Quelques aspects de la théorie des systèmes dynamiques hyperboliques (5)

Jean-Christophe Yoccoz

Collège de France

18 février 2015

Une référence

Omri Sarig

Lecture notes on Ergodic Theory

www.wisdom.weizmann.ac.il/ sarigo/506/ErgodicNotes.pdf

L'entropie métrique

Soit $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace de probabilité, et soit $f : X \to X$ une transformation préservant la mesure.

L'entropie métrique

Soit $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace de probabilité, et soit $f : X \to X$ une transformation préservant la mesure.

En théorie de l'information (Shannon), l'*entropie* d'une partition mesurable finie $\mathcal{C}$ de X est définie par

$$H_\mu(\mathcal{C}) = -\sum_{C \in \mathcal{C}} \mu(C) \log \mu(C).$$

L'entropie métrique

Soit $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace de probabilité, et soit $f : X \to X$ une transformation préservant la mesure.
En théorie de l'information (Shannon), l'*entropie* d'une partition mesurable finie $\mathcal{C}$ de X est définie par

$$H_\mu(\mathcal{C}) = -\sum_{C \in \mathcal{C}} \mu(C) \log \mu(C).$$

Notons $f^*\mathcal{C}$ la partition de X par les ensembles $f^{-1}(C)$, $C \in \mathcal{C}$.

L'entropie métrique

Soit $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace de probabilité, et soit $f : X \to X$ une transformation préservant la mesure.

En théorie de l'information (Shannon), l'*entropie* d'une partition mesurable finie $\mathcal{C}$ de X est définie par

$$H_\mu(\mathcal{C}) = -\sum_{C \in \mathcal{C}} \mu(C) \log \mu(C).$$

Notons $f^*\mathcal{C}$ la partition de X par les ensembles $f^{-1}(C)$, $C \in \mathcal{C}$. On a

$$H_\mu(f^*\mathcal{C}) = H_\mu(\mathcal{C}).$$

L'entropie métrique

Soit $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace de probabilité, et soit $f : X \to X$ une transformation préservant la mesure.
En théorie de l'information (Shannon), l'*entropie* d'une partition mesurable finie $\mathcal{C}$ de X est définie par

$$H_\mu(\mathcal{C}) = -\sum_{C \in \mathcal{C}} \mu(C) \log \mu(C).$$

Notons $f^*\mathcal{C}$ la partition de X par les ensembles $f^{-1}(C)$, $C \in \mathcal{C}$. On a

$$H_\mu(f^*\mathcal{C}) = H_\mu(\mathcal{C}).$$

Pour des partitions mesurables finies $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ de X, notons $\mathcal{C} \vee \mathcal{D}$ la partition par les intersections $C \cap D$, $C \in \mathcal{C}$, $D \in \mathcal{D}$.

L'entropie métrique

Soit $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace de probabilité, et soit $f : X \to X$ une transformation préservant la mesure.
En théorie de l'information (Shannon), l'*entropie* d'une partition mesurable finie $\mathcal{C}$ de X est définie par

$$H_\mu(\mathcal{C}) = -\sum_{C \in \mathcal{C}} \mu(C) \log \mu(C).$$

Notons $f^*\mathcal{C}$ la partition de X par les ensembles $f^{-1}(C)$, $C \in \mathcal{C}$. On a

$$H_\mu(f^*\mathcal{C}) = H_\mu(\mathcal{C}).$$

Pour des partitions mesurables finies $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ de X, notons $\mathcal{C} \vee \mathcal{D}$ la partition par les intersections $C \cap D$, $C \in \mathcal{C}$, $D \in \mathcal{D}$. De la concavité de la fonction $x \mapsto -x \log x$, il résulte que

$$H_\mu(\mathcal{C} \vee \mathcal{D}) \leqslant H_\mu(\mathcal{C}) + H_\mu(\mathcal{D}).$$

Pour une partition mesurable finie $\mathcal{C}$ de X et un entier $n \geqslant 1$, notons

$$\vee^n \mathcal{C} := \mathcal{C} \vee f^* \mathcal{C} \vee \ldots \vee (f^{n-1})^* \mathcal{C}.$$

Pour une partition mesurable finie $\mathcal{C}$ de X et un entier $n \geqslant 1$, notons

$$\vee^n \mathcal{C} := \mathcal{C} \vee f^* \mathcal{C} \vee \ldots \vee (f^{n-1})^* \mathcal{C}.$$

La suite $(H_\mu(\vee^n \mathcal{C}))_{n \geqslant 1}$ est sous-additive

$$H_\mu(\vee^{m+n} \mathcal{C}) \leqslant H_\mu(\vee^m \mathcal{C}) + H_\mu(\vee^n \mathcal{C}).$$

Pour une partition mesurable finie $\mathcal{C}$ de X et un entier $n \geqslant 1$, notons

$$\vee^n \mathcal{C} := \mathcal{C} \vee f^* \mathcal{C} \vee \ldots \vee (f^{n-1})^* \mathcal{C}.$$

La suite $(H_\mu(\vee^n \mathcal{C}))_{n \geqslant 1}$ est sous-additive

$$H_\mu(\vee^{m+n} \mathcal{C}) \leqslant H_\mu(\vee^m \mathcal{C}) + H_\mu(\vee^n \mathcal{C}).$$

On peut donc définir

$$h_\mu(f, \mathcal{C}) := \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} H_\mu(\vee^n \mathcal{C}) = \inf_{n \geqslant 1} \frac{1}{n} H_\mu(\vee^n \mathcal{C}).$$

Pour une partition mesurable finie $\mathcal{C}$ de X et un entier $n \geqslant 1$, notons

$$\vee^n \mathcal{C} := \mathcal{C} \vee f^* \mathcal{C} \vee \ldots \vee (f^{n-1})^* \mathcal{C}.$$

La suite $(H_\mu(\vee^n \mathcal{C}))_{n \geqslant 1}$ est sous-additive

$$H_\mu(\vee^{m+n} \mathcal{C}) \leqslant H_\mu(\vee^m \mathcal{C}) + H_\mu(\vee^n \mathcal{C}).$$

On peut donc définir

$$h_\mu(f, \mathcal{C}) := \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} H_\mu(\vee^n \mathcal{C}) = \inf_{n \geqslant 1} \frac{1}{n} H_\mu(\vee^n \mathcal{C}).$$

L' *entropie métrique* de f est égale à

$$h_\mu(f) := \sup_{\mathcal{C}} h_\mu(f, \mathcal{C}) \in [0, +\infty].$$

Propriétés élémentaires

Propriétés élémentaires

- Pour tout $k \geqslant 1$, $h_\mu(f^k) = k h_\mu(f)$.

Propriétés élémentaires

- Pour tout $k \geqslant 1$, $h_\mu(f^k) = k h_\mu(f)$.
- Lorsque f est inversible, $h_\mu(f^{-1}) = h_\mu(f)$.

Propriétés élémentaires

- Pour tout $k \geqslant 1$, $h_\mu(f^k) = k h_\mu(f)$.
- Lorsque f est inversible, $h_\mu(f^{-1}) = h_\mu(f)$.
- Soient $(Y, \mathfrak{C}, \nu)$ un autre espace de probabilité et $g : Y \to Y$ une transformation préservant ν.

Propriétés élémentaires

- Pour tout $k \geqslant 1$, $h_\mu(f^k) = kh_\mu(f)$.
- Lorsque f est inversible, $h_\mu(f^{-1}) = h_\mu(f)$.
- Soient $(Y, \mathfrak{C}, \nu)$ un autre espace de probabilité et $g : Y \to Y$ une transformation préservant ν. Supposons qu'il existe une application mesurable $h : X \to Y$ qui vérifie $h_*\mu = \nu$ et $h \circ f = g \circ h$ (on dit que g est un *facteur* de f).

Propriétés élémentaires

- Pour tout $k \geqslant 1$, $h_\mu(f^k) = k h_\mu(f)$.
- Lorsque f est inversible, $h_\mu(f^{-1}) = h_\mu(f)$.
- Soient $(Y, \mathfrak{C}, \nu)$ un autre espace de probabilité et $g : Y \to Y$ une transformation préservant ν. Supposons qu'il existe une application mesurable $h : X \to Y$ qui vérifie $h_* \mu = \nu$ et $h \circ f = g \circ h$ (on dit que g est un *facteur* de f).
  Alors on a $h_\nu(g) \leqslant h_\mu(f)$.

Propriétés élémentaires

- Pour tout $k \geqslant 1$, $h_\mu(f^k) = k h_\mu(f)$.
- Lorsque f est inversible, $h_\mu(f^{-1}) = h_\mu(f)$.
- Soient $(Y, \mathfrak{C}, \nu)$ un autre espace de probabilité et $g : Y \to Y$ une transformation préservant ν. Supposons qu'il existe une application mesurable $h : X \to Y$ qui vérifie $h_* \mu = \nu$ et $h \circ f = g \circ h$ (on dit que g est un *facteur* de f).
  Alors on a $h_\nu(g) \leqslant h_\mu(f)$.

  En particulier, l'entropie métrique est préservée par une conjugaison préservant la mesure.

Le théorème de Shannon-Breiman-McMillan

Soit $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace de probabilité, et soit $f : X \to X$ une transformation préservant la mesure.

Le théorème de Shannon-Breiman-McMillan

Soit $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace de probabilité, et soit $f : X \to X$ une transformation préservant la mesure. Soit $\mathcal{C}$ une partition mesurable finie de X.

Le théorème de Shannon-Breiman-McMillan

Soit $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace de probabilité, et soit $f : X \to X$ une transformation préservant la mesure. Soit $\mathcal{C}$ une partition mesurable finie de X. Pour $n \geqslant 1$ et $x \in X$, notons $\mathcal{C}_n(x)$ l'élément de $\vee^n \mathcal{C}$ qui contient x.

Le théorème de Shannon-Breiman-McMillan

Soit $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace de probabilité, et soit $f : X \to X$ une transformation préservant la mesure. Soit $\mathcal{C}$ une partition mesurable finie de X. Pour $n \geqslant 1$ et $x \in X$, notons $\mathcal{C}_n(x)$ l'élément de $\vee^n \mathcal{C}$ qui contient x.

Théorème: (Shannon-Breiman-McMillan) Supposons que f soit ergodique.

Le théorème de Shannon-Breiman-McMillan

Soit $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace de probabilité, et soit $f : X \to X$ une transformation préservant la mesure. Soit $\mathcal{C}$ une partition mesurable finie de X. Pour $n \geqslant 1$ et $x \in X$, notons $\mathcal{C}_n(x)$ l'élément de $\vee^n \mathcal{C}$ qui contient x.

Théorème: (Shannon-Breiman-McMillan) Supposons que f soit ergodique. Alors, pour presque tout $x \in X$, on a

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log(\mu(\mathcal{C}_n(x))) = -h_\mu(f, \mathcal{C}).$$

Une définition alternative de l'entropie

Soient (X, d) un espace métrique compact, μ une mesure de probabilité borélienne sur X, et $f : X \to X$ une application continue préservant μ.

Une définition alternative de l'entropie

Soient (X, d) un espace métrique compact, μ une mesure de probabilité borélienne sur X, et $f : X \to X$ une application continue préservant μ.

Pour $x \in X$, $n \geqslant 1$, $\varepsilon > 0$, notons $B_n(x, \varepsilon)$ la boule ouverte de centre x, de rayon ε, pour la distance

$$d_n(x, y) = \max_{0 \leqslant j < n} d(f^j(x), f^j(y)).$$

Une définition alternative de l'entropie

Soient (X, d) un espace métrique compact, μ une mesure de probabilité borélienne sur X, et $f : X \to X$ une application continue préservant μ.

Pour $x \in X$, $n \geqslant 1$, $\varepsilon > 0$, notons $B_n(x, \varepsilon)$ la boule ouverte de centre x, de rayon ε, pour la distance

$$d_n(x, y) = \max_{0 \leqslant j < n} d(f^j(x), f^j(y)).$$

Théorème: (Mañé, Brin-Katok) Supposons que f soit ergodique.

Une définition alternative de l'entropie

Soient (X, d) un espace métrique compact, μ une mesure de probabilité borélienne sur X, et $f : X \to X$ une application continue préservant μ.

Pour $x \in X$, $n \geqslant 1$, $\varepsilon > 0$, notons $B_n(x, \varepsilon)$ la boule ouverte de centre x, de rayon ε, pour la distance

$$d_n(x, y) = \max_{0 \leqslant j < n} d(f^j(x), f^j(y)).$$

Théorème: (Mañé, Brin-Katok) Supposons que f soit ergodique. Alors, pour μ-presque tout $x \in X$, on a

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log(\mu(B_n(x, \varepsilon))) = -h_\mu(f).$$

Le principe variationnel

Soient (X, d) un espace métrique compact et $f : X \to X$ une application continue.

Le principe variationnel

Soient (X, d) un espace métrique compact et $f : X \to X$ une application continue.

Théorème: (Bowen) On a

$$h(f) = \sup_{\mu} h_{\mu}(f),$$

Le principe variationnel

Soient (X, d) un espace métrique compact et $f : X \to X$ une application continue.

Théorème: (Bowen) On a

$$h(f) = \sup_{\mu} h_{\mu}(f),$$

où le supremum est pris sur l'ensemble $\mathcal{M}(f)$ des mesures de probabilité boréliennes f-invariantes sur X.

Le principe variationnel

Soient (X, d) un espace métrique compact et $f : X \to X$ une application continue.

Théorème: (Bowen) On a

$$h(f) = \sup_{\mu} h_\mu(f),$$

où le supremum est pris sur l'ensemble $\mathcal{M}(f)$ des mesures de probabilité boréliennes f-invariantes sur X.

Voici une version plus générale du résultat précédent.

Le principe variationnel

Soient (X, d) un espace métrique compact et $f : X \to X$ une application continue.

Théorème: (Bowen) On a

$$h(f) = \sup_{\mu} h_{\mu}(f),$$

où le supremum est pris sur l'ensemble $\mathcal{M}(f)$ des mesures de probabilité boréliennes f-invariantes sur X.

Voici une version plus générale du résultat précédent. Pour un recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de X et une fonction continue $\varphi \in C(X)$, posons

$$|\mathcal{U}|_{\varphi} = \inf_{\mathcal{V} \subset \mathcal{U}} \sum_{V \in \mathcal{V}} \exp(\sup_{V} \varphi),$$

Le principe variationnel

Soient (X, d) un espace métrique compact et $f : X \to X$ une application continue.

Théorème: (Bowen) On a

$$h(f) = \sup_{\mu} h_{\mu}(f),$$

où le supremum est pris sur l'ensemble $\mathcal{M}(f)$ des mesures de probabilité boréliennes f-invariantes sur X.

Voici une version plus générale du résultat précédent. Pour un recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de X et une fonction continue $\varphi \in C(X)$, posons

$$|\mathcal{U}|_{\varphi} = \inf_{\mathcal{V} \subset \mathcal{U}} \sum_{V \in \mathcal{V}} \exp(\sup_{V} \varphi),$$

où l'infimum est pris sur les sous-recouvrements $\mathcal{V}$ de $\mathcal{U}$.

Pour $n \geqslant 1$, notons $S_n \varphi$ la somme de Birkhoff $\sum_0^{n-1} \varphi \circ f^j$.

Pour $n \geqslant 1$, notons $S_n\varphi$ la somme de Birkhoff $\sum_0^{n-1} \varphi \circ f^j$. Posons

$$P(\varphi, \mathcal{U}) := \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log | \vee^n \mathcal{U}|_{S_n\varphi},$$

Pour $n \geqslant 1$, notons $S_n\,\varphi$ la somme de Birkhoff $\sum_0^{n-1} \varphi \circ f^j$. Posons

$$P(\varphi, \mathcal{U}) := \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log |\vee^n\, \mathcal{U}|_{S_n\varphi},$$

où la convergence résulte de la sous-multiplicativité de la suite considérée.

Pour $n \geqslant 1$, notons $S_n \varphi$ la somme de Birkhoff $\sum_0^{n-1} \varphi \circ f^j$. Posons

$$P(\varphi, \mathcal{U}) := \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log | \vee^n \mathcal{U}|_{S_n \varphi},$$

où la convergence résulte de la sous-multiplicativité de la suite considérée.
La *pression* de φ est définie par

$$P(\varphi) = \sup_{\mathcal{U}} P(\varphi, \mathcal{U}).$$

Pour $n \geqslant 1$, notons $S_n \varphi$ la somme de Birkhoff $\sum_0^{n-1} \varphi \circ f^j$. Posons

$$P(\varphi, \mathcal{U}) := \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log |\vee^n \mathcal{U}|_{S_n \varphi},$$

où la convergence résulte de la sous-multiplicativité de la suite considérée.
La *pression* de φ est définie par

$$P(\varphi) = \sup_{\mathcal{U}} P(\varphi, \mathcal{U}).$$

On observera que $P(0) = h(f)$.

Pour $n \geqslant 1$, notons $S_n\varphi$ la somme de Birkhoff $\sum_0^{n-1} \varphi \circ f^j$. Posons

$$P(\varphi, \mathcal{U}) := \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log |\vee^n \mathcal{U}|_{S_n\varphi},$$

où la convergence résulte de la sous-multiplicativité de la suite considérée.
La *pression* de φ est définie par

$$P(\varphi) = \sup_{\mathcal{U}} P(\varphi, \mathcal{U}).$$

On observera que $P(0) = h(f)$.

La forme générale du principe variationnel est

Pour $n \geqslant 1$, notons $S_n \varphi$ la somme de Birkhoff $\sum_0^{n-1} \varphi \circ f^j$. Posons

$$P(\varphi, \mathcal{U}) := \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log | \vee^n \mathcal{U}|_{S_n \varphi},$$

où la convergence résulte de la sous-multiplicativité de la suite considérée.
La *pression* de φ est définie par

$$P(\varphi) = \sup_{\mathcal{U}} P(\varphi, \mathcal{U}).$$

On observera que $P(0) = h(f)$.

La forme générale du principe variationnel est

$$P(\varphi) = \sup_{\mu \in \mathcal{M}(f)} (h_\mu(f) + \int \varphi \, d\mu).$$

Le théorème ergodique multiplicatif d'Oseledec

Soit $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace de probabilité, et soit $f : X \to X$ une transformation préservant la mesure.

Le théorème ergodique multiplicatif d'Oseledec

Soit $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace de probabilité, et soit $f : X \to X$ une transformation préservant la mesure. Soit $A : X \to GL(d, \mathbb{R})$ une application mesurable.

Le théorème ergodique multiplicatif d'Oseledec

Soit $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace de probabilité, et soit $f : X \to X$ une transformation préservant la mesure. Soit $A : X \to GL(d, \mathbb{R})$ une application mesurable.

Définition: Le *cocycle* défini par A au dessus de f est la transformation F_A de $X \times \mathbb{R}^d$ définie par

$$F_A(x, v) = (f(x), A(x).v).$$

Le théorème ergodique multiplicatif d'Oseledec

Soit $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace de probabilité, et soit $f : X \to X$ une transformation préservant la mesure. Soit $A : X \to GL(d, \mathbb{R})$ une application mesurable.

Définition: Le *cocycle* défini par A au dessus de f est la transformation F_A de $X \times \mathbb{R}^d$ définie par

$$F_A(x, v) = (f(x), A(x).v).$$

Pour $n \geqslant 1$, on a

$$F_A^n(x, v) = (f^n(x), A_n(x).v), \quad A_n(x) := A(f^{n-1}(x)) \dots A(x).$$

Le théorème ergodique multiplicatif d'Oseledec

Soit $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace de probabilité, et soit $f : X \to X$ une transformation préservant la mesure. Soit $A : X \to GL(d, \mathbb{R})$ une application mesurable.

Définition: Le *cocycle* défini par A au dessus de f est la transformation F_A de $X \times \mathbb{R}^d$ définie par

$$F_A(x, v) = (f(x), A(x).v).$$

Pour $n \geqslant 1$, on a

$$F_A^n(x, v) = (f^n(x), A_n(x).v), \quad A_n(x) := A(f^{n-1}(x)) \dots A(x).$$

Définition: Le cocycle F_A est *intégrable* si $\log \|A\|$ et $\log \|A^{-1}\|$ appartiennent à $L^1(\mu)$.

Théorème: (Oseledec) Supposons que F_A soit intégrable.

Théorème: (Oseledec) Supposons que F_A soit intégrable. Pour presque tout $x \in X$, il existe un entier $r = r(x)$, Théorème: (Oseledec) Supposons que F_A soit intégrable. Pour presque tout $x \in X$, il existe un entier $r = r(x)$, des nombres réels $\theta_1(x) > \ldots > \theta_{r(x)}(x)$

Théorème: (Oseledec) Supposons que F_A soit intégrable. Pour presque tout $x \in X$, il existe un entier $r = r(x)$, des nombres réels $\theta_1(x) > \ldots > \theta_{r(x)}(x)$ et une filtration

$$V_0(x) = \mathbb{R}^d \supsetneq V_1(x) \supsetneq \ldots \supsetneq V_{r(x)} = \{0\},$$

vérifiant les propriétés suivantes:

Théorème: (Oseledec) Supposons que F_A soit intégrable. Pour presque tout $x \in X$, il existe un entier $r = r(x)$, des nombres réels $\theta_1(x) > \ldots > \theta_{r(x)}(x)$ et une filtration

$$V_0(x) = \mathbb{R}^d \supsetneq V_1(x) \supsetneq \ldots \supsetneq V_{r(x)} = \{0\},$$

vérifiant les propriétés suivantes:

- les applications $x \mapsto r(x)$, $x \mapsto \theta_i(x)$, $x \mapsto V_i(x)$ sont mesurables;

Théorème: (Oseledec) Supposons que F_A soit intégrable. Pour presque tout $x \in X$, il existe un entier $r = r(x)$, des nombres réels $\theta_1(x) > \ldots > \theta_{r(x)}(x)$ et une filtration

$$V_0(x) = \mathbb{R}^d \supsetneq V_1(x) \supsetneq \ldots \supsetneq V_{r(x)} = \{0\},$$

vérifiant les propriétés suivantes:

- les applications $x \mapsto r(x)$, $x \mapsto \theta_i(x)$, $x \mapsto V_i(x)$ sont mesurables;
- $r(f(x)) = r(x), \quad \theta_i(x) = \theta_i(f(x)), \quad A(x).V_i(x) = V_i(f(x));$

Théorème: (Oseledec) Supposons que F_A soit intégrable. Pour presque tout $x \in X$, il existe un entier $r = r(x)$, des nombres réels $\theta_1(x) > \ldots > \theta_{r(x)}(x)$ et une filtration

$$V_0(x) = \mathbb{R}^d \supsetneq V_1(x) \supsetneq \ldots \supsetneq V_{r(x)} = \{0\},$$

vérifiant les propriétés suivantes:

- les applications $x \mapsto r(x)$, $x \mapsto \theta_i(x)$, $x \mapsto V_i(x)$ sont mesurables;
- $r(f(x)) = r(x), \quad \theta_i(x) = \theta_i(f(x)), \quad A(x).V_i(x) = V_i(f(x));$
- pour tous $1 \leqslant i \leqslant r(x)$, $v \in V_{i-1}(x) - V_i(x)$, on a

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log \frac{\|A_n(x).v\|}{\|v\|} = \theta_i(x);$$

Compléments

Les nombres $\theta_i(x)$ sont les *exposants de Lyapunov* au point x.

Compléments

Les nombres $\theta_i(x)$ sont les *exposants de Lyapunov* au point x. L'entier $m_i(x) = \dim V_{i-1}(x) - \dim V_i(x)$ est la *multiplicité* de $\theta_i(x)$.

Compléments

Les nombres $\theta_i(x)$ sont les *exposants de Lyapunov* au point x. L'entier $m_i(x) = \dim V_{i-1}(x) - \dim V_i(x)$ est la *multiplicité* de $\theta_i(x)$. On a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log|\det A_n(x)| = \sum_i m_i(x)\theta_i(x).$$

Compléments

Les nombres $\theta_i(x)$ sont les *exposants de Lyapunov* au point x. L'entier $m_i(x) = \dim V_{i-1}(x) - \dim V_i(x)$ est la *multiplicité* de $\theta_i(x)$. On a

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log |\det A_n(x)| = \sum_i m_i(x)\theta_i(x).$$

Lorsque f est ergodique, les applications r, θ_i sont p.p. constantes.

Compléments

Les nombres $\theta_i(x)$ sont les *exposants de Lyapunov* au point x. L'entier $m_i(x) = \dim V_{i-1}(x) - \dim V_i(x)$ est la *multiplicité* de $\theta_i(x)$. On a

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log |\det A_n(x)| = \sum_i m_i(x)\theta_i(x).$$

Lorsque f est ergodique, les applications r, θ_i sont p.p. constantes.

Lorsque f est inversible, en appliquant le théorème précédent à F_A et F_A^{-1}, on obtient

Théorème: Supposons que f soit inversible

Théorème: Supposons que f soit inversible et que F_A soit intégrable.

Théorème: Supposons que f soit inversible et que F_A soit intégrable. Pour presque tout $x \in X$, il existe une décomposition

$$\mathbb{R}^d = \oplus_{1 \leqslant i \leqslant r(x)} E_i(x)$$

Théorème: Supposons que f soit inversible et que F_A soit intégrable. Pour presque tout $x \in X$, il existe une décomposition

$$\mathbb{R}^d = \oplus_{1 \leqslant i \leqslant r(x)} E_i(x)$$

telle qu'on ait, pour $1 \leqslant i \leqslant r(x)$, les propriétés suivantes:

Théorème: Supposons que f soit inversible et que F_A soit intégrable. Pour presque tout $x \in X$, il existe une décomposition

$$\mathbb{R}^d = \oplus_{1 \leqslant i \leqslant r(x)} E_i(x)$$

telle qu'on ait, pour $1 \leqslant i \leqslant r(x)$, les propriétés suivantes:

- L'application $x \mapsto E_i(x)$ est mesurable;

Théorème: Supposons que f soit inversible et que F_A soit intégrable. Pour presque tout $x \in X$, il existe une décomposition

$$\mathbb{R}^d = \oplus_{1 \leqslant i \leqslant r(x)} E_i(x)$$

telle qu'on ait, pour $1 \leqslant i \leqslant r(x)$, les propriétés suivantes:

- L'application $x \mapsto E_i(x)$ est mesurable;
- $A(x).E_i(x) = E_i(f(x))$;

Théorème: Supposons que f soit inversible et que F_A soit intégrable. Pour presque tout $x \in X$, il existe une décomposition

$$\mathbb{R}^d = \oplus_{1 \leqslant i \leqslant r(x)} E_i(x)$$

telle qu'on ait, pour $1 \leqslant i \leqslant r(x)$, les propriétés suivantes:

- L'application $x \mapsto E_i(x)$ est mesurable;
- $A(x).E_i(x) = E_i(f(x))$;
- pour $v \in E_i(x)$, $v \neq 0$,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log \frac{\|A_n(x).v\|}{\|v\|} = \lim_{n \to -\infty} \frac{1}{n} \log \frac{\|A_n(x).v\|}{\|v\|} = \theta_i(x);$$

Théorème: Supposons que f soit inversible et que F_A soit intégrable. Pour presque tout $x \in X$, il existe une décomposition

$$\mathbb{R}^d = \oplus_{1 \leqslant i \leqslant r(x)} E_i(x)$$

telle qu'on ait, pour $1 \leqslant i \leqslant r(x)$, les propriétés suivantes:

- L'application $x \mapsto E_i(x)$ est mesurable;
- $A(x).E_i(x) = E_i(f(x))$;
- pour $v \in E_i(x)$, $v \neq 0$,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log \frac{\|A_n(x).v\|}{\|v\|} = \lim_{n \to -\infty} \frac{1}{n} \log \frac{\|A_n(x).v\|}{\|v\|} = \theta_i(x);$$

- $\dim E_i(x) = m_i(x)$, $V_i(x) = \oplus_{i < j \leqslant r(x)} E_j(x)$.

Contrôle sous-exponentiel des angles

Dans la somme directe $\mathbb{R}^d = \oplus_{1 \leqslant i \leqslant r(x)} E_i(x)$, il est crucial pour les applications de contrôler les angles entre les sous-espaces $E_i(x)$, $E_j(x)$, $i \neq j$.

Contrôle sous-exponentiel des angles

Dans la somme directe $\mathbb{R}^d = \oplus_{1 \leqslant i \leqslant r(x)} E_i(x)$, il est crucial pour les applications de contrôler les angles entre les sous-espaces $E_i(x)$, $E_j(x)$, $i \neq j$.

Proposition: Pour presque tout $x \in X$, on a

Contrôle sous-exponentiel des angles

Dans la somme directe $\mathbb{R}^d = \oplus_{1 \leqslant i \leqslant r(x)} E_i(x)$, il est crucial pour les applications de contrôler les angles entre les sous-espaces $E_i(x)$, $E_j(x)$, $i \neq j$.

Proposition: Pour presque tout $x \in X$, on a

$$\lim_{n \to \pm\infty} \frac{1}{n} \log \angle(E_i(f^n(x)), E_j(f^n(x))) = 0, \quad \forall 1 \leqslant i < j \leqslant r(x).$$

Contrôle sous-exponentiel des angles

Dans la somme directe $\mathbb{R}^d = \oplus_{1\leqslant i\leqslant r(x)} E_i(x)$, il est crucial pour les applications de contrôler les angles entre les sous-espaces $E_i(x)$, $E_j(x)$, $i \neq j$.

Proposition: Pour presque tout $x \in X$, on a

$$\lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n} \log \angle(E_i(f^n(x)), E_j(f^n(x))) = 0, \quad \forall 1 \leqslant i < j \leqslant r(x).$$

Notons $p_i(x)$ la projection de $\mathbb{R}^d$ sur $E_i(x)$ associée à la décomposition $\mathbb{R}^d = \oplus_{1\leqslant i\leqslant r(x)} E_i(x)$. La conclusion de la proposition est équivalente à

Contrôle sous-exponentiel des angles

Dans la somme directe $\mathbb{R}^d = \oplus_{1 \leqslant i \leqslant r(x)} E_i(x)$, il est crucial pour les applications de contrôler les angles entre les sous-espaces $E_i(x)$, $E_j(x)$, $i \neq j$.

Proposition: Pour presque tout $x \in X$, on a

$$\lim_{n \to \pm\infty} \frac{1}{n} \log \angle(E_i(f^n(x)), E_j(f^n(x))) = 0, \quad \forall 1 \leqslant i < j \leqslant r(x).$$

Notons $p_i(x)$ la projection de $\mathbb{R}^d$ sur $E_i(x)$ associée à la décomposition $\mathbb{R}^d = \oplus_{1 \leqslant i \leqslant r(x)} E_i(x)$. La conclusion de la proposition est équivalente à

$$\lim_{n \to \pm\infty} \frac{1}{n} \log \|p_i(f^n(x))\| = 0, \quad \forall 1 \leqslant i \leqslant r(x).$$

Soient M une variété riemannienne compacte,

Théorie de Pesin (I): cartes et normes adaptées

Soient M une variété riemannienne compacte, μ une mesure de probabilité sur M,

Théorie de Pesin (I): cartes et normes adaptées

Soient M une variété riemannienne compacte, μ une mesure de probabilité sur M, et f un difféomorphisme de classe C^s (s réel > 1) de M préservant μ.

Soient M une variété riemannienne compacte, μ une mesure de probabilité sur M, et f un difféomorphisme de classe C^s (s réel > 1) de M préservant μ.
Pour $x \in M$, on note $\| \ \|_x$ la norme sur T_xM

Théorie de Pesin (I): cartes et normes adaptées

Soient M une variété riemannienne compacte, μ une mesure de probabilité sur M, et f un difféomorphisme de classe C^s (s réel > 1) de M préservant μ. Pour $x \in M$, on note $\| \; \|_x$ la norme sur T_xM et $\exp_x : T_xM \to M$ l'application exponentielle associées à la métrique riemannienne de M.

Théorie de Pesin (I): cartes et normes adaptées

Soient M une variété riemannienne compacte, μ une mesure de probabilité sur M, et f un difféomorphisme de classe C^s (s réel > 1) de M préservant μ. Pour $x \in M$, on note $\| \|_x$ la norme sur T_xM et $\exp_x : T_xM \to M$ l'application exponentielle associées à la métrique riemannienne de M.

On suppose pour simplifier que μ est ergodique.

Théorie de Pesin (I): cartes et normes adaptées

Soient M une variété riemannienne compacte, μ une mesure de probabilité sur M, et f un difféomorphisme de classe C^s (s réel > 1) de M préservant μ. Pour $x \in M$, on note $\| \|_x$ la norme sur T_xM et $\exp_x : T_xM \to M$ l'application exponentielle associées à la métrique riemannienne de M.

On suppose pour simplifier que μ est ergodique. On note $\theta_1 > \ldots > \theta_r$ les exposants de Lyapunov du cocycle tangent $Tf : TM \to TM$ de f.

Théorie de Pesin (I): cartes et normes adaptées

Soient M une variété riemannienne compacte, μ une mesure de probabilité sur M, et f un difféomorphisme de classe C^s (s réel > 1) de M préservant μ. Pour $x \in M$, on note $\| \, \|_x$ la norme sur $T_x M$ et $\exp_x : T_x M \to M$ l'application exponentielle associées à la métrique riemannienne de M.

On suppose pour simplifier que μ est ergodique. On note $\theta_1 > \ldots > \theta_r$ les exposants de Lyapunov du cocycle tangent $Tf : TM \to TM$ de f. On note $\Lambda \subset M$ un borélien f-invariant de μ-mesure totale le long duquel les conclusions des énoncés précédents sont valides.

Théorie de Pesin (I): cartes et normes adaptées

Soient M une variété riemannienne compacte, μ une mesure de probabilité sur M, et f un difféomorphisme de classe C^s (s réel > 1) de M préservant μ. Pour $x \in M$, on note $\| \ \|_x$ la norme sur T_xM et $\exp_x : T_xM \to M$ l'application exponentielle associées à la métrique riemannienne de M.

On suppose pour simplifier que μ est ergodique. On note $\theta_1 > \ldots > \theta_r$ les exposants de Lyapunov du cocycle tangent $Tf : TM \to TM$ de f. On note $\Lambda \subset M$ un borélien f-invariant de μ-mesure totale le long duquel les conclusions des énoncés précédents sont valides.
Pour tout $\kappa > 0$ assez petit, il existe une fonction mesurable $\ell : \Lambda \to [1, +\infty)$

Théorie de Pesin (I): cartes et normes adaptées

Soient M une variété riemannienne compacte, μ une mesure de probabilité sur M, et f un difféomorphisme de classe C^s (s réel > 1) de M préservant μ. Pour $x \in M$, on note $\| \ \|_x$ la norme sur T_xM et $\exp_x : T_xM \to M$ l'application exponentielle associées à la métrique riemannienne de M.

On suppose pour simplifier que μ est ergodique. On note $\theta_1 > \ldots > \theta_r$ les exposants de Lyapunov du cocycle tangent $Tf : TM \to TM$ de f. On note $\Lambda \subset M$ un borélien f-invariant de μ-mesure totale le long duquel les conclusions des énoncés précédents sont valides.
Pour tout $\kappa > 0$ assez petit, il existe une fonction mesurable $\ell : \Lambda \to [1, +\infty)$ et, pour tout $x \in \Lambda$, un produit scalaire $< \ , \ >_x$ sur T_xM, de norme associée $| \ |_x$

Théorie de Pesin (I): cartes et normes adaptées

Soient M une variété riemannienne compacte, μ une mesure de probabilité sur M, et f un difféomorphisme de classe C^s (s réel > 1) de M préservant μ. Pour $x \in M$, on note $\| \ \|_x$ la norme sur T_xM et $\exp_x : T_xM \to M$ l'application exponentielle associées à la métrique riemannienne de M.

On suppose pour simplifier que μ est ergodique. On note $\theta_1 > \ldots > \theta_r$ les exposants de Lyapunov du cocycle tangent $Tf : TM \to TM$ de f. On note $\Lambda \subset M$ un borélien f-invariant de μ-mesure totale le long duquel les conclusions des énoncés précédents sont valides.
Pour tout $\kappa > 0$ assez petit, il existe une fonction mesurable $\ell : \Lambda \to [1, +\infty)$ et, pour tout $x \in \Lambda$, un produit scalaire $< \ , \ >_x$ sur T_xM, de norme associée $| \ |_x$ tels que les propriétés suivantes soient vérifiées:

- le produit scalaire $< \, , \, >_x$ dépend mesurablement de $x \in \Lambda$;

- le produit scalaire $<\ ,\ >_x$ dépend mesurablement de $x \in \Lambda$;
- les sous espaces $E_i(x)$, $1 \leqslant i \leqslant r$, sont orthogonaux pour $<\ ,\ >_x$;

- le produit scalaire $< \, , \, >_x$ dépend mesurablement de $x \in \Lambda$;
- les sous espaces $E_i(x)$, $1 \leqslant i \leqslant r$, sont orthogonaux pour $< \, , \, >_x$;
- pour $x \in \Lambda$, $1 \leqslant i \leqslant r$, $v \in E_i(x)$, $v \neq 0$, on a

$$\exp(\theta_i - \kappa)|v|_x \leqslant |T_x f . v|_{f(x)} \leqslant \exp(\theta_i + \kappa)|v|_x ;$$

- le produit scalaire $< \, , \, >_x$ dépend mesurablement de $x \in \Lambda$;
- les sous espaces $E_i(x)$, $1 \leqslant i \leqslant r$, sont orthogonaux pour $< \, , \, >_x$;
- pour $x \in \Lambda$, $1 \leqslant i \leqslant r$, $v \in E_i(x)$, $v \neq 0$, on a

$$\exp(\theta_i - \kappa)|v|_x \leqslant |T_x f.v|_{f(x)} \leqslant \exp(\theta_i + \kappa)|v|_x;$$

- pour $x \in \Lambda$, $v \in T_x M$, on a

$$||v||_x \leqslant |v|_x \leqslant \ell(x)||v||_x;$$

- le produit scalaire $< \, , \, >_x$ dépend mesurablement de $x \in \Lambda$;
- les sous espaces $E_i(x)$, $1 \leqslant i \leqslant r$, sont orthogonaux pour $< \, , \, >_x$;
- pour $x \in \Lambda$, $1 \leqslant i \leqslant r$, $v \in E_i(x)$, $v \neq 0$, on a

$$\exp(\theta_i - \kappa)|v|_x \leqslant |T_x f.v|_{f(x)} \leqslant \exp(\theta_i + \kappa)|v|_x;$$

- pour $x \in \Lambda$, $v \in T_x M$, on a

$$||v||_x \leqslant |v|_x \leqslant \ell(x)||v||_x;$$

- pour $x \in \Lambda$, on a

$$\ell(x)\exp(-\kappa) \leqslant \ell(f(x)) \leqslant \ell(x)\exp(\kappa).$$

Pour ε_0 assez petit, $x \in M$, l'application $f_x = \exp_{f(x)}^{-1} \circ f \circ \exp_x$ est un plongement de la boule $\{v \in T_x M, \ \|v\|_x < \varepsilon_0\}$ dans $T_{f(x)}M$, qui vérifie

Pour ε_0 assez petit, $x \in M$, l'application $f_x = \exp_{f(x)}^{-1} \circ f \circ \exp_x$ est un plongement de la boule $\{v \in T_x M,\ \|v\|_x < \varepsilon_0\}$ dans $T_{f(x)}M$, qui vérifie

$$f_x(0) = 0, \quad D_0 f_x = T_x f, \qquad |D_v f_x - D_{v'} f_x|_x \leqslant \ell(x)|v - v'|_x^{\alpha}.$$

Pour ε_0 assez petit, $x \in M$, l'application $f_x = \exp_{f(x)}^{-1} \circ f \circ \exp_x$ est un plongement de la boule $\{v \in T_x M,\ \|v\|_x < \varepsilon_0\}$ dans $T_{f(x)}M$, qui vérifie

$$f_x(0) = 0, \quad D_0 f_x = T_x f, \qquad |D_v f_x - D_{v'} f_x|_x \leqslant \ell(x)|v - v'|_x^\alpha.$$

Ici, $\alpha \in (0, 1]$ est tel que $1 + \alpha \leqslant s$.

Pour ε_0 assez petit, $x \in M$, l'application $f_x = \exp_{f(x)}^{-1} \circ f \circ \exp_x$ est un plongement de la boule $\{v \in T_x M, \ \|v\|_x < \varepsilon_0\}$ dans $T_{f(x)} M$, qui vérifie

$$f_x(0) = 0, \quad D_0 f_x = T_x f, \qquad |D_v f_x - D_{v'} f_x|_x \leqslant \ell(x) |v - v'|_x^\alpha.$$

Ici, $\alpha \in (0, 1]$ est tel que $1 + \alpha \leqslant s$.

Pour $x \in \Lambda$, $\varepsilon > 0$ assez petit,

Pour ε_0 assez petit, $x \in M$, l'application $f_x = \exp_{f(x)}^{-1} \circ f \circ \exp_x$ est un plongement de la boule $\{v \in T_x M,\ \|v\|_x < \varepsilon_0\}$ dans $T_{f(x)}M$, qui vérifie

$$f_x(0) = 0, \quad D_0 f_x = T_x f, \qquad |D_v f_x - D_{v'} f_x|_x \leqslant \ell(x)|v - v'|_x^\alpha.$$

Ici, $\alpha \in (0,1]$ est tel que $1 + \alpha \leqslant s$.

Pour $x \in \Lambda$, $\varepsilon > 0$ assez petit, on restreint f_x à la boule $\widetilde{B}_x := \{|v|_x < r_x := (\frac{\varepsilon}{\ell(x)})^{\frac{1}{\alpha}}\}$ de façon à avoir

Pour ε_0 assez petit, $x \in M$, l'application $f_x = \exp_{f(x)}^{-1} \circ f \circ \exp_x$ est un plongement de la boule $\{v \in T_x M,\ \|v\|_x < \varepsilon_0\}$ dans $T_{f(x)}M$, qui vérifie

$$f_x(0) = 0, \quad D_0 f_x = T_x f, \qquad |D_v f_x - D_{v'} f_x|_x \leqslant \ell(x) |v - v'|_x^\alpha.$$

Ici, $\alpha \in (0, 1]$ est tel que $1 + \alpha \leqslant s$.

Pour $x \in \Lambda$, $\varepsilon > 0$ assez petit, on restreint f_x à la boule $\widetilde{B}_x := \{|v|_x < r_x := (\frac{\varepsilon}{\ell(x)})^{\frac{1}{\alpha}}\}$ de façon à avoir

$$|D_v f_x - T_x f|_x < \varepsilon, \qquad \forall v \in \widetilde{B}_x.$$

Pour ε_0 assez petit, $x \in M$, l'application $f_x = \exp_{f(x)}^{-1} \circ f \circ \exp_x$ est un plongement de la boule $\{v \in T_x M,\ \|v\|_x < \varepsilon_0\}$ dans $T_{f(x)}M$, qui vérifie

$$f_x(0) = 0, \quad D_0 f_x = T_x f, \qquad |D_v f_x - D_{v'} f_x|_x \leqslant \ell(x)|v - v'|_x^{\alpha}.$$

Ici, $\alpha \in (0,1]$ est tel que $1 + \alpha \leqslant s$.

Pour $x \in \Lambda$, $\varepsilon > 0$ assez petit, on restreint f_x à la boule $\widetilde{B}_x := \{|v|_x < r_x := (\frac{\varepsilon}{\ell(x)})^{\frac{1}{\alpha}}\}$ de façon à avoir

$$|D_v f_x - T_x f|_x < \varepsilon, \qquad \forall v \in \widetilde{B}_x.$$

On pose $B_x := \exp_x \widetilde{B}_x$.

Théorie de Pesin (II): variétés stables et instables

Les hypothèses et notations sont celles des slides précédents.

Théorie de Pesin (II): variétés stables et instables

Les hypothèses et notations sont celles des slides précédents.

Soit $1 \leqslant j \leqslant r$ tel que $\theta_j < 0$.

Théorie de Pesin (II): variétés stables et instables

Les hypothèses et notations sont celles des slides précédents.

Soit $1 \leqslant j \leqslant r$ tel que $\theta_j < 0$. Pour $x \in \Lambda$, notons $W^j_{loc}(x)$ l'ensemble

$$\{y \in \bigcap_{n=0}^{+\infty} f^{-n}(B_{f^n(x)}), \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n} \log d(f^n(x), f^n(y)) < \min(0, \theta_{j-1})\}.$$

Théorie de Pesin (II): variétés stables et instables

Les hypothèses et notations sont celles des slides précédents.

Soit $1 \leqslant j \leqslant r$ tel que $\theta_j < 0$. Pour $x \in \Lambda$, notons $W^j_{loc}(x)$ l'ensemble

$$\{y \in \bigcap_{n=0}^{+\infty} f^{-n}(B_{f^n(x)}),\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\ \frac{1}{n} \log d(f^n(x), f^n(y)) < \min(0, \theta_{j-1})\}.$$

Cette variété stable locale (forte) est l'image par $\exp_x$ du graphe d'une application de classe C^s

Théorie de Pesin (II): variétés stables et instables

Les hypothèses et notations sont celles des slides précédents.

Soit $1 \leqslant j \leqslant r$ tel que $\theta_j < 0$. Pour $x \in \Lambda$, notons $W^j_{loc}(x)$ l'ensemble

$$\{y \in \bigcap_{n=0}^{+\infty} f^{-n}(B_{f^n(x)}), \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n} \log d(f^n(x), f^n(y)) < \min(0, \theta_{j-1})\}.$$

Cette variété stable locale (forte) est l'image par $\exp_x$ du graphe d'une application de classe C^s

$$g_{j,x} : \{v \in \oplus_{i=j}^r E_i(x), |v|_x < r_x\} \to \oplus_{i=1}^{j-1} E_i(x)$$

Théorie de Pesin (II): variétés stables et instables

Les hypothèses et notations sont celles des slides précédents.

Soit $1 \leqslant j \leqslant r$ tel que $\theta_j < 0$. Pour $x \in \Lambda$, notons $W^j_{loc}(x)$ l'ensemble

$$\{y \in \bigcap_{n=0}^{+\infty} f^{-n}(B_{f^n(x)}),\ \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n} \log d(f^n(x), f^n(y)) < \min(0, \theta_{j-1})\}.$$

Cette variété stable locale (forte) est l'image par $\exp_x$ du graphe d'une application de classe C^s

$$g_{j,x} : \{v \in \oplus_{i=j}^r E_i(x), |v|_x < r_x\} \to \oplus_{i=1}^{j-1} E_i(x)$$

qui vérifie

$$g_{j,x}(0) = 0, Dg_{j,x}(0) = 0, \quad |Dg_{j,x}(v) - Dg_{j,x}(v')| \leqslant \ell(x)|v - v'|^\alpha_x.$$

Les hypothèses et notations sont celles des slides précédents.

Soit $1 \leqslant j \leqslant r$ tel que $\theta_j < 0$. Pour $x \in \Lambda$, notons $W^j_{loc}(x)$ l'ensemble

$$\{y \in \bigcap_{n=0}^{+\infty} f^{-n}(B_{f^n(x)}), \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n} \log d(f^n(x), f^n(y)) < \min(0, \theta_{j-1})\}.$$

Cette variété stable locale (forte) est l'image par $\exp_x$ du graphe d'une application de classe C^s

$$g_{j,x} : \{v \in \oplus_{i=j}^r E_i(x), |v|_x < r_x\} \to \oplus_{i=1}^{j-1} E_i(x)$$

qui vérifie

$$g_{j,x}(0) = 0, Dg_{j,x}(0) = 0, \quad |Dg_{j,x}(v) - Dg_{j,x}(v')| \leqslant \ell(x)|v - v'|^\alpha_x.$$

Lorsque $\theta_{j-1} \geqslant 0$, on pose aussi $W^j_{loc}(x) =: W^s_{loc}(x)$.

On a $f(W^j_{loc}(x)) \subset W^j_{loc}(f(x))$.

On a $f(W^j_{loc}(x)) \subset W^j_{loc}(f(x))$.

Comme dans le cas uniformément hyperbolique, on définit, pour $x \in \Lambda$, $\theta_j < 0$, la variété stable (forte)

$$W^j(x) = \{y \in M, \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n} \log d(f^n(x), f^n(y)) < \min(0, \theta_{j-1})\}.$$

On a $f(W^j_{loc}(x)) \subset W^j_{loc}(f(x))$.

Comme dans le cas uniformément hyperbolique, on définit, pour $x \in \Lambda$, $\theta_j < 0$, la variété stable (forte)

$$W^j(x) = \{y \in M, \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{1}{n} \log d(f^n(x), f^n(y)) < \min(0, \theta_{j-1})\}.$$

La relation avec les variétés stables locales est donnée par

$$W^j(x) = \bigcup_{n \geqslant 0} f^{-n}(W^j_{loc}(f^n(x)).$$

On a $f(W^j_{loc}(x)) \subset W^j_{loc}(f(x))$.

Comme dans le cas uniformément hyperbolique, on définit, pour $x \in \Lambda$, $\theta_j < 0$, la variété stable (forte)

$$W^j(x) = \{y \in M, \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n} \log d(f^n(x), f^n(y)) < \min(0, \theta_{j-1})\}.$$

La relation avec les variétés stables locales est donnée par

$$W^j(x) = \bigcup_{n \geqslant 0} f^{-n}(W^j_{loc}(f^n(x))).$$

Ceci montre que $W^j(x)$ est l'image d'une immersion injective de classe C^s de $\oplus_{i=j}^r E_i(x)$.

On a $f(W^j_{loc}(x)) \subset W^j_{loc}(f(x))$.

Comme dans le cas uniformément hyperbolique, on définit, pour $x \in \Lambda$, $\theta_j < 0$, la variété stable (forte)

$$W^j(x) = \{y \in M, \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n} \log d(f^n(x), f^n(y)) < \min(0, \theta_{j-1})\}.$$

La relation avec les variétés stables locales est donnée par

$$W^j(x) = \bigcup_{n \geqslant 0} f^{-n}(W^j_{loc}(f^n(x)).$$

Ceci montre que $W^j(x)$ est l'image d'une immersion injective de classe C^s de $\oplus_{i=j}^r E_i(x)$. De plus, pour $y \in W^j(x)$, on a

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n} \log d(f^n(x), f^n(y)) \leqslant \theta_j.$$

On a $f(W^j_{loc}(x)) \subset W^j_{loc}(f(x))$.

Comme dans le cas uniformément hyperbolique, on définit, pour $x \in \Lambda$, $\theta_j < 0$, la variété stable (forte)

$$W^j(x) = \{y \in M, \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n} \log d(f^n(x), f^n(y)) < \min(0, \theta_{j-1})\}.$$

La relation avec les variétés stables locales est donnée par

$$W^j(x) = \bigcup_{n\geqslant 0} f^{-n}(W^j_{loc}(f^n(x)).$$

Ceci montre que $W^j(x)$ est l'image d'une immersion injective de classe C^s de $\oplus_{i=j}^r E_i(x)$. De plus, pour $y \in W^j(x)$, on a

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n} \log d(f^n(x), f^n(y)) \leqslant \theta_j.$$

On définit de façon symétrique les variétés (locales) instables (fortes).

Théorie de Pesin (III): la formule de l'entropie

Soient M une variété compacte, μ une mesure de probabilité sur M, et $f : M \to M$ une application de classe C^1 préservant μ.

Théorie de Pesin (III): la formule de l'entropie

Soient M une variété compacte, μ une mesure de probabilité sur M, et $f : M \to M$ une application de classe C^1 préservant μ.

Théorème: (Margulis,Ruelle) On a

$$h_\mu(f) \leqslant \int \sum_{\theta_i(x)>0} m_i(x)\theta_i(x)\, d\mu.$$

Théorie de Pesin (III): la formule de l'entropie

Soient M une variété compacte, μ une mesure de probabilité sur M, et $f : M \to M$ une application de classe C^1 préservant μ.

Théorème: (Margulis,Ruelle) On a

$$h_\mu(f) \leqslant \int \sum_{\theta_i(x)>0} m_i(x)\theta_i(x)\, d\mu.$$

La quantité intégrée $\sum_{\theta_i(x)>0} m_i(x)\theta_i(x)$ est le plus grand exposant de Lyapunov du cocycle correspondant à l'action de Tf sur l'algèbre extérieure du fibré tangent.

Théorie de Pesin (III): la formule de l'entropie

Soient M une variété compacte, μ une mesure de probabilité sur M, et $f : M \to M$ une application de classe C^1 préservant μ.

Théorème: (Margulis,Ruelle) On a

$$h_\mu(f) \leqslant \int \sum_{\theta_i(x)>0} m_i(x)\theta_i(x)\, d\mu.$$

La quantité intégrée $\sum_{\theta_i(x)>0} m_i(x)\theta_i(x)$ est le plus grand exposant de Lyapunov du cocycle correspondant à l'action de Tf sur l'algèbre extérieure du fibré tangent.

Soient M une variété compacte, μ une mesure de probabilité sur M, et f un difféomorphisme de classe C^s (s réel > 1) de M préservant μ.

Théorie de Pesin (III): la formule de l'entropie

Soient M une variété compacte, μ une mesure de probabilité sur M, et $f : M \to M$ une application de classe C^1 préservant μ.

Théorème: (Margulis,Ruelle) On a

$$h_\mu(f) \leqslant \int \sum_{\theta_i(x)>0} m_i(x)\theta_i(x)\, d\mu.$$

La quantité intégrée $\sum_{\theta_i(x)>0} m_i(x)\theta_i(x)$ est le plus grand exposant de Lyapunov du cocycle correspondant à l'action de Tf sur l'algèbre extérieure du fibré tangent.

Soient M une variété compacte, μ une mesure de probabilité sur M, et f un difféomorphisme de classe C^s (s réel > 1) de M préservant μ.

Théorème: (Pesin) Supposons que μ soit absolument continue.

Théorie de Pesin (III): la formule de l'entropie

Soient M une variété compacte, μ une mesure de probabilité sur M, et $f : M \to M$ une application de classe C^1 préservant μ.

Théorème: (Margulis,Ruelle) On a

$$h_\mu(f) \leqslant \int \sum_{\theta_i(x)>0} m_i(x)\theta_i(x)\, d\mu.$$

La quantité intégrée $\sum_{\theta_i(x)>0} m_i(x)\theta_i(x)$ est le plus grand exposant de Lyapunov du cocycle correspondant à l'action de Tf sur l'algèbre extérieure du fibré tangent.

Soient M une variété compacte, μ une mesure de probabilité sur M, et f un difféomorphisme de classe C^s (s réel > 1) de M préservant μ.

Théorème: (Pesin) Supposons que μ soit absolument continue. Alors on a

$$h_\mu(f) = \int \sum_{\theta_i(x)>0} m_i(x)\theta_i(x)\, d\mu.$$

Mesures conditionnelles

Soit $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace de probabilité standard.

Mesures conditionnelles

Soit $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace de probabilité standard.

Définition: Une partition $\mathcal{C}$ de X est *mesurable* s'il existe une suite $(\mathcal{C}_n)_{n \geqslant 0}$ de partitions mesurables finies de X telle que $\mathcal{C} = \bigvee_0^\infty \mathcal{C}_n$.

Mesures conditionnelles

Soit $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace de probabilité standard.

Définition: Une partition $\mathcal{C}$ de X est *mesurable* s'il existe une suite $(\mathcal{C}_n)_{n\geqslant 0}$ de partitions mesurables finies de X telle que $\mathcal{C} = \bigvee_0^\infty \mathcal{C}_n$.

Définition: Un *système de mesures conditionnelles* associé à une partition mesurable $\mathcal{C}$ de X est une famille $(\mu_x)_{x\in X}$ ayant les propriétés suivantes:

Mesures conditionnelles

Soit $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace de probabilité standard.

Définition: Une partition $\mathcal{C}$ de X est *mesurable* s'il existe une suite $(\mathcal{C}_n)_{n \geqslant 0}$ de partitions mesurables finies de X telle que $\mathcal{C} = \vee_0^\infty \mathcal{C}_n$.

Définition: Un *système de mesures conditionnelles* associé à une partition mesurable $\mathcal{C}$ de X est une famille $(\mu_x)_{x \in X}$ ayant les propriétés suivantes:

1. pour chaque $x \in X$, μ_x est une mesure de probabilité sur $(X, \mathfrak{B})$ supportée par l'élément $\mathcal{C}(x)$ de $\mathcal{C}$ qui contient x;

Mesures conditionnelles

Soit $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace de probabilité standard.

Définition: Une partition $\mathcal{C}$ de X est *mesurable* s'il existe une suite $(\mathcal{C}_n)_{n \geqslant 0}$ de partitions mesurables finies de X telle que $\mathcal{C} = \bigvee_0^\infty \mathcal{C}_n$.

Définition: Un *système de mesures conditionnelles* associé à une partition mesurable $\mathcal{C}$ de X est une famille $(\mu_x)_{x \in X}$ ayant les propriétés suivantes:

1. pour chaque $x \in X$, μ_x est une mesure de probabilité sur $(X, \mathfrak{B})$ supportée par l'élément $\mathcal{C}(x)$ de $\mathcal{C}$ qui contient x;
2. si x, y appartiennent au même élément de $\mathcal{C}$, $\mu_x = \mu_y$;

Mesures conditionnelles

Soit $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace de probabilité standard.

Définition: Une partition $\mathcal{C}$ de X est *mesurable* s'il existe une suite $(\mathcal{C}_n)_{n\geqslant 0}$ de partitions mesurables finies de X telle que $\mathcal{C} = \bigvee_0^\infty \mathcal{C}_n$.

Définition: Un *système de mesures conditionnelles* associé à une partition mesurable $\mathcal{C}$ de X est une famille $(\mu_x)_{x\in X}$ ayant les propriétés suivantes:

1. pour chaque $x \in X$, μ_x est une mesure de probabilité sur $(X, \mathfrak{B})$ supportée par l'élément $\mathcal{C}(x)$ de $\mathcal{C}$ qui contient x;
2. si x, y appartiennent au même élément de $\mathcal{C}$, $\mu_x = \mu_y$;
3. pour chaque $B \in \mathfrak{B}$, l'application $x \mapsto \mu_x(B)$ est mesurable

Mesures conditionnelles

Soit $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace de probabilité standard.

Définition: Une partition $\mathcal{C}$ de X est *mesurable* s'il existe une suite $(\mathcal{C}_n)_{n \geqslant 0}$ de partitions mesurables finies de X telle que $\mathcal{C} = \bigvee_0^\infty \mathcal{C}_n$.

Définition: Un *système de mesures conditionnelles* associé à une partition mesurable $\mathcal{C}$ de X est une famille $(\mu_x)_{x \in X}$ ayant les propriétés suivantes:

1. pour chaque $x \in X$, μ_x est une mesure de probabilité sur $(X, \mathfrak{B})$ supportée par l'élément $\mathcal{C}(x)$ de $\mathcal{C}$ qui contient x;
2. si x, y appartiennent au même élément de $\mathcal{C}$, $\mu_x = \mu_y$;
3. pour chaque $B \in \mathfrak{B}$, l'application $x \mapsto \mu_x(B)$ est mesurable et

$$\mu(B) = \int \mu_x(B)\, d\mu.$$

Le théorème de désintégration de Rokhlin

Le théorème de désintégration de Rokhlin

Théorème: (Rokhlin) Toute partition mesurable $\mathcal{C}$ de X admet un système de mesures conditionnelles.

Le théorème de désintégration de Rokhlin

Théorème: (Rokhlin) Toute partition mesurable $\mathcal{C}$ de X admet un système de mesures conditionnelles.
Ce système est unique dans le sens suivant:

Le théorème de désintégration de Rokhlin

Théorème: (Rokhlin) Toute partition mesurable $\mathcal{C}$ de X admet un système de mesures conditionnelles.
Ce système est unique dans le sens suivant:
si $(\mu_x)_{x \in X}$, $(\mu'_x)_{x \in X}$ sont deux tels systèmes, on a $\mu_x = \mu'_x$ pour μ-presque tout x.

Le théorème de Ledrappier-Young

Soient M une variété compacte, μ une mesure de probabilité sur M, et f un difféomorphisme de classe C^s (s réel > 1) de M préservant μ.

Le théorème de Ledrappier-Young

Soient M une variété compacte, μ une mesure de probabilité sur M, et f un difféomorphisme de classe C^s (s réel > 1) de M préservant μ.

On suppose pour simplifier que f est μ-ergodique.

Le théorème de Ledrappier-Young

Soient M une variété compacte, μ une mesure de probabilité sur M, et f un difféomorphisme de classe C^s (s réel > 1) de M préservant μ.

On suppose pour simplifier que f est μ-ergodique. On note $\Lambda \subset M$ le borélien f-invariant de μ-mesure totale dans lequel les conclusions du théorème d'Oseledec sont valides.

Le théorème de Ledrappier-Young

Soient M une variété compacte, μ une mesure de probabilité sur M, et f un difféomorphisme de classe C^s (s réel > 1) de M préservant μ.

On suppose pour simplifier que f est μ-ergodique. On note $\Lambda \subset M$ le borélien f-invariant de μ-mesure totale dans lequel les conclusions du théorème d'Oseledec sont valides.

Notons r_u le nombre d'exposants de Lyapunov strictement positifs.

Le théorème de Ledrappier-Young

Soient M une variété compacte, μ une mesure de probabilité sur M, et f un difféomorphisme de classe C^s (s réel > 1) de M préservant μ.

On suppose pour simplifier que f est μ-ergodique. On note $\Lambda \subset M$ le borélien f-invariant de μ-mesure totale dans lequel les conclusions du théorème d'Oseledec sont valides.

Notons r_u le nombre d'exposants de Lyapunov strictement positifs. Pour $x \in \Lambda$ and $1 \leqslant i \leqslant r_u$, notons $W^i(x)$ la variété instable forte de x associée aux exposants $\geqslant \theta_i$.

Le théorème de Ledrappier-Young

Soient M une variété compacte, μ une mesure de probabilité sur M, et f un difféomorphisme de classe C^s (s réel > 1) de M préservant μ.

On suppose pour simplifier que f est μ-ergodique. On note $\Lambda \subset M$ le borélien f-invariant de μ-mesure totale dans lequel les conclusions du théorème d'Oseledec sont valides.

Notons r_u le nombre d'exposants de Lyapunov strictement positifs. Pour $x \in \Lambda$ and $1 \leqslant i \leqslant r_u$, notons $W^i(x)$ la variété instable forte de x associée aux exposants $\geqslant \theta_i$.

On peut construire une partition mesurable $\mathcal{C}_i$ de Λ telle que, pour tout $x \in \Lambda$, $\mathcal{C}_i(x)$ soit l'intersection avec Λ d'une plaque de $W^i(x)$ contenant x.

Le théorème de Ledrappier-Young

Soient M une variété compacte, μ une mesure de probabilité sur M, et f un difféomorphisme de classe C^s (s réel > 1) de M préservant μ.

On suppose pour simplifier que f est μ-ergodique. On note $\Lambda \subset M$ le borélien f-invariant de μ-mesure totale dans lequel les conclusions du théorème d'Oseledec sont valides.

Notons r_u le nombre d'exposants de Lyapunov strictement positifs. Pour $x \in \Lambda$ and $1 \leqslant i \leqslant r_u$, notons $W^i(x)$ la variété instable forte de x associée aux exposants $\geqslant \theta_i$.

On peut construire une partition mesurable $\mathcal{C}_i$ de Λ telle que, pour tout $x \in \Lambda$, $\mathcal{C}_i(x)$ soit l'intersection avec Λ d'une plaque de $W^i(x)$ contenant x.

Soit $(\mu_x^i)_{x \in \Lambda}$ un système de mesures conditionnelles associé à $\mathcal{C}_i$.

Théorème: (Ledrappier-Young) Il existe des nombres δ_i, $1 \leqslant i \leqslant r_u$, qui ont la propriété suivante:

Théorème: (Ledrappier-Young) Il existe des nombres δ_i, $1 \leqslant i \leqslant r_u$, qui ont la propriété suivante:

pour $1 \leqslant i \leqslant r_u$,

Théorème: (Ledrappier-Young) Il existe des nombres δ_i, $1 \leqslant i \leqslant r_u$, qui ont la propriété suivante:

pour $1 \leqslant i \leqslant r_u$, μ-presque tout $x \in \Lambda$,

Théorème: (Ledrappier-Young) Il existe des nombres δ_i, $1 \leqslant i \leqslant r_u$, qui ont la propriété suivante:

pour $1 \leqslant i \leqslant r_u$, μ-presque tout $x \in \Lambda$, et μ_x^i-presque tout $y \in \mathcal{C}_i(x)$,

Théorème: (Ledrappier-Young) Il existe des nombres δ_i, $1 \leqslant i \leqslant r_u$, qui ont la propriété suivante:

pour $1 \leqslant i \leqslant r_u$, μ-presque tout $x \in \Lambda$, et μ_x^i-presque tout $y \in \mathcal{C}_i(x)$, on a

$$\lim_{r \to 0} \frac{\log \mu_x^i(B(y, r))}{\log r} = \sum_{j=1}^{i} \delta_j.$$

Théorème: (Ledrappier-Young) Il existe des nombres δ_i, $1 \leqslant i \leqslant r_u$, qui ont la propriété suivante:

pour $1 \leqslant i \leqslant r_u$, μ-presque tout $x \in \Lambda$, et μ_x^i-presque tout $y \in \mathcal{C}_i(x)$, on a

$$\lim_{r \to 0} \frac{\log \mu_x^i(B(y,r))}{\log r} = \sum_{j=1}^{i} \delta_j.$$

De plus, on a $0 \leqslant \delta_i \leqslant m_i$ (la multiplicité de θ_i) et

$$h_\mu(f) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant r_u} \delta_i \theta_i.$$

Théorème: (Ledrappier-Young) Il existe des nombres δ_i, $1 \leqslant i \leqslant r_u$, qui ont la propriété suivante:

pour $1 \leqslant i \leqslant r_u$, μ-presque tout $x \in \Lambda$, et μ_x^i-presque tout $y \in \mathcal{C}_i(x)$, on a

$$\lim_{r \to 0} \frac{\log \mu_x^i(B(y,r))}{\log r} = \sum_{j=1}^{i} \delta_j.$$

De plus, on a $0 \leqslant \delta_i \leqslant m_i$ (la multiplicité de θ_i) et

$$h_\mu(f) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant r_u} \delta_i \theta_i.$$

Il y a aussi une formulation de ce résultat dans le cas où μ n'est pas ergodique.