Équations différentielles et systèmes dynamiques

M. Jean-Christophe YOCCOZ, membre de l'Institut
(Académie des Sciences), professeur

La leçon inaugurale de la chaire a eu lieu le 28 avril 1997. Le cours a ensuite porté sur quelques exemples de dynamique faiblement hyperbolique.

Considérons un difféomorphisme f d'une variété M et une partie compacte K de M qui est invariante par f. On dit que K est hyperbolique si le fibré tangent à M au-dessus de K se scinde continument en deux fibrés invariants, le fibré stable et le fibré instable, les vecteurs du fibré stable étant exponentiellement contractés dans les temps positifs tandis que les vecteurs du fibré instable le sont dans les temps négatifs.

Cette notion est à la base d'une théorie des systèmes (fortement, ou uniformément) hyperboliques, développée dans les années 60 par Anosov, Sinaï, Smale, Palis et leurs collaborateurs.

On a rappelé brièvement les principales propriétés d'un difféomorphisme f au voisinage d'une partie compacte K invariante et hyperbolique. Le difféomorphisme est expansif, c'est-à-dire que deux orbites distinctes se séparent au cours du temps d'une distance déterminée. Il possède la propriété de pistage : une suite de points où chacun est très voisin de l'image du précédent est uniformément proche d'une vraie orbite. Il y a continuation hyperbolique : si g est un autre difféomorphisme, voisin de f, on peut trouver une partie compacte L de la variété, voisine de K, invariante par g et hyperbolique, sur laquelle la dynamique de g est conjuguée de celle de f sur K.

Dans l'analyse de la dynamique d'un difféomorphisme f sur une partie compacte K, invariante et hyperbolique, les variétés stables (et instables) locales et globales des points de K jouent un rôle fondamental. Elles s'obtiennent par intégration du fibré stable.

On dit que la partie compacte K, invariante et hyperbolique, jouit d'une structure de produit local si l'intersection des variétés stable et instable locales de deux points proches de K appartient encore à K. Lorsque les points de K sont de plus récurrents par chaînes dans K, le théorème de décomposition spectrale de Smale permet de décrire ainsi la dynamique de f sur K : cette partie se décompose en une union finie d'ensembles basiques deux à deux disjoints ; chacun de ces ensembles basiques est lui-même décomposé en p parties compactes disjointes, invariantes par f^p et permutées cycliquement par f, sur lesquelles f^p est topologiquement mélangeant.

La restriction d'un difféomorphisme f à un ensemble basique K jouit de propriétés topologiques permettant un recours efficace à la dynamique symbolique et à ses modèles, les décalages de type fini.

Considérons d'abord une situation non inversible : une application continue f d'un espace métrique compact K dans lui-même, qui est expansive, possède la propriété de pistage et est transitive ; l'ensemble D des points de K dont l'orbite est dense dans K est alors une partie G_δ — dense de K. On peut construire des partitions de Markov pour (K, f) : c'est par définition une semi-conjugaison d'un décalage transitif de type fini à f, qui est surjective, continue et injective au-dessus de D.

Dans un cadre inversible, on suppose que l'homéomorphisme f d'un espace métrique compact K est expansif, transitif et jouit de la propriété de produit local ; l'ensemble D est alors formé des points dont les deux demi-orbites sont denses. On construit également dans ce cas des partitions de Markov, mais la démonstration est plus délicate.

L'essentiel du cours a ensuite été consacré à la présentation de deux classes d'exemples : dans un cadre non inversible, les polynômes quadratiques réels P_c : $x \to x^2+c$, pour les valeurs du paramètre considérées par Jakobson au début des années 80 ; et dans un cadre inversible, beaucoup plus délicat, les applications de Hénon $\mathrm{H}_{b,c}$: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x^2 + c - by \\ x \end{pmatrix}$, pour les valeurs des paramètres considérées par Benedicks et Carleson à la fin des années 80.

Ces classes d'exemples exhibent une croissance exponentielle des dérivées caractéristique de l'hyperbolicité, mais ne s'intègrent néanmoins pas dans le cadre de la théorie évoquée ci-dessus : la croissance n'a pas lieu partout, mais seulement presque partout, et n'est pas uniforme ; la dynamique n'est pas tout à fait expansive.

L'objet du cours était d'étudier les propriétés de ces classes d'exemples d'une façon suffisamment conceptuelle, l'objectif recherché à terme étant de bâtir une théorie de systèmes (faiblement) hyperboliques qui les englobe et permettrait aussi de traiter d'autres exemples encore mal compris, en particulier dans un cadre conservatif.

Discutons d'abord le cas des polynômes quadratiques réels. On s'intéresse à la partie compacte invariante K_c formée des points d'orbite bornée. On suppose que

$c < 1/4$, de sorte que P_c possède deux points fixes qu'on notera α et β, avec $\alpha < \beta$.

Lorsque $c < -2$, le point critique 0 de P_c n'appartient pas à K_c ; la partie K_c est hyperbolique (les dérivées des itérés croissent uniformément exponentiellement vite sur K_c) et la dynamique de P_c sur K_c est conjuguée au décalage complet sur deux symboles.

La situation considérée par Jakobson est celle où le paramètre c est voisin de -2, mais strictement supérieur à -2. L'ensemble K_c est alors égal à l'intervalle $[-\beta,+\beta]$, et contient donc le point critique 0. Cependant, pour la plupart de telles valeurs du paramètre c, il y a encore presque partout sur K_c croissance exponentielle des dérivées des itérés du polynôme.

On a d'abord dégagé la notion, essentielle à nos yeux, de paramètre régulier : considérons l'intervalle central $A = [+\alpha,-\alpha]$ et un entier $n > 0$; on dira qu'un intervalle J est régulier d'ordre n si l'itéré P_c^n restreint à un voisinage approprié $\hat{J}$ de J est un difféomorphisme sur un voisinage $\hat{A}$ de A (indépendant de n, J) qui envoie J sur A ; on dira que le paramètre c est régulier si le complémentaire de l'union des intervalles réguliers d'ordre $\leq n$ a une mesure de Lebesgue exponentiellement petite en n.

Lorsque le paramètre est régulier, on est à même de donner une description satisfaisante de la dynamique de P_c. Considérons en effet la famille $\mathcal{J}$ des intervalles réguliers maximaux contenus dans A ; ils sont d'intérieurs deux à deux disjoints, et leur union W est de mesure pleine dans A. On construit une application de Bernoulli $T : W \to A$ dont la restriction à un intervalle $J \in \mathcal{J}$ d'ordre N_J est l'itéré $P_c^{N_J}$. Cette application est uniformément hyperbolique, et elle préserve une mesure sur A ayant une densité analytique par rapport à la mesure de Lebesgue. Pour revenir à P_c, il faut effectuer un changement de temps, qui est contrôlé par l'hypothèse de régularité sur le paramètre.

Le point crucial est ensuite de montrer que la plupart des paramètres $c > -2$, proches de -2, sont réguliers (ils forment un ensemble de Cantor, dont la mesure de Lebesgue relative dans $[-2, -2 + \varepsilon]$ tend vers 1 lorsque ε tend vers 0). On procède en deux étapes :

1. on introduit une notion de paramètre fortement régulier, et on montre qu'un paramètre fortement régulier est régulier ;
2. on démontre que les paramètres fortement réguliers forment un ensemble de mesure positive (et même de grande mesure relative).

La propriété d'être fortement régulier porte sur l'orbite du point critique : il s'agit de pouvoir itérer infiniment par T le premier retour du point critique dans A, avec des branches qui ne sont en moyenne pas trop compliquées. Une analyse combinatoire soigneuse permet alors d'obtenir l'estimation de mesure recherchée. Pour le deuxième point, on transfère cette estimation dans l'espace des paramètres, un argument de grandes déviations permettant ensuite de conclure.

Dans la fin du cours, on s'est efforcé d'étudier de façon similaire la famille des applications de Hénon, lorsque le jacobien b est suffisamment petit. Pour les valeurs des paramètres considérées, l'application $H_{b,c}$ possède deux points fixes, qui se trouvent sur la diagonale, et qu'on notera à nouveau α et β. On s'intéresse à l'ensemble Λ des points d'orbite (positive et négative) bornée ; c'est aussi l'ensemble des points dont l'orbite négative est contenue dans le carré $[-\beta, \beta]^2$.

La notion de rectangle régulier joue ici le rôle des intervalles réguliers du cas unidimensionnel. Un tel rectangle a des côtés verticaux qui sont des segments de la variété stable du point fixe α et des côtés horizontaux qui s'envoient sous une itération convenable sur des segments contenus dans $[-\beta, \beta] \times \{-3, +3\}$. L'ordre d'un rectangle régulier est maintenant constitué d'une paire d'entiers, essentiellement le nombre d'itérations positives et négatives nécessaires pour revenir à une taille macroscopique.

Il ne semble malheureusement pas simple de définir ici directement la notion de paramètre régulier : la raison en est l'absence d'une mesure naturelle sur l'attracteur Λ (la mesure de Lebesgue dans le cas unidimensionnel) si l'on ne fait pas d'hypothèse sur les paramètres. On est donc conduit à définir directement la notion de paramètre fortement régulier. Il s'agit à nouveau de contrôler la récurrence du lieu critique. Mais on se heurte ici à une autre difficulté : le lieu critique n'est pas défini a priori, par une propriété locale portant sur une seule itération de l'application. Ce lieu critique n'est en fait précisément défini que pour les paramètres fortement réguliers, en considérant une infinité d'itérations ; un nombre fini d'itérations ne permet de le localiser que de façon approximative. Par ailleurs, ce lieu est en fin de compte un ensemble de Cantor, de petite dimension.

On est donc obligé de mettre en place une procédure inductive plus compliquée que dans le cas unidimensionnel. L'objectif est à nouveau de construire une application T, dont le domaine est la réunion dénombrable et disjointe de rectangles réguliers couvrant l'essentiel de la partie centrale de Λ, et dont la restriction à chaque rectangle est un itéré approprié de H. L'application T jouit d'une hyperbolicité uniforme qui permet de construire une mesure invariante naturelle, dite mesure de Sinaï-Bowen-Ruelle.

L'étude de l'espace des paramètres est assez semblable au cas unidimensionnel, reposant sur un argument de grandes déviations.

J.-C. Y.

PUBLICATIONS

• Avec Jacob PALIS, On the arithmetic sum of regular Cantor sets, Ann. Inst. Henri Poincaré, Vol. *14*, n° *4*, 439-456 (1997).

• Avec Stefano MARMI et Pierre MOUSSA, The Brjuno functions and their regularity properties, Commun. Math. Phys. **186**, 265-293 (1997).

CONFÉRENCES À L'ÉTRANGER

• Octobre 1996 → février 1997 : cours hebdomadaire (« Nachdiplomvorlesung ») « Weakly hyperbolic dynamics » à l'ETH de Zurich.

• 23 mai 1997 et 26 mai 1997 : une conférence à l'Université Mc Gill (Beatty Lecture) et une conférence à l'Université de Montréal.

• 14 juillet-18 juillet : coorganisateur d'un colloque « Dynamische Systemen » à Oberwolfach (Allemagne).

• 5 août-15 août : une conférence dans le cadre du Congrès international de Systèmes dynamiques, IMPA, Rio de Janeiro, Brésil.

• 5 septembre : une conférence dans le cadre du colloque « Science, Nature et Société », Université de São Paulo, Brésil.