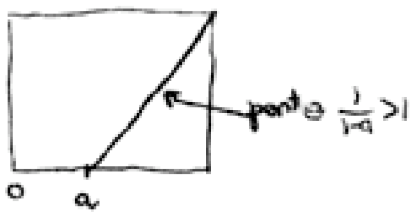
Sur une question de Jacob Palis*

Michael Robert HERMAN

On se donne $0 < a < 1$. Soit

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ 0 \leq x \leq a < 1, \\ \dfrac{1}{1-a}(x-a) & \text{si } \ a \leq x \leq 1. \end{cases}$$



L'application f définit un endomorphisme continu, linéaire par morceaux, de $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, de degré 1. Cet endomorphisme est dans l'adhérence de $\text{Homéo}_+(\mathbb{T}^1)$ dans $C^0(\mathbb{T}^1, \mathbb{T}^1)$ pour la C^0-topologie (i.e. f est monotone non décroissante).

Soit $\lambda \in \mathbb{T}^1$ et $f_\lambda = f + \lambda$. L'application $\lambda \in \mathbb{T}^1 \mapsto f_\lambda \in C^0(\mathbb{T}^1, \mathbb{T}^1)$ est continue. On peut relever f_λ en $\widetilde{f}_\lambda \ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\widetilde{f}_\lambda = \lambda + \widetilde{f}$, où

$$\widetilde{f}(x+p) = p + f(x), \ \text{ si } \ x \in [0,1], p \in \mathbb{Z}.$$

Par le théorème du nombre de rotation, la suite $\dfrac{\widetilde{f}_\lambda^n - \text{Id}}{n}$ converge uniformément vers $\rho(\widetilde{f}_\lambda) \in \mathbb{R}$. De plus, l'application $\lambda \mapsto \rho(\widetilde{f}_\lambda)$ est continue, monotone non décroissante (i.e. si $\lambda_1 \leq \lambda_2$, $\rho(\widetilde{f}_{\lambda_1}) \leq \rho(\widetilde{f}_{\lambda_2})$ puisque $\widetilde{f}_{\lambda_1}^n \leq \widetilde{f}_{\lambda_2}^n$ pour tout $n \geq 1$).

Si $\rho(\widetilde{f}_\lambda) \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, alors $\widetilde{f}_\lambda$ (mod. 1) est sans point périodique (c'est même équivalent).

Toutes ces propriétés résultent des mêmes démonstrations que pour les homéomorphismes $h \in \text{Homéo}_+(\mathbb{T}^1)$ (voir par exemple M. R. Herman, *Publ. I.H.E.S.*, **49**, chap II).

Il suit que si $\rho(\widetilde{f}_\lambda) \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 1$:

$$\begin{cases} \widetilde{f}_\lambda^{-n}(\{a\}) \cap [0,a] \,(\text{mod.}1) = \emptyset \quad (\text{puisque } \widetilde{f}_\lambda \text{ est sans point périodique mod. 1}) \ ; \\ \widetilde{f}_\lambda^n(a) \notin [0,a] \,(\text{mod.}1). \end{cases} \tag{1}$$

Soit $A = \{\lambda \in [0,1] \,|\, \rho(\widetilde{f}_\lambda) \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}\}$, qui est un borélien de $[0,1]$. Soit $m = dx$ la mesure de Lebesgue de $[0,1]$.

*La frappe du manuscrit, ainsi que quelques corrections mineures ont été faites par P. Le Calvez

Théorème : *La mesure de Lebesgue de A est nulle (i.e. $m(A) = 0$).*

Démonstration. Définissons $g_n\ : \lambda \mapsto \dfrac{1}{n}\widetilde{f}_\lambda^n(a)$ pour $n \geq 1$. On a $g_n(0) = 0$, $g_n(p) = p$, $p \in \mathbb{Z}$. L'application g_n est monotone non décroissante (i.e. si $\lambda_1 \leq \lambda_2$, $g_n(\lambda_1) \leq g_n(\lambda_2)$). C'est un endomorphisme linéaire par morceaux et donc en chaque point $\lambda \in [0,1]$, g_n a une dérivée à droite notée $D_+g_n(\lambda) = \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{g_n(\lambda+t) - g_n(\lambda)}{t}$.

Par (1) on vérifie que si $\lambda \in A$, on a

(a) $D_+g_n(\lambda) > 0$ (et même $D_+g_n(\lambda) > 0$ pour tout $\lambda \in [0,1]$) ;

(b) $D_+g_n(\lambda) \geq \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{1-a}\right)^{n-1}$ (car $D_+g_n(\lambda) = \dfrac{1}{n}\dfrac{\partial}{\partial_+\lambda}\widetilde{f}_\lambda^n(a)$ et par (1) on a $\dfrac{\partial}{\partial_+\lambda}\widetilde{f}_\lambda^n(a) = \dfrac{1}{1-a}\left(\dfrac{\partial}{\partial_+\lambda}\widetilde{f}_\lambda^{n-1}(a)\right) + 1$).

Il suit de (a) qu'il existe un ensemble au plus dénombrable $D \subset A$ tel que pour tout $n \geq 1$:

(c) $g_n|_{A-D}$ est injective et strictement croissante.

On a

$$g_n(A-D) \subset [0,1] \text{ et donc } m\left(g_n(A-D)\right) \leq 1.$$

Par (c), on a

$$m\left(g_n(A-D)\right) = \int_{A-D} D_+g_n(x)\,dx,$$

et donc par (b)

$$1 \geq m\left(g_n(A-D)\right) \geq \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1-a}\right)^{n-1} m(A-D).$$

Ainsi,

$$m(A-D) \leq n(1-a)^{n-1}.$$

Or, puisque D est au plus dénombrable, $m(A) = m(A-D)$. Puisque $\lim_{n\to+\infty} n(1-a)^{n-1} = 0$, on a $m(A-D) = 0$. □

Remarque : On a $D = \emptyset$!