Sur une proposition d'Oxtoby[*]

Michael Robert HERMAN

On se donne une métrique $d(\,,\,)$ sur $\mathbb{T}^1 \times [0,1]$.

1. Soit l'anneau $A = \mathbb{T}^1 \times [0,1]$, $\mathring{A} = \mathbb{T}^1 \times]0,1[$, et X un champ de vecteurs $\mathbb{R}$-analytique de divergence nulle (pour $\Omega = dr \wedge d\theta$) ayant deux points fixes p_1 et p_2. Soit f_t le flot de X. On suppose que les orbites sont comme dans la figure I.

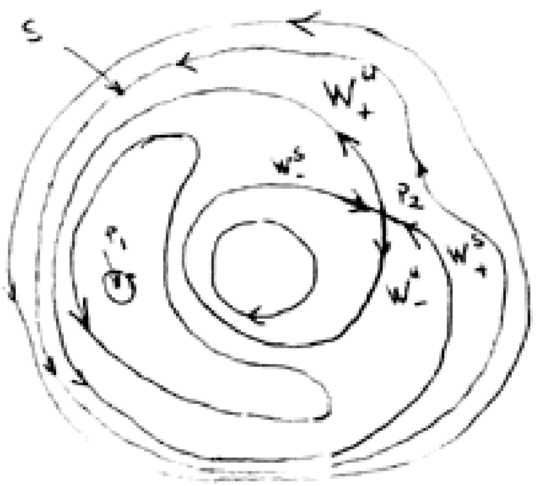


Figure I

2. On suppose que le difféomorphisme $f = f_t|_{t=t_0}$ (où $t_0 = \varepsilon > 0$) vérifie :

a) f tourne sur ∂A comme dans la figure I ;

b) $f(p_1) = p_1$, $\mathrm{Spect}(Df(p_1)) \subset \mathbb{T}^1 - \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$;

c) $f(p_2) = p_2$, $Df(p_2)$ est conjuguée dans $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ à $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}$, $\lambda > 1$;

d) f n'a pas d'autres points fixes que p_1 et p_2.

3. Si on perturbe f, pour la C^∞-topologie, dans $\mathrm{Diff}^\infty_\Omega(A)$ en g (i.e. g est C^∞ voisin de f), on peut supposer que :

a) g tourne sur ∂A comme dans la figure I ;

[*]La frappe du manuscrit, ainsi que quelques corrections mineures ont été faites par P. Le Calvez

d) g n'a pas d'autres points fixes que p'_1 et p'_2 ;

c) $g(p'_2) = p'_2$, $Dg(p'_2)$ est conjuguée dans $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ à $\begin{pmatrix} \lambda' & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda'} \end{pmatrix}$, $\lambda' > 1$;

a) $g(p'_1) = p'_1$, les valeurs propres de $Dg(p'_1)$ ne sont pas racines 12-ème de l'unité.

4. Si g est une perturbation générique, i.e. appartient à un G_δ qui est dense dans un voisinage ouvert V de f dans $\mathrm{Diff}^\infty_\Omega(A)$, alors g vérifie :

b) le premier invariant de Birkhoff du point fixe p'_1 est non nul et donc le théorème de J. Moser s'applique (pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un disque $D_\varepsilon(p'_1)$ de diamètre $< \varepsilon$ tel que $p'_1 \in \mathrm{Int}(D_\varepsilon(p'_1))$ et $g(D_\varepsilon(p'_1)) = D_\varepsilon(p'_1))$;

a) $g|_{\partial A}$ définit deux difféomorphismes de $\mathbb{T}^1$ structurellement stables g_1 et g_0, $\rho(g_1) = \dfrac{p_1}{q_1}$, $\rho(g_0) = \dfrac{p_0}{q_0}$, g a des cycles hyperboliques sur $\mathbb{T}^1 \times \{0, 1\}$.

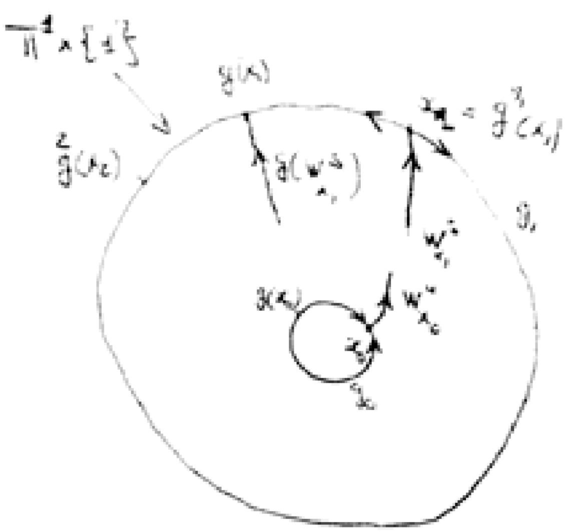


Figure II

Le point x_1 (resp. x_0) est un point périodique d'ordre q_1 (resp. q_0) et on peut supposer qu'une variété stable $W^s_{x_1}$ (pour g^{q_1}) aboutit en x_1 et qu'une variété instable $W^u_{x_0}$ (pour g^{q_0}) part de x_0 (voir figure II).

5. Pour tout voisinage V de f dans $\mathrm{Diff}^\infty_\Omega(A)$ (pour la C^∞-topologie) il existe $g \in V$ vérifiant :

c) p'_2 admet une intersection homocline : $W^u_+ \pitchfork W^s_+$ (et $W^u_+ \cap W^s_+ \neq \emptyset$), $W^u_- \pitchfork W^s_-$ (et $W^u_- \cap W^s_- \neq \emptyset$).

Pour cela, il suffit de composer f par deux difféomorphismes C^∞ (à supports dans B_+ et B_-) φ_+ et φ_-.

Pour $\varphi_+ \circ \varphi_- \circ f$, on a $W^u_+ \cap W^s_+ \neq \emptyset$ et l'intersection est transverse en au moins un point, de même pour W^u_- et W^s_-. Il suffit maintenant de perturber $\varphi_+ \circ \varphi_- \circ f$ dans la C^∞-topologie pour avoir c) (voir [R]).

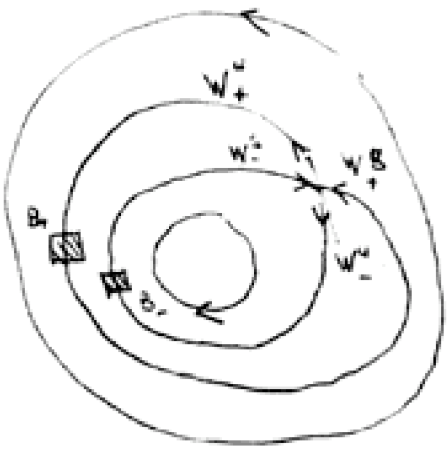
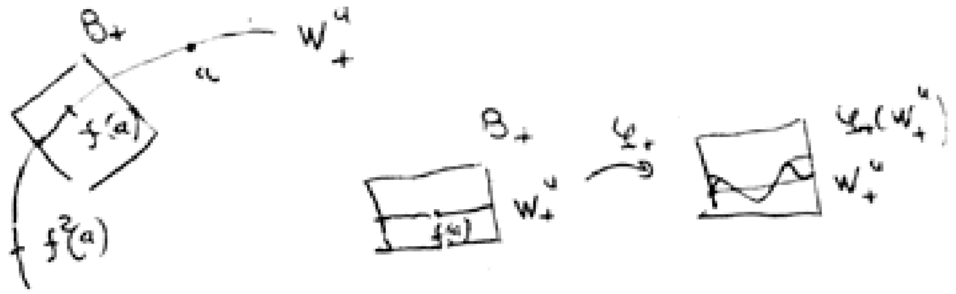


Figure III



6. L'ensemble G des difféomorphismes $h \in \mathrm{Diff}^\infty_\Omega(A)$ qui ne sont périodiques sur aucun disque d'intérieur non vide est un G_δ, dense dans $\mathrm{Diff}^\infty_\Omega(A)$ pour la C^∞-topologie. Par [O], chap 17, si $h \in G$, il existe un G_δ dense $V_h \subset A$ tel que :

- aucun point $x \in V_h$ n'est un point périodique de h ;
- tout point $x \in V_h$ est positivement récurrent pour h (il existe une suite $(n_i)_i \subset \mathbf{N}$, $n_i < n_{i+1}$, telle que $f^{n_i}(x) \to x$).

7. **Proposition** (Oxtoby) : *Soit $g \in G$ (défini en 6) et a et b deux points non périodiques pour g. On suppose que a et b ne sont pas sur la même orbite de g. On suppose que les ensembles $O_+(a) = \{g^n(a) \mid n \geq 1\}$ et $O_-(b) = \{g^n(b) \mid n \leq 0\}$ sont discrets dans $\mathring{A}$ (par exemple on prend g défini en 4.a) et $a \in W^s_{x_1}$, $b \in W^u_{x_0}$, $a, b \in \mathring{A}$).*

Soit D un voisinage fermé de $p_1 \cup p_2$ dans A qui ne disconnecte pas A tel que $g(b) \notin D$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\varphi \in \mathrm{Diff}^\infty_\Omega(A)$ dont le support est une réunion finie de disques disjoints de diamètres $\leq \dfrac{\varepsilon}{2}$ contenus dans $\mathring{A} - (D \cup O_+(a) \cup O_-(b))$ (donc $\varphi(b) = b$) tel qu'il existe $N \in \mathbb{N}$, $N \gg 1$, vérifiant $(\varphi \circ g)^N(b) = a$.

Démonstration. Voir [O], p. 72. □

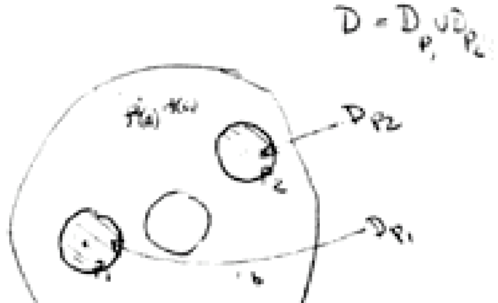


Figure IV

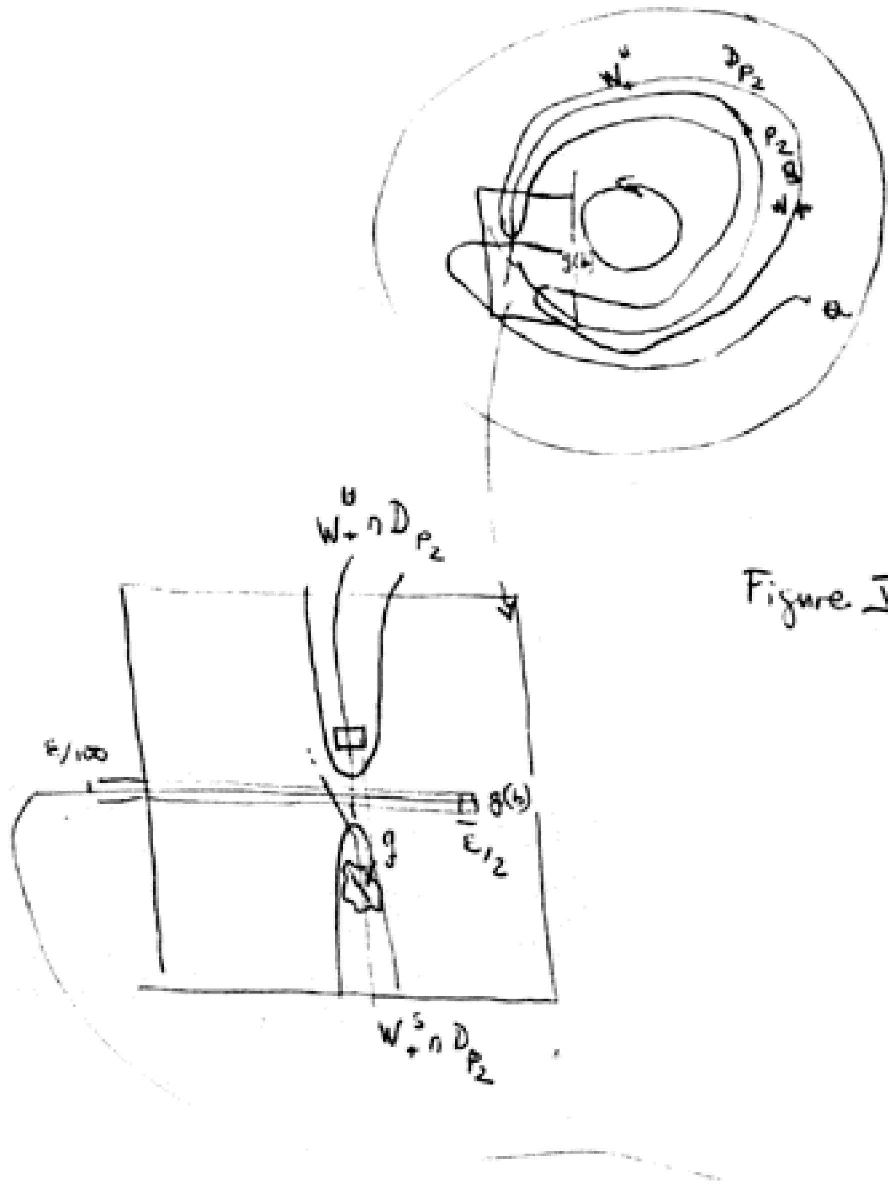
8. **Remarques**

a) On a seulement $|\varphi \circ g - f|_{C^0}$ petit en C^0-topologie ! (en général il n'est pas petit pour la C^∞-topologie).

b) Le difféomorphisme φ a son support dans un voisinage d'ordre $\dfrac{\varepsilon}{100}$ d'un arc C^∞ joignant a à $g(b)$.

c) Si $k \geq 0$, on a $(\varphi \circ g)^{N+k}(b) = g^k(a)$ $(\varphi \circ g^k(a) = g^k(a))$. Si $k \leq 0$, on a $(\varphi \circ g)^{-N+k}(a) = g^k(b)$ (remarquer que $\varphi(b) = b$, $\varphi \circ g^k(b) = g^k(b)$ si $k \leq 0$).

d) On peut s'arranger pour que le point selle p_2 soit tel que W^u_+ et W^s_+ se coupent transversalement en au moins un point et de même pour W^u_- et W^s_- (mais on n'a pas nécessairement $W^u_+ \pitchfork W^s_+$!). En effet, on peut supposer que $W^s_+ \cap D_{p_2}$, $W^u_+ \cap D_{p_2}$ sont les variétés stables et instables locales. Comme $\varphi|_{D_{p_2}} = \mathrm{Id}$, les variétés stables et instables locales de $\varphi \circ g$ sont $W^s_+ \cap D_{p_2}$, $W^u_+ \cap D_{p_2}$.



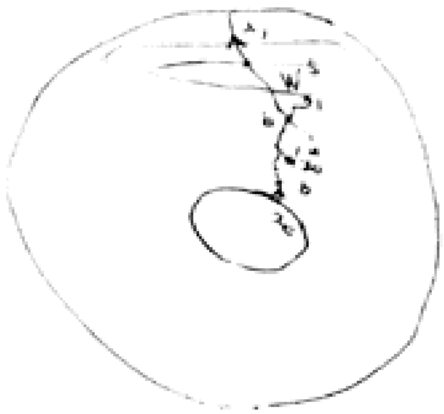
W_+^u
D_{p_2}
p_2
q
W_+
$g(b)$
a
$W_+^u \cap D_{p_2}$
$\varepsilon/100$
$g(b)$
g
$\bar{\varepsilon}_{12}$
$W_+^s \cap D_{p_2}$

Figure V

9. Pour tout voisinage V de f dans $\mathrm{Diff}^\infty_\Omega(A)$ pour la C^∞-topologie, il existe $g \in V$ vérifiant 4. a), 4. b), 5. c) et 6. On choisit $a \in W^s_{x_1}$ très proche de $x_1 \in \mathbb{T}^1 \times \{1\}$, $a \in \mathrm{Int}(A)$, et $b \in W^u_{x_0}$ très proche de $x_0 \in \mathbb{T}^1 \times \{0\}$, $b \in \mathrm{Int}(A)$ (voir figure II). On choisit un voisinage D de $p_1 \cup p_2$ (voir figure IV et V), tel que $g(b) \notin D$ et on choisit un arc plongé C joignant $g(b)$ à a tel que la remarque 8. d) s'applique. On applique la proposition 7 à g : il existe $\varphi \in \mathrm{Diff}^\infty_\Omega(A)$ à support inclus dans un voisinage d'ordre $\dfrac{\varepsilon}{100}$ de l'arc C tel que $|\varphi \circ g - f|_{C^0} < \dfrac{\varepsilon}{2}$ et il existe N tel que $(\varphi \circ g)^N(b) = a$.

9.1 De 8. c) on déduit que $W^u_{x_0}$ et $W^s_{x_1}$ s'intersectent et en modifiant un peu la construction, $W^u_{x_0}$ et $W^s_{x_1}$ s'intersectent transversalement en au moins un point (i.e. on a une connection hétérocline entre x_0 et x_1). Pour appliquer 7, il faut supposer que a et b sont sur des orbites distinctes, mais si ce n'est pas le cas on n'a pas besoin d'appliquer 7. Ce cas ne se produit pas en général pour les perturbations C^∞ de f car on peut appliquer le théorème de J. Moser pour un cercle bien choisi S de la figure I (on suppose que X est $\mathbb{R}$-analytique).

10. On peut perturber $\varphi \circ g$ dans la C^∞-topologie en g_1 pour que les variétés stables et instables de p'_2 s'intersectent transversalement (aussi, si cela fait plaisir, pour la connexion $W^s_{x_1}$ et $W^u_{x_0}$) (voir [R]). Le difféomorphisme g_1 a toutes les propriétés 4. a), 4. b), 5. c) et 6 et 9. 1 de façon stable (et aussi 2. a), 2. b), 2. c) et 2. d)).

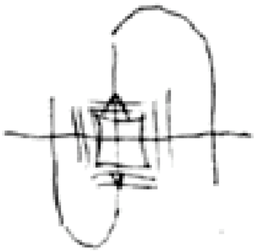


Proposition : *Pour g_1, l'ensemble $\overline{W^s_{p'_2} \cup W^u_{p'_2}}$ intersecte chaque composante de ∂A.*

Démonstration. Supposons que pour tout $x \in \overline{W^s_{p'_2} \cup W^u_{p'_2}}$ et pour tout $y \in \partial A$ on a $d(x, y) > \varepsilon$. Comme le point selle p'_2 vérifie $W^u_+ \cap W^s_+ \pitchfork\neq \emptyset$, $W^u_- \cap W^s_- \pitchfork\neq \emptyset$, il existe, pour tout $\eta > 0$, un disque $D^\eta_{p'_2}$ de diamètre $< \eta$ dont le bord est une réunion de morceaux de $W^u_{p'_2}$ et $W^s_{p'_2}$, tel que $p'_2 \in \mathrm{Int}(D^\eta_{p'_2})$.

Par le raisonnement de Floris Takens [T], si η est assez petit, on a

$$d\left(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} g_1^n(\mathrm{Int}(D^\eta_{p'_2})), W^s_{p'_2} \cup W^u_{p'_2}\right) < \frac{\varepsilon}{2}.$$



Maintenant, appliquons un théorème de Mather [M]. Si U est un ouvert de $\mathring{A}$ contenant p'_1 et p'_2, alors $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} g_1^n(U)$ sépare ∂A. Maintenant choisissons U de la forme suivante $U = D^\eta_{p'_2} \cup D_\eta(p'_1)$, où $D^\eta_{p'_2}$ est un voisinage comme ci-dessus et $D_\eta(p'_1)$ est donné par le théorème de J. Moser (4. b)). Si η est assez petit, l'ensemble $V = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} g_1^n(D^\eta_{p'_2})$ sépare ∂A et pour tout $x \in V$ pour tout $y \in \partial A$, $d(x,y) > \dfrac{\varepsilon}{10}$. Mais g a une intersection hétérocline transverse non vide entre x_0 et x_1. Si V est un ouvert invariant qui sépare ∂A, alors $\overline{V}$ intersecte chaque composante de ∂A. $\square$

Bibliographie

[M] J. Mather : Area preserving twist homeomorphism of the annulus, *Comment. Math. Helvetici*, **54** (1979), 397–404.

[O] J. Oxtoby : Measure and category,s *Springer-Verlag.*

[T] F. Takens : Homoclinic points in conservative systems, *Inv. Math.*, **18** (1972), 267–479.

[R] R. C. Robinson : Generic properties of conservative systems, *Am. J. Math.*, **92** (1970), 562-603.