Quelques aspects de la théorie des systèmes dynamiques quasipériodiques(1)

Jean-Christophe Yoccoz

Collège de France

30 avril 2014

Qu'est-ce qu'un système dynamique?

Qu'est-ce qu'un système dynamique?

C'est

- un *espace des phases* X dont les points correspondent aux états possibles du système considéré.

Qu'est-ce qu'un système dynamique?

C'est

- un *espace des phases* X dont les points correspondent aux états possibles du système considéré.
- une *loi d'évolution* qui décrit la variation **à court terme** de l'état du systéme.

Qu’est-ce qu’un système dynamique?

C’est

- un *espace des phases* X dont les points correspondent aux états possibles du système considéré.
- une *loi d’évolution* qui décrit la variation **à court terme** de l’état du systéme.

Le but de la théorie est de comprendre l’évolution **à long terme** du système.

Exemple: le problème des n corps en Mécanique céleste

Exemple: le problème des n corps en Mécanique céleste

Soit n un entier au moins égal à 2. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère n corps ponctuels, de masses respectives $m_1, \ldots, m_n$. On note $q_i \in \mathbb{R}^3$ la position de m_i, $p_i := m_i \dot{q}_i$ sa quantité de mouvement.

Exemple: le problème des n corps en Mécanique céleste

Soit n un entier au moins égal à 2. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère n corps ponctuels, de masses respectives $m_1, \ldots, m_n$. On note $q_i \in \mathbb{R}^3$ la position de m_i, $p_i := m_i \dot{q}_i$ sa quantité de mouvement.

L'espace des phases est

$$X := \{(q_i, p_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)^n | q_i \neq q_j \text{ pour } i \neq j\}.$$

Exemple: le problème des n corps en Mécanique céleste

Soit n un entier au moins égal à 2. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère n corps ponctuels, de masses respectives $m_1, \ldots, m_n$. On note $q_i \in \mathbb{R}^3$ la position de m_i, $p_i := m_i \dot{q}_i$ sa quantité de mouvement.

L'espace des phases est

$$X := \{(q_i, p_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)^n | q_i \neq q_j \text{ pour } i \neq j\}.$$

La loi d' évolution est la loi de gravitation universelle de Newton

$$\dot{q}_i = \frac{p_i}{m_i}, \quad \dot{p}_i = \sum_{j \neq i} m_i m_j \frac{q_j - q_i}{||q_j - q_i||^3}.$$

Temps continu, temps discret

Dans l'exemple précédent, la loi d'évolution est une équation différentielle. Le temps est une variable réelle (**continue**).

Temps continu, temps discret

Dans l'exemple précédent, la loi d'évolution est une équation différentielle. Le temps est une variable réelle (**continue**). Une *condition initiale* $x(0) \in X$ conduit à une *orbite* $(x(t))_{t \in I}$, solution de l'équation différentielle, courbe de l'espace des phases paramétrée par le temps.

Temps continu, temps discret

Dans l'exemple précédent, la loi d'évolution est une équation différentielle. Le temps est une variable réelle (**continue**). Une *condition initiale* $x(0) \in X$ conduit à une *orbite* $(x(t))_{t \in I}$, solution de l'équation différentielle, courbe de l'espace des phases paramétrée par le temps.

Dans d'autres situations, il est naturel de considérer le temps comme une variable entière (**discrète**).

Temps continu, temps discret

Dans l'exemple précédent, la loi d'évolution est une équation différentielle. Le temps est une variable réelle (**continue**). Une *condition initiale* $x(0) \in X$ conduit à une *orbite* $(x(t))_{t \in I}$, solution de l'équation différentielle, courbe de l'espace des phases paramétrée par le temps.

Dans d'autres situations, il est naturel de considérer le temps comme une variable entière (**discrète**). La loi d'évolution est alors donnée par une transformation $T : X \to X$ associant à l'état du système à un instant donné son état à l'instant suivant. Une condition initiale $x_0 \in X$ conduit à une orbite $(x_n = T(x_{n-1}) = T^n(x_0))_{n \geqslant 0}$.

Exemple: Billards planaires

Dans un domaine borné du plan U dont le bord ∂U est constitué d'un nombre fini de courbes lisses, on considère une masse ponctuelle animée d'un mouvement rectiligne uniforme et **rebondissant élastiquement sur le bord**.

Exemple: Billards planaires

Dans un domaine borné du plan U dont le bord ∂U est constitué d'un nombre fini de courbes lisses, on considère une masse ponctuelle animée d'un mouvement rectiligne uniforme et **rebondissant élastiquement sur le bord**.

L'espace des phases est constitué des cordes orientées de U, représentant la trajectoire de la particule entre deux rebonds successifs sur le bord de U.

Exemple: Billards planaires

Dans un domaine borné du plan U dont le bord ∂U est constitué d'un nombre fini de courbes lisses, on considère une masse ponctuelle animée d'un mouvement rectiligne uniforme et **rebondissant élastiquement sur le bord**.

L'espace des phases est constitué des cordes orientées de U, représentant la trajectoire de la particule entre deux rebonds successifs sur le bord de U.

La transformation T définie par la loi d'évolution associe à une corde C (aboutissant á un point lisse du bord de U) la corde $C' = T(C)$ déterminée à partir de C par la loi de réflexion de l'optique géométrique.

Exemple: Billards planaires

Dans un domaine borné du plan U dont le bord ∂U est constitué d'un nombre fini de courbes lisses, on considère une masse ponctuelle animée d'un mouvement rectiligne uniforme et **rebondissant élastiquement sur le bord**.

L'espace des phases est constitué des cordes orientées de U, représentant la trajectoire de la particule entre deux rebonds successifs sur le bord de U.

La transformation T définie par la loi d'évolution associe à une corde C (aboutissant á un point lisse du bord de U) la corde $C' = T(C)$ déterminée à partir de C par la loi de réflexion de l'optique géométrique.

Les propriétés de ce système dynamique dépendent de façon cruciale de la géométrie de la table U.

Deux exemples paradigmatiques

Deux exemples paradigmatiques

Dans les deux cas, l'espace des phases est le cercle $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$: l'état du système est spécifié par une coordonnée angulaire.

Deux exemples paradigmatiques

Dans les deux cas, l'espace des phases est le cercle $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$: l'état du système est spécifié par une coordonnée angulaire. Le temps est discret, la loi d'évolution est associée à une transformation du cercle.

Deux exemples paradigmatiques

Dans les deux cas, l'espace des phases est le cercle $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$: l'état du système est spécifié par une coordonnée angulaire. Le temps est discret, la loi d'évolution est associée à une transformation du cercle.

Le premier exemple dépend d'un paramètre $\alpha \in \mathbb{T}$. La loi d'évolution est donnée par la rotation

$$R_\alpha(x) := x + \alpha.$$

Deux exemples paradigmatiques

Dans les deux cas, l'espace des phases est le cercle $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$: l'état du système est spécifié par une coordonnée angulaire. Le temps est discret, la loi d'évolution est associée à une transformation du cercle.

Le premier exemple dépend d'un paramètre $\alpha \in \mathbb{T}$. La loi d'évolution est donnée par la rotation

$$R_\alpha(x) := x + \alpha.$$

C'est le prototype de dynamique quasipériodique.

Deux exemples paradigmatiques

Dans les deux cas, l'espace des phases est le cercle $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$: l'état du système est spécifié par une coordonnée angulaire. Le temps est discret, la loi d'évolution est associée à une transformation du cercle.

Le premier exemple dépend d'un paramètre $\alpha \in \mathbb{T}$. La loi d'évolution est donnée par la rotation

$$R_\alpha(x) := x + \alpha.$$

C'est le prototype de dynamique quasipériodique.

Dans le deuxième exemple, la loi d'évolution est donnée par le doublement

$$T(x) := 2x.$$

Deux exemples paradigmatiques

Dans les deux cas, l'espace des phases est le cercle $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$: l'état du système est spécifié par une coordonnée angulaire. Le temps est discret, la loi d'évolution est associée à une transformation du cercle.

Le premier exemple dépend d'un paramètre $\alpha \in \mathbb{T}$. La loi d'évolution est donnée par la rotation

$$R_\alpha(x) := x + \alpha.$$

C'est le prototype de dynamique quasipériodique.

Dans le deuxième exemple, la loi d'évolution est donnée par le doublement

$$T(x) := 2x.$$

C'est un prototype de dynamique hyperbolique (chaotique).

Quasipériodicité versus Hyperbolicité

Quasipériodicité versus Hyperbolicité

Les rotations sont des isométries. La distance entre les points de deux orbites de R_α reste donc constante au cours du temps.

Quasipériodicité versus Hyperbolicité

Les rotations sont des isométries. La distance entre les points de deux orbites de R_α reste donc constante au cours du temps.

$$||R_\alpha^n(x) - R_\alpha^n(x')|| = ||x - x'||, \qquad \forall x, x' \in \mathbb{T}, n \geqslant 0.$$

Quasipériodicité versus Hyperbolicité

Les rotations sont des isométries. La distance entre les points de deux orbites de R_α reste donc constante au cours du temps.

$$||R_\alpha^n(x) - R_\alpha^n(x')|| = ||x - x'||, \qquad \forall x, x' \in \mathbb{T}, n \geqslant 0.$$

Au contraire, la distance entre les points de deux orbites de T augmente exponentiellement avec le temps (tant qu'elle reste inférieure au demi-diamètre du cercle)

Quasipériodicité versus Hyperbolicité

Les rotations sont des isométries. La distance entre les points de deux orbites de R_α reste donc constante au cours du temps.

$$||R_\alpha^n(x) - R_\alpha^n(x')|| = ||x - x'||, \qquad \forall x, x' \in \mathbb{T}, n \geqslant 0.$$

Au contraire, la distance entre les points de deux orbites de T augmente exponentiellement avec le temps (tant qu'elle reste inférieure au demi-diamètre du cercle)

$$||T^n(x) - T^n(x')|| = 2^n||x - x'||, \qquad \text{si } \ 2^n||x - x'|| \leqslant \frac{1}{2}.$$

(*sensibilité aux conditions initiales*)

Déjà, en 1843 . . .

Déjà, en 1843 . . .

" . . . For, in respect to the latter branch of the supposition, it should be considered that the most trifling variation in the facts of the two cases might give rise to the most important miscalculations, by diverting thoroughly the two courses of events, very much as, in arithmetic, an error which, in its own individuality, may be inappreciable, produces, at length, by dint of multiplication at all points of the process, a result enormously at variance with truth . . . "

Déjà, en 1843 . . .

" . . . For, in respect to the latter branch of the supposition, it should be considered that the most trifling variation in the facts of the two cases might give rise to the most important miscalculations, by diverting thoroughly the two courses of events, very much as, in arithmetic, an error which, in its own individuality, may be inappreciable, produces, at length, by dint of multiplication at all points of the process, a result enormously at variance with truth . . . "

Edgar Allan Poe

The mystery of Marie Roget, 1843

" ... Car, relativement à la dernière partie de la supposition, on doit considérer que la plus légère variation dans les éléments des deux problèmes pourrait engendrer les plus graves erreurs de calcul, en faisant diverger absolument les deux courants d'évènements; à peu près de la même manière qu'en arithmétique une erreur qui, prise individuellement, peut être inappréciable, produit à la longue, par la force accumulative de la multiplication, un résultat effroyablement distant de la vérité ..."

Traduction de Charles Baudelaire, 1864

Plan du cours

Plan du cours

- Le modèle de dynamique quasipériodique: translations sur les tores.

Plan du cours

- Le modèle de dynamique quasipériodique: translations sur les tores.
- Germes de difféomorphismes holomorphes.

Plan du cours

- Le modèle de dynamique quasipériodique: translations sur les tores.
- Germes de difféomorphismes holomorphes.
- Difféomorphismes du cercle.

Plan du cours

- Le modèle de dynamique quasipériodique: translations sur les tores.
- Germes de difféomorphismes holomorphes.
- Difféomorphismes du cercle.
- Théorie KAM: stabilité du système solaire.

Translations sur les tores

Translations sur les tores

L'espace des phases est le tore de dimension d: $\mathbb{T}^d := \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$.

Translations sur les tores

L'espace des phases est le tore de dimension d: $\mathbb{T}^d := \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$.

Pour $\alpha \in \mathbb{T}^d$ (or $\alpha \in \mathbb{R}^d$), on note R_α la translation $x \mapsto x + \alpha$ de $\mathbb{T}^d$.

Translations sur les tores

L'espace des phases est le tore de dimension d: $\mathbb{T}^d := \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$.

Pour $\alpha \in \mathbb{T}^d$ (or $\alpha \in \mathbb{R}^d$), on note R_α la translation $x \mapsto x + \alpha$ de $\mathbb{T}^d$.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}^d$, on note X_α le champ de vecteurs défini sur $\mathbb{T}^d$ par

$$X_\alpha := \sum_{i=1}^{d} \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Translations sur les tores

L'espace des phases est le tore de dimension d: $\mathbb{T}^d := \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$.

Pour $\alpha \in \mathbb{T}^d$ (or $\alpha \in \mathbb{R}^d$), on note R_α la translation $x \mapsto x + \alpha$ de $\mathbb{T}^d$.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}^d$, on note X_α le champ de vecteurs défini sur $\mathbb{T}^d$ par

$$X_\alpha := \sum_{i=1}^{d} \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Le flot associé est le groupe à un paramètre $(R_{t\alpha})_{t\in\mathbb{R}}$.

Translations sur les tores

L'espace des phases est le tore de dimension d: $\mathbb{T}^d := \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$.

Pour $\alpha \in \mathbb{T}^d$ (or $\alpha \in \mathbb{R}^d$), on note R_α la translation $x \mapsto x + \alpha$ de $\mathbb{T}^d$.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}^d$, on note X_α le champ de vecteurs défini sur $\mathbb{T}^d$ par

$$X_\alpha := \sum_{i=1}^{d} \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Le flot associé est le groupe à un paramètre $(R_{t\alpha})_{t\in\mathbb{R}}$.

Comme le groupe $\mathbb{T}^d$ est abélien, le système dynamique défini par R_α (ou X_α) est **homogène**: la translation R_x envoie l'orbite de 0 sur l'orbite de x, en respectant le temps.

Adhérence des orbites de R_α

Adhérence des orbites de R_α

Il suffit, par homogénéité, de déterminer l'adhérence de l'orbite $(n\alpha)_{n\in\mathbb{Z}}$ de 0. C'est un sous-groupe fermé $G(\alpha)$ de $\mathbb{T}^d$.

Adhérence des orbites de R_α

Il suffit, par homogénéité, de déterminer l'adhérence de l'orbite $(n\alpha)_{n\in\mathbb{Z}}$ de 0. C'est un sous-groupe fermé $G(\alpha)$ de $\mathbb{T}^d$.

La composante connexe $G_0(\alpha)$ de 0 dans $G(\alpha)$ est un sous-groupe fermé connexe de $\mathbb{T}^d$.

Il suffit, par homogénéité, de déterminer l'adhérence de l'orbite $(n\alpha)_{n\in\mathbb{Z}}$ de 0. C'est un sous-groupe fermé $G(\alpha)$ de $\mathbb{T}^d$.

La composante connexe $G_0(\alpha)$ de 0 dans $G(\alpha)$ est un sous-groupe fermé connexe de $\mathbb{T}^d$. Le quotient $G(\alpha)/G_0(\alpha)$ est un groupe cyclique fini

Adhérence des orbites de R_α

Il suffit, par homogénéité, de déterminer l'adhérence de l'orbite $(n\alpha)_{n\in\mathbb{Z}}$ de 0. C'est un sous-groupe fermé $G(\alpha)$ de $\mathbb{T}^d$.

La composante connexe $G_0(\alpha)$ de 0 dans $G(\alpha)$ est un sous-groupe fermé connexe de $\mathbb{T}^d$. Le quotient $G(\alpha)/G_0(\alpha)$ est un groupe cyclique fini

Les sous-groupes fermés connexes de $\mathbb{T}^d$ sont en correspondance biunivoque avec les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{Q}^d$, ou de façon équivalente, avec les sous-espaces vectoriels *rationnels* de $\mathbb{R}^d$

Il suffit, par homogénéité, de déterminer l'adhérence de l'orbite $(n\alpha)_{n\in\mathbb{Z}}$ de 0. C'est un sous-groupe fermé $G(\alpha)$ de $\mathbb{T}^d$.

La composante connexe $G_0(\alpha)$ de 0 dans $G(\alpha)$ est un sous-groupe fermé connexe de $\mathbb{T}^d$. Le quotient $G(\alpha)/G_0(\alpha)$ est un groupe cyclique fini

Les sous-groupes fermés connexes de $\mathbb{T}^d$ sont en correspondance biunivoque avec les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{Q}^d$, ou de façon équivalente, avec les sous-espaces vectoriels *rationnels* de $\mathbb{R}^d$ (i.e les sous-espaces V tels que $\dim_{\mathbb{Q}} V \cap \mathbb{Q}^d = \dim V$).

Sous-groupes fermés connexes de $\mathbb{T}^d$

Sous-groupes fermés connexes de $\mathbb{T}^d$

A un sous-espace rationnel V de $\mathbb{R}^d$, on associe $G_0(V) := V/V \cap \mathbb{Z}^d \subset \mathbb{T}^d$, qui est compact puisque le rang de $V \cap \mathbb{Z}^d$ est égal à la dimension de V.

Sous-groupes fermés connexes de $\mathbb{T}^d$

A un sous-espace rationnel V de $\mathbb{R}^d$, on associe $G_0(V) := V/V \cap \mathbb{Z}^d \subset \mathbb{T}^d$, qui est compact puisque le rang de $V \cap \mathbb{Z}^d$ est égal à la dimension de V.

A un sous-groupe fermé connexe G_0 de $\mathbb{T}^d$, on associe la composante connexe $V(G_0)$ de 0 dans la préimage de G_0 dans $\mathbb{R}^d$.

Sous-groupes fermés connexes de $\mathbb{T}^d$

A un sous-espace rationnel V de $\mathbb{R}^d$, on associe $G_0(V) := V/V \cap \mathbb{Z}^d \subset \mathbb{T}^d$, qui est compact puisque le rang de $V \cap \mathbb{Z}^d$ est égal à la dimension de V.

A un sous-groupe fermé connexe G_0 de $\mathbb{T}^d$, on associe la composante connexe $V(G_0)$ de 0 dans la préimage de G_0 dans $\mathbb{R}^d$.

C'est un sous-groupe fermé connexe de $\mathbb{R}^d$, donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^d$. On a $G_0 = V(G_0)/V(G_0) \cap \mathbb{Z}^d$.

Sous-groupes fermés connexes de $\mathbb{T}^d$

A un sous-espace rationnel V de $\mathbb{R}^d$, on associe $G_0(V) := V/V \cap \mathbb{Z}^d \subset \mathbb{T}^d$, qui est compact puisque le rang de $V \cap \mathbb{Z}^d$ est égal à la dimension de V.

A un sous-groupe fermé connexe G_0 de $\mathbb{T}^d$, on associe la composante connexe $V(G_0)$ de 0 dans la préimage de G_0 dans $\mathbb{R}^d$.

C'est un sous-groupe fermé connexe de $\mathbb{R}^d$, donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^d$. On a $G_0 = V(G_0)/V(G_0) \cap \mathbb{Z}^d$.

Comme G_0 est compact, $V(G_0) \cap \mathbb{Z}^d$ est de rang égal à la dimension de $V(G_0)$. Donc $V(G_0)$ est rationnel.

Détermination du sous-espace $V(G_0(\alpha))$

Détermination du sous-espace $V(G_0(\alpha))$

Définissons $V^\star(\alpha) := \{k \in \mathbb{Q}^d \mid \sum_{i=1}^d k_i\alpha_i \in \mathbb{Q}\}$.

Détermination du sous-espace $V(G_0(\alpha))$

Définissons $V^\star(\alpha) := \{k \in \mathbb{Q}^d \mid \sum_{i=1}^d k_i \alpha_i \in \mathbb{Q}\}$.

Proposition

Le sous-espace $V(G_0(\alpha))$ est l'annulateur de $V^\star(\alpha)$:

$$V(G_0(\alpha)) = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \sum_{i=1}^d k_i x_i = 0,\ \forall k \in V^\star(\alpha)\}.$$

Détermination du sous-espace $V(G_0(\alpha))$

Définissons $V^\star(\alpha) := \{k \in \mathbb{Q}^d \mid \sum_{i=1}^d k_i\alpha_i \in \mathbb{Q}\}$.

Proposition

Le sous-espace $V(G_0(\alpha))$ est l'annulateur de $V^\star(\alpha)$:

$$V(G_0(\alpha)) = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \sum_{i=1}^d k_i x_i = 0,\ \forall k \in V^\star(\alpha)\}.$$

Corollaire $\dim V(G_0(\alpha)) = rk_{\mathbb{Q}}(1, \alpha_1, \ldots, \alpha_d) - 1.$

Détermination du sous-espace $V(G_0(\alpha))$

Définissons $V^\star(\alpha) := \{k \in \mathbb{Q}^d \mid \sum_{i=1}^d k_i\alpha_i \in \mathbb{Q}\}$.

Proposition

Le sous-espace $V(G_0(\alpha))$ est l'annulateur de $V^\star(\alpha)$:

$$V(G_0(\alpha)) = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \sum_{i=1}^d k_i x_i = 0,\ \forall k \in V^\star(\alpha)\}.$$

Corollaire $\dim V(G_0(\alpha)) = rk_{\mathbb{Q}}(1, \alpha_1, \ldots, \alpha_d) - 1.$

Les cas extrêmes:

- $G(\alpha)$ fini $\iff V(G_0(\alpha)) = \{0\} \iff \alpha_1, \ldots, \alpha_d \in \mathbb{Q}$.

Détermination du sous-espace $V(G_0(\alpha))$

Définissons $V^\star(\alpha) := \{k \in \mathbb{Q}^d \mid \sum_{i=1}^d k_i\alpha_i \in \mathbb{Q}\}$.

Proposition

Le sous-espace $V(G_0(\alpha))$ est l'annulateur de $V^\star(\alpha)$:

$$V(G_0(\alpha)) = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \sum_{i=1}^d k_i x_i = 0,\ \forall k \in V^\star(\alpha)\}.$$

Corollaire $\dim V(G_0(\alpha)) = rk_{\mathbb{Q}}(1, \alpha_1, \ldots, \alpha_d) - 1.$

Les cas extrêmes:

- $G(\alpha)$ fini $\iff V(G_0(\alpha)) = \{0\} \iff \alpha_1, \ldots, \alpha_d \in \mathbb{Q}$.
- $G(\alpha) = \mathbb{T}^d \iff V(G_0(\alpha)) = \mathbb{R}^d \iff 1, \alpha_1, \ldots, \alpha_d$ sont rationnellement indépendants.

Détermination du sous-espace $V(G_0(\alpha))$

Définissons $V^\star(\alpha) := \{k \in \mathbb{Q}^d \mid \sum_{i=1}^d k_i\alpha_i \in \mathbb{Q}\}$.

Proposition
Le sous-espace $V(G_0(\alpha))$ est l'annulateur de $V^\star(\alpha)$:

$$V(G_0(\alpha)) = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \sum_{i=1}^d k_i x_i = 0,\ \forall k \in V^\star(\alpha)\}.$$

Corollaire $\dim V(G_0(\alpha)) = rk_{\mathbb{Q}}(1, \alpha_1, \ldots, \alpha_d) - 1.$

Les cas extrêmes:

- $G(\alpha)$ fini $\iff V(G_0(\alpha)) = \{0\} \iff \alpha_1, \ldots, \alpha_d \in \mathbb{Q}$.
- $G(\alpha) = \mathbb{T}^d \iff V(G_0(\alpha)) = \mathbb{R}^d \iff 1, \alpha_1, \ldots, \alpha_d$ sont rationnellement indépendants.

Un système dynamique est *minimal* si toutes ses orbites sont denses.

Le cas des flots

Le cas des flots

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^d$. L'adhérence de l'orbite de 0 sous le flot de X_α est un sous-groupe fermé **connexe** $\Gamma(\alpha)$ de $\mathbb{T}^d$.

Le cas des flots

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^d$. L'adhérence de l'orbite de 0 sous le flot de X_α est un sous-groupe fermé **connexe** $\Gamma(\alpha)$ de $\mathbb{T}^d$.

Le sous-espace $V(\Gamma(\alpha))$ est l'annulateur de

$$V^{\star\star} := \{k \in \mathbb{Q}^d \mid \sum_{i=1}^{d} k_i \alpha_i = 0\}.$$

Le cas des flots

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^d$. L'adhérence de l'orbite de 0 sous le flot de X_α est un sous-groupe fermé **connexe** $\Gamma(\alpha)$ de $\mathbb{T}^d$.

Le sous-espace $V(\Gamma(\alpha))$ est l'annulateur de

$$V^{\star\star} := \{k \in \mathbb{Q}^d \mid \sum_{i=1}^{d} k_i \alpha_i = 0\}.$$

$$\dim V(\Gamma(\alpha)) = rk_{\mathbb{Q}}(\alpha_1, \ldots, \alpha_d).$$

Le cas des flots

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^d$. L'adhérence de l'orbite de 0 sous le flot de X_α est un sous-groupe fermé **connexe** $\Gamma(\alpha)$ de $\mathbb{T}^d$.

Le sous-espace $V(\Gamma(\alpha))$ est l'annulateur de

$$V^{\star\star} := \{k \in \mathbb{Q}^d \mid \sum_{i=1}^{d} k_i \alpha_i = 0\}.$$

$$\dim V(\Gamma(\alpha)) = rk_{\mathbb{Q}}(\alpha_1, \ldots, \alpha_d).$$

$\Gamma(\alpha) = \mathbb{T}^d \iff V(\Gamma(\alpha)) = \mathbb{R}^d \iff \alpha_1, \ldots, \alpha_d$ sont rationnellement indépendants.

Mesures invariantes. Unique ergodicité

Soit X un espace métrique compact. L'espace $\mathcal{M}(X)$ des mesures de probabilité (boréliennes) sur X, muni de la topologie faible, est compact et convexe.

Mesures invariantes. Unique ergodicité

Soit X un espace métrique compact. L'espace $\mathcal{M}(X)$ des mesures de probabilité (boréliennes) sur X, muni de la topologie faible, est compact et convexe.

Le groupe des homéomorphismes de X agit sur $\mathcal{M}(X)$: pour toute fonction continue ϕ sur X, toute mesure $\mu \in \mathcal{M}(X)$, tout homéomorphisme f de X, on définit $(f_*\mu)(\phi) = \mu(\phi \circ f)$.

Mesures invariantes. Unique ergodicité

Soit X un espace métrique compact. L'espace $\mathcal{M}(X)$ des mesures de probabilité (boréliennes) sur X, muni de la topologie faible, est compact et convexe.

Le groupe des homéomorphismes de X agit sur $\mathcal{M}(X)$: pour toute fonction continue ϕ sur X, toute mesure $\mu \in \mathcal{M}(X)$, tout homéomorphisme f de X, on définit $(f_*\mu)(\phi) = \mu(\phi \circ f)$.

L'espace des mesures de probabilité sur X, qui sont invariantes par un homéomorphisme f, est une partie compacte, convexe et **non vide** $\mathcal{M}(f)$ de $\mathcal{M}(X)$.

Mesures invariantes. Unique ergodicité

Soit X un espace métrique compact. L'espace $\mathcal{M}(X)$ des mesures de probabilité (boréliennes) sur X, muni de la topologie faible, est compact et convexe.

Le groupe des homéomorphismes de X agit sur $\mathcal{M}(X)$: pour toute fonction continue ϕ sur X, toute mesure $\mu \in \mathcal{M}(X)$, tout homéomorphisme f de X, on définit $(f_*\mu)(\phi) = \mu(\phi \circ f)$.

L'espace des mesures de probabilité sur X, qui sont invariantes par un homéomorphisme f, est une partie compacte, convexe et **non vide** $\mathcal{M}(f)$ de $\mathcal{M}(X)$.

Un homéomorphisme f de X est *uniquement ergodique* s'il admet une unique mesure de probabilité invariante.

Convergence uniforme des sommes de Birkhoff

Convergence uniforme des sommes de Birkhoff

Soient

- X un espace métrique compact;

Convergence uniforme des sommes de Birkhoff

Soient

- X un espace métrique compact;
- f un homéomorphisme uniquement ergodique de X;

Convergence uniforme des sommes de Birkhoff

Soient

- X un espace métrique compact;
- f un homéomorphisme uniquement ergodique de X;
- μ son unique mesure de probabilité invariante;

Convergence uniforme des sommes de Birkhoff

Soient

- X un espace métrique compact;
- f un homéomorphisme uniquement ergodique de X;
- μ son unique mesure de probabilité invariante;
- ϕ une fonction continue sur X.

Convergence uniforme des sommes de Birkhoff

Soient

- X un espace métrique compact;
- f un homéomorphisme uniquement ergodique de X;
- μ son unique mesure de probabilité invariante;
- ϕ une fonction continue sur X.

Alors la suite des *moyennes de Birkhoff* $\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}\phi\circ f^m$ converge, uniformément sur X, vers $\int \phi d\mu$.

Unique ergodicité des translations minimales

Unique ergodicité des translations minimales

La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{T}^d$ (qui est aussi la mesure de Haar sur le groupe compact $\mathbb{T}^d$) est invariante par chaque translation R_α.

Unique ergodicité des translations minimales

La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{T}^d$ (qui est aussi la mesure de Haar sur le groupe compact $\mathbb{T}^d$) est invariante par chaque translation R_α.

Proposition Soit $\alpha \in \mathbb{T}^d$. Si la translation R_α est minimale, elle est uniquement ergodique.

Unique ergodicité des translations minimales

La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{T}^d$ (qui est aussi la mesure de Haar sur le groupe compact $\mathbb{T}^d$) est invariante par chaque translation R_α.

Proposition Soit $\alpha \in \mathbb{T}^d$. Si la translation R_α est minimale, elle est uniquement ergodique.

Plus généralement, $\mathcal{M}(R_\alpha)$ s'identifie naturellement à l'espace des mesures de probabilité sur le tore quotient $\mathbb{T}^d/G(\alpha)$.

Unique ergodicité des translations minimales

La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{T}^d$ (qui est aussi la mesure de Haar sur le groupe compact $\mathbb{T}^d$) est invariante par chaque translation R_α.

Proposition Soit $\alpha \in \mathbb{T}^d$. Si la translation R_α est minimale, elle est uniquement ergodique.

Plus généralement, $\mathcal{M}(R_\alpha)$ s'identifie naturellement à l'espace des mesures de probabilité sur le tore quotient $\mathbb{T}^d/G(\alpha)$.

De même, si le flot de X_α est minimal, il est uniquement ergodique.

Preuve de la proposition

Preuve de la proposition

Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{T}^d$ invariante par R_α.

Preuve de la proposition

Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{T}^d$ invariante par R_α.
Pour $k \in \mathbb{Z}^d$, définissons

$$\hat{\mu}(k) := \int_{\mathbb{T}^d} \exp(-2\pi i < k, x >) \, d\mu(x).$$

Preuve de la proposition

Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{T}^d$ invariante par R_α.
Pour $k \in \mathbb{Z}^d$, définissons

$$\hat{\mu}(k) := \int_{\mathbb{T}^d} \exp(-2\pi i < k, x >) \, d\mu(x).$$

Comme μ est invariante, on a

$$\hat{\mu}(k) := \int_{\mathbb{T}^d} \exp(-2\pi i < k, R_\alpha(x) >) \, d\mu(x) = \exp(-2\pi i < k, \alpha >)\hat{\mu}(k).$$

Preuve de la proposition

Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{T}^d$ invariante par R_α.
Pour $k \in \mathbb{Z}^d$, définissons

$$\hat{\mu}(k) := \int_{\mathbb{T}^d} \exp(-2\pi i < k, x >) \, d\mu(x).$$

Comme μ est invariante, on a

$$\hat{\mu}(k) := \int_{\mathbb{T}^d} \exp(-2\pi i < k, R_\alpha(x) >) \, d\mu(x) = \exp(-2\pi i < k, \alpha >)\hat{\mu}(k).$$

Comme R_α est minimale, $< k, \alpha >$ n'est pas entier pour $k \neq 0$. On a alors $\exp(-2\pi i < k, \alpha >) \neq 1$ et $\hat{\mu}(k) = 0$.

Preuve de la proposition

Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{T}^d$ invariante par R_α.
Pour $k \in \mathbb{Z}^d$, définissons

$$\hat{\mu}(k) := \int_{\mathbb{T}^d} \exp(-2\pi i < k, x >) \, d\mu(x).$$

Comme μ est invariante, on a

$$\hat{\mu}(k) := \int_{\mathbb{T}^d} \exp(-2\pi i < k, R_\alpha(x) >) \, d\mu(x) = \exp(-2\pi i < k, \alpha >)\hat{\mu}(k).$$

Comme R_α est minimale, $< k, \alpha >$ n'est pas entier pour $k \neq 0$. On a alors $\exp(-2\pi i < k, \alpha >) \neq 1$ et $\hat{\mu}(k) = 0$.

Les coefficients de Fourier de μ coïncident avec ceux de la mesure de Lebesgue. Les deux mesures sont donc égales. $\square$

L'équation aux différences

L'équation aux différences

Soit $\alpha \in \mathbb{T}^d$. *L'équation aux différences* associée à R_α est

$$(\star) \qquad \psi \circ R_\alpha - \psi = \phi.$$

L'équation aux différences

Soit $\alpha \in \mathbb{T}^d$. *L'équation aux différences* associée à R_α est

$$(\star) \qquad \psi \circ R_\alpha - \psi = \phi.$$

Ici, ϕ est une fonction donnée sur $\mathbb{T}^d$; on cherche une fonction ψ satisfaisant $(\star)$.

L'équation aux différences

Soit $\alpha \in \mathbb{T}^d$. *L'équation aux différences* associée à R_α est

$$(\star) \qquad \psi \circ R_\alpha - \psi = \phi.$$

Ici, ϕ est une fonction donnée sur $\mathbb{T}^d$; on cherche une fonction ψ satisfaisant $(\star)$. On souhaite comprendre la relation entre la régularité de ϕ, celle de ψ et les propriétés arithmétiques de α.

L'équation aux différences

Soit $\alpha \in \mathbb{T}^d$. *L'équation aux différences* associée à R_α est

$$(\star) \qquad \psi \circ R_\alpha - \psi = \phi.$$

Ici, ϕ est une fonction donnée sur $\mathbb{T}^d$; on cherche une fonction ψ satisfaisant $(\star)$. On souhaite comprendre la relation entre la régularité de ϕ, celle de ψ et les propriétés arithmétiques de α.

On suppose toujours que ϕ, ψ sont au moins intégrables. Comme la mesure de Lebesgue est invariante par R_α, une condition **nécessaire** pour que $(\star)$ ait une solution est

$$\int_{\mathbb{T}^d} \phi(x)\, dx = 0.$$

L'équation aux différences

Soit $\alpha \in \mathbb{T}^d$. *L'équation aux différences* associée à R_α est

$$(\star) \qquad \psi \circ R_\alpha - \psi = \phi.$$

Ici, ϕ est une fonction donnée sur $\mathbb{T}^d$; on cherche une fonction ψ satisfaisant $(\star)$. On souhaite comprendre la relation entre la régularité de ϕ, celle de ψ et les propriétés arithmétiques de α.

On suppose toujours que ϕ, ψ sont au moins intégrables. Comme la mesure de Lebesgue est invariante par R_α, une condition **nécessaire** pour que $(\star)$ ait une solution est

$$\int_{\mathbb{T}^d} \phi(x)\, dx = 0.$$

D'autre part, si ψ est une solution, alors $\psi + c$ est aussi une solution pour tout $c \in \mathbb{R}$. On peut donc exiger que

$$\int_{\mathbb{T}^d} \psi(x)\, dx = 0.$$

Petits diviseurs

Petits diviseurs

L'équation ($\star$) se traduit, pour les coefficients de Fourier de ϕ, ψ, par la relation

$$(\star\star) \qquad (\exp 2\pi i < k, \alpha > -1)\, \hat{\psi}(k) = \hat{\phi}(k), \quad \forall k \in \mathbb{Z}^d.$$

Petits diviseurs

L'équation $(\star)$ se traduit, pour les coefficients de Fourier de ϕ, ψ, par la relation

$$(\star\star) \qquad (\exp 2\pi i < k, \alpha > -1)\ \hat{\psi}(k) = \hat{\phi}(k), \quad \forall k \in \mathbb{Z}^d.$$

La relation $(\star\star)$ est satisfaite pour $k = 0$ car $\int_{\mathbb{T}^d} \phi(x)\ dx = 0$.

Petits diviseurs

L'équation $(\star)$ se traduit, pour les coefficients de Fourier de ϕ, ψ, par la relation

$$(\star\star) \qquad (\exp 2\pi i < k, \alpha > -1)\, \hat{\psi}(k) = \hat{\phi}(k), \quad \forall k \in \mathbb{Z}^d.$$

La relation $(\star\star)$ est satisfaite pour $k = 0$ car $\int_{\mathbb{T}^d} \phi(x)\, dx = 0$.

Si R_α n'est pas minimale, il existe une infinité d'éléments $k \in \mathbb{Z}^d$ tels que $\exp 2\pi i < k, \alpha > -1 = 0$. Si $\hat{\phi}(k) \neq 0$ pour au moins un tel k, l'équation $(\star)$ n'a pas de solution.

Petits diviseurs

L'équation $(\star)$ se traduit, pour les coefficients de Fourier de ϕ, ψ, par la relation

$$(\star\star) \qquad (\exp 2\pi i < k, \alpha > -1)\, \hat{\psi}(k) = \hat{\phi}(k), \quad \forall k \in \mathbb{Z}^d.$$

La relation $(\star\star)$ est satisfaite pour $k = 0$ car $\int_{\mathbb{T}^d} \phi(x)\, dx = 0$.

Si R_α n'est pas minimale, il existe une infinité d'éléments $k \in \mathbb{Z}^d$ tels que $\exp 2\pi i < k, \alpha > -1 = 0$. Si $\hat{\phi}(k) \neq 0$ pour au moins un tel k, l'équation $(\star)$ n'a pas de solution.

On suppose désormais que R_α est minimale. L'équation $(\star\star)$ possède une unique solution **formelle**

$$(\blacksquare) \quad \hat{\psi}(k) = \frac{\hat{\phi}(k)}{\exp 2\pi i < k, \alpha > -1}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}^d - \{0\}.$$

Petits diviseurs

L'équation $(\star)$ se traduit, pour les coefficients de Fourier de ϕ, ψ, par la relation

$$(\star\star) \qquad (\exp 2\pi i < k, \alpha > -1)\ \hat{\psi}(k) = \hat{\phi}(k), \quad \forall k \in \mathbb{Z}^d.$$

La relation $(\star\star)$ est satisfaite pour $k = 0$ car $\int_{\mathbb{T}^d} \phi(x)\, dx = 0$.

Si R_α n'est pas minimale, il existe une infinité d'éléments $k \in \mathbb{Z}^d$ tels que $\exp 2\pi i < k, \alpha > -1 = 0$. Si $\hat{\phi}(k) \neq 0$ pour au moins un tel k, l'équation $(\star)$ n'a pas de solution.

On suppose désormais que R_α est minimale. L'équation $(\star\star)$ possède une unique solution **formelle**

$$(\blacksquare) \quad \hat{\psi}(k) = \frac{\hat{\phi}(k)}{\exp 2\pi i < k, \alpha > -1}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}^d - \{0\}.$$

L'expression $\exp 2\pi i < k, \alpha > -1$ est un *petit diviseur*.

Approximation diophantienne : le principe des tiroirs

Approximation diophantienne : le principe des tiroirs

Pour que les coefficients de Fourier définis par (■) correspondent à une fonction intégrable, une condition nécessaire est qu'ils soient bornés. Il faut donc contrôler les petits diviseurs.

Approximation diophantienne : le principe des tiroirs

Pour que les coefficients de Fourier définis par (■) correspondent à une fonction intégrable, une condition nécessaire est qu'ils soient bornés. Il faut donc contrôler les petits diviseurs.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $||x||_{\mathbb{T}}$ la distance de x au plus proche entier.

Approximation diophantienne : le principe des tiroirs

Pour que les coefficients de Fourier définis par (■) correspondent à une fonction intégrable, une condition nécessaire est qu'ils soient bornés. Il faut donc contrôler les petits diviseurs.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $||x||_{\mathbb{T}}$ la distance de x au plus proche entier.

Proposition Soit $\alpha \in \mathbb{R}^d$. Pour tout entier $K \geqslant 1$, il existe $k \in \mathbb{Z}^d$, $k \neq 0$ tel que

$$|| < k, \alpha > ||_{\mathbb{T}} \leqslant K^{-d}, \qquad \max_{1 \leqslant i \leqslant d} |k_i| \leqslant K.$$

Approximation diophantienne : le principe des tiroirs

Pour que les coefficients de Fourier définis par (■) correspondent à une fonction intégrable, une condition nécessaire est qu'ils soient bornés. Il faut donc contrôler les petits diviseurs.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $||x||_{\mathbb{T}}$ la distance de x au plus proche entier.

Proposition Soit $\alpha \in \mathbb{R}^d$. Pour tout entier $K \geqslant 1$, il existe $k \in \mathbb{Z}^d$, $k \neq 0$ tel que

$$|| < k, \alpha > ||_{\mathbb{T}} \leqslant K^{-d}, \qquad \max_{1 \leqslant i \leqslant d} |k_i| \leqslant K.$$

Preuve: Divisons $\mathbb{T}$ en K^d intervalles de longueur K^{-d}.

Approximation diophantienne : le principe des tiroirs

Pour que les coefficients de Fourier définis par (■) correspondent à une fonction intégrable, une condition nécessaire est qu'ils soient bornés. Il faut donc contrôler les petits diviseurs.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $||x||_{\mathbb{T}}$ la distance de x au plus proche entier.

Proposition Soit $\alpha \in \mathbb{R}^d$. Pour tout entier $K \geqslant 1$, il existe $k \in \mathbb{Z}^d$, $k \neq 0$ tel que

$$|| < k, \alpha > ||_{\mathbb{T}} \leqslant K^{-d}, \qquad \max_{1 \leqslant i \leqslant d} |k_i| \leqslant K.$$

Preuve: Divisons $\mathbb{T}$ en K^d intervalles de longueur K^{-d}. Considérons les $(K+1)^d$ points de $\mathbb{T}$:

Approximation diophantienne : le principe des tiroirs

Pour que les coefficients de Fourier définis par (■) correspondent à une fonction intégrable, une condition nécessaire est qu'ils soient bornés. Il faut donc contrôler les petits diviseurs.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $||x||_{\mathbb{T}}$ la distance de x au plus proche entier.

Proposition Soit $\alpha \in \mathbb{R}^d$. Pour tout entier $K \geqslant 1$, il existe $k \in \mathbb{Z}^d$, $k \neq 0$ tel que

$$|| < k, \alpha > ||_{\mathbb{T}} \leqslant K^{-d}, \qquad \max_{1 \leqslant i \leqslant d} |k_i| \leqslant K.$$

Preuve: Divisons $\mathbb{T}$ en K^d intervalles de longueur K^{-d}. Considérons les $(K+1)^d$ points de $\mathbb{T}$:

$$< k, \alpha > \mod .1, \qquad 0 \leqslant k_i \leqslant K.$$

Pour que les coefficients de Fourier définis par (■) correspondent à une fonction intégrable, une condition nécessaire est qu'ils soient bornés. Il faut donc contrôler les petits diviseurs.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $||x||_{\mathbb{T}}$ la distance de x au plus proche entier.

Proposition Soit $\alpha \in \mathbb{R}^d$. Pour tout entier $K \geqslant 1$, il existe $k \in \mathbb{Z}^d$, $k \neq 0$ tel que

$$|| < k, \alpha > ||_{\mathbb{T}} \leqslant K^{-d}, \qquad \max_{1 \leqslant i \leqslant d} |k_i| \leqslant K.$$

Preuve: Divisons $\mathbb{T}$ en K^d intervalles de longueur K^{-d}.
Considérons les $(K+1)^d$ points de $\mathbb{T}$:

$$< k, \alpha > \ \mathrm{mod}.1, \qquad 0 \leqslant k_i \leqslant K.$$

Deux d'entre eux, $< k', \alpha >$ et $< k'', \alpha >$, appartiennent au même intervalle.

Pour que les coefficients de Fourier définis par (■) correspondent à une fonction intégrable, une condition nécessaire est qu'ils soient bornés. Il faut donc contrôler les petits diviseurs.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $||x||_{\mathbb{T}}$ la distance de x au plus proche entier.

Proposition Soit $\alpha \in \mathbb{R}^d$. Pour tout entier $K \geqslant 1$, il existe $k \in \mathbb{Z}^d$, $k \neq 0$ tel que

$$|| < k, \alpha > ||_{\mathbb{T}} \leqslant K^{-d}, \qquad \max_{1 \leqslant i \leqslant d} |k_i| \leqslant K.$$

Preuve: Divisons $\mathbb{T}$ en K^d intervalles de longueur K^{-d}. Considérons les $(K+1)^d$ points de $\mathbb{T}$:

$$< k, \alpha > \mod.1, \qquad 0 \leqslant k_i \leqslant K.$$

Deux d'entre eux, $< k', \alpha >$ et $< k'', \alpha >$, appartiennent au même intervalle. On a alors

$$|| < k' - k'', \alpha > ||_{\mathbb{T}} \leqslant K^{-d}. \qquad \square$$

Corollaire: Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^d$, il existe une infinité d'éléments $k \in \mathbb{Z}^d$, $k \neq 0$ tels que

$$|| < k, \alpha > ||_{\mathbb{T}} \leqslant ||k||_{\infty}^{-d}.$$

Corollaire: Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^d$, il existe une infinité d'éléments $k \in \mathbb{Z}^d$, $k \neq 0$ tels que

$$|| < k, \alpha > ||_{\mathbb{T}} \leqslant ||k||_{\infty}^{-d}.$$

Proposition: Soit $\theta \in \mathbb{R}$ une racine d'un polynôme à coefficients entiers irréductible de degré $d+1$. Posons $\alpha := (\theta, \ldots, \theta^d) \in \mathbb{R}^d$.

Corollaire: Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^d$, il existe une infinité d'éléments $k \in \mathbb{Z}^d$, $k \neq 0$ tels que

$$|| < k, \alpha > ||_{\mathbb{T}} \leqslant ||k||_{\infty}^{-d}.$$

Proposition: Soit $\theta \in \mathbb{R}$ une racine d'un polynôme à coefficients entiers irréductible de degré $d + 1$. Posons $\alpha := (\theta, \ldots, \theta^d) \in \mathbb{R}^d$. Il existe $\gamma = \gamma(\theta) > 0$ tel qu'on ait, pour tout $k \in \mathbb{Z}^d$, $k \neq 0$

$$|| < k, \alpha > ||_{\mathbb{T}} \geqslant \gamma ||k||_{\infty}^{-d}.$$

Preuve de la proposition

Soit $P(X) = \sum_{i=0}^{d+1} a_i X^i \in \mathbb{Z}[X]$ le polynôme irréductible dont θ est racine.

Preuve de la proposition

Soit $P(X) = \sum_{i=0}^{d+1} a_i X^i \in \mathbb{Z}[X]$ le polynôme irréductible dont θ est racine. Le nombre $\theta_* := a_{d+1}\theta$, qui est racine de $P_*(X) = X^{d+1} + \sum_{i=0}^{d} a_i a_{d+1}^{d-i} X^i$, est un *entier algébrique*.

Preuve de la proposition

Soit $P(X) = \sum_{i=0}^{d+1} a_i X^i \in \mathbb{Z}[X]$ le polynôme irréductible dont θ est racine. Le nombre $\theta_* := a_{d+1}\theta$, qui est racine de $P_*(X) = X^{d+1} + \sum_{i=0}^{d} a_i a_{d+1}^{d-i} X^i$, est un *entier algébrique*.
Soit $k \in \mathbb{Z}^{d+1}$, $k \neq 0$. La combinaison linéaire

$$a_{d+1}^{d} \sum_{i=0}^{d} k_i \theta^i = \sum_{i=0}^{d} a_{d+1}^{d-i} k_i \theta_*^i := Q_k(\theta_*)$$

est un entier algébrique non nul.

Preuve de la proposition

Soit $P(X) = \sum_{i=0}^{d+1} a_i X^i \in \mathbb{Z}[X]$ le polynôme irréductible dont θ est racine. Le nombre $\theta_* := a_{d+1}\theta$, qui est racine de $P_*(X) = X^{d+1} + \sum_{i=0}^{d} a_i a_{d+1}^{d-i} X^i$, est un *entier algébrique*.
Soit $k \in \mathbb{Z}^{d+1}$, $k \neq 0$. La combinaison linéaire

$$a_{d+1}^d \sum_{i=0}^{d} k_i \theta^i = \sum_{i=0}^{d} a_{d+1}^{d-i} k_i \theta_*^i := Q_k(\theta_*)$$

est un entier algébrique non nul.
Soient $\theta_* = \theta_0, \ldots, \theta_d$ les racines de P_*. Les conjugués algébriques de $Q_k(\theta_*)$ sont les $Q_k(\theta_i)$, $0 \leqslant i \leqslant d$.

Preuve de la proposition

Soit $P(X) = \sum_{i=0}^{d+1} a_i X^i \in \mathbb{Z}[X]$ le polynôme irréductible dont θ est racine. Le nombre $\theta_* := a_{d+1}\theta$, qui est racine de
$P_*(X) = X^{d+1} + \sum_{i=0}^{d} a_i a_{d+1}^{d-i} X^i$, est un *entier algébrique*.
Soit $k \in \mathbb{Z}^{d+1}$, $k \neq 0$. La combinaison linéaire

$$a_{d+1}^d \sum_{i=0}^{d} k_i \theta^i = \sum_{i=0}^{d} a_{d+1}^{d-i} k_i \theta_*^i := Q_k(\theta_*)$$

est un entier algébrique non nul.
Soient $\theta_* = \theta_0, \ldots, \theta_d$ les racines de P_*. Les conjugués algébriques de $Q_k(\theta_*)$ sont les $Q_k(\theta_i)$, $0 \leqslant i \leqslant d$. Le produit $\prod_0^d Q_k(\theta_i)$ est un **entier non nul**.

Preuve de la proposition

Soit $P(X) = \sum_{i=0}^{d+1} a_i X^i \in \mathbb{Z}[X]$ le polynôme irréductible dont θ est racine. Le nombre $\theta_* := a_{d+1}\theta$, qui est racine de $P_*(X) = X^{d+1} + \sum_{i=0}^{d} a_i a_{d+1}^{d-i} X^i$, est un *entier algébrique*.
Soit $k \in \mathbb{Z}^{d+1}$, $k \neq 0$. La combinaison linéaire

$$a_{d+1}^{d} \sum_{i=0}^{d} k_i \theta^i = \sum_{i=0}^{d} a_{d+1}^{d-i} k_i \theta_*^i := Q_k(\theta_*)$$

est un entier algébrique non nul.
Soient $\theta_* = \theta_0, \ldots, \theta_d$ les racines de P_*. Les conjugués algébriques de $Q_k(\theta_*)$ sont les $Q_k(\theta_i)$, $0 \leqslant i \leqslant d$. Le produit $\prod_0^d Q_k(\theta_i)$ est un **entier non nul**.
On a donc

$$|\sum_{i=0}^{d} k_i \theta^i| = |a_{d+1}^{-d} Q_k(\theta_*)| \geqslant |a_{d+1}^{-d} \prod_{1}^{d} Q_k(\theta_i)|^{-1} \geqslant \gamma(\theta) ||k||_{\infty}^{-d}. \qquad \square$$

Conditions diophantiennes

Définition: Pour $\tau \geqslant 0$, $\gamma > 0$, on note $DC(\gamma, \tau)$ l'ensemble des $\alpha \in \mathbb{T}^d$ qui vérifient, pour tout $k \in \mathbb{Z}^d$, $k \neq 0$

$$|| < k, \alpha > ||_{\mathbb{T}} \geqslant \gamma ||k||_{\infty}^{-d-\tau}.$$

Conditions diophantiennes

Définition: Pour $\tau \geqslant 0$, $\gamma > 0$, on note $DC(\gamma, \tau)$ l'ensemble des $\alpha \in \mathbb{T}^d$ qui vérifient, pour tout $k \in \mathbb{Z}^d$, $k \neq 0$

$$|| < k, \alpha > ||_{\mathbb{T}} \geqslant \gamma ||k||_{\infty}^{-d-\tau}.$$

C'est une partie **compacte** de $\mathbb{T}^d$, non vide si γ est assez petit.

Conditions diophantiennes

Définition: Pour $\tau \geqslant 0$, $\gamma > 0$, on note $DC(\gamma, \tau)$ l'ensemble des $\alpha \in \mathbb{T}^d$ qui vérifient, pour tout $k \in \mathbb{Z}^d$, $k \neq 0$

$$|| < k, \alpha > ||_{\mathbb{T}} \geqslant \gamma ||k||_{\infty}^{-d-\tau}.$$

C'est une partie **compacte** de $\mathbb{T}^d$, non vide si γ est assez petit. On a $DC(\gamma, \tau) \subset DC(\gamma', \tau')$ pour $\gamma \geqslant \gamma', \tau \leqslant \tau'$.

Conditions diophantiennes

Définition: Pour $\tau \geqslant 0$, $\gamma > 0$, on note $DC(\gamma, \tau)$ l'ensemble des $\alpha \in \mathbb{T}^d$ qui vérifient, pour tout $k \in \mathbb{Z}^d$, $k \neq 0$

$$|| < k, \alpha > ||_{\mathbb{T}} \geqslant \gamma ||k||_\infty^{-d-\tau}.$$

C'est une partie **compacte** de $\mathbb{T}^d$, non vide si γ est assez petit.
On a $DC(\gamma, \tau) \subset DC(\gamma', \tau')$ pour $\gamma \geqslant \gamma', \tau \leqslant \tau'$.
On pose

$$DC(\tau) = \cup_{\gamma > 0} DC(\gamma, \tau), \qquad DC = \cup_{\tau \geqslant 0} DC(\tau).$$

Conditions diophantiennes

Définition: Pour $\tau \geqslant 0$, $\gamma > 0$, on note $DC(\gamma, \tau)$ l'ensemble des $\alpha \in \mathbb{T}^d$ qui vérifient, pour tout $k \in \mathbb{Z}^d$, $k \neq 0$

$$|| < k, \alpha > ||_{\mathbb{T}} \geqslant \gamma ||k||_{\infty}^{-d-\tau}.$$

C'est une partie **compacte** de $\mathbb{T}^d$, non vide si γ est assez petit.
On a $DC(\gamma, \tau) \subset DC(\gamma', \tau')$ pour $\gamma \geqslant \gamma', \tau \leqslant \tau'$.
On pose

$$DC(\tau) = \cup_{\gamma > 0} DC(\gamma, \tau), \qquad DC = \cup_{\tau \geqslant 0} DC(\tau).$$

Proposition:

1. La mesure de Lebesgue de $DC(0)$ est nulle.

Conditions diophantiennes

Définition: Pour $\tau \geqslant 0$, $\gamma > 0$, on note $DC(\gamma,\tau)$ l'ensemble des $\alpha \in \mathbb{T}^d$ qui vérifient, pour tout $k \in \mathbb{Z}^d$, $k \neq 0$

$$|| < k, \alpha > ||_{\mathbb{T}} \geqslant \gamma ||k||_\infty^{-d-\tau}.$$

C'est une partie **compacte** de $\mathbb{T}^d$, non vide si γ est assez petit.
On a $DC(\gamma,\tau) \subset DC(\gamma',\tau')$ pour $\gamma \geqslant \gamma', \tau \leqslant \tau'$.
On pose

$$DC(\tau) = \cup_{\gamma>0} DC(\gamma,\tau), \qquad DC = \cup_{\tau \geqslant 0} DC(\tau).$$

Proposition:

1. La mesure de Lebesgue de $DC(0)$ est nulle.
2. Pour $\tau > 0$, $\gamma > 0$, on a

$$\mathrm{Leb}(\mathbb{T}^d - DC(\gamma,\tau)) \leqslant C_\tau \gamma,$$

et en particulier $\mathrm{Leb}(DC(\tau)) = 1$.

Preuve de 1. Il suffit de montrer que $\mathrm{Leb}(DC(\gamma, 0)) = 0$ pour tout $\gamma > 0$.

Preuve de 1. Il suffit de montrer que $\mathrm{Leb}(DC(\gamma, 0)) = 0$ pour tout $\gamma > 0$. Sinon, il existerait un *point de densité* $\alpha^\star$ de $DC(\gamma, 0)$.

Preuve de 1. Il suffit de montrer que $\mathrm{Leb}(DC(\gamma, 0)) = 0$ pour tout $\gamma > 0$. Sinon, il existerait un *point de densité* $\alpha^\star$ de $DC(\gamma, 0)$. Mais, pour chaque $k \in \mathbb{Z}^d$, $k \neq 0$ tel que $|| < k, \alpha^\star > ||_{\mathbb{T}} \leqslant ||k||_\infty^{-d}$, la boule B centrée en $\alpha^\star$ de rayon $C||k||_\infty^{-d-1}$ rencontre l'ensemble $\{\alpha \in \mathbb{T}^d,\ || < k, \alpha > ||_{\mathbb{T}} < \gamma\,||k||_\infty^{-d}\}$ suivant un ensemble de mesure $\geqslant c\,\gamma\,\mathrm{Leb}(B)$.

Preuve de 1. Il suffit de montrer que $\mathrm{Leb}(DC(\gamma, 0)) = 0$ pour tout $\gamma > 0$. Sinon, il existerait un *point de densité* $\alpha^\star$ de $DC(\gamma, 0)$. Mais, pour chaque $k \in \mathbb{Z}^d$, $k \neq 0$ tel que $|| < k, \alpha^\star > ||_{\mathbb{T}} \leqslant ||k||_\infty^{-d}$, la boule B centrée en $\alpha^\star$ de rayon $C||k||_\infty^{-d-1}$ rencontre l'ensemble $\{\alpha \in \mathbb{T}^d,\ || < k, \alpha > ||_{\mathbb{T}} < \gamma\, ||k||_\infty^{-d}\}$ suivant un ensemble de mesure $\geqslant c\, \gamma\, \mathrm{Leb}(B)$. Ceci contredit la définition d'un point de densité.

Preuve de 1. Il suffit de montrer que $\mathrm{Leb}(DC(\gamma,0)) = 0$ pour tout $\gamma > 0$. Sinon, il existerait un *point de densité* $\alpha^\star$ de $DC(\gamma,0)$. Mais, pour chaque $k \in \mathbb{Z}^d$, $k \neq 0$ tel que $|| < k, \alpha^\star > ||_{\mathbb{T}} \leqslant ||k||_\infty^{-d}$, la boule B centrée en $\alpha^\star$ de rayon $C||k||_\infty^{-d-1}$ rencontre l'ensemble $\{\alpha \in \mathbb{T}^d,\ || < k, \alpha > ||_{\mathbb{T}} < \gamma\, ||k||_\infty^{-d}\}$ suivant un ensemble de mesure $\geqslant c\,\gamma\,\mathrm{Leb}(B)$. Ceci contredit la définition d'un point de densité.

Preuve de 2. Soit $k \in \mathbb{Z}^d$, $k \neq 0$. L'application $\alpha \mapsto < k, \alpha > \mathrm{mod}.1$ de $\mathbb{T}^d$ dans $\mathbb{T}$ préserve la mesure, donc on a

$$\mathrm{Leb}(\{\alpha \in \mathbb{T}^d,\ || < k, \alpha > ||_{\mathbb{T}} < \gamma\, ||k||_\infty^{-d-\tau}\} \leqslant 2\gamma ||k||^{-d-\tau}.$$

Preuve de 1. Il suffit de montrer que $\mathrm{Leb}(DC(\gamma, 0)) = 0$ pour tout $\gamma > 0$. Sinon, il existerait un *point de densité* $\alpha^\star$ de $DC(\gamma, 0)$. Mais, pour chaque $k \in \mathbb{Z}^d$, $k \neq 0$ tel que $|| < k, \alpha^\star > ||_{\mathbb{T}} \leqslant ||k||_\infty^{-d}$, la boule B centrée en $\alpha^\star$ de rayon $C||k||_\infty^{-d-1}$ rencontre l'ensemble $\{\alpha \in \mathbb{T}^d, \ || < k, \alpha > ||_{\mathbb{T}} < \gamma \, ||k||_\infty^{-d}\}$ suivant un ensemble de mesure $\geqslant c \, \gamma \, \mathrm{Leb}(B)$. Ceci contredit la définition d'un point de densité.

Preuve de 2. Soit $k \in \mathbb{Z}^d$, $k \neq 0$. L'application $\alpha \mapsto < k, \alpha > \mathrm{mod}.1$ de $\mathbb{T}^d$ dans $\mathbb{T}$ préserve la mesure, donc on a

$$\mathrm{Leb}(\{\alpha \in \mathbb{T}^d, \ || < k, \alpha > ||_{\mathbb{T}} < \gamma \, ||k||_\infty^{-d-\tau}\} \leqslant 2\gamma ||k||^{-d-\tau}.$$

La série $\sum_{k \in \mathbb{Z}^d, k \neq 0} ||k||^{-d-\tau}$ est convergente pour $\tau > 0$. Ceci donne l'estimation de la proposition. $\square$

Développement en fraction continue ($d = 1$)

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x et $\{x\} := x - \lfloor x \rfloor \in [0, 1)$ la partie fractionnaire de x.

Développement en fraction continue ($d = 1$)

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x et $\{x\} := x - \lfloor x \rfloor \in [0, 1)$ la partie fractionnaire de x.

La *transformation de Gauss* $G : (0, 1) \to [0, 1)$ est définie par

$$G(x) = \{x^{-1}\}.$$

Développement en fraction continue ($d = 1$)

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x et $\{x\} := x - \lfloor x \rfloor \in [0, 1)$ la partie fractionnaire de x.

La *transformation de Gauss* $G : (0, 1) \to [0, 1)$ est définie par

$$G(x) = \{x^{-1}\}.$$

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $a_0 := \lfloor x \rfloor$, $x_0 = \{x\}$.

Développement en fraction continue ($d = 1$)

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x et $\{x\} := x - \lfloor x \rfloor \in [0, 1)$ la partie fractionnaire de x.

La *transformation de Gauss* $G : (0, 1) \to [0, 1)$ est définie par

$$G(x) = \{x^{-1}\}.$$

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $a_0 := \lfloor x \rfloor$, $x_0 = \{x\}$. Si $x_n \neq 0$, on définit $a_{n+1} = \lfloor x_n^{-1} \rfloor$, $x_{n+1} = G(x_n)$, de sorte que $x_n = \frac{1}{a_{n+1} + x_{n+1}}$.

Développement en fraction continue ($d = 1$)

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x et $\{x\} := x - \lfloor x \rfloor \in [0, 1)$ la partie fractionnaire de x.

La *transformation de Gauss* $G : (0, 1) \to [0, 1)$ est définie par

$$G(x) = \{x^{-1}\}.$$

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $a_0 := \lfloor x \rfloor$, $x_0 = \{x\}$. Si $x_n \neq 0$, on définit $a_{n+1} = \lfloor x_n^{-1} \rfloor$, $x_{n+1} = G(x_n)$, de sorte que $x_n = \frac{1}{a_{n+1}+x_{n+1}}$.

En itérant cette relation, on obtient

$$x_0 = \frac{p_{n-1}x_n + p_n}{q_{n-1}x_n + q_n} \iff x_n = -\frac{q_n x_0 - p_n}{q_{n-1}x_0 - p_{n-1}},$$

avec

$$\begin{pmatrix} p_{n-1} & p_n \\ q_{n-1} & q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_n \end{pmatrix}.$$

Propriétés de la suite des réduites

Soit $x \in (0,1)$ un nombre irrationnel. Les nombres rationnnels $\frac{p_n}{q_n}$ définis par l'algorithme de fraction continue sont appelés les *réduites* de x.

Soit $x \in (0,1)$ un nombre irrationnel. Les nombres rationnnels $\frac{p_n}{q_n}$ définis par l'algorithme de fraction continue sont appelés les *réduites* de x.

Proposition: (Meilleure approximation) Pour $n \geqslant 0$, $0 < q < q_{n+1}$, $p \in \mathbb{Z}$, on a

$$|qx - p| \geqslant |q_n x - p_n|.$$

Propriétés de la suite des réduites

Soit $x \in (0,1)$ un nombre irrationnel. Les nombres rationnnels $\frac{p_n}{q_n}$ définis par l'algorithme de fraction continue sont appelés les *réduites* de x.

Proposition: (Meilleure approximation) Pour $n \geqslant 0$, $0 < q < q_{n+1}$, $p \in \mathbb{Z}$, on a

$$|qx - p| \geqslant |q_n x - p_n|.$$

Proposition: Pour $n \geqslant 0$, on a

$$\frac{1}{q_{n+1} + q_n} \leqslant (-1)^n (q_n x - p_n) = \frac{1}{q_{n+1} + q_n x_{n+1}} \leqslant \frac{1}{q_{n+1}}.$$

Conditions diophantiennes et réduites

D'après la propriété de meilleure approximation, un nombre irrationnel $x \in (0,1)$ appartient à $DC(\gamma, \tau)$ si et seulement si il vérifie, pour tout $n \geqslant 0$

$$|q_n x - p_n| \geqslant \gamma q_n^{-1-\tau}.$$

Conditions diophantiennes et réduites

D'après la propriété de meilleure approximation, un nombre irrationnel $x \in (0,1)$ appartient à $DC(\gamma,\tau)$ si et seulement si il vérifie, pour tout $n \geqslant 0$

$$|q_n x - p_n| \geqslant \gamma q_n^{-1-\tau}.$$

$$x \in DC(\gamma,\tau) \Longrightarrow a_{n+1} \leqslant \gamma^{-1} q_n^{\tau}, \quad \forall n \geqslant 0,$$

Conditions diophantiennes et réduites

D'après la propriété de meilleure approximation, un nombre irrationnel $x \in (0,1)$ appartient à $DC(\gamma,\tau)$ si et seulement si il vérifie, pour tout $n \geqslant 0$

$$|q_n x - p_n| \geqslant \gamma q_n^{-1-\tau}.$$

$$x \in DC(\gamma,\tau) \Longrightarrow a_{n+1} \leqslant \gamma^{-1} q_n^{\tau}, \quad \forall n \geqslant 0,$$

$$x \in DC(\gamma,\tau) \Longleftarrow a_{n+1} + 2 \leqslant \gamma^{-1} q_n^{\tau}, \quad \forall n \geqslant 0,$$

Conditions diophantiennes et réduites

D'après la propriété de meilleure approximation, un nombre irrationnel $x \in (0, 1)$ appartient à $DC(\gamma, \tau)$ si et seulement si il vérifie, pour tout $n \geqslant 0$

$$|q_n x - p_n| \geqslant \gamma q_n^{-1-\tau}.$$

$$x \in DC(\gamma, \tau) \Longrightarrow a_{n+1} \leqslant \gamma^{-1} q_n^{\tau}, \quad \forall n \geqslant 0,$$

$$x \in DC(\gamma, \tau) \Longleftarrow a_{n+1} + 2 \leqslant \gamma^{-1} q_n^{\tau}, \quad \forall n \geqslant 0,$$

$$x \in DC(\tau) \iff q_{n+1} = \mathcal{O}(q_n^{1+\tau}) \iff a_{n+1} = \mathcal{O}(q_n^{\tau}).$$

Conditions diophantiennes et réduites

D'après la propriété de meilleure approximation, un nombre irrationnel $x \in (0,1)$ appartient à $DC(\gamma,\tau)$ si et seulement si il vérifie, pour tout $n \geqslant 0$

$$|q_n x - p_n| \geqslant \gamma q_n^{-1-\tau}.$$

$$x \in DC(\gamma,\tau) \Longrightarrow a_{n+1} \leqslant \gamma^{-1} q_n^{\tau}, \quad \forall n \geqslant 0,$$

$$x \in DC(\gamma,\tau) \Longleftarrow a_{n+1} + 2 \leqslant \gamma^{-1} q_n^{\tau}, \quad \forall n \geqslant 0,$$

$$x \in DC(\tau) \iff q_{n+1} = \mathcal{O}(q_n^{1+\tau}) \iff a_{n+1} = \mathcal{O}(q_n^{\tau}).$$

En particulier, le nombre x appartient à $DC(0)$ si et seulement si la suite $(a_n)_{n>0}$ est bornée.

Retour sur l'équation aux différences

Pour tout nombre réel $r \geqslant 0$, on note $W_0^r(\mathbb{T}^d)$ l'espace de Hilbert des fonctions $\varphi \in L^2(\mathbb{T}^d)$ de moyenne nulle qui vérifient

$$||\varphi||_{W^r}^2 := \sum_{\mathbb{Z}^d} ||k||_\infty^{2r} \, |\hat{\varphi}(k)|^2 < +\infty.$$

Retour sur l'équation aux différences

Pour tout nombre réel $r \geqslant 0$, on note $W_0^r(\mathbb{T}^d)$ l'espace de Hilbert des fonctions $\varphi \in L^2(\mathbb{T}^d)$ de moyenne nulle qui vérifient

$$||\varphi||_{W^r}^2 := \sum_{\mathbb{Z}^d} ||k||_\infty^{2r} \, |\hat{\varphi}(k)|^2 < +\infty.$$

Proposition: Soient $r, \gamma > 0$, $\tau \geqslant 0$. On suppose que $s := r - d - \tau \geqslant 0$. Pour tout $\alpha \in DC(\gamma, \tau)$, pour tout $\varphi \in W_0^r(\mathbb{T}^d)$, il existe une unique solution $\psi \in W_0^s(\mathbb{T}^d)$ de l'équation aux différences

$$\psi \circ R_\alpha - \psi = \varphi.$$

Retour sur l'équation aux différences

Pour tout nombre réel $r \geqslant 0$, on note $W_0^r(\mathbb{T}^d)$ l'espace de Hilbert des fonctions $\varphi \in L^2(\mathbb{T}^d)$ de moyenne nulle qui vérifient

$$||\varphi||_{W^r}^2 := \sum_{\mathbb{Z}^d} ||k||_\infty^{2r} \, |\hat{\varphi}(k)|^2 < +\infty.$$

Proposition: Soient $r, \gamma > 0$, $\tau \geqslant 0$. On suppose que $s := r - d - \tau \geqslant 0$. Pour tout $\alpha \in DC(\gamma, \tau)$, pour tout $\varphi \in W_0^r(\mathbb{T}^d)$, il existe une unique solution $\psi \in W_0^s(\mathbb{T}^d)$ de l'équation aux différences

$$\psi \circ R_\alpha - \psi = \varphi.$$

De plus on a

$$||\psi||_{W^s} \leqslant \frac{1}{4}\gamma^{-1} ||\varphi||_{W^r}.$$

Preuve de la proposition

On doit avoir, pour $k \in \mathbb{Z}^d$, $k \neq 0$

$$\hat{\psi}(k) = \frac{\hat{\varphi}(k)}{\exp 2\pi i < k, \alpha > -1}.$$

Preuve de la proposition

On doit avoir, pour $k \in \mathbb{Z}^d$, $k \neq 0$

$$\hat{\psi}(k) = \frac{\hat{\varphi}(k)}{\exp 2\pi i < k, \alpha > -1}.$$

Comme $\alpha \in DC(\gamma, \tau)$, on a

$$|\exp 2\pi i < k, \alpha > -1| \geqslant 4 \, || < k, \alpha > ||_{\mathbb{T}} \geqslant 4 \, \gamma \, ||k||_{\infty}^{-d-\tau}.$$

Preuve de la proposition

On doit avoir, pour $k \in \mathbb{Z}^d$, $k \neq 0$

$$\hat{\psi}(k) = \frac{\hat{\varphi}(k)}{\exp 2\pi i < k, \alpha > -1}.$$

Comme $\alpha \in DC(\gamma, \tau)$, on a

$$|\exp 2\pi i < k, \alpha > -1| \geqslant 4 \, || < k, \alpha > ||_{\mathbb{T}} \geqslant 4 \, \gamma \, ||k||_{\infty}^{-d-\tau}.$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} ||\psi||_{W^s}^2 &= \sum_{\mathbb{Z}^d} ||k||_{\infty}^{2s} \, |\hat{\psi}(k)|^2 \\ &\leqslant \frac{1}{16}\gamma^{-2} \sum_{\mathbb{Z}^d} ||k||_{\infty}^{2(s+d+\tau)} \, |\hat{\varphi}(k)|^2 \\ &= \frac{1}{16}\gamma^{-2} ||\varphi||_{W^r}^2. \qquad \square \end{aligned}$$

L'équation aux différences en régularité hölderienne.

En utilisant quelques techniques fondamentales d'analyse harmonique, on peut montrer le

Théorème: Soient $r, \gamma > 0$, $\tau \geqslant 0$. On suppose que $s := r - d - \tau$ est positif et n'est pas entier.

L'équation aux différences en régularité hölderienne.

En utilisant quelques techniques fondamentales d'analyse harmonique, on peut montrer le

Théorème: Soient $r, \gamma > 0$, $\tau \geqslant 0$. On suppose que $s := r - d - \tau$ est positif et n'est pas entier. Pour tout $\alpha \in DC(\gamma, \tau)$, pour tout $\varphi \in C_0^r(\mathbb{T}^d)$, il existe une unique solution $\psi \in C_0^s(\mathbb{T}^d)$ de l'équation aux différences

$$\psi \circ R_\alpha - \psi = \varphi.$$

L'équation aux différences en régularité hölderienne.

En utilisant quelques techniques fondamentales d'analyse harmonique, on peut montrer le

Théorème: Soient $r, \gamma > 0$, $\tau \geqslant 0$. On suppose que $s := r - d - \tau$ est positif et n'est pas entier. Pour tout $\alpha \in DC(\gamma, \tau)$, pour tout $\varphi \in C_0^r(\mathbb{T}^d)$, il existe une unique solution $\psi \in C_0^s(\mathbb{T}^d)$ de l'équation aux différences

$$\psi \circ R_\alpha - \psi = \varphi.$$

De plus on a

$$||\psi||_{C^s} \leqslant C\gamma^{-1}||\varphi||_{C^r},$$

avec $C = C(r, \tau)$.

L'équation aux différences en régularité hölderienne.

En utilisant quelques techniques fondamentales d'analyse harmonique, on peut montrer le

Théorème: Soient $r, \gamma > 0$, $\tau \geqslant 0$. On suppose que $s := r - d - \tau$ est positif et n'est pas entier. Pour tout $\alpha \in DC(\gamma, \tau)$, pour tout $\varphi \in C_0^r(\mathbb{T}^d)$, il existe une unique solution $\psi \in C_0^s(\mathbb{T}^d)$ de l'équation aux différences

$$\psi \circ R_\alpha - \psi = \varphi.$$

De plus on a

$$||\psi||_{C^s} \leqslant C\gamma^{-1}||\varphi||_{C^r},$$

avec $C = C(r, \tau)$.

Lorsque m est entier, $C_0^m(\mathbb{T}^d)$ désigne l'espace des fonctions de classe C^m de moyenne nulle sur $\mathbb{T}^d$.

L'équation aux différences en régularité hölderienne.

En utilisant quelques techniques fondamentales d'analyse harmonique, on peut montrer le

Théorème: Soient $r, \gamma > 0$, $\tau \geqslant 0$. On suppose que $s := r - d - \tau$ est positif et n'est pas entier. Pour tout $\alpha \in DC(\gamma, \tau)$, pour tout $\varphi \in C_0^r(\mathbb{T}^d)$, il existe une unique solution $\psi \in C_0^s(\mathbb{T}^d)$ de l'équation aux différences

$$\psi \circ R_\alpha - \psi = \varphi.$$

De plus on a

$$||\psi||_{C^s} \leqslant C\gamma^{-1}||\varphi||_{C^r},$$

avec $C = C(r, \tau)$.

Lorsque m est entier, $C_0^m(\mathbb{T}^d)$ désigne l'espace des fonctions de classe C^m de moyenne nulle sur $\mathbb{T}^d$. Lorsque $r = m + \beta$, $\beta \in (0, 1)$, $C_0^r(\mathbb{T}^d)$ désigne l'espace des fonctions dans $C_0^m(\mathbb{T}^d)$ dont toutes les dérivées partielles d'ordre m satisfont une condition hölderienne d'exposant β.