Équations différentielles et systèmes dynamiques

M. Jean-Christophe YOCCOZ, professeur

Vers la fin des années 60, HENON a étudié numériquement la famille à deux paramètres de difféomorphismes polynomiaux du plan définie par

$$H_{b,c}\,(x,y) = (x^2 + c - by, x),$$

où c est un paramètre réel, et b, qui est la valeur constante du jacobien, est un paramètre réel non nul. Il constate, pour certaines valeurs des paramètres, l'existence d'attracteurs « étranges ». A la fin des années 80, Benedicks et Carleson établissent l'existence de tels attracteurs, lorsque le jacobien b est fixé très petit, pour un ensemble de mesure positive de valeurs du paramètre c. Les propriétés de ces attracteurs, et en particulier l'existence d'une mesure de Sinaï-Ruelle-Bowen reflétant le comportement asymptomatique de presque toute orbite dans leur bassin, ont été établies ensuite par Benedicks, Viana et Young. Le but du cours était pour l'essentiel de développer des concepts et des outils permettant d'analyser plus précisément la dynamique de ces attracteurs, en vue d'élaborer à terme une théorie générale de la dynamique non uniformément hyperbolique.

Supposons donc $0 < b \ll 1$; lorsque $b = 0$, l'application de Hénon dégénère en un polynôme quadratique réel (cf. le cours de l'année dernière) ; les valeurs du paramètre c considérées seront proches de -2.

L'application $H_{b,c}$ possède alors deux points fixes (α, α) et (β, β), avec α proche de -1 et β proche de 2. Ces points fixes sont hyperboliques. La composante connexe de (β, β) dans l'intersection de sa variété stable avec la bande $\{|y| \leq 3\}$ est un arc $\gamma(\beta) = \{x = \varphi_\beta(y), |y| \leq 3\}$, avec

$$\varphi_\beta(y) = \beta + 0(b).$$

La préimage de cet arc rencontre la bande $\{|y| \leq 3\}$ suivant $\gamma(\beta)$ et un autre arc $\gamma(-\beta) = \{x = \varphi_{-\beta}(y), |y| \leq 3\}$ vérifiant

$$\varphi_{-\beta}(y) = -\beta + 0(b).$$

En considérant l'autre point fixe (α, α), on introduit de façon similaire des arcs $\gamma(\alpha)$, $\gamma(-\alpha)$ contenus dans la variété stable de ce point et presque verticaux. Ces arcs donnent naissance aux rectangles

$$\mathscr{R} = \{ |y| \leq 3,\ \varphi_{-\beta}(y) \leq x \leq \varphi_{\beta}(y) \},$$
$$\mathscr{A} = \{ |y| \leq 3,\ \varphi_{\alpha}(y) \leq x \leq \varphi_{-\alpha}(y) \}.$$

Pour les valeurs du paramètre c étudiées, l'application $H_{b,c}$ envoie $\mathscr{R}$ dans lui-même, et l'attracteur associé est égal à

$$K_{b,c} = \bigcap_{n \geq 0} H^n_{b,c}(\mathscr{R}).$$

On définit par récurrence une suite de composantes connexes $\gamma(\pm\alpha^{(n)})$, $n \geq 0$ de l'intersection de la variété stable de (α, α) avec la bande $\{ |y| \leq 3\}$:

$$\alpha^{(0)} = \alpha,$$
$$H^{-1}_{b,c}(\gamma(\alpha^{(n-1)})) = \gamma(\alpha^{(n)}) \cup \gamma(-\alpha^{(n)}),$$

l'arc $\gamma(\alpha^{(n)})$ se situant dans la composante gauche de $\mathscr{R} - \mathscr{A}$. Les valeurs de c considérées sont alors plus spécifiquement précisées par la condition suivante : il existe un (grand) entier M tel que les paraboles $\{x = y^2 + c \pm 3b\}$, images par $H_{b,c}$ des droites horizontales $\{y = \pm 3\}$, rencontrent $\gamma(\alpha^{(M-2)})$ mais pas $\gamma(\alpha^{(M-1)})$.

Pour $1 < n < M$ la préimage de $\gamma(\alpha^{(n-1)})$ rencontre la bande $\{ |y| \leq 3\}$ suivant deux composantes connexes notées $\gamma(\pm\hat{\alpha}^{(n)})$, $\gamma(\hat{\alpha}^{(n)})$ se situant à gauche de $\gamma(-\hat{\alpha}^{(n)})$, qui sont des arcs

$$\gamma(\pm\hat{\alpha}^{(n)}) = \{x = \varphi_{\pm\hat{\alpha}^{(n)}}(y),\ |y| \leq 3\}.$$

La région

$$\mathscr{A}_M = \{ |y| \leq 3,\ \varphi_{\hat{\alpha}^{(n)}}(y) \leq x \leq \varphi_{-\hat{\alpha}^{(n)}}(y) \},$$

de largeur approximative 2^{-M}, est une première approximation de l'**ensemble critique** pour l'itération de $H_{b,c}$: les orbites de $H_{b,c}$ dans $\mathscr{R}$ qui ne rencontrent pas cette région ont en effet des propriétés d'hyperbolicité uniforme. L'entier M est le temps de retour de $\mathscr{A}_{\mathscr{M}}$ dans $\mathscr{A}$.

Une notion essentielle dans l'étude de la dynamique de $H_{b,c}$ est celle de **rectangle régulier.**

On appelle ainsi une région $P \subset \mathscr{R}$ de la forme

$$P = \{ |y| \leq 3,\ \varphi^-_P(y) \leq x \leq \varphi^+_P(y) \}$$

pour laquelle il existe un entier $n \geq 0$ (l'**ordre** de P) tel que $H^n_{b,c/P}$ jouisse des propriétés décrites ci-dessous.

On exige d'abord que

(i) l'image d'un segment horizontal $\{\varphi^-_P(y_0) \leq x \leq \varphi^+_P(y_0)\}$ soit un arc transverse au feuilletage vertical, ayant une extrémité dans $\gamma(\alpha)$ et l'autre dans

$\gamma(-\alpha)$ (les bords verticaux de P sont ainsi contenus dans la variété stable de (α, α)).

Cette condition permet de représenter $H^n_{/P}$ de façon implicite :

$$H^n_{/P}\,(x_0,y_0) = (x_n,y_n) \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = A^{(P)}\,(y_0,x_n), \\ y_n = B^{(P)}\,(y_0,x_n). \end{cases}$$

On impose ensuite une condition de distorsion bornée sur $H^n_{/P}$, qui s'exprime en terme des dérivées partielles de $A^{(P)}$ et $B^{(P)}$:

(ii)

$$\begin{aligned} |A^{(P)}_y| &\leq C_0 b^{1/2}, \ |B^{(P)}_x| \leq C_0, \\ |A^{(P)}_{yy}| &\leq C_0 b^{1/2}, \ |B^{(P)}_{xx}| \leq C_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\partial_x \log |A^{(P)}_x|| &= |\partial_x \log |B^{(P)}_y|| \leq C_0, \\ |\partial_y \log |A^{(P)}_x|| &= |\partial_y \log |B^{(P)}_y|| \leq C_0. \end{aligned}$$

On dira alors que P est C_0 - régulier. La contraction verticale de $H^n_{/P}$ est représentée par $B^{(P)}_y$, son expansion horizontale par $A^{(P)-1}_x$ et on a

$$B^{(P)}_y = b^n A^{(P)}_x$$

Il est facile de vérifier que pour une constante C_0 appropriée (indépendante de b) les rectangles

$$\begin{aligned} \mathscr{B}^+_n &= \{\, |y| \leq 3,\ \varphi_{\alpha^{(n)}}\,(y) \leq x \leq \varphi_{\alpha^{(n-1)}}\,(y)\, \}, \\ \mathscr{B}^-_n &= \{\, |y| \leq 3,\ \varphi_{-\alpha^{(n)}}\,(y) \geq x \geq \varphi_{-\alpha^{(n-1)}}\,(y)\, \}, \end{aligned}$$

sont C_0 - réguliers d'ordre n pour tout $n > 0$, et que les rectangles

$$\begin{aligned} \mathscr{C}^+_n &= \{\, |y| \leq 3,\ \varphi_{\hat{\alpha}^{(n-1)}}\,(y) \leq x \leq \varphi_{\hat{\alpha}^{(n)}}\,(y)\, \}, \\ \mathscr{C}^-_n &= \{\, |y| \leq 3,\ \varphi_{-\hat{\alpha}^{(n-1)}}\,(y) \geq x \geq \varphi_{-\hat{\alpha}^{(n)}}\,(y)\, \} \end{aligned}$$

sont C_0 - réguliers d'ordre n pour $1 < n < M - 1$.

Notons que les $\overset{+}{\mathscr{B}}_n$ (resp. les $\mathscr{B}^-_n$) forment une subdivision de la composante gauche (resp. droite) de $\mathscr{R} - \mathscr{A}$, tandis que les $\mathscr{C}^+_n$ (resp. les $\mathscr{C}^-_n$), $1 < n < M$, forment une subdivision de la composante gauche (resp. droite) de $\mathscr{A} - \mathscr{A}_M$.

Une propriété essentielle de la famille des rectangles réguliers est la suivante : soient P, P' des rectangles réguliers, d'ordres respectifs n et n' ; supposons que P' soit contenu dans $\mathscr{A}$; alors l'intersection $P'' = P \cap (H^n)^{-1}\,(P')$ est un rectangle régulier d'ordre $n + n'$.

A un rectangle régulier P, on associe l'ensemble $N(P)$ formé des entiers $0 < m \leq$ ord (P) tels que $H^m(P)$ soit contenu dans un rectangle régulier d'ordre ord $(P) - m$, et aussi contenu dans $\mathscr{A}$. Cet ensemble est non vide car il contient ord (P). Si P' est régulier et contenu dans P, tout élément de $N(P')$ inférieur ou égal à ord (P) appartient aussi à $N(P)$.

On peut alors définir une dynamique « symbolique » de la façon suivante. Considérons l'ensemble $\mathscr{R}_\infty$ des suites

$$\underline{P} = (P_0 = \mathscr{A}, P_1, \ldots, P_k, \ldots)$$

où les P_i sont des rectangles réguliers vérifiant :

(i) $P_{i+1} \subset P_i$, $P_{i+1} \neq P_i$;

(ii) si P est régulier et $P_{i+1} \subset P \subset P_i$, alors $P = P_i$ ou $P = P_{i+1}$.

Une telle suite est dite **régulière** s'il existe un entier m qui appartient à $N(P_i)$ pour tout i assez grand. Le plus petit de ces entiers est appelé **ordre** de la suite. On note $\mathscr{R}^0_\infty$ l'ensemble des suites régulières. Si $\underline{P}$ est une suite régulière, il existe un unique entier k tel que ord $(\underline{P})$ = ord (P_k). On pose

$$T(\underline{P}) = \underline{\tilde{P}},$$

où $\tilde{P}_i$ est le rectangle régulier, d'ordre ord (P_{i+k}) − ord (P_k), qui contient $H^{\mathrm{ord}(\underline{P})}$ (P_{i+k}).

On définit ainsi une application T de $\mathscr{R}^0_\infty$ dans $\mathscr{R}_\infty$, qui vérifie la propriété (de Bernoulli) suivante : désignons par $\mathscr{R}^0$ l'ensemble des rectangles réguliers P contenus dans $\mathscr{A}$ tels que $N(P) = \{\mathrm{ord}\ (P)\}$; pour $P \in \mathscr{R}^0$, désignons par $\mathscr{R}^0_\infty(P)$ l'ensemble des suites régulières qui contiennent P et dont l'ordre est celui de P. On a alors une partition

$$\mathscr{R}^0_\infty = \bigsqcup_{\mathscr{R}^0} \mathscr{R}^0_\infty(P)$$

et, pour chaque $P \in \mathscr{R}^0$, la restriction de T à $\mathscr{R}^0_\infty(P)$ est une **bijection** sur $\mathscr{R}_\infty$.

L'étape suivante est d'introduire une classe de mesures naturelle sur $\mathscr{R}_\infty$. Pour ceci, on considère l'ensemble $\mathscr{T}$ des graphes $\Gamma\varphi = \{y = \varphi(x)\}$ contenus dans $\mathscr{A}$, dont les extrémités appartiennent à $\gamma(\pm\alpha)$, et vérifiant

$$Lip\ (\varphi) \leq C_1.$$

Si $\underline{P}$ est une suite de $\mathscr{R}_\infty$, l'intersection $I(\underline{P}) = \bigcap_{i\geq 0} P_i$ est un arc essentiellement vertical qui coupe Γ_φ en un unique point noté $\pi_\varphi(\underline{P})$; l'application π_φ est essentiellement injective.

Sans hypothèse sur le paramètre, l'image $\pi_\varphi(\mathscr{R}_\infty)$ peut être de mesure (linéaire) nulle. On impose donc au paramètre c (b étant fixé) de vérifier la propriété suivante : il existe des constantes $C_2 > 0, \theta > 0, \rho \gg 1$ telles que, pour tout rectangle régulier $P \subset \mathscr{A}$ et tout entier $n \leq \rho$ ord (P), on ait

$$m\ \Big(\pi_\varphi(P) - \bigcup_{\substack{P' \subset P \\ \mathrm{ord}(P) < \mathrm{ord}(P') \leq \mathrm{ord}(P)+n}} \pi_\varphi(P')\Big) \leq C_2\, 2^{-\theta n}\, m(\pi_\varphi(P)),$$

où, m désigne la mesure de Lebesgue sur Γ_φ (induite par la coordonnée x). Un tel paramètre est dit **régulier,** et cette condition est indépendante de φ.

Supposons le paramètre régulier. Alors $\pi_\varphi(\mathscr{R}_\infty)$ est de mesure positive, ce qui permet de transporter sur $\mathscr{R}_\infty$ la restriction de la mesure de Lebesgue à cet ensemble. On obtient une mesure positive finie μ_φ ; on considère l'ensemble $\mathscr{M}$ des combinaisons barycentriques de ces mesures (Γ_φ décrivant $\mathscr{T}$).

On établit alors que

(a) les mesures de $\mathscr{M}$ sont équivalentes entre elles ;

(b) on a $\mu(\mathscr{R}_\infty - \mathscr{R}^0_\infty) = 0$, pour tout $\mu \in \mathscr{M}$;

(c) l'application $\mu \to T_*\mu$ envoie $\mathscr{M}$ dans $\mathscr{M}$;

(d) cette application possède un unique point fixe μ_0, et cette mesure T - invariante sur $\mathscr{R}_\infty$ est ergodique.

A partir de μ_0, il est facile de reconstituer la mesure de Sinaï-Ruelle-Bowen de l'attracteur. On considère d'abord l'espace

$$\tilde{\mathscr{R}}_\infty = \{(\underline{P},z),\ \underline{P} \in \mathscr{R}_\infty,\ z \in I(\underline{P})\ \},$$

et la projection

$$\pi : (\underline{P},z) \mapsto z$$

qui est essentiellement injective. L'application T se relève en une application $\tilde{T} : \tilde{\mathscr{R}}^0_\infty \to \tilde{\mathscr{R}}_\infty$ contractante dans les fibres :

$$\tilde{T}(\underline{P},z) = (T(\underline{P}),\ H^{\mathrm{ord}(\underline{P})}\ (z)).$$

La mesure μ_0 se relève de façon unique en une mesure $\tilde{T}$ - invariante μ_1 sur $\tilde{\mathscr{R}}_\infty$. Enfin, si ψ est une fonction continue sur $\mathscr{R}$, la formule

$$S\psi(\underline{P},z) = \sum_{i=0}^{\mathrm{ord}(\underline{P})-1} \psi\left(H^i(z)\right)$$

définit une fonction μ_1 - intégrable sur $\tilde{\mathscr{R}}^0_\infty$.

On pose

$$\int \psi d\mu_H = \int S\psi d\mu_I\ ;$$

il n'est alors pas difficile de voir que la mesure μ_H est la mesure de Sinaï-Bowen-Ruelle cherchée ; elle est H-invariante, ergodique. Ses exposants de Lyapunov vérifient

$$\lambda_1 \simeq \log 2,$$
$$\lambda_2 = \log b - \lambda_1 \simeq \log \frac{b}{2}.$$

Elle décrit le comportement asymptotique de presque toute orbite dans $\mathscr{R}$, car on a

$$m_2(\mathscr{R} - \bigcup_{n \geq 0} H^{-n}\ (\pi(\tilde{\mathscr{R}}_\infty))) = 0$$

(m_2 étant la mesure de Lebesgue dans le plan).

Il reste bien entendu à montrer que l'ensemble des paramètres réguliers est de mesure positive (il n'est d'ailleurs pas du tout évident qu'il soit non vide !).

On procède en trois temps :

— on définit un ensemble de paramètres **fortement réguliers** (cf. ci-dessous) ;

— on montre que ces paramètres sont réguliers ;

— on prouve enfin que l'ensemble des paramètres fortement réguliers est de mesure positive.

La preuve des deux derniers points est analogue à celle du cas unidimensionnel (théorème de Jakobson ; cf. le cours de l'année dernière). Expliquons de quelle façon sont définis les paramètres fortement réguliers. Ces paramètres sont reliés, dans l'espace dynamique, à un **ensemble** (de Cantor) **critique** défini inductivement par une suite de **régions critiques.**

On part d'une **région critique d'ordre 0,** qui est le rectangle central $\mathscr{A}_M$. Son image par H^M est un rectangle « parabolique » contenu dans $\mathscr{A}$ (les deux bords verticaux étant contenus dans $\gamma(\alpha)$). On pose $N_0(\mathscr{A}_M) = M$. On procède ensuite de la façon suivante :

— s'il existe un rectangle régulier $P \subset \mathscr{A}$, distinct de $\mathscr{A}$, tel que $H^M(\mathscr{A}_M) \cap \underline{P}$ soit un sous-rectangle parabolique de $\underline{P}$ (c'est-à-dire que la « pointe » de $H^M(\mathscr{A}_M)$ est contenue dans $\underline{P}$), on choisit un tel rectangle maximal, et on effectue une **localisation horizontale :** la région critique $\mathscr{A}_M$ est remplacée par $\mathscr{A}^1_M = \mathscr{A}_M \cap H^{-M}(\underline{P})$, encore d'ordre 0 ; on pose $N_1(\mathscr{A}_M) = M + \text{ord}\ (\underline{P})$ et on considère ensuite $H^{N_1}(\mathscr{A}^1_M)$ au lieu de $H^M(\mathscr{A}_M)$.

— sinon, on procède à une **subdivision verticale** ; l'intersection $\mathscr{A}_M \cap H(\mathscr{R})$ est constituée de deux composantes connexes notées $\mathscr{A}^+_M$ et $\mathscr{A}^-_M$, qui sont des régions critiques d'ordre 1 ; on exige alors du paramètre que ces régions puissent être localisées horizontalement, c'est-à-dire qu'il existe des rectangles réguliers (maximaux) $P^\pm$ tels que $H^M(\mathscr{A}^\pm_M) \cap P^\pm$ soit un sous-rectangle parabolique de $P^\pm$. On posera

$$N_1\,(\mathscr{A}^\pm_M) = M + \text{ord}\,(P^\pm),$$

et on considèrera ensuite $H^{N_1(\mathscr{A}^\pm_M)}\,(\mathscr{A}^\pm_M)$.

On définit ainsi par induction, pour chaque entier l, un ensemble $Cr(l)$ des régions critiques d'ordre l (où deux régions critiques déduites l'une de l'autre par localisation horizontale sont identifiées). L'ensemble $Cr(0)$ a un seul élément, l'ensemble $Cr(1)$ en a deux (correspondant à $(\mathscr{A}^\pm_M)$, et plus généralement on a

$$\#\ Cr(l) \leq 2^l.$$

L'inclusion induit des applications

$$Cr(l) \xrightarrow{i} Cr(l-1).$$

On exige par induction la propriété suivante : soit U une région critique d'ordre l, localisée horizontalement autant que faire se peut, représentant un élément $u \in Cr(l)$. Notons $\underline{P}(u)$ la suite finie

$$P_0 = \mathscr{A} \supseteq P_1 \supseteq \dots \supseteq P_k$$

des rectangles réguliers contenant la « pointe » de rectangle parabolique $H^M(\mathrm{U})$; on pose

$$\mathrm{N}_i(u) = M + \mathrm{ord}(P_i),\ 0 \le i \le k$$

et on exige

$$N_k(u) \ge \rho l \ (\rho \gg 1).$$

Observons que, pour $\tilde{u} = i(u) \in Cr(l-1)$, et

$$\underline{P}(\tilde{u}) = \{\tilde{P}_0 = \mathscr{A} \supseteq \tilde{P}_1 \supseteq \dots \supseteq \tilde{P}_{\tilde{k}}\},$$

on a $\tilde{k} \le k$ et $\tilde{P}_i = P_i$ pour $0 \le i \le \tilde{k}$ (donc $N_i(\tilde{u}) = N_i(u)$, $0 \le i \le \tilde{k}$). Pour que le paramètre soit fortement régulier, on exige en sus des conditions précédentes d'avoir

$$\sum_{i=1}^{j} (N_i(u) - N_{i-1}(u)) \le \rho^{-1} j,$$

$$N_i(u) - N_{i-1}(u) \ge M$$

pour tous $l \ge 0$, $u \in Cr(l)$, $1 \le j \le k$.

[Lorsque $n_i = N_i(u) - N_{i-1}(u) < M$, on a

$$H^{\mathrm{ord}(P_{i-1})}(P_i) = H^{\mathrm{ord}(P_{i-1})}(P_{i-1}) \cap C^{\pm}_{n_i}$$

et on possède de très bonnes estimées sur les $C^{\pm}_n$; lorsque $n_i \ge M$, on a

$$H^{\mathrm{ord}(P_{i-1})}(P_i) \subset \mathscr{A}_M \cup C^{+}_{M-1} \cup C^{-}_{M-1},$$

et on contrôle moins bien l'expansion ; on exige que ce deuxième cas se produise peu fréquemment.]

Le schéma d'analyse des attracteurs de Hénon qui a été présenté succinctement ci-dessus est susceptible d'être appliqué dans d'autres situations où l'on suspecte qu'une dynamique non uniformément hyperbolique se manifeste avec probabilité positive sur les paramètres.

Une telle situation est celle des bifurcations homoclines, dont le cadre a été présenté dans la fin du cours. Elle fera l'objet du cours en 1998-1999.

PUBLICATION

avec Patrice LE CALVEZ,

Un théorème d'indice pour les homéomorphismes du plan au voisinage d'un point fixe. Annals of Mathematics, **146,** (1997), 241-293.

Conférences à l'étranger

Octobre 1997 : une conférence à l'Université d'Oslo.

Novembre 1997 : deux conférences à l'Université de Jérusalem (Hebrew University).

Décembre 1997 : deux conférences à l'Université de Florence.

7 Avril 1998 : une conférence à l'Université de Liverpool.

8 Avril 1998 : une conférence dans le cadre du British Mathematical Colloquium à Manchester.

11-16 Mai 1998 : une conférence dans le cadre d'une réunion sur la dynamique non uniformément hyperbolique à l'Université KTH de Stockholm.

22-23 Mai 1998 : une conférence à Londres lors d'une réunion organisée par les London Mathematical Society et Irish Mathematical Society.

13-20 Juin 1998 : co-directeur d'une École d'été (dans le cadre du CIME) sur les petits diviseurs à Cetraro (Italie) ; 8 heures de cours dans le cadre de cette École.