Quelques aspects de la théorie des systèmes dynamiques quasipériodiques(2)

Jean-Christophe Yoccoz

Collège de France

7 mai 2014

Germes de difféomorphismes holomorphes de $(\mathbb{C}, 0)$

On étudie la dynamique de

$$F(z) = \lambda z + O(z^2)$$

au voisinage du point fixe $z = 0$.

Germes de difféomorphismes holomorphes de $(\mathbb{C}, 0)$

On étudie la dynamique de

$$F(z) = \lambda z + O(z^2)$$

au voisinage du point fixe $z = 0$.

Le nombre complexe $\lambda = DF(0) \neq 0$ est appelé *multiplicateur* de F.

Germes de difféomorphismes holomorphes de $(\mathbb{C}, 0)$

On étudie la dynamique de

$$F(z) = \lambda z + O(z^2)$$

au voisinage du point fixe $z = 0$.

Le nombre complexe $\lambda = DF(0) \neq 0$ est appelé *multiplicateur* de F. Il est invariant par conjugaison holomorphe.

Germes de difféomorphismes holomorphes de $(\mathbb{C}, 0)$

On étudie la dynamique de

$$F(z) = \lambda z + O(z^2)$$

au voisinage du point fixe $z = 0$.

Le nombre complexe $\lambda = DF(0) \neq 0$ est appelé *multiplicateur* de F. Il est invariant par conjugaison holomorphe.

La dynamique est simple lorsque $|\lambda| \neq 1$ (**domaine de Poincaré**), plus subtile lorsque $|\lambda| = 1$ (**domaine de Siegel**).

Dynamique dans le domaine de Poincaré

Théorème: Supposons que $0 < |\lambda| < 1$.
Alors le point fixe 0 est attractif:

Dynamique dans le domaine de Poincaré

Théorème: Supposons que $0 < |\lambda| < 1$.
Alors le point fixe 0 est attractif: il existe un voisinage U de 0 tel que tout $z \in U$ vérifie

$$\lim_{n \to +\infty} F^n(z) = 0.$$

Dynamique dans le domaine de Poincaré

Théorème: Supposons que $0 < |\lambda| < 1$.
Alors le point fixe 0 est attractif: il existe un voisinage U de 0 tel que tout $z \in U$ vérifie

$$\lim_{n \to +\infty} F^n(z) = 0.$$

De plus, F est analytiquement linéarisable:

Dynamique dans le domaine de Poincaré

Théorème: Supposons que $0 < |\lambda| < 1$.
Alors le point fixe 0 est attractif: il existe un voisinage U de 0 tel que tout $z \in U$ vérifie

$$\lim_{n \to +\infty} F^n(z) = 0.$$

De plus, F est analytiquement linéarisable: il existe un (unique) changement de variable holomorphe $z = h(w) = w + O(w^2)$ tel que

$$h^{-1} \circ F \circ h(w) = \lambda w.$$

Preuve du théorème

Soit $r > 0$ tel que

$$|F(z) - \lambda z| \leqslant \frac{1}{2}(1 - |\lambda|)|z|$$

dans le disque $\mathbb{D}_r := \{|z| < r\}$.

Preuve du théorème

Soit $r > 0$ tel que

$$|F(z) - \lambda z| \leqslant \frac{1}{2}(1 - |\lambda|)|z|$$

dans le disque $\mathbb{D}_r := \{|z| < r\}$. Pour $z \in \mathbb{D}_r$, $n \geqslant 0$, on a

$$|F^n(z)| \leqslant \left(\frac{1 + |\lambda|}{2}\right)^n |z|,$$

Preuve du théorème

Soit $r > 0$ tel que

$$|F(z) - \lambda z| \leqslant \frac{1}{2}(1 - |\lambda|)|z|$$

dans le disque $\mathbb{D}_r := \{|z| < r\}$. Pour $z \in \mathbb{D}_r$, $n \geqslant 0$, on a

$$|F^n(z)| \leqslant \left(\frac{1 + |\lambda|}{2}\right)^n |z|,$$

donc le point fixe 0 est attractif.

Preuve du théorème

Soit $r > 0$ tel que

$$|F(z) - \lambda z| \leqslant \frac{1}{2}(1 - |\lambda|)|z|$$

dans le disque $\mathbb{D}_r := \{|z| < r\}$. Pour $z \in \mathbb{D}_r$, $n \geqslant 0$, on a

$$|F^n(z)| \leqslant \left(\frac{1 + |\lambda|}{2}\right)^n |z|,$$

donc le point fixe 0 est attractif.
De plus, les fonctions $k_n(z) := \lambda^{-n} F^n(z)$ sont définies et holomorphes dans $\mathbb{D}_r$.

Preuve du théorème

Soit $r > 0$ tel que

$$|F(z) - \lambda z| \leqslant \frac{1}{2}(1 - |\lambda|)|z|$$

dans le disque $\mathbb{D}_r := \{|z| < r\}$. Pour $z \in \mathbb{D}_r$, $n \geqslant 0$, on a

$$|F^n(z)| \leqslant \left(\frac{1 + |\lambda|}{2}\right)^n |z|,$$

donc le point fixe 0 est attractif.
De plus, les fonctions $k_n(z) := \lambda^{-n} F^n(z)$ sont définies et holomorphes dans $\mathbb{D}_r$. Elles y vérifient

$$k_n(0) = 0, \quad Dk_n(0) = 1, \quad k_n \circ F(z) = \lambda k_{n+1}(z).$$

On va montrer que k_n converge uniformément dans $\mathbb{D}_r$ vers une limite k.

On va montrer que k_n converge uniformément dans $\mathbb{D}_r$ vers une limite k. L'inverse h de k est la conjugaison recherchée.

On va montrer que k_n converge uniformément dans $\mathbb{D}_r$ vers une limite k. L'inverse h de k est la conjugaison recherchée. On écrit $F(z) =: \lambda z(1 + z\phi(z))$ dans $\mathbb{D}_r$. On a alors

$$k_n(z) = \prod_{j=0}^{n-1} 1 + F^j(z)\phi(F^j(z)).$$

On va montrer que k_n converge uniformément dans $\mathbb{D}_r$ vers une limite k. L'inverse h de k est la conjugaison recherchée. On écrit $F(z) =: \lambda z(1 + z\phi(z))$ dans $\mathbb{D}_r$. On a alors

$$k_n(z) = \prod_{j=0}^{n-1} 1 + F^j(z)\phi(F^j(z)).$$

Soit $C > 0$ tel que $|\phi| \leqslant C$ dans $\mathbb{D}_r$. On a

$$|\frac{k_{n+1}}{k_n}(z) - 1| \leqslant C\left(\frac{1 + |\lambda|}{2}\right)^n |z|,$$

On va montrer que k_n converge uniformément dans $\mathbb{D}_r$ vers une limite k. L'inverse h de k est la conjugaison recherchée. On écrit $F(z) =: \lambda z(1 + z\phi(z))$ dans $\mathbb{D}_r$. On a alors

$$k_n(z) = \prod_{j=0}^{n-1} 1 + F^j(z)\phi(F^j(z)).$$

Soit $C > 0$ tel que $|\phi| \leqslant C$ dans $\mathbb{D}_r$. On a

$$|\frac{k_{n+1}}{k_n}(z) - 1| \leqslant C \left(\frac{1 + |\lambda|}{2}\right)^n |z|,$$

ce qui entraîne la convergence uniforme de la suite $(k_n)_{n\geqslant 0}$.

Points fixes répulsifs

Lorsque $F(z) = \lambda z + O(z^2)$ avec $|\lambda| > 1$, on peut appliquer le théorème précédent à $F^{-1}(z) = \lambda^{-1} z + O(z^2)$.

Points fixes répulsifs

Lorsque $F(z) = \lambda z + O(z^2)$ avec $|\lambda| > 1$, on peut appliquer le théorème précédent à $F^{-1}(z) = \lambda^{-1} z + O(z^2)$.
On conclut que 0 est un point fixe répulsif (i.e attractif pour F^{-1})

Points fixes répulsifs

Lorsque $F(z) = \lambda z + O(z^2)$ avec $|\lambda| > 1$, on peut appliquer le théorème précédent à $F^{-1}(z) = \lambda^{-1} z + O(z^2)$.
On conclut que 0 est un point fixe répulsif (i.e attractif pour F^{-1}) et que F est analytiquement linéarisable.

Lorsque le multiplicateur λ est de module 1, le point fixe 0 de F est dit *indifférent*.

Points fixes indifférents

Lorsque le multiplicateur λ est de module 1, le point fixe 0 de F est dit *indifférent*.

On écrit $\lambda = \exp 2\pi i\alpha$, $\alpha \in \mathbb{T}$. On dit que le point fixe 0 est indifférent *rationnel* ou *irrationnel* suivant que α est ou non rationnel, c'est à dire suivant que λ est ou non une racine de l'unité.

Points fixes indifférents rationnels

On suppose que α est rationnel. On écrit $\alpha = \frac{p}{q}$ avec $q \geqslant 1$ et $p \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\star$. On a donc $\lambda^q = 1$.

Points fixes indifférents rationnels

On suppose que α est rationnel. On écrit $\alpha = \frac{p}{q}$ avec $q \geqslant 1$ et $p \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^{\star}$. On a donc $\lambda^q = 1$.

Proposition: Le germe F est analytiquement linéarisable ssi $F^q(z) \equiv z$ au voisinage de l'origine.

Points fixes indifférents rationnels

On suppose que α est rationnel. On écrit $\alpha = \frac{p}{q}$ avec $q \geqslant 1$ et $p \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\star$. On a donc $\lambda^q = 1$.

Proposition: Le germe F est analytiquement linéarisable ssi $F^q(z) \equiv z$ au voisinage de l'origine.
Si F n'est pas analytiquement linéarisable, il existe $a \neq 0$, $r \geqslant 1$ tels que

$$F^q(z) = z(1 + az^{rq} + O(z^{rq+1})).$$

Points fixes indifférents rationnels

On suppose que α est rationnel. On écrit $\alpha = \frac{p}{q}$ avec $q \geqslant 1$ et $p \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\star$. On a donc $\lambda^q = 1$.

Proposition: Le germe F est analytiquement linéarisable ssi $F^q(z) \equiv z$ au voisinage de l'origine.
Si F n'est pas analytiquement linéarisable, il existe $a \neq 0$, $r \geqslant 1$ tels que

$$F^q(z) = z(1 + az^{rq} + O(z^{rq+1})).$$

Il existe alors un changement de variable holomorphe $w = h(z) = z + O(z^2)$ tel que

$$h \circ F \circ h^{-1}(w) = w(1 + \frac{a}{q} w^{rq} + O(w^{rq+1})).$$

Preuve de la proposition

Si F est analytiquement linéarisable, on a $F^q(z) \equiv z$.

Preuve de la proposition

Si F est analytiquement linéarisable, on a $F^q(z) \equiv z$.

Définissons $w = h(z) = \frac{1}{q}\sum_{j=0}^{q-1} \lambda^{-j} F^j(z) = z + O(z^2)$.

Preuve de la proposition

Si F est analytiquement linéarisable, on a $F^q(z) \equiv z$.

Définissons $w = h(z) = \frac{1}{q}\sum_{j=0}^{q-1} \lambda^{-j} F^j(z) = z + O(z^2)$. On a

$$h \circ F(z) = \frac{1}{q}\sum_{j=0}^{q-1} \lambda^{-j} F^{j+1}(z) = \lambda(h(z) + \frac{F^q(z) - z}{q}).$$

Preuve de la proposition

Si F est analytiquement linéarisable, on a $F^q(z) \equiv z$.

Définissons $w = h(z) = \frac{1}{q}\sum_{j=0}^{q-1} \lambda^{-j} F^j(z) = z + O(z^2)$. On a

$$h \circ F(z) = \frac{1}{q}\sum_{j=0}^{q-1} \lambda^{-j} F^{j+1}(z) = \lambda(h(z) + \frac{F^q(z) - z}{q}).$$

Si $F^q(z) \equiv z$, h conjugue F à sa partie linéaire.

Preuve de la proposition

Si F est analytiquement linéarisable, on a $F^q(z) \equiv z$.

Définissons $w = h(z) = \frac{1}{q}\sum_{j=0}^{q-1} \lambda^{-j} F^j(z) = z + O(z^2)$. On a

$$h \circ F(z) = \frac{1}{q}\sum_{j=0}^{q-1} \lambda^{-j} F^{j+1}(z) = \lambda(h(z) + \frac{F^q(z) - z}{q}).$$

Si $F^q(z) \equiv z$, h conjugue F à sa partie linéaire.
Sinon, on a $F^q(z) = z(1 + az^m + O(z^{m+1}))$ avec $m \geqslant 1$ et $a \neq 0$,

Preuve de la proposition

Si F est analytiquement linéarisable, on a $F^q(z) \equiv z$.

Définissons $w = h(z) = \frac{1}{q}\sum_{j=0}^{q-1} \lambda^{-j} F^j(z) = z + O(z^2)$. On a

$$h \circ F(z) = \frac{1}{q}\sum_{j=0}^{q-1} \lambda^{-j} F^{j+1}(z) = \lambda(h(z) + \frac{F^q(z) - z}{q}).$$

Si $F^q(z) \equiv z$, h conjugue F à sa partie linéaire.
Sinon, on a $F^q(z) = z(1 + az^m + O(z^{m+1}))$ avec $m \geqslant 1$ et $a \neq 0$, donc

$$h \circ F \circ h^{-1}(w) = \lambda w(1 + \frac{a}{q} w^m + O(w^{m+1})),$$

Preuve de la proposition

Si F est analytiquement linéarisable, on a $F^q(z) \equiv z$.

Définissons $w = h(z) = \frac{1}{q}\sum_{j=0}^{q-1} \lambda^{-j} F^j(z) = z + O(z^2)$. On a

$$h \circ F(z) = \frac{1}{q}\sum_{j=0}^{q-1} \lambda^{-j} F^{j+1}(z) = \lambda(h(z) + \frac{F^q(z) - z}{q}).$$

Si $F^q(z) \equiv z$, h conjugue F à sa partie linéaire.
Sinon, on a $F^q(z) = z(1 + az^m + O(z^{m+1}))$ avec $m \geqslant 1$ et $a \neq 0$, donc

$$h \circ F \circ h^{-1}(w) = \lambda w(1 + \frac{a}{q} w^m + O(w^{m+1})),$$

et, pour $j \geqslant 1$

$$h \circ F^j \circ h^{-1}(w) = \lambda^j w(1 + \frac{a}{q}(\sum_{i=0}^{j-1} \lambda^{im}) w^m + O(w^{m+1})).$$

Preuve de la proposition

Si F est analytiquement linéarisable, on a $F^q(z) \equiv z$.

Définissons $w = h(z) = \frac{1}{q}\sum_{j=0}^{q-1} \lambda^{-j} F^j(z) = z + O(z^2)$. On a

$$h \circ F(z) = \frac{1}{q}\sum_{j=0}^{q-1} \lambda^{-j} F^{j+1}(z) = \lambda(h(z) + \frac{F^q(z) - z}{q}).$$

Si $F^q(z) \equiv z$, h conjugue F à sa partie linéaire.
Sinon, on a $F^q(z) = z(1 + az^m + O(z^{m+1}))$ avec $m \geqslant 1$ et $a \neq 0$, donc

$$h \circ F \circ h^{-1}(w) = \lambda w(1 + \frac{a}{q} w^m + O(w^{m+1})),$$

et, pour $j \geqslant 1$

$$h \circ F^j \circ h^{-1}(w) = \lambda^j w(1 + \frac{a}{q}(\sum_{i=0}^{j-1} \lambda^{im}) w^m + O(w^{m+1})).$$

Pour $j = q$, ceci n'est possible que si m est un multiple de q. $\square$

Remarque: Lorsque F n'est pas analytiquement linéarisable et a, r sont comme dans la proposition, il existe $b \in \mathbb{C}$ et un changement de variable formel $w = h(z) = z + O(z^2)$ tel que

$$h \circ F \circ h^{-1}(w) = \lambda w(1 + \frac{a}{q} w^{rq} + b w^{2rq}).$$

Remarque: Lorsque F n'est pas analytiquement linéarisable et a, r sont comme dans la proposition, il existe $b \in \mathbb{C}$ et un changement de variable formel $w = h(z) = z + O(z^2)$ tel que

$$h \circ F \circ h^{-1}(w) = \lambda w(1 + \frac{a}{q} w^{rq} + b w^{2rq}).$$

En général, la série formelle définissant h n'est pas convergente.

Pétales

Supposons que F ne soit pas analytiquement linéarisable, avec

$$F(z) = \lambda z(1 + \frac{a}{q} z^{rq} + O(z^{rq+1})).$$

Pétales

Supposons que F ne soit pas analytiquement linéarisable, avec

$$F(z) = \lambda z(1 + \frac{a}{q} z^{rq} + O(z^{rq+1})).$$

Soit $\pi : (\mathbb{C}, 0) \to (\bar{\mathbb{C}}, \infty)$ le revêtement ramifié défini par $u = \pi(z) = z^{-rq}$.

Pétales

Supposons que F ne soit pas analytiquement linéarisable, avec

$$F(z) = \lambda z(1 + \frac{a}{q} z^{rq} + O(z^{rq+1})).$$

Soit $\pi : (\mathbb{C}, 0) \to (\bar{\mathbb{C}}, \infty)$ le revêtement ramifié défini par $u = \pi(z) = z^{-rq}$. L'application G tangente à l'identité définie par $\pi \circ F^q = G \circ \pi$ vérifie

$$G(u) = u - arq + O(u^{-1/rq}).$$

Pétales

Supposons que F ne soit pas analytiquement linéarisable, avec

$$F(z) = \lambda z(1 + \frac{a}{q} z^{rq} + O(z^{rq+1})).$$

Soit $\pi : (\mathbb{C}, 0) \to (\bar{\mathbb{C}}, \infty)$ le revêtement ramifié défini par $u = \pi(z) = z^{-rq}$. L'application G tangente à l'identité définie par $\pi \circ F^q = G \circ \pi$ vérifie

$$G(u) = u - arq + O(u^{-1/rq}).$$

Une région $\{\Re \frac{u}{a} < -A\}$, $A \gg 1$ est appelée *pétale attractif*.

Pétales

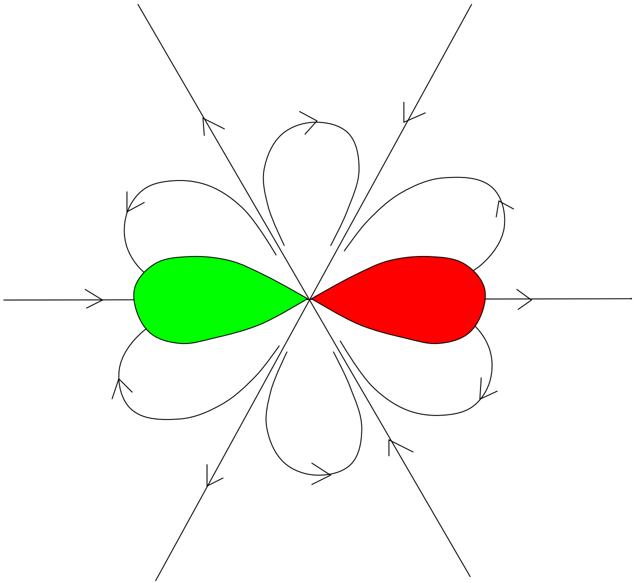
Supposons que F ne soit pas analytiquement linéarisable, avec

$$F(z) = \lambda z(1 + \frac{a}{q} z^{rq} + O(z^{rq+1})).$$

Soit $\pi : (\mathbb{C}, 0) \to (\bar{\mathbb{C}}, \infty)$ le revêtement ramifié défini par $u = \pi(z) = z^{-rq}$. L'application G tangente à l'identité définie par $\pi \circ F^q = G \circ \pi$ vérifie

$$G(u) = u - arq + O(u^{-1/rq}).$$

Une région $\{\Re \frac{u}{a} < -A\}$, $A \gg 1$ est appelée *pétale attractif*.
Une région $\{\Re \frac{u}{a} > A\}$, $A \gg 1$ est appelée *pétale répulsif*.



La classification analytique d'Ecalle-Voronin

On va seulement traiter le cas particulier $\lambda = 1$ ($\iff$ $q = 1$), $r = 1$.
Le cas général se traite par des méthodes analogues.

La classification analytique d'Ecalle-Voronin

On va seulement traiter le cas particulier $\lambda = 1$ ($\iff$ $q = 1$), $r = 1$.
Le cas général se traite par des méthodes analogues.

En conjuguant si nécessaire par une homothétie, on a
$F(z) = z - z^2 + O(z^3)$.

La classification analytique d'Ecalle-Voronin

On va seulement traiter le cas particulier $\lambda = 1$ ($\iff$ $q = 1$), $r = 1$. Le cas général se traite par des méthodes analogues.

En conjuguant si nécessaire par une homothétie, on a $F(z) = z - z^2 + O(z^3)$. Le changement de variable $u = z^{-1}$ conduit à

$$G(u) = u + 1 + O(u^{-1}).$$

La classification analytique d'Ecalle-Voronin

On va seulement traiter le cas particulier $\lambda = 1$ ($\iff$ $q = 1$), $r = 1$. Le cas général se traite par des méthodes analogues.

En conjuguant si nécessaire par une homothétie, on a $F(z) = z - z^2 + O(z^3)$. Le changement de variable $u = z^{-1}$ conduit à

$$G(u) = u + 1 + O(u^{-1}).$$

L'espace des orbites de G dans un pétale attractif $\{\Re u > A\}$ est un cylindre C_+ biholomorphe à $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$.

La classification analytique d'Ecalle-Voronin

On va seulement traiter le cas particulier $\lambda = 1$ ($\iff q = 1$), $r = 1$. Le cas général se traite par des méthodes analogues.

En conjuguant si nécessaire par une homothétie, on a $F(z) = z - z^2 + O(z^3)$. Le changement de variable $u = z^{-1}$ conduit à

$$G(u) = u + 1 + O(u^{-1}).$$

L'espace des orbites de G dans un pétale attractif $\{\Re u > A\}$ est un cylindre C_+ biholomorphe à $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$.
De même, l'espace des orbites de G dans un pétale répulsif $\{\Re u < -A\}$ est un cylindre C_- biholomorphe à $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$.

La classification analytique d'Ecalle-Voronin

On va seulement traiter le cas particulier $\lambda = 1$ ($\iff q = 1$), $r = 1$. Le cas général se traite par des méthodes analogues.

En conjuguant si nécessaire par une homothétie, on a $F(z) = z - z^2 + O(z^3)$. Le changement de variable $u = z^{-1}$ conduit à

$$G(u) = u + 1 + O(u^{-1}).$$

L'espace des orbites de G dans un pétale attractif $\{\Re u > A\}$ est un cylindre C_+ biholomorphe à $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$.
De même, l'espace des orbites de G dans un pétale répulsif $\{\Re u < -A\}$ est un cylindre C_- biholomorphe à $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$.

L'application G induit une application de transition holomorphe φ_∞ entre le bout supérieur de C_- et le bout supérieur de C_+.

La classification analytique d'Ecalle-Voronin

On va seulement traiter le cas particulier $\lambda = 1$ ($\iff q = 1$), $r = 1$. Le cas général se traite par des méthodes analogues.

En conjuguant si nécessaire par une homothétie, on a $F(z) = z - z^2 + O(z^3)$. Le changement de variable $u = z^{-1}$ conduit à

$$G(u) = u + 1 + O(u^{-1}).$$

L'espace des orbites de G dans un pétale attractif $\{\Re u > A\}$ est un cylindre C_+ biholomorphe à $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$.
De même, l'espace des orbites de G dans un pétale répulsif $\{\Re u < -A\}$ est un cylindre C_- biholomorphe à $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$.

L'application G induit une application de transition holomorphe φ_∞ entre le bout supérieur de C_- et le bout supérieur de C_+.
De même, G induit une application de transition holomorphe φ_0 entre le bout inférieur de C_- et le bout inférieur de C_+.

Après uniformisation de C_+, C_- par $\mathbb{C}/\mathbb{Z} \sim \mathbb{C}^*$, on peut considérer φ_∞ comme un germe de difféomorphisme holomorphe de $(\bar{\mathbb{C}}, \infty)$

Après uniformisation de C_+, C_- par $\mathbb{C}/\mathbb{Z} \sim \mathbb{C}^*$, on peut considérer φ_∞ comme un germe de difféomorphisme holomorphe de $(\bar{\mathbb{C}}, \infty)$ et φ_0 comme un germe de difféomorphisme holomorphe de $(\mathbb{C}, 0)$.

Après uniformisation de C_+, C_- par $\mathbb{C}/\mathbb{Z} \sim \mathbb{C}^*$, on peut considérer φ_∞ comme un germe de difféomorphisme holomorphe de $(\bar{\mathbb{C}}, \infty)$ et φ_0 comme un germe de difféomorphisme holomorphe de $(\mathbb{C}, 0)$.

Un changement d'applications uniformisantes change $\varphi_\infty, \varphi_0$ en

$$\widetilde{\varphi}_\infty(w) = \lambda\varphi_\infty(\mu w), \quad \widetilde{\varphi}_0(w) = \lambda\varphi_0(\mu w), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{C}^*.$$

Après uniformisation de C_+, C_- par $\mathbb{C}/\mathbb{Z} \sim \mathbb{C}^*$, on peut considérer φ_∞ comme un germe de difféomorphisme holomorphe de $(\bar{\mathbb{C}}, \infty)$ et φ_0 comme un germe de difféomorphisme holomorphe de $(\mathbb{C}, 0)$.

Un changement d'applications uniformisantes change $\varphi_\infty, \varphi_0$ en

$$\widetilde{\varphi}_\infty(w) = \lambda\varphi_\infty(\mu w), \quad \widetilde{\varphi}_0(w) = \lambda\varphi_0(\mu w), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{C}^*.$$

La paire $(\varphi_\infty, \varphi_0)$, modulo l'action de $(\mathbb{C}^*)^2$, est un invariant complet de conjugaison analytique pour F.

Après uniformisation de C_+, C_- par $\mathbb{C}/\mathbb{Z} \sim \mathbb{C}^*$, on peut considérer φ_∞ comme un germe de difféomorphisme holomorphe de $(\bar{\mathbb{C}}, \infty)$ et φ_0 comme un germe de difféomorphisme holomorphe de $(\mathbb{C}, 0)$.

Un changement d'applications uniformisantes change $\varphi_\infty, \varphi_0$ en

$$\widetilde{\varphi}_\infty(w) = \lambda \varphi_\infty(\mu w), \quad \widetilde{\varphi}_0(w) = \lambda \varphi_0(\mu w), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{C}^*.$$

La paire $(\varphi_\infty, \varphi_0)$, modulo l'action de $(\mathbb{C}^*)^2$, est un invariant complet de conjugaison analytique pour F.

Inversement, toute paire $(\varphi_\infty, \varphi_0)$ est associée à un germe F.

Points fixes indifférents irrationnels

On suppose dans la suite que le point fixe 0 de $F(z) = \lambda z + O(z^2)$ est indifférent irrationnel, i.e $\lambda = \exp 2\pi i\alpha$ avec α irrationnel.

Points fixes indifférents irrationnels

On suppose dans la suite que le point fixe 0 de $F(z) = \lambda z + O(z^2)$ est indifférent irrationnel, i.e $\lambda = \exp 2\pi i\alpha$ avec α irrationnel.

Proposition: Il existe une unique série formelle $h(z) = z + O(z^2)$ telle que $h^{-1} \circ F \circ h(z) \equiv \lambda z$.

Points fixes indifférents irrationnels

On suppose dans la suite que le point fixe 0 de $F(z) = \lambda z + O(z^2)$ est indifférent irrationnel, i.e $\lambda = \exp 2\pi i \alpha$ avec α irrationnel.

Proposition: Il existe une unique série formelle $h(z) = z + O(z^2)$ telle que $h^{-1} \circ F \circ h(z) \equiv \lambda z$.

Preuve: Ecrivons $F(z) = \lambda z \sum_{n \geqslant 0} F_n z^n$, $h(z) = z \sum_{n \geqslant 0} h_n z^n$, avec $F_0 = h_0 = 1$.

Points fixes indifférents irrationnels

On suppose dans la suite que le point fixe 0 de $F(z) = \lambda z + O(z^2)$ est indifférent irrationnel, i.e $\lambda = \exp 2\pi i \alpha$ avec α irrationnel.

Proposition: Il existe une unique série formelle $h(z) = z + O(z^2)$ telle que $h^{-1} \circ F \circ h(z) \equiv \lambda z$.

Preuve: Ecrivons $F(z) = \lambda z \sum_{n \geqslant 0} F_n z^n$, $h(z) = z \sum_{n \geqslant 0} h_n z^n$, avec $F_0 = h_0 = 1$. L'équation de conjugaison $F \circ h(z) = h(\lambda z)$ équivaut à

$$(\lambda^n - 1) h_n = \sum_{k \geqslant 1, n_j \geqslant 0, n_0 + \ldots + n_k = n-k} F_k h_{n_0} \ldots h_{n_k}, \quad \forall n > 0,$$

Points fixes indifférents irrationnels

On suppose dans la suite que le point fixe 0 de $F(z) = \lambda z + O(z^2)$ est indifférent irrationnel, i.e $\lambda = \exp 2\pi i\alpha$ avec α irrationnel.

Proposition: Il existe une unique série formelle $h(z) = z + O(z^2)$ telle que $h^{-1} \circ F \circ h(z) \equiv \lambda z$.

Preuve: Ecrivons $F(z) = \lambda z \sum_{n\geqslant 0} F_n z^n$, $h(z) = z \sum_{n\geqslant 0} h_n z^n$, avec $F_0 = h_0 = 1$. L'équation de conjugaison $F \circ h(z) = h(\lambda z)$ équivaut à

$$(\lambda^n - 1)h_n = \sum_{k\geqslant 1, n_j\geqslant 0, n_0+\ldots+n_k=n-k} F_k h_{n_0} \ldots h_{n_k}, \quad \forall n > 0,$$

ce qui détermine uniquement les h_n par récurrence. $\square$

Définition: Le point fixe 0 de $F(z) = \lambda z + O(z^2)$ est topologiquement stable (en temps positif) si, pour tout voisinage U de 0, il existe un voisinage V de 0 tel que, pour tout $n \geqslant 0$, F^n soit défini dans V et $F^n(V)$ soit contenu dans U.

Stabilité topologique et linéarisabilité analytique

Définition: Le point fixe 0 de $F(z) = \lambda z + O(z^2)$ est topologiquement stable (en temps positif) si, pour tout voisinage U de 0, il existe un voisinage V de 0 tel que, pour tout $n \geqslant 0$, F^n soit défini dans V et $F^n(V)$ soit contenu dans U.

Proposition: Lorsque $|\lambda| = 1$, la stabilité topologique de 0 est équivalente à la linéarisabilité analytique de F.

Stabilité topologique et linéarisabilité analytique

Définition: Le point fixe 0 de $F(z) = \lambda z + O(z^2)$ est topologiquement stable (en temps positif) si, pour tout voisinage U de 0, il existe un voisinage V de 0 tel que, pour tout $n \geqslant 0$, F^n soit défini dans V et $F^n(V)$ soit contenu dans U.

Proposition: Lorsque $|\lambda| = 1$, la stabilité topologique de 0 est équivalente à la linéarisabilité analytique de F.

Si F est analytiquement linéarisable, 0 est topologiquement stable.

Preuve de la proposition

Inversement, soit D un disque fermé centré en 0 contenu dans le domaine de définition de F.

Preuve de la proposition

Inversement, soit D un disque fermé centré en 0 contenu dans le domaine de définition de F. Supposons qu'il existe un voisinage ouvert V de 0 tel qu'on ait $F^n(V) \subset D$ pour tout $n \geqslant 0$.

Preuve de la proposition

Inversement, soit D un disque fermé centré en 0 contenu dans le domaine de définition de F. Supposons qu'il existe un voisinage ouvert V de 0 tel qu'on ait $F^n(V) \subset D$ pour tout $n \geqslant 0$.

Définissons $L := \cap_{n \geqslant 0} F^{-n}(D)$.

Preuve de la proposition

Inversement, soit D un disque fermé centré en 0 contenu dans le domaine de définition de F. Supposons qu'il existe un voisinage ouvert V de 0 tel qu'on ait $F^n(V) \subset D$ pour tout $n \geqslant 0$.

Définissons $L := \cap_{n \geqslant 0} F^{-n}(D)$. C'est une partie compacte de D qui contient V.

Preuve de la proposition

Inversement, soit D un disque fermé centré en 0 contenu dans le domaine de définition de F. Supposons qu'il existe un voisinage ouvert V de 0 tel qu'on ait $F^n(V) \subset D$ pour tout $n \geqslant 0$.

Définissons $L := \cap_{n \geqslant 0} F^{-n}(D)$. C'est une partie compacte de D qui contient V. Notons W la composante connexe de l'intérieur de L qui contient V.

Preuve de la proposition

Inversement, soit D un disque fermé centré en 0 contenu dans le domaine de définition de F. Supposons qu'il existe un voisinage ouvert V de 0 tel qu'on ait $F^n(V) \subset D$ pour tout $n \geqslant 0$.

Définissons $L := \cap_{n \geqslant 0} F^{-n}(D)$. C'est une partie compacte de D qui contient V. Notons W la composante connexe de l'intérieur de L qui contient V. On a $F(L) \subset L$ et donc aussi $F(W) \subset W$.

Preuve de la proposition

Inversement, soit D un disque fermé centré en 0 contenu dans le domaine de définition de F. Supposons qu'il existe un voisinage ouvert V de 0 tel qu'on ait $F^n(V) \subset D$ pour tout $n \geqslant 0$.

Définissons $L := \cap_{n \geqslant 0} F^{-n}(D)$. C'est une partie compacte de D qui contient V. Notons W la composante connexe de l'intérieur de L qui contient V. On a $F(L) \subset L$ et donc aussi $F(W) \subset W$.

Lemme: L'ouvert W est simplement connexe.

Preuve de la proposition

Inversement, soit D un disque fermé centré en 0 contenu dans le domaine de définition de F. Supposons qu'il existe un voisinage ouvert V de 0 tel qu'on ait $F^n(V) \subset D$ pour tout $n \geqslant 0$.

Définissons $L := \cap_{n \geqslant 0} F^{-n}(D)$. C'est une partie compacte de D qui contient V. Notons W la composante connexe de l'intérieur de L qui contient V. On a $F(L) \subset L$ et donc aussi $F(W) \subset W$.

Lemme: L'ouvert W est simplement connexe.

Soient $r > 0$ et $h : \mathbb{D}_r := \{|z| < r\} \to W$ la représentation conforme telle que $h(0) = 0$ et $Dh(0) = 1$.

Preuve de la proposition

Inversement, soit D un disque fermé centré en 0 contenu dans le domaine de définition de F. Supposons qu'il existe un voisinage ouvert V de 0 tel qu'on ait $F^n(V) \subset D$ pour tout $n \geqslant 0$.

Définissons $L := \cap_{n \geqslant 0} F^{-n}(D)$. C'est une partie compacte de D qui contient V. Notons W la composante connexe de l'intérieur de L qui contient V. On a $F(L) \subset L$ et donc aussi $F(W) \subset W$.

Lemme: L'ouvert W est simplement connexe.

Soient $r > 0$ et $h : \mathbb{D}_r := \{|z| < r\} \to W$ la représentation conforme telle que $h(0) = 0$ et $Dh(0) = 1$. L'application $R := h^{-1} \circ F \circ h$ est définie et holomorphe dans $\mathbb{D}_r$.

Preuve de la proposition

Inversement, soit D un disque fermé centré en 0 contenu dans le domaine de définition de F. Supposons qu'il existe un voisinage ouvert V de 0 tel qu'on ait $F^n(V) \subset D$ pour tout $n \geqslant 0$.

Définissons $L := \cap_{n \geqslant 0} F^{-n}(D)$. C'est une partie compacte de D qui contient V. Notons W la composante connexe de l'intérieur de L qui contient V. On a $F(L) \subset L$ et donc aussi $F(W) \subset W$.

Lemme: L'ouvert W est simplement connexe.

Soient $r > 0$ et $h : \mathbb{D}_r := \{|z| < r\} \to W$ la représentation conforme telle que $h(0) = 0$ et $Dh(0) = 1$. L'application $R := h^{-1} \circ F \circ h$ est définie et holomorphe dans $\mathbb{D}_r$. Elle vérifie $R(\mathbb{D}_r) \subset \mathbb{D}_r$, $R(0) = 0, DR(0) = \lambda$.

Preuve de la proposition

Inversement, soit D un disque fermé centré en 0 contenu dans le domaine de définition de F. Supposons qu'il existe un voisinage ouvert V de 0 tel qu'on ait $F^n(V) \subset D$ pour tout $n \geqslant 0$.

Définissons $L := \cap_{n \geqslant 0} F^{-n}(D)$. C'est une partie compacte de D qui contient V. Notons W la composante connexe de l'intérieur de L qui contient V. On a $F(L) \subset L$ et donc aussi $F(W) \subset W$.

Lemme: L'ouvert W est simplement connexe.

Soient $r > 0$ et $h : \mathbb{D}_r := \{|z| < r\} \to W$ la représentation conforme telle que $h(0) = 0$ et $Dh(0) = 1$. L'application $R := h^{-1} \circ F \circ h$ est définie et holomorphe dans $\mathbb{D}_r$. Elle vérifie $R(\mathbb{D}_r) \subset \mathbb{D}_r$, $R(0) = 0, DR(0) = \lambda$. Par le lemme de Schwarz, on a $R(z) \equiv \lambda z$ et F est analytiquement linéarisable.

Preuve du lemme

Preuve du lemme

On va montrer que, pour toute courbe simple fermée γ contenue dans W, la composante connexe bornée B de $\mathbb{C} \setminus \gamma$ est contenue dans W.

Preuve du lemme

On va montrer que, pour toute courbe simple fermée γ contenue dans W, la composante connexe bornée B de $\mathbb{C} \setminus \gamma$ est contenue dans W.

Comme B est ouverte et connexe, il suffit de voir que $B \subset L$, c'est-à-dire que $F^n(B) \subset D$ pour tout $n \geqslant 0$.

Preuve du lemme

On va montrer que, pour toute courbe simple fermée γ contenue dans W, la composante connexe bornée B de $\mathbb{C} \setminus \gamma$ est contenue dans W.

Comme B est ouverte et connexe, il suffit de voir que $B \subset L$, c'est-à-dire que $F^n(B) \subset D$ pour tout $n \geqslant 0$. Cette propriété est vraie pour $n = 0$ car $\gamma \subset W \subset L \subset D$ et D est simplement connexe.

Preuve du lemme

On va montrer que, pour toute courbe simple fermée γ contenue dans W, la composante connexe bornée B de $\mathbb{C} \setminus \gamma$ est contenue dans W.

Comme B est ouverte et connexe, il suffit de voir que $B \subset L$, c'est-à-dire que $F^n(B) \subset D$ pour tout $n \geqslant 0$. Cette propriété est vraie pour $n = 0$ car $\gamma \subset W \subset L \subset D$ et D est simplement connexe.

Si on a $F^n(B) \subset D$, $F^{n+1} = F \circ F^n$ est défini dans $\bar{B} = B \cup \gamma$.

Preuve du lemme

On va montrer que, pour toute courbe simple fermée γ contenue dans W, la composante connexe bornée B de $\mathbb{C} \setminus \gamma$ est contenue dans W.

Comme B est ouverte et connexe, il suffit de voir que $B \subset L$, c'est-à-dire que $F^n(B) \subset D$ pour tout $n \geqslant 0$. Cette propriété est vraie pour $n = 0$ car $\gamma \subset W \subset L \subset D$ et D est simplement connexe.

Si on a $F^n(B) \subset D$, $F^{n+1} = F \circ F^n$ est défini dans $\bar{B} = B \cup \gamma$. On a

$$F^{n+1}(\gamma) \subset F^{n+1}(W) \subset F^{n+1}(L) \subset L \subset D,$$

Preuve du lemme

On va montrer que, pour toute courbe simple fermée γ contenue dans W, la composante connexe bornée B de $\mathbb{C} \setminus \gamma$ est contenue dans W.

Comme B est ouverte et connexe, il suffit de voir que $B \subset L$, c'est-à-dire que $F^n(B) \subset D$ pour tout $n \geqslant 0$. Cette propriété est vraie pour $n = 0$ car $\gamma \subset W \subset L \subset D$ et D est simplement connexe.

Si on a $F^n(B) \subset D$, $F^{n+1} = F \circ F^n$ est défini dans $\bar{B} = B \cup \gamma$. On a

$$F^{n+1}(\gamma) \subset F^{n+1}(W) \subset F^{n+1}(L) \subset L \subset D,$$

donc $F^{n+1}(B) \subset D$ par le principe du maximum. $\square$

Contre-exemples de Cremer

Notons P_λ le polynôme quadratique $P_\lambda(z) = \lambda z + z^2$.

Contre-exemples de Cremer

Notons P_λ le polynôme quadratique $P_\lambda(z) = \lambda z + z^2$.

Proposition: Supposons que $\lambda = \exp 2\pi i\alpha$, avec α irrationnel, et que la suite (p_n/q_n) des réduites de α vérifie

$$\sup_{n \geqslant 0} 2^{-q_n} \log q_{n+1} = +\infty.$$

Contre-exemples de Cremer

Notons P_λ le polynôme quadratique $P_\lambda(z) = \lambda z + z^2$.

Proposition: Supposons que $\lambda = \exp 2\pi i\alpha$, avec α irrationnel, et que la suite (p_n/q_n) des réduites de α vérifie

$$\sup_{n\geqslant 0} 2^{-q_n} \log q_{n+1} = +\infty.$$

Alors P_λ n'est pas analytiquement linéarisable.

Contre-exemples de Cremer

Notons P_λ le polynôme quadratique $P_\lambda(z) = \lambda z + z^2$.

Proposition: Supposons que $\lambda = \exp 2\pi i\alpha$, avec α irrationnel, et que la suite (p_n/q_n) des réduites de α vérifie

$$\sup_{n\geqslant 0} 2^{-q_n} \log q_{n+1} = +\infty.$$

Alors P_λ n'est pas analytiquement linéarisable.

Preuve: La condition de la proposition est équivalente à

$$\inf_{n\geqslant 1} |\lambda^n - 1|^{\frac{1}{2^n-1}} = 0.$$

Contre-exemples de Cremer

Notons P_λ le polynôme quadratique $P_\lambda(z) = \lambda z + z^2$.

Proposition: Supposons que $\lambda = \exp 2\pi i\alpha$, avec α irrationnel, et que la suite (p_n/q_n) des réduites de α vérifie

$$\sup_{n\geqslant 0} 2^{-q_n} \log q_{n+1} = +\infty.$$

Alors P_λ n'est pas analytiquement linéarisable.

Preuve: La condition de la proposition est équivalente à

$$\inf_{n\geqslant 1} |\lambda^n - 1|^{\frac{1}{2^n-1}} = 0.$$

Pour tout $n \geqslant 0$, $P_\lambda^{\circ n}$ est un polynôme unitaire sans terme constant de degré 2^n, de partie linéaire $\lambda^n z$.

Contre-exemples de Cremer

Notons P_λ le polynôme quadratique $P_\lambda(z) = \lambda z + z^2$.

Proposition: Supposons que $\lambda = \exp 2\pi i\alpha$, avec α irrationnel, et que la suite (p_n/q_n) des réduites de α vérifie

$$\sup_{n\geqslant 0} 2^{-q_n} \log q_{n+1} = +\infty.$$

Alors P_λ n'est pas analytiquement linéarisable.

Preuve: La condition de la proposition est équivalente à

$$\inf_{n\geqslant 1} |\lambda^n - 1|^{\frac{1}{2^n-1}} = 0.$$

Pour tout $n \geqslant 0$, $P_\lambda^{\circ n}$ est un polynôme unitaire sans terme constant de degré 2^n, de partie linéaire $\lambda^n z$. Il existe donc un zéro z_0 distinct de 0 de $P_\lambda^{\circ n}(z) - z$ vérifiant

$$|z_0| \leqslant |\lambda^n - 1|^{\frac{1}{2^n-1}}.$$

Contre-exemples de Cremer

Notons P_λ le polynôme quadratique $P_\lambda(z) = \lambda z + z^2$.

Proposition: Supposons que $\lambda = \exp 2\pi i\alpha$, avec α irrationnel, et que la suite (p_n/q_n) des réduites de α vérifie

$$\sup_{n\geqslant 0} 2^{-q_n} \log q_{n+1} = +\infty.$$

Alors P_λ n'est pas analytiquement linéarisable.

Preuve: La condition de la proposition est équivalente à

$$\inf_{n\geqslant 1} |\lambda^n - 1|^{\frac{1}{2^n-1}} = 0.$$

Pour tout $n \geqslant 0$, $P_\lambda^{\circ n}$ est un polynôme unitaire sans terme constant de degré 2^n, de partie linéaire $\lambda^n z$. Il existe donc un zéro z_0 distinct de 0 de $P_\lambda^{\circ n}(z) - z$ vérifiant

$$|z_0| \leqslant |\lambda^n - 1|^{\frac{1}{2^n-1}}.$$

L'origine est ainsi accumulée par des points périodiques de P_λ, qui ne peut donc être analytiquement linéarisable. $\square$

La condition de Brjuno

Définition: Un nombre irrationnel α satisfait la *condition de Brjuno* (ou est un *nombre de Brjuno*) si la suite (p_n/q_n) de ses réduites vérifie

$$\sum_{n \geqslant 0} q_n^{-1} \log q_{n+1} < +\infty.$$

La condition de Brjuno

Définition: Un nombre irrationnel α satisfait la *condition de Brjuno* (ou est un *nombre de Brjuno*) si la suite (p_n/q_n) de ses réduites vérifie

$$\sum_{n \geqslant 0} q_n^{-1} \log q_{n+1} < +\infty.$$

Deux formulations équivalentes de cette condition sont

$$\sum_{n \geqslant 0} 2^{-n} \log(\min_{0 < q \leqslant 2^n} ||q\alpha||_{\mathbb{T}})^{-1} < +\infty,$$

La condition de Brjuno

Définition: Un nombre irrationnel α satisfait la *condition de Brjuno* (ou est un *nombre de Brjuno*) si la suite (p_n/q_n) de ses réduites vérifie

$$\sum_{n \geqslant 0} q_n^{-1} \log q_{n+1} < +\infty.$$

Deux formulations équivalentes de cette condition sont

$$\sum_{n \geqslant 0} 2^{-n} \log(\min_{0<q\leqslant 2^n} ||q\alpha||_{\mathbb{T}})^{-1} < +\infty,$$

$$\Phi(\alpha) := \sum_{n \geqslant 0} |q_{n-1}\alpha - p_{n-1}| \log \alpha_n^{-1} < +\infty,$$

où $\alpha_0 = \{\alpha\}$, $\alpha_n := G^n(\alpha_0)$ et $G(x) = \{x\}$ est l'application de Gauss.

La condition de Brjuno

Définition: Un nombre irrationnel α satisfait la *condition de Brjuno* (ou est un *nombre de Brjuno*) si la suite (p_n/q_n) de ses réduites vérifie

$$\sum_{n\geqslant 0} q_n^{-1} \log q_{n+1} < +\infty.$$

Deux formulations équivalentes de cette condition sont

$$\sum_{n\geqslant 0} 2^{-n} \log(\min_{0<q\leqslant 2^n} ||q\alpha||_{\mathbb{T}})^{-1} < +\infty,$$

$$\Phi(\alpha) := \sum_{n\geqslant 0} |q_{n-1}\alpha - p_{n-1}| \log \alpha_n^{-1} < +\infty,$$

où $\alpha_0 = \{\alpha\}$, $\alpha_n := G^n(\alpha_0)$ et $G(x) = \{x\}$ est l'application de Gauss.

On désigne par $\mathcal{B}$ l'ensemble des nombres de Brjuno. Il contient *DC* donc est de mesure de Lebesgue totale.

La condition de Brjuno

Définition: Un nombre irrationnel α satisfait la *condition de Brjuno* (ou est un *nombre de Brjuno*) si la suite (p_n/q_n) de ses réduites vérifie

$$\sum_{n\geqslant 0} q_n^{-1}\log q_{n+1} < +\infty.$$

Deux formulations équivalentes de cette condition sont

$$\sum_{n\geqslant 0} 2^{-n}\log(\min_{0<q\leqslant 2^n} ||q\alpha||_{\mathbb{T}})^{-1} < +\infty,$$

$$\Phi(\alpha) := \sum_{n\geqslant 0} |q_{n-1}\alpha - p_{n-1}|\log\alpha_n^{-1} < +\infty,$$

où $\alpha_0 = \{\alpha\}$, $\alpha_n := G^n(\alpha_0)$ et $G(x) = \{x\}$ est l'application de Gauss.

On désigne par $\mathcal{B}$ l'ensemble des nombres de Brjuno. Il contient *DC* donc est de mesure de Lebesgue totale. Par contre, son complémentaire est une partie G_δ-dense de $\mathbb{R}$.

Le théorème de Siegel-Brjuno

Soit $F(z) = \lambda z + O(z^2)$ un germe de difféomorphisme holomorphe tel que le point fixe 0 soit indifférent irrationnel. Ecrivons $\lambda = \exp 2\pi i \alpha$.

Le théorème de Siegel-Brjuno

Soit $F(z) = \lambda z + O(z^2)$ un germe de difféomorphisme holomorphe tel que le point fixe 0 soit indifférent irrationnel. Ecrivons $\lambda = \exp 2\pi i\alpha$.

Theorem: (Siegel 1942, Brjuno 1965) Supposons que α soit un nombre de Brjuno. Alors F est analytiquement linéarisable.

Le théorème de Siegel-Brjuno

Soit $F(z) = \lambda z + O(z^2)$ un germe de difféomorphisme holomorphe tel que le point fixe 0 soit indifférent irrationnel. Ecrivons $\lambda = \exp 2\pi i\alpha$.

Theorem: (Siegel 1942, Brjuno 1965) Supposons que α soit un nombre de Brjuno. Alors F est analytiquement linéarisable.

Siegel avait obtenu la même conclusion sous l'hypothèse plus restrictive que $\alpha \in DC$.

Le théorème de Siegel-Brjuno

Soit $F(z) = \lambda z + O(z^2)$ un germe de difféomorphisme holomorphe tel que le point fixe 0 soit indifférent irrationnel. Ecrivons $\lambda = \exp 2\pi i\alpha$.

Theorem: (Siegel 1942, Brjuno 1965) Supposons que α soit un nombre de Brjuno. Alors F est analytiquement linéarisable.

Siegel avait obtenu la même conclusion sous l'hypothèse plus restrictive que $\alpha \in DC$.

La condition de Brjuno dans le théorème précédent est optimale:

Le théorème de Siegel-Brjuno

Soit $F(z) = \lambda z + O(z^2)$ un germe de difféomorphisme holomorphe tel que le point fixe 0 soit indifférent irrationnel. Ecrivons $\lambda = \exp 2\pi i\alpha$.

Theorem: (Siegel 1942, Brjuno 1965) Supposons que α soit un nombre de Brjuno. Alors F est analytiquement linéarisable.

Siegel avait obtenu la même conclusion sous l'hypothèse plus restrictive que $\alpha \in DC$.

La condition de Brjuno dans le théorème précédent est optimale:

Theorem: (Y. 1987) Supposons que α ne soit pas un nombre de Brjuno. Alors le polynôme quadratique $P_\lambda(z) = \lambda z + z^2$ n'est pas analytiquement linéarisable à l'origine.