide et différent de J. On vérifie immédiatement qu'un origami $(\mathcal{O},r,u)$ est primitif si et seulement si le sous-groupe de $\mathcal{S}(\mathcal{O})$ engendré par r et u l'est aussi.

3. Soit $\pi:M\to\mathbb{T}^2$ une surface à petits carreaux. Soit Σ une partie de M qui contient les points de ramification de π et est contenue dans $\pi^{-1}(0)$. Notons κ la famille des indices de ramification aux points de Σ. Les relèvements à $\mathbb{R}^2$ des restrictions injectives de π à des ouverts simplement connexes de $M-\Sigma$ forment un atlas définissant une structure de surface de translation sur (M,Σ,κ). La structure complexe sur M est celle pour laquelle π est holomorphe, la 1-forme holomorphe privilégié ω est égale à $\pi^*(dz)$.

Pour toute structure de surface de translation de données combinatoires (M,Σ,κ), l'application de période fournit (par intégration de ω) un homomorphisme de $H_1(M,\Sigma,\mathbb{Z})$ dans $\mathbb{C}$. Il est facile de voir que cet homomorphisme est à valeurs dans le réseau $\mathbb{Z}\oplus i\mathbb{Z}$ si et seulement si la structure de surface de translation est associée à une surface à petits carreaux (unique à isomorphisme près). De plus, l'origami associé est réduit si et seulement si l'image de l'homomorphisme engendre $\mathbb{Z}\oplus i\mathbb{Z}$.

Rappelons que le *groupe de Veech* d'une surface de translation est le stabilisateur du point représenté par cette surface, pour l'action de $GL(2,\mathbb{R})$ sur l'espace de Teichmüller approprié $\mathcal{Q}(M,\Sigma,\kappa)$. C'est un sous-groupe discret de $GL(2,\mathbb{R})$ dont l'intersection avec $SL(2,\mathbb{R})$ n'est jamais cocompacte. Une surface de translation est appelée *surface de Veech* si son groupe de Veech rencontre $SL(2,\mathbb{R})$ suivant un réseau de $SL(2,\mathbb{R})$. Les surfaces à petits carreaux sont des surfaces de Veech. En fait, le théorème de Gutkin-Judge affirme qu'une surface de translation est, à changement d'échelle près, une surface à petits carreaux (resp. une surface réduite à petits carreaux) si et seulement si son groupe de Veech est commensurable à $GL(2,\mathbb{Z})$ (resp. est un sous-groupe d'indice fini de $GL(2,\mathbb{Z})$).

4. Après avoir présenté ce troisième point de vue sur les surfaces à petits carreaux, qui permet l'usage des outils de l'analyse complexe et de la géométrie algébrique, on a développé en suivant Gabriela Schmithüsen, Frank Herrlich et David Zmiaikou le point de vue combinatoire.

Soit F_2 le groupe libre à deux générateurs notés r et u. Un origami $(\mathcal{O},r,u)$ détermine donc une action de F_2 sur $\mathcal{O}$. Les stabilisateurs des points de $\mathcal{O}$ pour cette action forment une classe de conjugaison de sous-groupes de F_2 d'indice fini. Inversement, une telle classe de conjugaison détermine un unique origami, à isomorphisme près.

Notons $H(\mathcal{O})$ l'intersection des sous-groupes de cette classe de conjugaison. C'est un sous-groupe normal d'indice fini de F_2. Le quotient $F_2\,/\,H(\mathcal{O})=:\mathcal{M}on(\mathcal{O})$ est un groupe fini opérant fidèlement et transitivement sur $\mathcal{O}$, qui s'identifie au sous-groupe de $\mathcal{S}(\mathcal{O})$ engendré par r et u. On l'appelle *groupe de monodromie* de $(\mathcal{O},r,u)$. Notons que les stabilisateurs des points de $\mathcal{O}$ pour l'action de $\mathcal{M}on(\mathcal{O})$

forment une classe de conjugaison de sous-groupes dont l'intersection est réduite à l'identité.

Inversement, étant donnés un groupe fini G engendré par deux éléments $\bar{r}$ et $\bar{u}$, et un sous-groupe H de G ne contenant pas de sous-groupe normal non trivial, on définit un origami comme suit : on prend pour $\mathcal{O}$ l'ensemble des classes à droite modulo H, sur lequel $\bar{r}$ et $\bar{u}$ induisent des bijections r et u par multiplication à droite. Le groupe de monodromie de cet origami s'identifie alors à G, et le stabilisateur de la classe de l'identité à H. On notera que, G, $\bar{r}$ et $\bar{u}$ étant fixés, deux sous-groupes H, H' déterminent des origamis isomorphes si et seulement si ils sont conjugués.

Soient G, $\bar{r}$, $\bar{u}$ et H comme ci-dessus. Le normalisateur $N(H)$ de H dans G agit sur $\mathcal{O} = H\backslash G$ par multiplication à gauche, définissant des automorphismes de l'origami $\mathcal{O}$. En fait, le groupe des automorphismes $Aut(\mathcal{O})$ s'identifie ainsi au quotient $N(H)/H$.

Soit $(\mathcal{O},r,u)$ un origami. Les propriétés suivantes sont :

• le groupe des automorphismes $Aut(\mathcal{O})$ agit transitivement sur $\mathcal{O}$;

• la classe de conjugaison de sous-groupes de F_2 définie par $\mathcal{O}$ est formée d'un seul sous-groupe, qui est donc normal ;

• le stabilisateur d'un point de $\mathcal{O}$ (resp. de tout point de $\mathcal{O}$), pour l'action à droite du groupe de monodromie, est trivial.

Suivant David Zmiaikou, on dit que l'origami $(\mathcal{O},r,u)$ est *régulier* s'il vérifie les propriétés précédentes. Dans ce cas, un point de $\mathcal{O}$ choisi comme origine, le groupe de monodromie G s'identifie à $\mathcal{O}$ (avec action par multiplication à droite) et aussi au groupe des automorphismes $Aut(\mathcal{O})$ (avec action par multiplication à gauche).

5. L'action de $GL(2,\mathbb{R})$ sur les espaces de Teichmüller de surfaces de translation, restreinte au sous-groupe discret $GL(2,\mathbb{Z})$, définit une action à gauche de ce groupe sur les classes d'isomorphisme de surfaces à petits carreaux : cela se voit par exemple en considérant la caractérisation des origamis par l'application de période. Posons

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les éléments S,T engendrent $SL(2,\mathbb{Z})$, avec les relations $ST^{-1}S = T^{-1}ST^{-1}$, $(ST^{-1}S)^4 = 1$. Les éléments S,J engendrent $GL(2,\mathbb{Z})$, avec $J^2 = 1$, $JS = TJ$.

Soit $(\mathcal{O},r,u)$ un origami ; pour $X \in \{J,S,T\}$, l'origami déduit de $\mathcal{O}$ par l'action de X est $(\mathcal{O},r',u')$, avec

• $r' = u, u' = r$, si $X = J$;

• $r' = ru^{-1}, u' = u$, si $X = S$;

• $r' = r, u' = ur^{-1}$, si $X = T$.

Rappelons que $GL(2,\mathbb{Z})$ s'identifie canoniquement au groupe $Out(F_2)$ quotient du groupe des automorphismes $Aut(F_2)$ par le sous-groupe $Inn(F_2)$ des automorphismes intérieurs. Soient $(\mathcal{O},r,u)$ un origami, $A \in GL(2,\mathbb{Z})$, φ_A un automorphisme de F_2 représentant A, $\mathcal{H}$ la classe de conjugaison de sous-groupes de F_2 associée à $\mathcal{O}$; l'image $\varphi_A(\mathcal{H})$ est alors la classe de conjugaison de sous-groupes de F_2 associée à l'origami déduit de $\mathcal{O}$ par l'action de A.

Soit G un groupe. Le groupe $Aut(F_2)$ agit à gauche sur $G \times G$ de la façon suivante : étant donné un automorphisme φ de F_2, on écrit les images $\varphi^{-1}(r) = w_1(r,u)$, $\varphi^{-1}(u) = w_2(r,u)$ comme mots en r,u,r^{-1},u^{-1} et on pose

$\varphi.(g_1,g_2) = (w_1(g_1,g_2), w_2(g_1,g_2))$, pour $(g_1,g_2) \in G \times G$. En désignant par $(G\times G)^*$ l'ensemble quotient de $G\times G$ par l'action diagonale de G par conjugaison, on déduit de l'action de $Aut(F_2)$ sur $G\times G$ une action à gauche de $GL(2,\mathbb{Z}) = Out(F_2)$ sur $(G\times G)^*$.

Supposons maintenant que G soit fini. Soient r, u deux éléments de G engendrant G et soit H un sous-groupe de G dont l'intersection des conjugués est triviale. Soit $\mathcal{O}$ l'origami défini par ces données, et soit $A \in GL(2,\mathbb{Z})$. Notons (r', u') un élément de $G\times G$ dont l'image dans $(G\times G)^*$ se déduit de celle de (r,u) par l'action de A. Alors, l'origami déduit de $\mathcal{O}$ par l'action de A peut être défini par les donnés G, H, r', u'.

Pour des origamis réguliers, le sous-groupe H est réduit à l'identité et cela conduit, comme l'a observé David Zmiaikou, à la notion classique en théorie des groupes de *T-système*. Étant donné un groupe fini G, les origamis réguliers définis par deux systèmes de générateurs (r,u), (r',u') se déduisent l'un de l'autre par l'action de $GL(2,\mathbb{Z})$ si et seulement si il existe un automorphisme Φ de G tel que (r,u), $(\Phi(r'),\Phi(u'))$ se déduisent l'un de l'autre par l'action de $Aut(F_2)$. Ceci donne aussi une méthode pour identifier le stabilisateur d'un origami régulier relativement à l'action de $GL(2,\mathbb{Z})$. On notera qu'un tel origami est réduit dès que le groupe de monodromie n'est pas abélien.

6. La deuxième partie du cours a été consacrée à la présentation d'un certain nombre d'exemples d'origamis, déjà considérés par divers auteurs.

Soient G un groupe fini non abélien, et r,u deux éléments engendrant G. Notons n l'ordre de G, et $\kappa > 1$ l'ordre du commutateur $c := [r,u]$. L'origami régulier $(\mathcal{O}_G := G,r,u)$ a $\frac{n}{\kappa}$ points de ramification, chacun d'indice κ. L'ensemble de ramification Σ est l'image inverse de 0. Le genre est égal à

$$g(\mathcal{O}_G) = 1 + \frac{n(\kappa-1)}{2\kappa}.$$

Lorsque G est le groupe diédral D_m d'ordre $n = 2m$, et qu'on prend pour r,u deux involutions engendrant D_m telles que $r^2 = u^2 = (ru)^m = 1$, le groupe de Veech de l'origami régulier ainsi défini est le sous-groupe d'indice 3 de $GL(2,\mathbb{Z})$ formé des matrices dont la somme des éléments de chaque ligne (ou de chaque colonne) est impaire.

Soit m un entier ou moins égal à 2, et soit G le groupe de Heisenberg des matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

à coefficients dans les entiers modulo m. Choisissons

$$r = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad u = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le groupe de Veech de l'origami régulier ainsi défini est égal à $GL(2,\mathbb{Z})$ si m est impair, et au sous-groupe d'indice 3 de l'exemple précédent si m est pair.

Le groupe des quaternions $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$, avec par exemple $r = i, u = j$, donne lieu à un origami régulier remarquable baptisé « Eierlegende Wollmilchsau » par Herrlich, Möller et Schmithüsen. Le groupe de Veech est égal à $GL(2,\mathbb{Z})$. David Zmiaikou a aussi considéré pour $m > 2$ le groupe Q_{4m} d'ordre $4m$ dont une présentation est donnée par $\{r^{2m} = 1, u^2 = r^m, ru = ur^{-1}$. Le groupe de Veech est dans ce cas encore un groupe de congruence.

Pour le groupe symétrique S_4, en choisissant $r = (12)$ et $u = (1234)$, on obtient un origami régulier de genre 9 dont le groupe de Veech coïncide, d'après un théorème de David Zmiaikou, avec celui d'un origami à quatre carreaux de genre 2 ayant un seul point de ramification d'indice 3. On a présenté un algorithme de Gabriela Schmithüsen qui permet de calculer ce groupe de Veech (d'indice 9 dans $GL(2,\mathbb{Z})$). On a aussi expliqué comment un vieux (1890) résultat de Fricke et la notion de niveau généralisé introduite par Wohlfahrt permettent de montrer que ce groupe n'est pas un sous-groupe de congruence.

7. On s'est ensuite intéressé à une classe d'exemples considérés par Forni-Matheus-Zorich et Eskin-Kontsevich-Zorich. Soit $\widetilde{M}$ la courbe algébrique de $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ d'équation

$$w^N = (z - z_{0,0})^{a_{0,0}} (z - z_{0,1})^{a_{0,1}} (z - z_{1,0})^{a_{1,0}} (z - z_{1,1})^{a_{1,1}},$$

où N est un entier pair $\geqslant 2$, les $a_{i,j}$ sont des entiers impairs compris entre 0 et N ne possédant pas de diviseur commun non trivial, et N divise la somme des $a_{i,j}$. Après désingularisation de $\widetilde{M}$ à l'infini et aux points $(z_{i,j}, 0)$, on obtient une surface de Riemann M. Écrivons $N = 2\overline{N}$, $a_{i,j} = 1 + 2b_{i,j}$. La formule

$$(z,w) \mapsto (z, v = \frac{w^{\overline{N}}}{\prod (z - z_{i,j})^{b_{i,j}}})$$

définit un revêtement p de M sur la courbe elliptique T d'équation

$$v^2 = \prod (z - z_{i,j}),$$

non-ramifié au dessus du complémentaire des $(z_{i,j}, 0)$.

On définit une structure de surface de translation sur M en privilégiant la 1-forme holomorphe $\omega = p^*(c\frac{dz}{v})$, pour une constante $c \neq 0$ appropriée : on prend $z_{0,0} = 1, z_{1,0} = i, z_{1,1} = -1, z_{0,1} = -i$, et $c = \frac{1}{(1+i)c^*}$, avec

$$c^* = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^4-1}} = \frac{(\Gamma(\frac{1}{4}))^2}{4\sqrt{2\pi}}.$$

Ce choix fait de M un origami à $2N$ carreaux. L'ensemble des carreaux $Sq(M)$ est divisé en 4 parties $Sq_{i,j}$ $(i,j \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ de même cardinal $\overline{N}$, suivant le point $z_{i,j}$ situé au coin inférieur gauche du carreau considéré. L'automorphisme $(z,w) \mapsto (z, \exp(\frac{2\pi i}{\overline{N}})w)$ de M induit une action à gauche libre et transitive de $\mathbb{Z}/\overline{N}\mathbb{Z}$ sur chacun des $Sq_{i,j}$. L'application r (resp. u) envoie $Sq_{i,j}$ sur $Sq_{1-i,j}$ (resp. $Sq_{i,1-j}$) ; en notant additivement l'action de $\mathbb{Z}/\overline{N}\mathbb{Z}$ sur $Sq_{i,j}$, on a

$$r^2(x) = x + (-1)^j a_r, \quad u^2(x) = x + (-1)^i a_u, \quad (ru)^2(x) = x + (-1)^{i+j} a_{ru},$$

pour $x \in Sq_{i,j}$, avec

$$a_r = \frac{1}{2}(a_{0,1} + a_{1,1}), \quad a_u = \frac{1}{2}(a_{0,1} + a_{0,0}), \quad a_{ru} = \frac{1}{2}(a_{0,1} + a_{1,0}).$$

Le triplet (a_r, a_u, a_{ru}) d'éléments de $\mathbb{Z}/\overline{N}\mathbb{Z}$ détermine l'origami à isomorphisme près. Ces trois éléments engendrent $\mathbb{Z}/\overline{N}\mathbb{Z}$; de plus, leur somme est impaire lorsque $\overline{N}$ est pair. Inversement, tout triplet possédant ces propriétés correspond à une courbe algébrique du type considéré.

Le groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/\overline{N}\mathbb{Z})^*$ agit sur les triplets (a_r, a_u, a_{ru}) suivant la formule

$$(i,j,k)(a_r, a_u, a_{ru}) = ((-1)^j k a_r, (-1)^i k a_u, (-1)^{i+j} k a_{ru}).$$

Deux triplets déterminent des origamis isomorphes si et seulement si ils appartiennent à une même orbite de l'action de ce groupe (Forni-Matheus-Zorich).

Le groupe de Veech d'un origami du type précédent contient toujours le groupe de congruence principal, d'indice 6 dans $GL(2,\mathbb{Z})$, formé par les matrices congruentes à l'identité modulo 2. Pour le déterminer exactement, il suffit de savoir quelles permutations des coordonnées du triplet (a_r, a_u, a_{ru}) le maintiennent dans la même orbite de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/\overline{N}\mathbb{Z})^*$.

Certains origamis réguliers vus précédemment sont obtenus par un choix approprié de (a_r, a_u, a_{ru}). Par exemple, le choix de $\overline{N} = 2$, $a_r = a_u = a_{ru} = 1$ correspond au groupe des quaternions Q_8. Plus généralement, si $\overline{N}$ est pair et on prend $a_r = a_u = \frac{\overline{N}}{2}, a_{ru} = 1$, on obtient un origami régulier associé à $Q_{4\overline{N}}$. En prenant $a_r = a_u = 0, a_{ru} = 1$, on obtient un origami régulier associé au groupe diédral $D_{\overline{N}}$. Lorsque $\overline{N}$ est impair et qu'on prend $a_r = a_u = \frac{1+\overline{N}}{2}, a_{ru} = 0$, on obtient un origami non réduit qui après réduction est régulier associé à $D_{\overline{N}}$.

8. Dans la dernière partie du cours, on a présenté certains résultats préliminaires obtenus avec Carlos Matheus et David Zmiaikou, relatifs à l'action du groupe affine d'un origami régulier sur le premier groupe d'homologie. Rappelons que le groupe affine $Aff(M)$ (resp. le groupe des automorphismes $Aut(M)$) d'une surface de translation (M, Σ, ω) est formé des homéomorphismes de M qui préservent Σ et s'écrivent localement comme des applications affines (resp. des translations) dans les cartes associées à ω ; ces deux groupes sont reliés au groupe de Veech $GL(M)$ de M par la suite exacte

$$1 \to Aut(M) \to Aff(M) \to GL(M) \to 1,$$

où l'application de $Aff(M)$ dans $GL(M)$ associe à une application affine sa partie linéaire. Pour un origami réduit $\mathcal{O}$, cette définition de $Aut(\mathcal{O})$ coïncide avec la précédente.

On a d'abord rappelé la définition du cocycle de Kontsevich-Zorich et expliqué comment, dans le cas des surfaces de Veech, la connaissance de cette action du groupe affine peut aider à déterminer le comportement de ce cocycle et en particulier ses exposants de Lyapunov : le groupe affine est en effet plongé dans le groupe modulaire de la surface, et son image coïncide avec le stabilisateur du point déterminé par la surface pour l'action du groupe modulaire sur l'espace de Teichmüller.

Pour une surface de translation générale, le premier groupe d'homologie $H_1(M,\mathbb{R})$ se scinde en une partie « standard » $H_1^{st}(M,\mathbb{R})$ de dimension 2 (associée aux exposants extrêmes ± 1 du cocycle KZ) et une partie complémentaire, orthogonale pour la forme d'intersection, notée $H_1^{(0)}(M,\mathbb{R})$. Cette décomposition est constante le long d'une orbite de l'action de $GL(2,\mathbb{R})$, covariante pour l'action du groupe modulaire, et préservée par l'action du groupe affine de la surface.

Pour un origami $\mathcal{O}$, cette décomposition est définie sur $\mathbb{Q}$ et est particulièrement explicite : $H_1^{st}(\mathcal{O},\mathbb{Q})$ a pour base les éléments σ, ζ obtenus par concaténations respectives des bords inférieurs (orientés de gauche à droite) et des bords gauches (orientés de bas en haut) des carreaux de $\mathcal{O}$; l'autre composante $H_1^{(0)}(\mathcal{O},\mathbb{Q})$ n'est autre que le noyau de l'application π_* induite en homologie par $\pi : \mathcal{O} \to \mathbb{T}^2$.

Soit $\pi : \mathcal{O} \to \mathbb{T}^2$ un origami. Posons $\Sigma := \pi^{-1}(0)$; définissons deux applications linéaires σ, ζ de $\mathbb{Z}^{Sq(\mathcal{O})}$ dans le groupe d'homologie relative $H_1(M,\Sigma,\mathbb{Z})$ de la façon suivante : pour $q \in Sq(\mathcal{O})$, l'image par σ (resp. ζ) du vecteur e_q de la base canonique de $\mathbb{Z}^{Sq(\mathcal{O})}$est la classe d'homologie relative définie par le bord inférieur, orienté de gauche à droite (reswp. le bord gauche, orienté de bas en haut) du carreau q. Définissons aussi une application linéaire $\mathbb{W}$ de $\mathbb{Z}^{Sq(\mathcal{O})}$ dans $\mathbb{Z}^{Sq(\mathcal{O})} \oplus \mathbb{Z}^{Sq(\mathcal{O})}$ par la formule :

$$\mathbb{W}(e_q) = (e_q - e_{u(q)}, e_{r(q)} - e_q).$$

On a alors une suite exacte

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^{Sq(\mathcal{O})} \to \mathbb{Z}^{Sq(\mathcal{O})} \oplus \mathbb{Z}^{Sq(\mathcal{O})} \to H_1(\mathcal{O},\Sigma,\mathbb{Z}) \to 0, \tag{0.1}$$

où la deuxième application envoie 1 sur $\Sigma_q e_q$, la troisième application est égale à $\mathbb{W}$, et la quatrième à $\sigma \oplus \zeta$. Par ailleurs, on récupère le premier groupe d'homologie absolue *via* la suite exacte

$$0 \to H_1(\mathcal{O},\mathbb{Z}) \to H_1(\mathcal{O},\Sigma,\mathbb{Z}) \to H_0(\Sigma,\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z} \to 0. \tag{0.2}$$

Considérons maintenant un groupe fini non abélien G d'ordre n engendré par deux éléments r et u ; notons c le commutateur de r et u, H le sous-groupe engendré par c, κ l'ordre de H. Soit $\mathcal{O}_G$ l'origami régulier défini par ces données. L'action à gauche de $G = Aut(\mathcal{O}_G)$ sur $H_1(\mathcal{O},\mathbb{Q})$, $H_1(\mathcal{O},\Sigma,\mathbb{Q})$, $H_0(\Sigma,\mathbb{Q})$ fait de ces $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels des $\mathbb{Q}(G)$-modules, et la suite exacte (0.2), tensorisée par $\mathbb{Q}$, est une suite exacte de $\mathbb{Q}(G)$-modules. De même, la suite exacte (0.1) tensorisée par $\mathbb{Q}$ est une suite exacte de $\mathbb{Q}(G)$-modules lorsque $\mathbb{Q}^{Sq(\mathcal{O})} = \mathbb{Q}^G$ est muni de la représentation régulière gauche. On en déduit que le caractère de la représentation de G dans $H_1^{(0)}(\mathcal{O},\mathbb{Q})$ est donné par

$$\chi^{(0)}_{\mathcal{O}_G} = \chi_{reg} - \chi_{\Sigma},$$

où χ_{reg} est le caractère de la représentation régulière et χ_{Σ} est celui de la représentation de G dans $H_0(\Sigma,\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}^{\Sigma}$. Comme Σ s'identifie à l'ensemble des classes à gauche modulo H, cette dernière représentation est induite par la représentation triviale de H.

Sur le corps de base $K = \mathbb{C}$ (ou sur la clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}$ de $\mathbb{Q}$, ou même sur toute extension de $\mathbb{Q}$ contenant les racines n-ièmes de l'unité), on voit ainsi que la multiplicité m_α d'un $K(G)$-module simple V_α dans le $K(G)$-module $H_1^{(0)}(\mathcal{O},K)$ est égale à la codimension dans V_α de l'espace fixé par c. Comme c est le commutateur de deux éléments engendrant G, on conclut que

- la multiplicité est strictement positive si et seulement si $\dim V_\alpha \geqslant 2$;
- dans ce dernier cas, la multiplicité est comprise entre 2 et $\dim V_\alpha$.

En particulier, aucune représentation K-irréductible n'intervient dans $H_1^{(0)}(\mathcal{O},K)$ avec multiplicité un. Par ailleurs, deux représentations K-irréductibles rattachés à une même représentation $\mathbb{Q}$-irréductible interviennent avec la même multiplicité dans $H_1^{(0)}(\mathcal{O},K)$.

Prenons maintenant comme corps de base K un corps arbitraire de caractéristique 0 (par exemple $K=\mathbb{Q}$), et notons $\mathcal{I}rr_K(G)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de $K(G)$-modules simples. Pour chaque $\alpha\in\mathcal{I}rr_K(G)$, notons V_α un $K(G)$-module simple de cette classe et D_α le commutant de l'action de G dans $End_K(V_\alpha)$; c'est un corps gauche de dimension m_α^2 sur son centre (m_α est *l'indice de Schur* de V_α). L'action de D_α sur V_α fait de ce dernier un D_α-espace vectoriel à droite, $K(G)$ agissant *via* un homomorphisme surjectif dans $End_{D_\alpha}(V_\alpha)$.

Décomposons $H_1^{(0)}(\mathcal{O},K)$ en composantes isotypiques

$$H_1^{(0)}(\mathcal{O},K)=\oplus_{\alpha\in\mathcal{I}rr_K(G)}H_\alpha.$$

Chaque composante H_α devient alors un D_α-espace vectoriel à droite. De plus, lorsque K est contenu dans $\mathbb{R}$, la restriction de la forme symplectique d'intersection à chacun des H_α est non dégénérée.

Le groupe affine $Aff(\mathcal{O})$ opère par conjugaison dans le groupe fini $G=Aut(\mathcal{O})$. Notons $Aff_*(\mathcal{O})$ le noyau de cette action ; c'est un sous-groupe d'indice fini de $Aff(\mathcal{O})$. L'action de $Aff_*(\mathcal{O})$ sur $H_1^{(0)}(\mathcal{O},K)$ préserve chaque composante isotypique H_α. De plus comme la restriction à H_α de l'action de $Aff_*(\mathcal{O})$ commute à l'action de G, elle peut être représentée comme une matrice à coefficients dans D_α (dont la taille est la multiplicité de V_α dans H_α).

Prenons $K=\mathbb{R}$; on distingue trois types de représentations dans $\mathcal{I}rr_\mathbb{R}(G)$:

- supposons que le caractère χ_α de V_α est somme d'un caractère $\mathbb{C}$ -irréductible non réel χ et de son conjugué $\overline{\chi}$. Le corps D_α est alors isomorphe au corps des nombres complexes. Le choix d'un isomorphisme détermine une structure complexe sur H_α. Cette structure, jointe à la forme symplectique d'intersection, détermine une forme hermitienne sur H_α qui est invariante par l'action de G et par celle de $Aff_*(\mathcal{O})$. En notant m_α la multiplicité de V_α dans H_α, il existe donc deux entiers k,ℓ avec $k+\ell=m_\alpha$ tels que $Aff_*(\mathcal{O})$ opère à travers un groupe unitaire complexe $U_{k,\ell}(\mathbb{C})$;
- supposons maintenant que le caractère χ_α de V_α est le double d'un caractère $\mathbb{C}$-irréductible χ. Le corps D_α est alors isomorphe au corps des quaternions. Des considérations semblables au cas précédent montrent que $Aff_*(\mathcal{O})$ opère à travers un groupe unitaire quaternionien $U_{k,\ell}(\mathbb{H})$; la somme $k+\ell$ est la multiplicité de χ_α dans H_α, c'est-à-dire la moitié de la multiplicité de χ dans $H_1^{(0)}(\mathcal{O},\mathbb{C})$;
- supposons finalement que le caractère χ_α de V_α est $\mathbb{C}$-irréductible. La multiplicité m_α de V_α dans H_α est alors paire, et $Aff_*(\mathcal{O})$ opère à travers le groupe symplectique $Sp_{m_\alpha}(\mathbb{R})$.

9. On a illustré les considérations précédentes par le calcul explicite de l'action du groupe affine pour l'origami régulier associé au groupe des quaternions Q_8, un

travail réalisé en collaboration avec Carlos Matheus. Forni avait auparavant montré, par des méthodes faisant appel à la théorie de Hodge, que les exposants non triviaux du cocycle de Kontsevich-Zorich pour cet origami sont nuls.

L'origami régulier $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{Q_8}$ (avec le choix $r = i$, $u = j$) est de genre 3, avec quatre points de ramification d'indice 2. Son groupe de Veech est $GL(2,\mathbb{Z})$. La représentation de Q_8 dans $H_1^{(0)}(\mathcal{O},\mathbb{Q})$ est $\mathbb{Q}$-irréductible, le commutant de $\mathbb{Q}(Q_8)$ étant le corps des quaternions rationnels $\mathbb{H}_{\mathbb{Q}}$. Le centre du groupe affine préservant l'orientation $\mathit{Aff}_+(\mathcal{O})$ est cyclique d'ordre 4, engendré par un élément de partie linéaire $-id \in SL(2,\mathbb{Z})$. L'opération par conjugaison de $\mathit{Aff}_+(\mathcal{O})$ sur $Aut(\mathcal{O}) = Q_8$ définit un homomorphisme surjectif de $\mathit{Aff}_+(\mathcal{O})$ dans $Aut(Q_8)$. Ce dernier groupe s'insère dans une suite exacte :

$$1 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to Aut(Q_8) \to S_3 \to 1.$$

Le noyau $\widetilde{\Gamma}(2)$ de l'image de $\mathit{Aff}_+(\mathcal{O})$ dans S_3 est formé des applications affines dont la dérivée appartient au groupe de congruence principal $\Gamma(2) \subset SL(2,\mathbb{Z})$.

On peut construire des éléments $\varepsilon_g \in H_1^{(0)}(\mathcal{O},\mathbb{Q})$, $g \in Q_8$, tels que

- $\varepsilon_1, \varepsilon_i, \varepsilon_j, \varepsilon_k$ forment une base de $H_1^{(0)}(\mathcal{O},\mathbb{Q})$;
- $\varepsilon_{-g} = -\varepsilon_g$, pour $g \in Q_8$;
- l'action à gauche de Q_8 est donnée par $h \cdot \varepsilon_g = \varepsilon_{hg}$;
- l'action à droite de $\mathbb{H}_{\mathbb{Q}}$ est donnée par $\varepsilon_g \cdot (a + bi + cj + dk) = a\varepsilon_g + b\varepsilon_{gi} + c\varepsilon_{gj} + d\varepsilon_{gk}$;
- l'action à gauche de $\widetilde{\Gamma}(2)$ s'effectue à travers un groupe $\widetilde{Q}_8$ d'ordre 16, extension de Q_8 par un élément s opérant par $s(\varepsilon_1) = \varepsilon_1$, $s(\varepsilon_i) = -\varepsilon_i$, $s(\varepsilon_j) = -\varepsilon_j$, $s(\varepsilon_k) = \varepsilon_k$.

Par ailleurs, les 24 éléments $\varepsilon_g + \varepsilon_h$ ($g,h \in Q_8$, $g \pm h \neq 0$) forment un système de racines de type D_4 préservé par $\mathit{Aff}_+(\mathcal{O})$; l'image de $\mathit{Aff}_+(\mathcal{O})$ dans le groupe des automorphismes de ce système de racines est exactement le sous-groupe (d'ordre 96) formé des éléments préservant la forme symplectique.

INVITATIONS, MISSIONS, CONFÉRENCES

16 octobre – 13 novembre 2010 : cours « Small divisors problems and KAM theory » à la City University of Hong-Kong.

26 novembre 2010 : conférence à l'université Tor Vergata de Rome.

6-7 décembre 2010 : président du comité de visite AERES de l'Institut de mathématiques de Luminy (Marseille).

13-14 décembre 2010 : journées ANR à l'université de Nice.

16 décembre 2010 : conférence à l'université Paris-Sud.

17 janvier-17 juin 2011 : chaire « Tage Erlander » (suite et fin), KTH, Stockholm. J'ai donné dans ce cadre un cours intitulé « Interval exchange maps and translation surfaces ».

11 février 2011 : conférence à l'université d'Uppsala.

27 mai 2011 : conférence à l'Académie des sciences de Suède dans le cadre de la journée dédiée à John Milnor (prix Abel 2011).

23 juin 2011 : conférence à l'université Paris-Sud, à l'occasion de la journée *Dynamique* dédiée à Marguerite Flexor.

10-16 juillet 2011 : coorganisateur d'un colloque de *Systèmes dynamiques* à Oberwolfach (Allemagne).

1-3 août 2011 : minicours dans le cadre d'une école d'été à l'université de Göttingen.

PUBLICATIONS

Yoccoz J.-C., « Interval exchange maps and Translation surfaces », *in* Einsiedler M., Ellwood D., Eskin A., Kleibock D., Lindenstrauss E., Margulis G., Marmi S., Yoccoz J.-C. (éd.), *Homogeneous flows, Moduli spaces and Arithmetic*, *Proceedings of the Clay Mathematics Institute Summer School* (Centro de Recerca Matematica Ennio de Giorgi, Pisa, June 11-July 6, 2007), Clay Mathematics Proceedings Volume, 10, 2010, 1-69.