Quelques aspects de la théorie des systèmes dynamiques hyperboliques (6)

Jean-Christophe Yoccoz

Collège de France

25 février 2015

Stabilité structurelle

Stabilité structurelle

Définition Un difféomorphisme $f \in \mathrm{Diff}^r(M)$ est C^r-structurellement stable s'il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de f dans $\mathrm{Diff}^r(M)$ tel que tout $g \in \mathcal{U}$ soit topologiquement conjugué à f.

Stabilité structurelle

Définition Un difféomorphisme $f \in \mathrm{Diff}^r(M)$ est C^r-structurellement stable s'il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de f dans $\mathrm{Diff}^r(M)$ tel que tout $g \in \mathcal{U}$ soit topologiquement conjugué à f.

Théorème (Robbin, Robinson; Mañé) Un difféomorphisme $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$ est C^1-structurellement stable si et seulement si f est hyperbolique

Stabilité structurelle

Définition Un difféomorphisme $f \in \mathrm{Diff}^r(M)$ est C^r-structurellement stable s'il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de f dans $\mathrm{Diff}^r(M)$ tel que tout $g \in \mathcal{U}$ soit topologiquement conjugué à f.

Théorème (Robbin, Robinson; Mañé) Un difféomorphisme $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$ est C^1-structurellement stable si et seulement si f est hyperbolique et, pour tous $x, y \in R(f)$, $W^s(x)$ et $W^u(y)$ sont des sous-variétés transverses de M.

Stabilité structurelle

Définition Un difféomorphisme $f \in \mathrm{Diff}^r(M)$ est C^r-structurellement stable s'il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de f dans $\mathrm{Diff}^r(M)$ tel que tout $g \in \mathcal{U}$ soit topologiquement conjugué à f.

Théorème (Robbin, Robinson; Mañé) Un difféomorphisme $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$ est C^1-structurellement stable si et seulement si f est hyperbolique et, pour tous $x, y \in R(f)$, $W^s(x)$ et $W^u(y)$ sont des sous-variétés transverses de M.

Pour $f \in \mathrm{Diff}^r(M)$ avec $r > 1$, la C^r-stabilité structurelle est a priori une propriété plus faible que la C^1-stabilité structurelle.

Stabilité structurelle

Définition Un difféomorphisme $f \in \mathrm{Diff}^r(M)$ est C^r-structurellement stable s'il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de f dans $\mathrm{Diff}^r(M)$ tel que tout $g \in \mathcal{U}$ soit topologiquement conjugué à f.

Théorème (Robbin, Robinson; Mañé) Un difféomorphisme $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$ est C^1-structurellement stable si et seulement si f est hyperbolique et, pour tous $x, y \in R(f)$, $W^s(x)$ et $W^u(y)$ sont des sous-variétés transverses de M.

Pour $f \in \mathrm{Diff}^r(M)$ avec $r > 1$, la C^r-stabilité structurelle est a priori une propriété plus faible que la C^1-stabilité structurelle. On ne sait pas s'il existe des difféomorphismes f qui sont C^r-structurellement stables mais ne sont pas hyperboliques.

Le "closing lemma"

Le point de départ de la preuve par Mañé qu'un difféomorphisme C^1-structurellement stable est hyperbolique est la propriété suivante:

Le "closing lemma"

Le point de départ de la preuve par Mañé qu'un difféomorphisme C^1-structurellement stable est hyperbolique est la propriété suivante: dans l'ensemble récurrent par chaînes $R(f)$ d'un difféomorphisme C^1-structurellement stable f, les points périodiques sont denses.

Le "closing lemma"

Le point de départ de la preuve par Mañé qu'un difféomorphisme C^1-structurellement stable est hyperbolique est la propriété suivante: dans l'ensemble récurrent par chaînes $R(f)$ d'un difféomorphisme C^1-structurellement stable f, les points périodiques sont denses.

Le théorème qui garantit ceci est le résultat ci-dessous, appelé "closing lemma" (en classe C^1).

Le "closing lemma"

Le point de départ de la preuve par Mañé qu'un difféomorphisme C^1-structurellement stable est hyperbolique est la propriété suivante: dans l'ensemble récurrent par chaînes $R(f)$ d'un difféomorphisme C^1-structurellement stable f, les points périodiques sont denses.

Le théorème qui garantit ceci est le résultat ci-dessous, appelé "closing lemma" (en classe C^1).

Définition Soit $f : X \to X$ une application continue. Un point $x \in X$ est errant s'il possède un voisinage U vérifiant $U \cap f^{-n}(U) = \emptyset$ pour tout $n > 0$.

Le "closing lemma"

Le point de départ de la preuve par Mañé qu'un difféomorphisme C^1-structurellement stable est hyperbolique est la propriété suivante: dans l'ensemble récurrent par chaînes $R(f)$ d'un difféomorphisme C^1-structurellement stable f, les points périodiques sont denses.

Le théorème qui garantit ceci est le résultat ci-dessous, appelé "closing lemma" (en classe C^1).

Définition Soit $f : X \to X$ une application continue. Un point $x \in X$ est errant s'il possède un voisinage U vérifiant $U \cap f^{-n}(U) = \emptyset$ pour tout $n > 0$. Il est non-errant dans le cas contraire.

Le "closing lemma"

Le point de départ de la preuve par Mañé qu'un difféomorphisme C^1-structurellement stable est hyperbolique est la propriété suivante: dans l'ensemble récurrent par chaînes $R(f)$ d'un difféomorphisme C^1-structurellement stable f, les points périodiques sont denses.

Le théorème qui garantit ceci est le résultat ci-dessous, appelé "closing lemma" (en classe C^1).

Définition Soit $f : X \to X$ une application continue. Un point $x \in X$ est errant s'il possède un voisinage U vérifiant $U \cap f^{-n}(U) = \emptyset$ pour tout $n > 0$. Il est non-errant dans le cas contraire.

Théorème (Pugh) Soient $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$, $\mathcal{U} \subset \mathrm{Diff}^1(M)$ un voisinage de f, et soit $x \in M$ un point non-errant pour f.

Le "closing lemma"

Le point de départ de la preuve par Mañé qu'un difféomorphisme C^1-structurellement stable est hyperbolique est la propriété suivante: dans l'ensemble récurrent par chaînes $R(f)$ d'un difféomorphisme C^1-structurellement stable f, les points périodiques sont denses.

Le théorème qui garantit ceci est le résultat ci-dessous, appelé "closing lemma" (en classe C^1).

Définition Soit $f : X \to X$ une application continue. Un point $x \in X$ est errant s'il possède un voisinage U vérifiant $U \cap f^{-n}(U) = \emptyset$ pour tout $n > 0$. Il est non-errant dans le cas contraire.

Théorème (Pugh) Soient $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$, $\mathcal{U} \subset \mathrm{Diff}^1(M)$ un voisinage de f, et soit $x \in M$ un point non-errant pour f. Alors il existe $g \in \mathcal{U}$ tel que x soit un point périodique de g.

Voici une version plus récente et plus puissante du théorème de Pugh.

Voici une version plus récente et plus puissante du théorème de Pugh.

Théorème (Hayashi; Bonatti-Crovisier) Soient $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$, $\mathcal{U} \subset \mathrm{Diff}^1(M)$ un voisinage de f.

Voici une version plus récente et plus puissante du théorème de Pugh.

Théorème (Hayashi; Bonatti-Crovisier) Soient $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$, $\mathcal{U} \subset \mathrm{Diff}^1(M)$ un voisinage de f. On suppose que toutes les orbites périodiques de f sont hyperboliques.

Voici une version plus récente et plus puissante du théorème de Pugh.

Théorème (Hayashi; Bonatti-Crovisier) Soient $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$, $\mathcal{U} \subset \mathrm{Diff}^1(M)$ un voisinage de f. On suppose que toutes les orbites périodiques de f sont hyperboliques. Soient x, y deux points de M tels que, pour tout $\delta > 0$, il existe une δ-pseudo-orbite de x à y.

Voici une version plus récente et plus puissante du théorème de Pugh.

Théorème (Hayashi; Bonatti-Crovisier) Soient $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$, $\mathcal{U} \subset \mathrm{Diff}^1(M)$ un voisinage de f. On suppose que toutes les orbites périodiques de f sont hyperboliques. Soient x, y deux points de M tels que, pour tout $\delta > 0$, il existe une δ-pseudo-orbite de x à y.
Alors il existe un difféomorphisme $g \in \mathcal{U}$ et $n > 0$ tels que $g^n(x) = y$.

Voici une version plus récente et plus puissante du théorème de Pugh.

Théorème (Hayashi; Bonatti-Crovisier) Soient $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$, $\mathcal{U} \subset \mathrm{Diff}^1(M)$ un voisinage de f. On suppose que toutes les orbites périodiques de f sont hyperboliques. Soient x, y deux points de M tels que, pour tout $\delta > 0$, il existe une δ-pseudo-orbite de x à y.
Alors il existe un difféomorphisme $g \in \mathcal{U}$ et $n > 0$ tels que $g^n(x) = y$.

Lorsque $r > 1$, même les versions les plus faibles du "closing lemma" constituent des problèmes ouverts. Par exemple

Voici une version plus récente et plus puissante du théorème de Pugh.

Théorème (Hayashi; Bonatti-Crovisier) Soient $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$, $\mathcal{U} \subset \mathrm{Diff}^1(M)$ un voisinage de f. On suppose que toutes les orbites périodiques de f sont hyperboliques. Soient x, y deux points de M tels que, pour tout $\delta > 0$, il existe une δ-pseudo-orbite de x à y.
Alors il existe un difféomorphisme $g \in \mathcal{U}$ et $n > 0$ tels que $g^n(x) = y$.

Lorsque $r > 1$, même les versions les plus faibles du "closing lemma" constituent des problèmes ouverts. Par exemple

Question: Est-ce qu'un difféomorphisme C^r-structurellement stable du tore $\mathbb{T}^d$ ($d \geqslant 2$) a (au moins) une orbite périodique?

Stabilité structurelle: le cas du cercle

Stabilité structurelle: le cas du cercle

Théorème Soit $f \in \mathrm{Diff}^r_+(\mathbb{T})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

Stabilité structurelle: le cas du cercle

Théorème Soit $f \in \mathrm{Diff}^r_+(\mathbb{T})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. f est hyperbolique;

Stabilité structurelle: le cas du cercle

Théorème Soit $f \in \mathrm{Diff}^r_+(\mathbb{T})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. f est hyperbolique;
2. f est C^1-structurellement stable;

Stabilité structurelle: le cas du cercle

Théorème Soit $f \in \mathrm{Diff}^r_+(\mathbb{T})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. f est hyperbolique;
2. f est C^1-structurellement stable;
3. f est C^r-structurellement stable;

Stabilité structurelle: le cas du cercle

Théorème Soit $f \in \mathrm{Diff}^r_+(\mathbb{T})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. f est hyperbolique;
2. f est C^1-structurellement stable;
3. f est C^r-structurellement stable;
4. le nombre de rotation de f est rationnel

Stabilité structurelle: le cas du cercle

Théorème Soit $f \in \mathrm{Diff}^r_+(\mathbb{T})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. f est hyperbolique;
2. f est C^1-structurellement stable;
3. f est C^r-structurellement stable;
4. le nombre de rotation de f est rationnel et chaque orbite périodique de f est hyperbolique.

Stabilité structurelle: le cas du cercle

Théorème Soit $f \in \mathrm{Diff}^r_+(\mathbb{T})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. f est hyperbolique;
2. f est C^1-structurellement stable;
3. f est C^r-structurellement stable;
4. le nombre de rotation de f est rationnel et chaque orbite périodique de f est hyperbolique.

Les difféomorphismes f jouissant de ces propriétés forment une partie ouverte et dense de $\mathrm{Diff}^r_+(\mathbb{T})$.

Esquisse de preuve

Esquisse de preuve

L'implication $2 \Rightarrow 3$ est triviale.

Esquisse de preuve

L'implication $2 \Rightarrow 3$ est triviale.

- $4 \Rightarrow 1$:

Esquisse de preuve

L'implication 2 $\Rightarrow$ 3 est triviale.

- 4 $\Rightarrow$ 1: Si la propriété 4 est vérifiée, l'ensemble récurrent par chaînes $R(f)$ est égal à l'union des orbites périodiques de f, qui sont isolées.

Esquisse de preuve

L'implication $2 \Rightarrow 3$ est triviale.

- $4 \Rightarrow 1$: Si la propriété 4 est vérifiée, l'ensemble récurrent par chaînes $R(f)$ est égal à l'union des orbites périodiques de f, qui sont isolées. Le difféomorphisme f est donc hyperbolique.

Esquisse de preuve

L'implication $2 \Rightarrow 3$ est triviale.

- $4 \Rightarrow 1$: Si la propriété 4 est vérifiée, l'ensemble récurrent par chaînes $R(f)$ est égal à l'union des orbites périodiques de f, qui sont isolées. Le difféomorphisme f est donc hyperbolique.
- $4 \Rightarrow 2$:

Esquisse de preuve

L'implication 2 $\Rightarrow$ 3 est triviale.

- 4 $\Rightarrow$ 1: Si la propriété 4 est vérifiée, l'ensemble récurrent par chaînes $R(f)$ est égal à l'union des orbites périodiques de f, qui sont isolées. Le difféomorphisme f est donc hyperbolique.
- 4 $\Rightarrow$ 2: Supposons que f vérifie la propriété 4.

Esquisse de preuve

L'implication $2 \Rightarrow 3$ est triviale.

- $4 \Rightarrow 1$: Si la propriété 4 est vérifiée, l'ensemble récurrent par chaînes $R(f)$ est égal à l'union des orbites périodiques de f, qui sont isolées. Le difféomorphisme f est donc hyperbolique.
- $4 \Rightarrow 2$: Supposons que f vérifie la propriété 4. Il existe un entier $k \geqslant 1$ tel que f possède k orbites périodiques attractives et k orbites répulsives.

Esquisse de preuve

L'implication $2 \Rightarrow 3$ est triviale.

- $4 \Rightarrow 1$: Si la propriété 4 est vérifiée, l'ensemble récurrent par chaînes $R(f)$ est égal à l'union des orbites périodiques de f, qui sont isolées. Le difféomorphisme f est donc hyperbolique.
- $4 \Rightarrow 2$: Supposons que f vérifie la propriété 4. Il existe un entier $k \geqslant 1$ tel que f possède k orbites périodiques attractives et k orbites répulsives. Un difféomorphisme g C^1-voisin de f vérifie aussi la propriété 4, avec le même entier k.

Esquisse de preuve

L'implication $2 \Rightarrow 3$ est triviale.

- $4 \Rightarrow 1$: Si la propriété 4 est vérifiée, l'ensemble récurrent par chaînes $R(f)$ est égal à l'union des orbites périodiques de f, qui sont isolées. Le difféomorphisme f est donc hyperbolique.
- $4 \Rightarrow 2$: Supposons que f vérifie la propriété 4. Il existe un entier $k \geqslant 1$ tel que f possède k orbites périodiques attractives et k orbites répulsives. Un difféomorphisme g C^1-voisin de f vérifie aussi la propriété 4, avec le même entier k.

  Notons q l'ordre du nombre de rotation de f qui est aussi celui de g.

Esquisse de preuve

L'implication $2 \Rightarrow 3$ est triviale.

- $4 \Rightarrow 1$: Si la propriété 4 est vérifiée, l'ensemble récurrent par chaînes $R(f)$ est égal à l'union des orbites périodiques de f, qui sont isolées. Le difféomorphisme f est donc hyperbolique.
- $4 \Rightarrow 2$: Supposons que f vérifie la propriété 4. Il existe un entier $k \geqslant 1$ tel que f possède k orbites périodiques attractives et k orbites répulsives. Un difféomorphisme g C^1-voisin de f vérifie aussi la propriété 4, avec le même entier k.

  Notons q l'ordre du nombre de rotation de f qui est aussi celui de g. On construit une conjugaison topologique h entre f et g de la façon suivante:

Esquisse de preuve

L'implication $2 \Rightarrow 3$ est triviale.

- $4 \Rightarrow 1$: Si la propriété 4 est vérifiée, l'ensemble récurrent par chaînes $R(f)$ est égal à l'union des orbites périodiques de f, qui sont isolées. Le difféomorphisme f est donc hyperbolique.
- $4 \Rightarrow 2$: Supposons que f vérifie la propriété 4. Il existe un entier $k \geqslant 1$ tel que f possède k orbites périodiques attractives et k orbites répulsives. Un difféomorphisme g C^1-voisin de f vérifie aussi la propriété 4, avec le même entier k.

  Notons q l'ordre du nombre de rotation de f qui est aussi celui de g. On construit une conjugaison topologique h entre f et g de la façon suivante: tout d'abord, on choisit un point périodique attractif x_0 de f, et un point périodique attractif y_0 de g.

Esquisse de preuve

L'implication $2 \Rightarrow 3$ est triviale.

- $4 \Rightarrow 1$: Si la propriété 4 est vérifiée, l'ensemble récurrent par chaînes $R(f)$ est égal à l'union des orbites périodiques de f, qui sont isolées. Le difféomorphisme f est donc hyperbolique.
- $4 \Rightarrow 2$: Supposons que f vérifie la propriété 4. Il existe un entier $k \geqslant 1$ tel que f possède k orbites périodiques attractives et k orbites répulsives. Un difféomorphisme g C^1-voisin de f vérifie aussi la propriété 4, avec le même entier k.

  Notons q l'ordre du nombre de rotation de f qui est aussi celui de g. On construit une conjugaison topologique h entre f et g de la façon suivante: tout d'abord, on choisit un point périodique attractif x_0 de f, et un point périodique attractif y_0 de g. Notons $x_0, x_1, \ldots x_{2kq} = x_0$ les points périodiques de f, et $y_0, y_1, \ldots y_{2kq} = y_0$ ceux de g, numérotés suivant l'ordre cyclique du cercle.

Esquisse de preuve

L'implication $2 \Rightarrow 3$ est triviale.

- $4 \Rightarrow 1$: Si la propriété 4 est vérifiée, l'ensemble récurrent par chaînes $R(f)$ est égal à l'union des orbites périodiques de f, qui sont isolées. Le difféomorphisme f est donc hyperbolique.
- $4 \Rightarrow 2$: Supposons que f vérifie la propriété 4. Il existe un entier $k \geqslant 1$ tel que f possède k orbites périodiques attractives et k orbites répulsives. Un difféomorphisme g C^1-voisin de f vérifie aussi la propriété 4, avec le même entier k.

  Notons q l'ordre du nombre de rotation de f qui est aussi celui de g. On construit une conjugaison topologique h entre f et g de la façon suivante: tout d'abord, on choisit un point périodique attractif x_0 de f, et un point périodique attractif y_0 de g. Notons $x_0, x_1, \ldots x_{2kq} = x_0$ les points périodiques de f, et $y_0, y_1, \ldots y_{2kq} = y_0$ ceux de g, numérotés suivant l'ordre cyclique du cercle. Pour chaque $1 \leqslant j \leqslant 2k$,

Esquisse de preuve

L'implication $2 \Rightarrow 3$ est triviale.

- $4 \Rightarrow 1$: Si la propriété 4 est vérifiée, l'ensemble récurrent par chaînes $R(f)$ est égal à l'union des orbites périodiques de f, qui sont isolées. Le difféomorphisme f est donc hyperbolique.
- $4 \Rightarrow 2$: Supposons que f vérifie la propriété 4. Il existe un entier $k \geqslant 1$ tel que f possède k orbites périodiques attractives et k orbites répulsives. Un difféomorphisme g C^1-voisin de f vérifie aussi la propriété 4, avec le même entier k.

  Notons q l'ordre du nombre de rotation de f qui est aussi celui de g. On construit une conjugaison topologique h entre f et g de la façon suivante: tout d'abord, on choisit un point périodique attractif x_0 de f, et un point périodique attractif y_0 de g. Notons $x_0, x_1, \dots x_{2kq} = x_0$ les points périodiques de f, et $y_0, y_1, \dots y_{2kq} = y_0$ ceux de g, numérotés suivant l'ordre cyclique du cercle. Pour chaque $1 \leqslant j \leqslant 2k$, on choisit un intervalle $L_j \subset (x_{j-1}, x_j)$ dont les extrémités se déduisent l'une de l'autre par f^q,

Esquisse de preuve

L'implication $2 \Rightarrow 3$ est triviale.

- $4 \Rightarrow 1$: Si la propriété 4 est vérifiée, l'ensemble récurrent par chaînes $R(f)$ est égal à l'union des orbites périodiques de f, qui sont isolées. Le difféomorphisme f est donc hyperbolique.
- $4 \Rightarrow 2$: Supposons que f vérifie la propriété 4. Il existe un entier $k \geqslant 1$ tel que f possède k orbites périodiques attractives et k orbites répulsives. Un difféomorphisme g C^1-voisin de f vérifie aussi la propriété 4, avec le même entier k.

  Notons q l'ordre du nombre de rotation de f qui est aussi celui de g. On construit une conjugaison topologique h entre f et g de la façon suivante: tout d'abord, on choisit un point périodique attractif x_0 de f, et un point périodique attractif y_0 de g. Notons $x_0, x_1, \ldots x_{2kq} = x_0$ les points périodiques de f, et $y_0, y_1, \ldots y_{2kq} = y_0$ ceux de g, numérotés suivant l'ordre cyclique du cercle. Pour chaque $1 \leqslant j \leqslant 2k$, on choisit un intervalle $L_j \subset (x_{j-1}, x_j)$ dont les extrémités se déduisent l'une de l'autre par f^q, un intervalle analoque $L'_j \subset (y_{j-1}, y_j)$ relatif à g

Esquisse de preuve

L'implication $2 \Rightarrow 3$ est triviale.

- $4 \Rightarrow 1$: Si la propriété 4 est vérifiée, l'ensemble récurrent par chaînes $R(f)$ est égal à l'union des orbites périodiques de f, qui sont isolées. Le difféomorphisme f est donc hyperbolique.
- $4 \Rightarrow 2$: Supposons que f vérifie la propriété 4. Il existe un entier $k \geqslant 1$ tel que f possède k orbites périodiques attractives et k orbites répulsives. Un difféomorphisme g C^1-voisin de f vérifie aussi la propriété 4, avec le même entier k.

  Notons q l'ordre du nombre de rotation de f qui est aussi celui de g. On construit une conjugaison topologique h entre f et g de la façon suivante: tout d'abord, on choisit un point périodique attractif x_0 de f, et un point périodique attractif y_0 de g. Notons $x_0, x_1, \ldots x_{2kq} = x_0$ les points périodiques de f, et $y_0, y_1, \ldots y_{2kq} = y_0$ ceux de g, numérotés suivant l'ordre cyclique du cercle. Pour chaque $1 \leqslant j \leqslant 2k$, on choisit un intervalle $L_j \subset (x_{j-1}, x_j)$ dont les extrémités se déduisent l'une de l'autre par f^q, un intervalle analoque $L'_j \subset (y_{j-1}, y_j)$ relatif à g et un homéomorphisme préservant l'orientation h de L_j sur L'_j.

Esquisse de preuve

L'implication $2 \Rightarrow 3$ est triviale.

- $4 \Rightarrow 1$: Si la propriété 4 est vérifiée, l'ensemble récurrent par chaînes $R(f)$ est égal à l'union des orbites périodiques de f, qui sont isolées. Le difféomorphisme f est donc hyperbolique.
- $4 \Rightarrow 2$: Supposons que f vérifie la propriété 4. Il existe un entier $k \geqslant 1$ tel que f possède k orbites périodiques attractives et k orbites répulsives. Un difféomorphisme g C^1-voisin de f vérifie aussi la propriété 4, avec le même entier k.

  Notons q l'ordre du nombre de rotation de f qui est aussi celui de g. On construit une conjugaison topologique h entre f et g de la façon suivante: tout d'abord, on choisit un point périodique attractif x_0 de f, et un point périodique attractif y_0 de g. Notons $x_0, x_1, \dots x_{2kq} = x_0$ les points périodiques de f, et $y_0, y_1, \dots y_{2kq} = y_0$ ceux de g, numérotés suivant l'ordre cyclique du cercle. Pour chaque $1 \leqslant j \leqslant 2k$, on choisit un intervalle $L_j \subset (x_{j-1}, x_j)$ dont les extrémités se déduisent l'une de l'autre par f^q, un intervalle analoque $L'_j \subset (y_{j-1}, y_j)$ relatif à g et un homéomorphisme préservant l'orientation h de L_j sur L'_j. La relation $h \circ f = g \circ h$ permet de prolonger de façon unique h en la conjugaison recherchée.

- $1 \Rightarrow 4$:

- $1 \Rightarrow 4$: Supposons que f soit hyperbolique.

- $1 \Rightarrow 4$: Supposons que f soit hyperbolique. Si le nombre de rotation de f était irrationnel, l'ensemble récurrent par chaînes $R(f)$ serait égal à $\mathbb{T}$ (exercice).

- $1 \Rightarrow 4$: Supposons que f soit hyperbolique. Si le nombre de rotation de f était irrationnel, l'ensemble récurrent par chaînes $R(f)$ serait égal à $\mathbb{T}$ (exercice).

  Il existerait alors un entier $N \in \mathbb{Z}$ tel qu'on ait $Df^N(x) < 1$ pour tout $x \in \mathbb{T}$,

- $1 \Rightarrow 4$: Supposons que f soit hyperbolique. Si le nombre de rotation de f était irrationnel, l'ensemble récurrent par chaînes $R(f)$ serait égal à $\mathbb{T}$ (exercice).

  Il existerait alors un entier $N \in \mathbb{Z}$ tel qu'on ait $Df^N(x) < 1$ pour tout $x \in \mathbb{T}$, ce qui est impossible puisque $\int_{\mathbb{T}} Df^N(x)dx = 1$.

- $1 \Rightarrow 4$: Supposons que f soit hyperbolique. Si le nombre de rotation de f était irrationnel, l'ensemble récurrent par chaînes $R(f)$ serait égal à $\mathbb{T}$ (exercice).

  Il existerait alors un entier $N \in \mathbb{Z}$ tel qu'on ait $Df^N(x) < 1$ pour tout $x \in \mathbb{T}$, ce qui est impossible puisque $\int_{\mathbb{T}} Df^N(x)dx = 1$.

  Le nombre de rotation de f est donc rationnel.

- $1 \Rightarrow 4$: Supposons que f soit hyperbolique. Si le nombre de rotation de f était irrationnel, l'ensemble récurrent par chaînes $R(f)$ serait égal à $\mathbb{T}$ (exercice).

  Il existerait alors un entier $N \in \mathbb{Z}$ tel qu'on ait $Df^N(x) < 1$ pour tout $x \in \mathbb{T}$, ce qui est impossible puisque $\int_{\mathbb{T}} Df^N(x)dx = 1$.

  Le nombre de rotation de f est donc rationnel. Comme f est hyperbolique, chacune de ses orbites périodiques l'est aussi.

- $1 \Rightarrow 4$: Supposons que f soit hyperbolique. Si le nombre de rotation de f était irrationnel, l'ensemble récurrent par chaînes $R(f)$ serait égal à $\mathbb{T}$ (exercice).

  Il existerait alors un entier $N \in \mathbb{Z}$ tel qu'on ait $Df^N(x) < 1$ pour tout $x \in \mathbb{T}$, ce qui est impossible puisque $\int_{\mathbb{T}} Df^N(x)dx = 1$.

  Le nombre de rotation de f est donc rationnel. Comme f est hyperbolique, chacune de ses orbites périodiques l'est aussi.
- $3 \Rightarrow 4$:

- $1 \Rightarrow 4$: Supposons que f soit hyperbolique. Si le nombre de rotation de f était irrationnel, l'ensemble récurrent par chaînes $R(f)$ serait égal à $\mathbb{T}$ (exercice).

  Il existerait alors un entier $N \in \mathbb{Z}$ tel qu'on ait $Df^N(x) < 1$ pour tout $x \in \mathbb{T}$, ce qui est impossible puisque $\int_{\mathbb{T}} Df^N(x)dx = 1$.

  Le nombre de rotation de f est donc rationnel. Comme f est hyperbolique, chacune de ses orbites périodiques l'est aussi.
- $3 \Rightarrow 4$: Supposons que f soit C^r-structurellement stable.

- $1 \Rightarrow 4$: Supposons que f soit hyperbolique. Si le nombre de rotation de f était irrationnel, l'ensemble récurrent par chaînes $R(f)$ serait égal à $\mathbb{T}$ (exercice).

  Il existerait alors un entier $N \in \mathbb{Z}$ tel qu'on ait $Df^N(x) < 1$ pour tout $x \in \mathbb{T}$, ce qui est impossible puisque $\int_{\mathbb{T}} Df^N(x)dx = 1$.

  Le nombre de rotation de f est donc rationnel. Comme f est hyperbolique, chacune de ses orbites périodiques l'est aussi.
- $3 \Rightarrow 4$: Supposons que f soit C^r-structurellement stable. Si le nombre de rotation de f était irrationnel,

- $1 \Rightarrow 4$: Supposons que f soit hyperbolique. Si le nombre de rotation de f était irrationnel, l'ensemble récurrent par chaînes $R(f)$ serait égal à $\mathbb{T}$ (exercice).

  Il existerait alors un entier $N \in \mathbb{Z}$ tel qu'on ait $Df^N(x) < 1$ pour tout $x \in \mathbb{T}$, ce qui est impossible puisque $\int_{\mathbb{T}} Df^N(x)dx = 1$.

  Le nombre de rotation de f est donc rationnel. Comme f est hyperbolique, chacune de ses orbites périodiques l'est aussi.
- $3 \Rightarrow 4$: Supposons que f soit C^r-structurellement stable. Si le nombre de rotation de f était irrationnel, le nombre de rotation de $R_t \circ f$, pour t petit différent de 0, serait distinct du nombre de rotation de f, contredisant la stabilité structurelle.

- $1 \Rightarrow 4$: Supposons que f soit hyperbolique. Si le nombre de rotation de f était irrationnel, l'ensemble récurrent par chaînes $R(f)$ serait égal à $\mathbb{T}$ (exercice).

  Il existerait alors un entier $N \in \mathbb{Z}$ tel qu'on ait $Df^N(x) < 1$ pour tout $x \in \mathbb{T}$, ce qui est impossible puisque $\int_{\mathbb{T}} Df^N(x)dx = 1$.

  Le nombre de rotation de f est donc rationnel. Comme f est hyperbolique, chacune de ses orbites périodiques l'est aussi.
- $3 \Rightarrow 4$: Supposons que f soit C^r-structurellement stable. Si le nombre de rotation de f était irrationnel, le nombre de rotation de $R_t \circ f$, pour t petit différent de 0, serait distinct du nombre de rotation de f, contredisant la stabilité structurelle. Le nombre de rotation de f est donc rationnel.

- $1 \Rightarrow 4$: Supposons que f soit hyperbolique. Si le nombre de rotation de f était irrationnel, l'ensemble récurrent par chaînes $R(f)$ serait égal à $\mathbb{T}$ (exercice).

  Il existerait alors un entier $N \in \mathbb{Z}$ tel qu'on ait $Df^N(x) < 1$ pour tout $x \in \mathbb{T}$, ce qui est impossible puisque $\int_{\mathbb{T}} Df^N(x)dx = 1$.

  Le nombre de rotation de f est donc rationnel. Comme f est hyperbolique, chacune de ses orbites périodiques l'est aussi.
- $3 \Rightarrow 4$: Supposons que f soit C^r-structurellement stable. Si le nombre de rotation de f était irrationnel, le nombre de rotation de $R_t \circ f$, pour t petit différent de 0, serait distinct du nombre de rotation de f, contredisant la stabilité structurelle. Le nombre de rotation de f est donc rationnel.

  Pour des raisons similaires, les points périodiques de f doivent être isolés,

- $1 \Rightarrow 4$: Supposons que f soit hyperbolique. Si le nombre de rotation de f était irrationnel, l'ensemble récurrent par chaînes $R(f)$ serait égal à $\mathbb{T}$ (exercice).

  Il existerait alors un entier $N \in \mathbb{Z}$ tel qu'on ait $Df^N(x) < 1$ pour tout $x \in \mathbb{T}$, ce qui est impossible puisque $\int_{\mathbb{T}} Df^N(x)dx = 1$.

  Le nombre de rotation de f est donc rationnel. Comme f est hyperbolique, chacune de ses orbites périodiques l'est aussi.
- $3 \Rightarrow 4$: Supposons que f soit C^r-structurellement stable. Si le nombre de rotation de f était irrationnel, le nombre de rotation de $R_t \circ f$, pour t petit différent de 0, serait distinct du nombre de rotation de f, contredisant la stabilité structurelle. Le nombre de rotation de f est donc rationnel.

  Pour des raisons similaires, les points périodiques de f doivent être isolés, et donc en nombre fini.

- $1 \Rightarrow 4$: Supposons que f soit hyperbolique. Si le nombre de rotation de f était irrationnel, l'ensemble récurrent par chaînes $R(f)$ serait égal à $\mathbb{T}$ (exercice).

  Il existerait alors un entier $N \in \mathbb{Z}$ tel qu'on ait $Df^N(x) < 1$ pour tout $x \in \mathbb{T}$, ce qui est impossible puisque $\int_{\mathbb{T}} Df^N(x)dx = 1$.

  Le nombre de rotation de f est donc rationnel. Comme f est hyperbolique, chacune de ses orbites périodiques l'est aussi.
- $3 \Rightarrow 4$: Supposons que f soit C^r-structurellement stable. Si le nombre de rotation de f était irrationnel, le nombre de rotation de $R_t \circ f$, pour t petit différent de 0, serait distinct du nombre de rotation de f, contredisant la stabilité structurelle. Le nombre de rotation de f est donc rationnel.

  Pour des raisons similaires, les points périodiques de f doivent être isolés, et donc en nombre fini. Si un point périodique x_0 de f n'était pas hyperbolique,

- $1 \Rightarrow 4$: Supposons que f soit hyperbolique. Si le nombre de rotation de f était irrationnel, l'ensemble récurrent par chaînes $R(f)$ serait égal à $\mathbb{T}$ (exercice).

  Il existerait alors un entier $N \in \mathbb{Z}$ tel qu'on ait $Df^N(x) < 1$ pour tout $x \in \mathbb{T}$, ce qui est impossible puisque $\int_{\mathbb{T}} Df^N(x)dx = 1$.

  Le nombre de rotation de f est donc rationnel. Comme f est hyperbolique, chacune de ses orbites périodiques l'est aussi.
- $3 \Rightarrow 4$: Supposons que f soit C^r-structurellement stable. Si le nombre de rotation de f était irrationnel, le nombre de rotation de $R_t \circ f$, pour t petit différent de 0, serait distinct du nombre de rotation de f, contredisant la stabilité structurelle. Le nombre de rotation de f est donc rationnel.

  Pour des raisons similaires, les points périodiques de f doivent être isolés, et donc en nombre fini. Si un point périodique x_0 de f n'était pas hyperbolique, il serait possible de perturber (dans la C^r-topologie) f en un difféomorphisme g qui a au moins deux points périodiques au voisinage de x_0.

- $1 \Rightarrow 4$: Supposons que f soit hyperbolique. Si le nombre de rotation de f était irrationnel, l'ensemble récurrent par chaînes $R(f)$ serait égal à $\mathbb{T}$ (exercice).

  Il existerait alors un entier $N \in \mathbb{Z}$ tel qu'on ait $Df^N(x) < 1$ pour tout $x \in \mathbb{T}$, ce qui est impossible puisque $\int_{\mathbb{T}} Df^N(x)dx = 1$.

  Le nombre de rotation de f est donc rationnel. Comme f est hyperbolique, chacune de ses orbites périodiques l'est aussi.

- $3 \Rightarrow 4$: Supposons que f soit C^r-structurellement stable. Si le nombre de rotation de f était irrationnel, le nombre de rotation de $R_t \circ f$, pour t petit différent de 0, serait distinct du nombre de rotation de f, contredisant la stabilité structurelle. Le nombre de rotation de f est donc rationnel.

  Pour des raisons similaires, les points périodiques de f doivent être isolés, et donc en nombre fini. Si un point périodique x_0 de f n'était pas hyperbolique, il serait possible de perturber (dans la C^r-topologie) f en un difféomorphisme g qui a au moins deux points périodiques au voisinage de x_0. Ceci contredit la stabilité structurelle.

L’ensemble des difféomorphismes qui ont les propriétés du théorème est clairement ouvert.

L'ensemble des difféomorphismes qui ont les propriétés du théorème est clairement ouvert. Montrons qu'il est dense.

L'ensemble des difféomorphismes qui ont les propriétés du théorème est clairement ouvert. Montrons qu'il est dense.

Soit $\mathcal{U}$ une partie ouverte non vide de $\mathrm{Diff}^r_+(\mathbb{T})$.

L'ensemble des difféomorphismes qui ont les propriétés du théorème est clairement ouvert. Montrons qu'il est dense.

Soit $\mathcal{U}$ une partie ouverte non vide de $\mathrm{Diff}^r_+(\mathbb{T})$. Choisissons un difféomorphisme analytique $f_0 \in \mathcal{U}$.

L'ensemble des difféomorphismes qui ont les propriétés du théorème est clairement ouvert. Montrons qu'il est dense.

Soit $\mathcal{U}$ une partie ouverte non vide de $\mathrm{Diff}^r_+(\mathbb{T})$. Choisissons un difféomorphisme analytique $f_0 \in \mathcal{U}$. Choisissons ensuite $f_1 = R_t \circ f_0 \in \mathcal{U}$ de façon que le nombre de rotation α de f_1 soit diophantien.

L'ensemble des difféomorphismes qui ont les propriétés du théorème est clairement ouvert. Montrons qu'il est dense.

Soit $\mathcal{U}$ une partie ouverte non vide de $\mathrm{Diff}^r_+(\mathbb{T})$. Choisissons un difféomorphisme analytique $f_0 \in \mathcal{U}$. Choisissons ensuite $f_1 = R_t \circ f_0 \in \mathcal{U}$ de façon que le nombre de rotation α de f_1 soit diophantien.

Par un théorème de conjugaison dû à Herman,

L'ensemble des difféomorphismes qui ont les propriétés du théorème est clairement ouvert. Montrons qu'il est dense.

Soit $\mathcal{U}$ une partie ouverte non vide de $\mathrm{Diff}^r_+(\mathbb{T})$. Choisissons un difféomorphisme analytique $f_0 \in \mathcal{U}$. Choisissons ensuite $f_1 = R_t \circ f_0 \in \mathcal{U}$ de façon que le nombre de rotation α de f_1 soit diophantien.

Par un théorème de conjugaison dû à Herman, il existe un difféomorphisme analytique h tel que $f_1 = h \circ R_\alpha \circ h^{-1}$.

L'ensemble des difféomorphismes qui ont les propriétés du théorème est clairement ouvert. Montrons qu'il est dense.

Soit $\mathcal{U}$ une partie ouverte non vide de $\mathrm{Diff}^r_+(\mathbb{T})$. Choisissons un difféomorphisme analytique $f_0 \in \mathcal{U}$. Choisissons ensuite $f_1 = R_t \circ f_0 \in \mathcal{U}$ de façon que le nombre de rotation α de f_1 soit diophantien.

Par un théorème de conjugaison dû à Herman, il existe un difféomorphisme analytique h tel que $f_1 = h \circ R_\alpha \circ h^{-1}$. Choisissons ensuite un nombre rationnel p/q suffisamment proche de α pour que $f_2 := h \circ R_{p/q} \circ h^{-1}$ appartienne à $\mathcal{U}$.

L'ensemble des difféomorphismes qui ont les propriétés du théorème est clairement ouvert. Montrons qu'il est dense.

Soit $\mathcal{U}$ une partie ouverte non vide de $\mathrm{Diff}^r_+(\mathbb{T})$. Choisissons un difféomorphisme analytique $f_0 \in \mathcal{U}$. Choisissons ensuite $f_1 = R_t \circ f_0 \in \mathcal{U}$ de façon que le nombre de rotation α de f_1 soit diophantien.

Par un théorème de conjugaison dû à Herman, il existe un difféomorphisme analytique h tel que $f_1 = h \circ R_\alpha \circ h^{-1}$. Choisissons ensuite un nombre rationnel p/q suffisamment proche de α pour que $f_2 := h \circ R_{p/q} \circ h^{-1}$ appartienne à $\mathcal{U}$.

Pour $0 < |\varepsilon| < (2\pi q)^{-1}$, la formule

L'ensemble des difféomorphismes qui ont les propriétés du théorème est clairement ouvert. Montrons qu'il est dense.

Soit $\mathcal{U}$ une partie ouverte non vide de $\mathrm{Diff}^r_+(\mathbb{T})$. Choisissons un difféomorphisme analytique $f_0 \in \mathcal{U}$. Choisissons ensuite $f_1 = R_t \circ f_0 \in \mathcal{U}$ de façon que le nombre de rotation α de f_1 soit diophantien.

Par un théorème de conjugaison dû à Herman, il existe un difféomorphisme analytique h tel que $f_1 = h \circ R_\alpha \circ h^{-1}$. Choisissons ensuite un nombre rationnel p/q suffisamment proche de α pour que $f_2 := h \circ R_{p/q} \circ h^{-1}$ appartienne à $\mathcal{U}$.

Pour $0 < |\varepsilon| < (2\pi q)^{-1}$, la formule

$$F_\varepsilon(x) = x + p/q + \varepsilon \sin 2\pi q x$$

L'ensemble des difféomorphismes qui ont les propriétés du théorème est clairement ouvert. Montrons qu'il est dense.

Soit $\mathcal{U}$ une partie ouverte non vide de $\mathrm{Diff}^r_+(\mathbb{T})$. Choisissons un difféomorphisme analytique $f_0 \in \mathcal{U}$. Choisissons ensuite $f_1 = R_t \circ f_0 \in \mathcal{U}$ de façon que le nombre de rotation α de f_1 soit diophantien.

Par un théorème de conjugaison dû à Herman, il existe un difféomorphisme analytique h tel que $f_1 = h \circ R_\alpha \circ h^{-1}$. Choisissons ensuite un nombre rationnel p/q suffisamment proche de α pour que $f_2 := h \circ R_{p/q} \circ h^{-1}$ appartienne à $\mathcal{U}$.

Pour $0 < |\varepsilon| < (2\pi q)^{-1}$, la formule

$$F_\varepsilon(x) = x + p/q + \varepsilon \sin 2\pi q x$$

définit un difféomorphisme vérifiant la propriété 4 du théorème.

L'ensemble des difféomorphismes qui ont les propriétés du théorème est clairement ouvert. Montrons qu'il est dense.

Soit $\mathcal{U}$ une partie ouverte non vide de $\mathrm{Diff}^r_+(\mathbb{T})$. Choisissons un difféomorphisme analytique $f_0 \in \mathcal{U}$. Choisissons ensuite $f_1 = R_t \circ f_0 \in \mathcal{U}$ de façon que le nombre de rotation α de f_1 soit diophantien.

Par un théorème de conjugaison dû à Herman, il existe un difféomorphisme analytique h tel que $f_1 = h \circ R_\alpha \circ h^{-1}$. Choisissons ensuite un nombre rationnel p/q suffisamment proche de α pour que $f_2 := h \circ R_{p/q} \circ h^{-1}$ appartienne à $\mathcal{U}$.

Pour $0 < |\varepsilon| < (2\pi q)^{-1}$, la formule

$$F_\varepsilon(x) = x + p/q + \varepsilon \sin 2\pi q x$$

définit un difféomorphisme vérifiant la propriété 4 du théorème. Si $\varepsilon \neq 0$ est assez petit, le difféomorphisme $f_3 := h \circ F_\varepsilon \circ h^{-1}$ appartient à $\mathcal{U}$ et vérifie la propriété 4 du théorème. $\square$

Notons $\bar{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ la sphère de Riemann.

The Mañé-Sad-Sullivan theorem

Notons $\bar{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ la sphère de Riemann. Pour $d \geqslant 2$, désignons par $\mathrm{Rat_d}$ l'espace des fonctions rationnelles (à coefficients complexes) de degré d.

The Mañé-Sad-Sullivan theorem

Notons $\bar{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ la sphère de Riemann. Pour $d \geqslant 2$, désignons par $\mathrm{Rat_d}$ l'espace des fonctions rationnelles (à coefficients complexes) de degré d.
L'espace $\mathrm{Rat_d}$ s'identifie au complément d'une hypersurface dans $\mathbb{P}^{2d+1}(\mathbb{C})$.

The Mañé-Sad-Sullivan theorem

Notons $\bar{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ la sphère de Riemann. Pour $d \geqslant 2$, désignons par $\mathrm{Rat_d}$ l'espace des fonctions rationnelles (à coefficients complexes) de degré d.
L'espace $\mathrm{Rat_d}$ s'identifie au complément d'une hypersurface dans $\mathbb{P}^{2d+1}(\mathbb{C})$.
Chaque $R \in \mathrm{Rat_d}$ definit une application holomorphe $R : \bar{\mathbb{C}} \to \bar{\mathbb{C}}$ qui est un revêtement ramifié de degré d.

The Mañé-Sad-Sullivan theorem

Notons $\bar{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ la sphère de Riemann. Pour $d \geqslant 2$, désignons par $\mathrm{Rat_d}$ l'espace des fonctions rationnelles (à coefficients complexes) de degré d. L'espace $\mathrm{Rat_d}$ s'identifie au complément d'une hypersurface dans $\mathbb{P}^{2d+1}(\mathbb{C})$. Chaque $R \in \mathrm{Rat_d}$ definit une application holomorphe $R : \bar{\mathbb{C}} \to \bar{\mathbb{C}}$ qui est un revêtement ramifié de degré d.

Théorème (Mañé-Sad-Sullivan) Il existe une partie ouverte et dense $\mathcal{S} \subset \mathrm{Rat_d}$ telle que deux fonctions rationnelles qui appartiennent à la même composante de $\mathcal{S}$ sont topologiquement conjuguées.

The Mañé-Sad-Sullivan theorem

Notons $\bar{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ la sphère de Riemann. Pour $d \geqslant 2$, désignons par $\mathrm{Rat_d}$ l'espace des fonctions rationnelles (à coefficients complexes) de degré d. L'espace $\mathrm{Rat_d}$ s'identifie au complément d'une hypersurface dans $\mathbb{P}^{2d+1}(\mathbb{C})$. Chaque $R \in \mathrm{Rat_d}$ definit une application holomorphe $R : \bar{\mathbb{C}} \to \bar{\mathbb{C}}$ qui est un revêtement ramifié de degré d.

Théorème (Mañé-Sad-Sullivan) Il existe une partie ouverte et dense $\mathcal{S} \subset \mathrm{Rat_d}$ telle que deux fonctions rationnelles qui appartiennent à la même composante de $\mathcal{S}$ sont topologiquement conjuguées.

Remarque La conjugaison peut toujours être choisie quasiconforme.

La conjecture de Fatou

La conjecture de Fatou

D'après le théorème précédent, la stabilité structurelle est une propriété ouverte et dense dans $\mathrm{Rat_d}$.

La conjecture de Fatou

D'après le théorème précédent, la stabilité structurelle est une propriété ouverte et dense dans $\mathrm{Rat}_{\mathrm{d}}$. On ne sait cependant pas si la stabilité structurelle implique l'hyperbolicité!

La conjecture de Fatou

D'après le théorème précédent, la stabilité structurelle est une propriété ouverte et dense dans $\mathrm{Rat_d}$. On ne sait cependant pas si la stabilité structurelle implique l'hyperbolicité!

Définitions: Soit $R \in \mathrm{Rat_d}$.

La conjecture de Fatou

D'après le théorème précédent, la stabilité structurelle est une propriété ouverte et dense dans $\mathrm{Rat_d}$. On ne sait cependant pas si la stabilité structurelle implique l'hyperbolicité!

Définitions: Soit $R \in \mathrm{Rat_d}$. L'ensemble de Fatou $F(R)$ est l'ensemble des points $z \in \bar{\mathbb{C}}$ au voisinage desquels les itérés de R forment une famille normale.

La conjecture de Fatou

D'après le théorème précédent, la stabilité structurelle est une propriété ouverte et dense dans $\mathrm{Rat_d}$. On ne sait cependant pas si la stabilité structurelle implique l'hyperbolicité!

Définitions: Soit $R \in \mathrm{Rat_d}$. L'ensemble de Fatou $F(R)$ est l'ensemble des points $z \in \bar{\mathbb{C}}$ au voisinage desquels les itérés de R forment une famille normale. L'ensemble de Julia $J(R)$ est le complémentaire $\bar{\mathbb{C}} \setminus F(R)$.

La conjecture de Fatou

D'après le théorème précédent, la stabilité structurelle est une propriété ouverte et dense dans $\mathrm{Rat_d}$. On ne sait cependant pas si la stabilité structurelle implique l'hyperbolicité!

Définitions: Soit $R \in \mathrm{Rat_d}$. L'ensemble de Fatou $F(R)$ est l'ensemble des points $z \in \bar{\mathbb{C}}$ au voisinage desquels les itérés de R forment une famille normale. L'ensemble de Julia $J(R)$ est le complémentaire $\bar{\mathbb{C}} \setminus F(R)$. L'ensemble de Julia est une partie compacte,

La conjecture de Fatou

D'après le théorème précédent, la stabilité structurelle est une propriété ouverte et dense dans $\mathrm{Rat_d}$. On ne sait cependant pas si la stabilité structurelle implique l'hyperbolicité!

Définitions: Soit $R \in \mathrm{Rat_d}$. L'ensemble de Fatou $F(R)$ est l'ensemble des points $z \in \bar{\mathbb{C}}$ au voisinage desquels les itérés de R forment une famille normale. L'ensemble de Julia $J(R)$ est le complémentaire $\bar{\mathbb{C}} \setminus F(R)$. L'ensemble de Julia est une partie compacte, non vide,

La conjecture de Fatou

D'après le théorème précédent, la stabilité structurelle est une propriété ouverte et dense dans $\mathrm{Rat_d}$. On ne sait cependant pas si la stabilité structurelle implique l'hyperbolicité!

Définitions: Soit $R \in \mathrm{Rat_d}$. L'ensemble de Fatou $F(R)$ est l'ensemble des points $z \in \bar{\mathbb{C}}$ au voisinage desquels les itérés de R forment une famille normale. L'ensemble de Julia $J(R)$ est le complémentaire $\bar{\mathbb{C}} \setminus F(R)$. L'ensemble de Julia est une partie compacte, non vide, totalement invariante de $\bar{\mathbb{C}}$.

La conjecture de Fatou

D'après le théorème précédent, la stabilité structurelle est une propriété ouverte et dense dans $\mathrm{Rat_d}$. On ne sait cependant pas si la stabilité structurelle implique l'hyperbolicité!

Définitions: Soit $R \in \mathrm{Rat_d}$. L'ensemble de Fatou $F(R)$ est l'ensemble des points $z \in \bar{\mathbb{C}}$ au voisinage desquels les itérés de R forment une famille normale. L'ensemble de Julia $J(R)$ est le complémentaire $\bar{\mathbb{C}} \setminus F(R)$. L'ensemble de Julia est une partie compacte, non vide, totalement invariante de $\bar{\mathbb{C}}$. La fonction rationnelle R est hyperbolique s'il existe $N > 0$ tel qu'on ait $|DR^N(z)| > 1$ pour tout $z \in J(R)$.

La conjecture de Fatou

D'après le théorème précédent, la stabilité structurelle est une propriété ouverte et dense dans $\mathrm{Rat_d}$. On ne sait cependant pas si la stabilité structurelle implique l'hyperbolicité!

Définitions: Soit $R \in \mathrm{Rat_d}$. L'ensemble de Fatou $F(R)$ est l'ensemble des points $z \in \bar{\mathbb{C}}$ au voisinage desquels les itérés de R forment une famille normale. L'ensemble de Julia $J(R)$ est le complémentaire $\bar{\mathbb{C}} \setminus F(R)$. L'ensemble de Julia est une partie compacte, non vide, totalement invariante de $\bar{\mathbb{C}}$. La fonction rationnelle R est hyperbolique s'il existe $N > 0$ tel qu'on ait $|DR^N(z)| > 1$ pour tout $z \in J(R)$.

Les fonctions rationnelles hyperboliques forment une partie ouverte de $\mathrm{Rat_d}$.

La conjecture de Fatou

D'après le théorème précédent, la stabilité structurelle est une propriété ouverte et dense dans $\mathrm{Rat_d}$. On ne sait cependant pas si la stabilité structurelle implique l'hyperbolicité!

Définitions: Soit $R \in \mathrm{Rat_d}$. L'ensemble de Fatou $F(R)$ est l'ensemble des points $z \in \bar{\mathbb{C}}$ au voisinage desquels les itérés de R forment une famille normale. L'ensemble de Julia $J(R)$ est le complémentaire $\bar{\mathbb{C}} \setminus F(R)$. L'ensemble de Julia est une partie compacte, non vide, totalement invariante de $\bar{\mathbb{C}}$. La fonction rationnelle R est hyperbolique s'il existe $N > 0$ tel qu'on ait $|DR^N(z)| > 1$ pour tout $z \in J(R)$.

Les fonctions rationnelles hyperboliques forment une partie ouverte de $\mathrm{Rat_d}$.

Conjecture (Fatou) Les fonctions rationnelles hyperboliques forment une partie dense de $\mathrm{Rat_d}$.

Obstructions à la densité de l'hyperbolicité

Obstructions à la densité de l'hyperbolicité

En dimension > 1, plusieurs mécanismes empêchent la densité de l'hyperbolicité dans la C^r-topologie (avec une exception, voir ci-dessous).

En dimension > 1, plusieurs mécanismes empêchent la densité de l'hyperbolicité dans la C^r-topologie (avec une exception, voir ci-dessous).

- Les tangences homoclines en dimension $\geqslant 2$, pour $r > 1$;

En dimension > 1, plusieurs mécanismes empêchent la densité de l'hyperbolicité dans la C^r-topologie (avec une exception, voir ci-dessous).

- Les tangences homoclines en dimension $\geqslant 2$, pour $r > 1$;
- Les cycles hétérodimensionnels en dimension $\geqslant 3$, pour $r \geqslant 1$.

Obstructions à la densité de l'hyperbolicité

En dimension > 1, plusieurs mécanismes empêchent la densité de l'hyperbolicité dans la C^r-topologie (avec une exception, voir ci-dessous).

- Les tangences homoclines en dimension $\geqslant 2$, pour $r > 1$;
- Les cycles hétérodimensionnels en dimension $\geqslant 3$, pour $r \geqslant 1$.

Le cas restant est un problème attribué à Smale.

Obstructions à la densité de l'hyperbolicité

En dimension > 1, plusieurs mécanismes empêchent la densité de l'hyperbolicité dans la C^r-topologie (avec une exception, voir ci-dessous).

- Les tangences homoclines en dimension $\geqslant 2$, pour $r > 1$;
- Les cycles hétérodimensionnels en dimension $\geqslant 3$, pour $r \geqslant 1$.

Le cas restant est un problème attribué à Smale.

Question: Soit M une surface connexe compacte.

Obstructions à la densité de l'hyperbolicité

En dimension > 1, plusieurs mécanismes empêchent la densité de l'hyperbolicité dans la C^r-topologie (avec une exception, voir ci-dessous).

- Les tangences homoclines en dimension $\geqslant 2$, pour $r > 1$;
- Les cycles hétérodimensionnels en dimension $\geqslant 3$, pour $r \geqslant 1$.

Le cas restant est un problème attribué à Smale.

Question: Soit M une surface connexe compacte. L'hyperbolicité est-elle dense dans $\mathrm{Diff}^1(M)$?

Obstructions à la densité de l'hyperbolicité

En dimension > 1, plusieurs mécanismes empêchent la densité de l'hyperbolicité dans la C^r-topologie (avec une exception, voir ci-dessous).

- Les tangences homoclines en dimension $\geqslant 2$, pour $r > 1$;
- Les cycles hétérodimensionnels en dimension $\geqslant 3$, pour $r \geqslant 1$.

Le cas restant est un problème attribué à Smale.

Question: Soit M une surface connexe compacte. L'hyperbolicité est-elle dense dans $\mathrm{Diff}^1(M)$?

Tangences homoclines et cycles hétérodimensionnels correspondent à des intersections non transverses entre $W^s(p)$ et $W^u(q)$, p, q étant des points périodiques hyperboliques.

Une remarque sur le cas symplectique

Une remarque sur le cas symplectique

Soit (M, ω) une variété symplectique.

Une remarque sur le cas symplectique

Soit (M, ω) une variété symplectique. Il est trivial de voir que l'hyperbolicité uniforme n'est pas dense dans le groupe $\mathrm{Diff}^1(M, \omega)$ des difféomorphismes symplectiques de M.

Une remarque sur le cas symplectique

Soit (M, ω) une variété symplectique. Il est trivial de voir que l'hyperbolicité uniforme n'est pas dense dans le groupe $\mathrm{Diff}^1(M, \omega)$ des difféomorphismes symplectiques de M.

Un point fixe est dit totalement elliptique si les valeurs propres de l'application tangente en ce point sont simples et de module 1 (donc non réelles).

Une remarque sur le cas symplectique

Soit (M, ω) une variété symplectique. Il est trivial de voir que l'hyperbolicité uniforme n'est pas dense dans le groupe $\mathrm{Diff}^1(M, \omega)$ des difféomorphismes symplectiques de M.

Un point fixe est dit totalement elliptique si les valeurs propres de l'application tangente en ce point sont simples et de module 1 (donc non réelles).

Dans toute variété symplectique (connexe, compacte), les difféomorphismes qui ont un point fixe totalement elliptique forment une partie non vide, ouverte dans la C^1-topologie.

Une remarque sur le cas symplectique

Soit (M, ω) une variété symplectique. Il est trivial de voir que l'hyperbolicité uniforme n'est pas dense dans le groupe $\mathrm{Diff}^1(M, \omega)$ des difféomorphismes symplectiques de M.

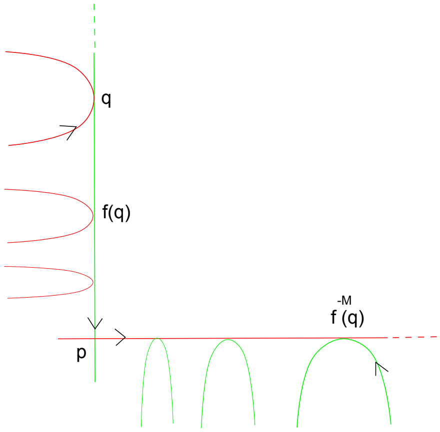
Un point fixe est dit totalement elliptique si les valeurs propres de l'application tangente en ce point sont simples et de module 1 (donc non réelles).

Dans toute variété symplectique (connexe, compacte), les difféomorphismes qui ont un point fixe totalement elliptique forment une partie non vide, ouverte dans la C^1-topologie.

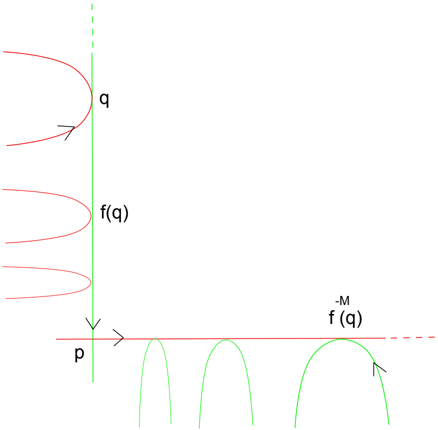
Par contre, d'après un théorème de Kupka-Smale, tous les points périodiques d'un difféomorphisme générique (non symplectique!) sont hyperboliques.

Une tangence homocline en dimension 2

Une tangence homocline en dimension 2

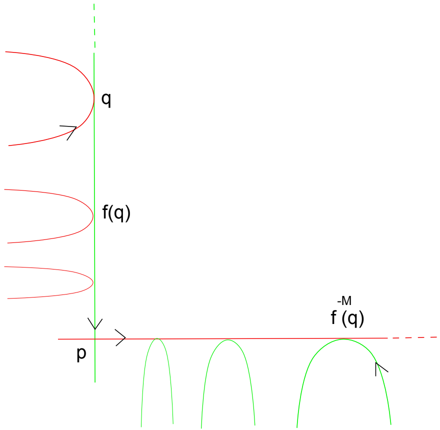


Une tangence homocline en dimension 2



Le point *p* est un point fixe hyperbolique de type selle.

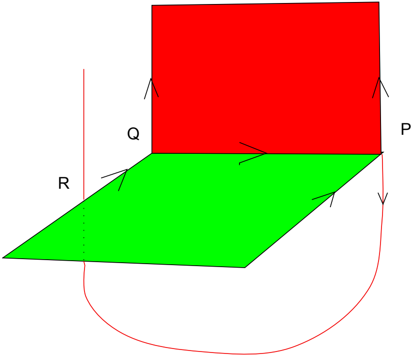
Une tangence homocline en dimension 2



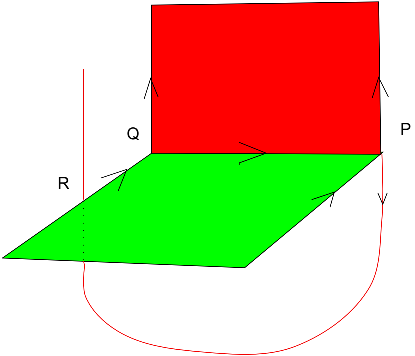
Le point p est un point fixe hyperbolique de type selle. Les courbes $W^s(p)$ et $W^u(p)$ sont (quadratiquement) tangentes le long de l'orbite de q.

Un cycle hétérodimensionnel en dimension 3

Un cycle hétérodimensionnel en dimension 3

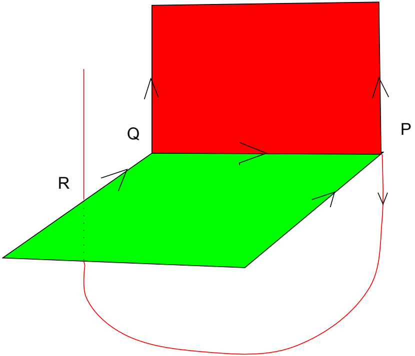


Un cycle hétérodimensionnel en dimension 3

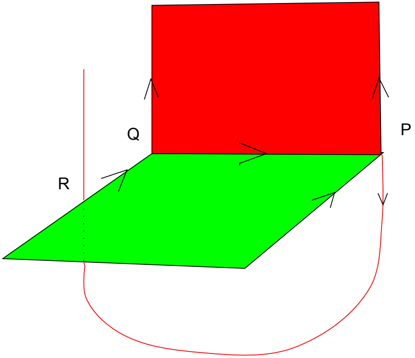


Les points fixes P, Q sont hyperboliques de type selle

Un cycle hétérodimensionnel en dimension 3



Les points fixes P, Q sont hyperboliques de type selle avec $\dim W^s(P) = \dim W^u(Q) = 2$, $\dim W^u(P) = \dim W^s(Q) = 1$.



Les points fixes P, Q sont hyperboliques de type selle avec $\dim W^s(P) = \dim W^u(Q) = 2$, $\dim W^u(P) = \dim W^s(Q) = 1$. Les courbes $W^s(Q)$, $W^u(P)$ se rencontrent le long de l'orbite de R.

Non-hyperbolicité pour les tangences homoclines et les cycles hétérodimensionnels

Non-hyperbolicité pour les tangences homoclines et les cycles hétérodimensionnels

Pour un difféomorphisme f présentant en q une tangence homocline entre les variétés stables et instables d'un point périodique hyperbolique p,

Non-hyperbolicité pour les tangences homoclines et les cycles hétérodimensionnels

Pour un difféomorphisme f présentant en q une tangence homocline entre les variétés stables et instables d'un point périodique hyperbolique p, le point q est récurrent par chaînes.

Non-hyperbolicité pour les tangences homoclines et les cycles hétérodimensionnels

Pour un difféomorphisme f présentant en q une tangence homocline entre les variétés stables et instables d'un point périodique hyperbolique p, le point q est récurrent par chaînes. Les espaces stables et instables de f en q sont les espaces tangents en q de $W^s(p)$ et $W^u(p)$.

Non-hyperbolicité pour les tangences homoclines et les cycles hétérodimensionnels

Pour un difféomorphisme f présentant en q une tangence homocline entre les variétés stables et instables d'un point périodique hyperbolique p, le point q est récurrent par chaînes. Les espaces stables et instables de f en q sont les espaces tangents en q de $W^s(p)$ et $W^u(p)$. Comme ces espaces ne sont pas transverses, f n'est pas hyperbolique.

Non-hyperbolicité pour les tangences homoclines et les cycles hétérodimensionnels

Pour un difféomorphisme f présentant en q une tangence homocline entre les variétés stables et instables d'un point périodique hyperbolique p, le point q est récurrent par chaînes. Les espaces stables et instables de f en q sont les espaces tangents en q de $W^s(p)$ et $W^u(p)$. Comme ces espaces ne sont pas transverses, f n'est pas hyperbolique.

De même, si un difféomorphisme f d'une variété de dimension $D \geqslant 3$ possède deux points fixes hyperboliques P, Q de type selle tels que

Non-hyperbolicité pour les tangences homoclines et les cycles hétérodimensionnels

Pour un difféomorphisme f présentant en q une tangence homocline entre les variétés stables et instables d'un point périodique hyperbolique p, le point q est récurrent par chaînes. Les espaces stables et instables de f en q sont les espaces tangents en q de $W^s(p)$ et $W^u(p)$. Comme ces espaces ne sont pas transverses, f n'est pas hyperbolique.

De même, si un difféomorphisme f d'une variété de dimension $D \geqslant 3$ possède deux points fixes hyperboliques P, Q de type selle tels que

- $\dim W^s(P) + \dim W^u(Q) > D$, et ces deux variétés ont une intersection transverse non vide;

Non-hyperbolicité pour les tangences homoclines et les cycles hétérodimensionnels

Pour un difféomorphisme f présentant en q une tangence homocline entre les variétés stables et instables d'un point périodique hyperbolique p, le point q est récurrent par chaînes. Les espaces stables et instables de f en q sont les espaces tangents en q de $W^s(p)$ et $W^u(p)$. Comme ces espaces ne sont pas transverses, f n'est pas hyperbolique.

De même, si un difféomorphisme f d'une variété de dimension $D \geqslant 3$ possède deux points fixes hyperboliques P, Q de type selle tels que

- $\dim W^s(P) + \dim W^u(Q) > D$, et ces deux variétés ont une intersection transverse non vide;
- $W^u(P)$ et $W^s(Q)$ se rencontrent en un point R;

Non-hyperbolicité pour les tangences homoclines et les cycles hétérodimensionnels

Pour un difféomorphisme f présentant en q une tangence homocline entre les variétés stables et instables d'un point périodique hyperbolique p, le point q est récurrent par chaînes. Les espaces stables et instables de f en q sont les espaces tangents en q de $W^s(p)$ et $W^u(p)$. Comme ces espaces ne sont pas transverses, f n'est pas hyperbolique.

De même, si un difféomorphisme f d'une variété de dimension $D \geqslant 3$ possède deux points fixes hyperboliques P, Q de type selle tels que

- $\dim W^s(P) + \dim W^u(Q) > D$, et ces deux variétés ont une intersection transverse non vide;
- $W^u(P)$ et $W^s(Q)$ se rencontrent en un point R;

alors le point R est récurrent par chaînes.

Non-hyperbolicité pour les tangences homoclines et les cycles hétérodimensionnels

Pour un difféomorphisme f présentant en q une tangence homocline entre les variétés stables et instables d'un point périodique hyperbolique p, le point q est récurrent par chaînes. Les espaces stables et instables de f en q sont les espaces tangents en q de $W^s(p)$ et $W^u(p)$. Comme ces espaces ne sont pas transverses, f n'est pas hyperbolique.

De même, si un difféomorphisme f d'une variété de dimension $D \geqslant 3$ possède deux points fixes hyperboliques P, Q de type selle tels que

- $\dim W^s(P) + \dim W^u(Q) > D$, et ces deux variétés ont une intersection transverse non vide;
- $W^u(P)$ et $W^s(Q)$ se rencontrent en un point R;

alors le point R est récurrent par chaînes. Les espaces stables et instables de f en R sont les espaces tangents en R de $W^s(Q)$ et $W^u(P)$.

Non-hyperbolicité pour les tangences homoclines et les cycles hétérodimensionnels

Pour un difféomorphisme f présentant en q une tangence homocline entre les variétés stables et instables d'un point périodique hyperbolique p, le point q est récurrent par chaînes. Les espaces stables et instables de f en q sont les espaces tangents en q de $W^s(p)$ et $W^u(p)$. Comme ces espaces ne sont pas transverses, f n'est pas hyperbolique.

De même, si un difféomorphisme f d'une variété de dimension $D \geqslant 3$ possède deux points fixes hyperboliques P, Q de type selle tels que

- $\dim W^s(P) + \dim W^u(Q) > D$, et ces deux variétés ont une intersection transverse non vide;
- $W^u(P)$ et $W^s(Q)$ se rencontrent en un point R;

alors le point R est récurrent par chaînes. Les espaces stables et instables de f en R sont les espaces tangents en R de $W^s(Q)$ et $W^u(P)$. Comme ces espaces ne sont pas transverses, f n'est pas hyperbolique.

Non-hyperbolicité robuste

Pour conclure à la non-densité de l'hyperbolicité,

Non-hyperbolicité robuste

Pour conclure à la non-densité de l'hyperbolicité, il suffit de construire un ouvert non vide $\mathcal{U}$ dans $\mathrm{Diff}^r(M)$ (avec $r \geqslant 2$ si $\dim(M) = 2$, $r \geqslant 1$ si $\dim(M) \geqslant 3$) tel que les tangences homoclines (resp. les cycles hétérodimensionnels) soient denses dans $\mathcal{U}$.

Non-hyperbolicité robuste

Pour conclure à la non-densité de l'hyperbolicité, il suffit de construire un ouvert non vide $\mathcal{U}$ dans $\mathrm{Diff}^r(M)$ (avec $r \geqslant 2$ si $\dim(M) = 2$, $r \geqslant 1$ si $\dim(M) \geqslant 3$) tel que les tangences homoclines (resp. les cycles hétérodimensionnels) soient denses dans $\mathcal{U}$.

Dans les deux cas, l'existence de $\mathcal{U}$ repose sur la possibilité de construire de gros ensembles basiques de type selle.

Epaisseur d’un ensemble de Cantor

Epaisseur d'un ensemble de Cantor

Soit $\mathcal{A} := \{0, 1\}$. On munit l'espace $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}_+}$ du décalage unilatéral sur l'alphabet $\mathcal{A}$ de l'ordre lexicographique (avec $1 > 0$).

Epaisseur d'un ensemble de Cantor

Soit $\mathcal{A} := \{0, 1\}$. On munit l'espace $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}_+}$ du décalage unilatéral sur l'alphabet $\mathcal{A}$ de l'ordre lexicographique (avec $1 > 0$). Pour un mot fini $\Theta \in \sqcup_{n\geqslant 0}\mathcal{A}^n$, le cylindre $C(\Theta)$ est l'ensemble des suites de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}_+}$ qui commencent par Θ.

Epaisseur d’un ensemble de Cantor

Soit $\mathcal{A} := \{0, 1\}$. On munit l’espace $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}_+}$ du décalage unilatéral sur l’alphabet $\mathcal{A}$ de l’ordre lexicographique (avec $1 > 0$). Pour un mot fini $\Theta \in \sqcup_{n \geqslant 0} \mathcal{A}^n$, le cylindre $C(\Theta)$ est l’ensemble des suites de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}_+}$ qui commencent par Θ.

Définition Soit $K \subset \mathbb{R}$ un ensemble de Cantor.

Epaisseur d'un ensemble de Cantor

Soit $\mathcal{A} := \{0, 1\}$. On munit l'espace $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}_+}$ du décalage unilatéral sur l'alphabet $\mathcal{A}$ de l'ordre lexicographique (avec $1 > 0$). Pour un mot fini $\Theta \in \sqcup_{n \geqslant 0} \mathcal{A}^n$, le cylindre $C(\Theta)$ est l'ensemble des suites de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}_+}$ qui commencent par Θ.

Définition Soit $K \subset \mathbb{R}$ un ensemble de Cantor. Une trivialisation de K est un homéomorphisme préservant l'ordre de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}_+}$ sur K.

Epaisseur d'un ensemble de Cantor

Soit $\mathcal{A} := \{0, 1\}$. On munit l'espace $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}_+}$ du décalage unilatéral sur l'alphabet $\mathcal{A}$ de l'ordre lexicographique (avec $1 > 0$). Pour un mot fini $\Theta \in \sqcup_{n \geqslant 0} \mathcal{A}^n$, le cylindre $C(\Theta)$ est l'ensemble des suites de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}_+}$ qui commencent par Θ.

Définition Soit $K \subset \mathbb{R}$ un ensemble de Cantor. Une trivialisation de K est un homéomorphisme préservant l'ordre de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}_+}$ sur K.

Etant donné une trivialisation h de K et un mot fini Θ sur l'alphabet $\mathcal{A}$,

Epaisseur d'un ensemble de Cantor

Soit $\mathcal{A} := \{0, 1\}$. On munit l'espace $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}_+}$ du décalage unilatéral sur l'alphabet $\mathcal{A}$ de l'ordre lexicographique (avec $1 > 0$). Pour un mot fini $\Theta \in \sqcup_{n \geqslant 0} \mathcal{A}^n$, le cylindre $C(\Theta)$ est l'ensemble des suites de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}_+}$ qui commencent par Θ.

Définition Soit $K \subset \mathbb{R}$ un ensemble de Cantor. Une trivialisation de K est un homéomorphisme préservant l'ordre de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}_+}$ sur K.

Etant donné une trivialisation h de K et un mot fini Θ sur l'alphabet $\mathcal{A}$, on désigne par $J(h, \Theta)$ le plus petit intervalle contenant $h(C(\Theta))$;

Epaisseur d'un ensemble de Cantor

Soit $\mathcal{A} := \{0, 1\}$. On munit l'espace $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}_+}$ du décalage unilatéral sur l'alphabet $\mathcal{A}$ de l'ordre lexicographique (avec $1 > 0$). Pour un mot fini $\Theta \in \sqcup_{n \geqslant 0} \mathcal{A}^n$, le cylindre $C(\Theta)$ est l'ensemble des suites de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}_+}$ qui commencent par Θ.

Définition Soit $K \subset \mathbb{R}$ un ensemble de Cantor. Une trivialisation de K est un homéomorphisme préservant l'ordre de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}_+}$ sur K.

Etant donné une trivialisation h de K et un mot fini Θ sur l'alphabet $\mathcal{A}$, on désigne par $J(h, \Theta)$ le plus petit intervalle contenant $h(C(\Theta))$; ses extrémités sont $h(\Theta\,\bar{0})$ et $h(\Theta\,\bar{1})$.

Epaisseur d'un ensemble de Cantor

Soit $\mathcal{A} := \{0, 1\}$. On munit l'espace $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}_+}$ du décalage unilatéral sur l'alphabet $\mathcal{A}$ de l'ordre lexicographique (avec $1 > 0$). Pour un mot fini $\Theta \in \sqcup_{n \geqslant 0} \mathcal{A}^n$, le cylindre $C(\Theta)$ est l'ensemble des suites de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}_+}$ qui commencent par Θ.

Définition Soit $K \subset \mathbb{R}$ un ensemble de Cantor. Une trivialisation de K est un homéomorphisme préservant l'ordre de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}_+}$ sur K.

Etant donné une trivialisation h de K et un mot fini Θ sur l'alphabet $\mathcal{A}$, on désigne par $J(h, \Theta)$ le plus petit intervalle contenant $h(C(\Theta))$; ses extrémités sont $h(\Theta\,\bar{0})$ et $h(\Theta\,\bar{1})$.

On désigne par $G(h, \Theta)$ l'intervalle $J(h, \Theta) \setminus J(h, \Theta\,0) \cup J(h, \Theta\,1)$;

Epaisseur d'un ensemble de Cantor

Soit $\mathcal{A} := \{0, 1\}$. On munit l'espace $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}_+}$ du décalage unilatéral sur l'alphabet $\mathcal{A}$ de l'ordre lexicographique (avec $1 > 0$). Pour un mot fini $\Theta \in \sqcup_{n \geqslant 0} \mathcal{A}^n$, le cylindre $C(\Theta)$ est l'ensemble des suites de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}_+}$ qui commencent par Θ.

Définition Soit $K \subset \mathbb{R}$ un ensemble de Cantor. Une trivialisation de K est un homéomorphisme préservant l'ordre de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}_+}$ sur K.

Etant donné une trivialisation h de K et un mot fini Θ sur l'alphabet $\mathcal{A}$, on désigne par $J(h, \Theta)$ le plus petit intervalle contenant $h(C(\Theta))$; ses extrémités sont $h(\Theta\,\bar{0})$ et $h(\Theta\,\bar{1})$.

On désigne par $G(h, \Theta)$ l'intervalle $J(h, \Theta) \setminus J(h, \Theta\,0) \cup J(h, \Theta\,1)$; c'est la composante connexe de $\mathbb{R} \setminus K$ dont les extrémités sont $h(\Theta\,0\,\bar{1})$ et $h(\Theta\,1\,\bar{0})$.

Le théorème de Hall

Définition Soient $K \subset \mathbb{R}$ un ensemble de Cantor,

Le théorème de Hall

Définition Soient $K \subset \mathbb{R}$ un ensemble de Cantor, $h : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}_+} \to K$ une trivialisation de K

Définition Soient $K \subset \mathbb{R}$ un ensemble de Cantor, $h : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}_+} \to K$ une trivialisation de K et Θ un mot fini sur l'alphabet $\mathcal{A}$.

Le théorème de Hall

Définition Soient $K \subset \mathbb{R}$ un ensemble de Cantor, $h : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}_+} \to K$ une trivialisation de K et Θ un mot fini sur l'alphabet $\mathcal{A}$. On pose

$$\tau(K, h, \Theta) := \frac{\min(|J(h, \Theta\, 0)|,\ |J(h, \Theta\, 1)|)}{|G(h, \Theta)|},$$

Le théorème de Hall

Définition   Soient $K \subset \mathbb{R}$ un ensemble de Cantor, $h : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}_+} \to K$ une trivialisation de K et Θ un mot fini sur l'alphabet $\mathcal{A}$. On pose

$$\tau(K, h, \Theta) := \frac{\min(|J(h, \Theta\, 0)|,\ |J(h, \Theta\, 1)|)}{|G(h, \Theta)|},$$

$$\tau(K, h) = \inf_{\Theta} \tau(K, h, \Theta), \qquad \tau(K) = \sup_{h} \tau(K, h) \in [0, +\infty).$$

Définition Soient $K \subset \mathbb{R}$ un ensemble de Cantor, $h : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}_+} \to K$ une trivialisation de K et Θ un mot fini sur l'alphabet $\mathcal{A}$. On pose

$$\tau(K, h, \Theta) := \frac{\min(|J(h, \Theta\, 0)|,\ |J(h, \Theta\, 1)|)}{|G(h, \Theta)|},$$

$$\tau(K, h) = \inf_{\Theta} \tau(K, h, \Theta), \qquad \tau(K) = \sup_{h} \tau(K, h) \in [0, +\infty).$$

La quantité $\tau(K)$ est l'épaisseur de l'ensemble de Cantor K.

Le théorème de Hall

Définition Soient $K \subset \mathbb{R}$ un ensemble de Cantor, $h : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}_+} \to K$ une trivialisation de K et Θ un mot fini sur l'alphabet $\mathcal{A}$. On pose

$$\tau(K, h, \Theta) := \frac{\min(|J(h, \Theta\, 0)|,\ |J(h, \Theta\, 1)|)}{|G(h, \Theta)|},$$

$$\tau(K, h) = \inf_{\Theta} \tau(K, h, \Theta), \qquad \tau(K) = \sup_{h} \tau(K, h) \in [0, +\infty).$$

La quantité $\tau(K)$ est l'épaisseur de l'ensemble de Cantor K.

Théorème (Hall) Soient $K_1, K_2 \subset \mathbb{R}$ deux ensembles de Cantor.

Définition Soient $K \subset \mathbb{R}$ un ensemble de Cantor, $h : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}_+} \to K$ une trivialisation de K et Θ un mot fini sur l'alphabet $\mathcal{A}$. On pose

$$\tau(K, h, \Theta) := \frac{\min(|J(h, \Theta\, 0)|,\ |J(h, \Theta\, 1)|)}{|G(h, \Theta)|},$$

$$\tau(K, h) = \inf_{\Theta} \tau(K, h, \Theta), \qquad \tau(K) = \sup_{h} \tau(K, h) \in [0, +\infty).$$

La quantité $\tau(K)$ est l'épaisseur de l'ensemble de Cantor K.

Théorème (Hall) Soient $K_1, K_2 \subset \mathbb{R}$ deux ensembles de Cantor. Supposons qu'on ait $\tau(K_1)\,\tau(K_2) > 1$.

Le théorème de Hall

Définition   Soient $K \subset \mathbb{R}$ un ensemble de Cantor, $h : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}_+} \to K$ une trivialisation de K et Θ un mot fini sur l'alphabet $\mathcal{A}$. On pose

$$\tau(K, h, \Theta) := \frac{\min(|J(h, \Theta\, 0)|,\ |J(h, \Theta\, 1)|)}{|G(h, \Theta)|},$$

$$\tau(K, h) = \inf_{\Theta} \tau(K, h, \Theta), \qquad \tau(K) = \sup_{h} \tau(K, h) \in [0, +\infty).$$

La quantité $\tau(K)$ est l'épaisseur de l'ensemble de Cantor K.

Théorème   (Hall) Soient $K_1, K_2 \subset \mathbb{R}$ deux ensembles de Cantor. Supposons qu'on ait $\tau(K_1)\,\tau(K_2) > 1$. Alors on a (au moins) l'une des propriétés suivantes:

Le théorème de Hall

Définition Soient $K \subset \mathbb{R}$ un ensemble de Cantor, $h : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}_+} \to K$ une trivialisation de K et Θ un mot fini sur l'alphabet $\mathcal{A}$. On pose

$$\tau(K, h, \Theta) := \frac{\min(|J(h, \Theta\, 0)|,\ |J(h, \Theta\, 1)|)}{|G(h, \Theta)|},$$

$$\tau(K, h) = \inf_{\Theta} \tau(K, h, \Theta), \qquad \tau(K) = \sup_{h} \tau(K, h) \in [0, +\infty).$$

La quantité $\tau(K)$ est l'épaisseur de l'ensemble de Cantor K.

Théorème (Hall) Soient $K_1, K_2 \subset \mathbb{R}$ deux ensembles de Cantor. Supposons qu'on ait $\tau(K_1)\,\tau(K_2) > 1$. Alors on a (au moins) l'une des propriétés suivantes:

1. K_1 est contenu dans une composante connexe de $\mathbb{R} \setminus K_2$;

Le théorème de Hall

Définition Soient $K \subset \mathbb{R}$ un ensemble de Cantor, $h : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}_+} \to K$ une trivialisation de K et Θ un mot fini sur l'alphabet $\mathcal{A}$. On pose

$$\tau(K, h, \Theta) := \frac{\min(|J(h, \Theta\, 0)|,\ |J(h, \Theta\, 1)|)}{|G(h, \Theta)|},$$

$$\tau(K, h) = \inf_{\Theta} \tau(K, h, \Theta), \qquad \tau(K) = \sup_{h} \tau(K, h) \in [0, +\infty).$$

La quantité $\tau(K)$ est l'épaisseur de l'ensemble de Cantor K.

Théorème (Hall) Soient $K_1, K_2 \subset \mathbb{R}$ deux ensembles de Cantor. Supposons qu'on ait $\tau(K_1)\,\tau(K_2) > 1$. Alors on a (au moins) l'une des propriétés suivantes:

1. K_1 est contenu dans une composante connexe de $\mathbb{R} \setminus K_2$;
2. K_2 est contenu dans une composante connexe de $\mathbb{R} \setminus K_1$;

Le théorème de Hall

Définition Soient $K \subset \mathbb{R}$ un ensemble de Cantor, $h : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}_+} \to K$ une trivialisation de K et Θ un mot fini sur l'alphabet $\mathcal{A}$. On pose

$$\tau(K, h, \Theta) := \frac{\min(|J(h, \Theta\, 0)|,\ |J(h, \Theta\, 1)|)}{|G(h, \Theta)|},$$

$$\tau(K, h) = \inf_{\Theta} \tau(K, h, \Theta), \qquad \tau(K) = \sup_{h} \tau(K, h) \in [0, +\infty).$$

La quantité $\tau(K)$ est l'épaisseur de l'ensemble de Cantor K.

Théorème (Hall) Soient $K_1, K_2 \subset \mathbb{R}$ deux ensembles de Cantor. Supposons qu'on ait $\tau(K_1)\,\tau(K_2) > 1$. Alors on a (au moins) l'une des propriétés suivantes:

1. K_1 est contenu dans une composante connexe de $\mathbb{R} \setminus K_2$;
2. K_2 est contenu dans une composante connexe de $\mathbb{R} \setminus K_1$;
3. $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$.

Ensembles de Cantor dynamiques

Ensembles de Cantor dynamiques

Soit $(\Sigma_{\mathcal{B}}^{+}, \sigma)$ un sous-décalage unilatéral topologiquement mélangeant sur un alphabet $\mathcal{A}$.

Ensembles de Cantor dynamiques

Soit $(\Sigma^+_{\mathcal{B}}, \sigma)$ un sous-décalage unilatéral topologiquement mélangeant sur un alphabet $\mathcal{A}$. Soient $(I_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$, $(J_{\alpha\,\beta})_{(\alpha,\beta)\in\mathcal{B}}$ deux familles (indexées par $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ respectivement) d'intervalles compacts disjoints non triviaux.

Ensembles de Cantor dynamiques

Soit $(\Sigma^+_{\mathcal{B}}, \sigma)$ un sous-décalage unilatéral topologiquement mélangeant sur un alphabet $\mathcal{A}$. Soient $(I_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$, $(J_{\alpha\,\beta})_{(\alpha,\beta)\in\mathcal{B}}$ deux familles (indexées par $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ respectivement) d'intervalles compacts disjoints non triviaux. On suppose que $J_{\alpha\,\beta} \subset I_\alpha$ pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathcal{B}$.

Ensembles de Cantor dynamiques

Soit $(\Sigma_{\mathcal{B}}^{+}, \sigma)$ un sous-décalage unilatéral topologiquement mélangeant sur un alphabet $\mathcal{A}$. Soient $(I_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$, $(J_{\alpha\,\beta})_{(\alpha,\beta) \in \mathcal{B}}$ deux familles (indexées par $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ respectivement) d'intervalles compacts disjoints non triviaux. On suppose que $J_{\alpha\,\beta} \subset I_\alpha$ pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathcal{B}$.

Soit $f : J := \cup_{\mathcal{B}} J_{\alpha\,\beta} \to I := \cup_{\mathcal{A}} I_\alpha$ une application de classe C^r, $r \geqslant 1$, telle que

Ensembles de Cantor dynamiques

Soit $(\Sigma^+_{\mathcal{B}}, \sigma)$ un sous-décalage unilatéral topologiquement mélangeant sur un alphabet $\mathcal{A}$. Soient $(I_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$, $(J_{\alpha\,\beta})_{(\alpha,\beta)\in\mathcal{B}}$ deux familles (indexées par $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ respectivement) d'intervalles compacts disjoints non triviaux. On suppose que $J_{\alpha\,\beta} \subset I_\alpha$ pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathcal{B}$.

Soit $f : J := \cup_{\mathcal{B}} J_{\alpha\,\beta} \to I := \cup_{\mathcal{A}} I_\alpha$ une application de classe C^r, $r \geqslant 1$, telle que

- pour chaque (α, β), la restriction de f à $J_{\alpha\,\beta}$ soit un difféomorphisme sur I_β;

Ensembles de Cantor dynamiques

Soit $(\Sigma^+_{\mathcal{B}}, \sigma)$ un sous-décalage unilatéral topologiquement mélangeant sur un alphabet $\mathcal{A}$. Soient $(I_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$, $(J_{\alpha\,\beta})_{(\alpha,\beta) \in \mathcal{B}}$ deux familles (indexées par $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ respectivement) d'intervalles compacts disjoints non triviaux. On suppose que $J_{\alpha\,\beta} \subset I_\alpha$ pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathcal{B}$.

Soit $f : J := \cup_{\mathcal{B}} J_{\alpha\,\beta} \to I := \cup_{\mathcal{A}} I_\alpha$ une application de classe C^r, $r \geqslant 1$, telle que

- pour chaque (α, β), la restriction de f à $J_{\alpha\,\beta}$ soit un difféomorphisme sur I_β;
- pour tout $x \in J$, $|Df(x)| > 1$.

Ensembles de Cantor dynamiques

Soit $(\Sigma^+_{\mathcal{B}}, \sigma)$ un sous-décalage unilatéral topologiquement mélangeant sur un alphabet $\mathcal{A}$. Soient $(I_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$, $(J_{\alpha\,\beta})_{(\alpha,\beta)\in\mathcal{B}}$ deux familles (indexées par $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ respectivement) d'intervalles compacts disjoints non triviaux. On suppose que $J_{\alpha\,\beta} \subset I_\alpha$ pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathcal{B}$.

Soit $f : J := \cup_{\mathcal{B}} J_{\alpha\,\beta} \to I := \cup_{\mathcal{A}} I_\alpha$ une application de classe C^r, $r \geqslant 1$, telle que

- pour chaque (α, β), la restriction de f à $J_{\alpha\,\beta}$ soit un difféomorphisme sur I_β;
- pour tout $x \in J$, $|Df(x)| > 1$.

L'ensemble maximal invariant $L := \bigcap_{n\geqslant 0} f^{-n}(J)$ est un ensemble de Cantor dynamique de classe C^r.

Ensembles de Cantor dynamiques

Soit $(\Sigma^+_{\mathcal{B}}, \sigma)$ un sous-décalage unilatéral topologiquement mélangeant sur un alphabet $\mathcal{A}$. Soient $(I_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$, $(J_{\alpha\,\beta})_{(\alpha,\beta)\in\mathcal{B}}$ deux familles (indexées par $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ respectivement) d'intervalles compacts disjoints non triviaux. On suppose que $J_{\alpha\,\beta} \subset I_\alpha$ pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathcal{B}$.

Soit $f : J := \cup_{\mathcal{B}} J_{\alpha\,\beta} \to I := \cup_{\mathcal{A}} I_\alpha$ une application de classe C^r, $r \geqslant 1$, telle que

- pour chaque (α, β), la restriction de f à $J_{\alpha\,\beta}$ soit un difféomorphisme sur I_β;
- pour tout $x \in J$, $|Df(x)| > 1$.

L'ensemble maximal invariant $L := \bigcap_{n\geqslant 0} f^{-n}(J)$ est un ensemble de Cantor dynamique de classe C^r.

La restriction de f à L est conjuguée à $(\Sigma^+_{\mathcal{B}}, \sigma)$.

Exemple: Soit $\lambda > 2$.

Exemple: Soit $\lambda > 2$. Définissons $I_0 := [0, \lambda^{-1}]$, $I_1 := [1 - \lambda^{-1}, 1]$

Exemple: Soit $\lambda > 2$. Définissons $I_0 := [0, \lambda^{-1}]$, $I_1 := [1 - \lambda^{-1}, 1]$ et $f : I_0 \cup I_1 \to [0, 1]$ by

$$f(x) = \begin{cases} \lambda x & \text{pour } x \in I_0 \\ \lambda(x-1)+1 & \text{pour } x \in I_1 \end{cases}$$

Exemple: Soit $\lambda > 2$. Définissons $I_0 := [0, \lambda^{-1}]$, $I_1 := [1 - \lambda^{-1}, 1]$ et $f : I_0 \cup I_1 \to [0, 1]$ by

$$f(x) = \begin{cases} \lambda x & \text{pour } x \in I_0 \\ \lambda(x-1)+1 & \text{pour } x \in I_1 \end{cases}$$

L'ensemble $L := \bigcap_{n \geqslant 0} f^{-n}(I_0 \cup I_1)$ est un ensemble de Cantor dynamique d'épaisseur $(\lambda - 2)^{-1}$.

Exemple: Soit $\lambda > 2$. Définissons $I_0 := [0, \lambda^{-1}]$, $I_1 := [1 - \lambda^{-1}, 1]$ et $f : I_0 \cup I_1 \to [0, 1]$ by

$$f(x) = \begin{cases} \lambda x & \text{pour } x \in I_0 \\ \lambda(x - 1) + 1 & \text{pour } x \in I_1 \end{cases}$$

L'ensemble $L := \bigcap_{n \geqslant 0} f^{-n}(I_0 \cup I_1)$ est un ensemble de Cantor dynamique d'épaisseur $(\lambda - 2)^{-1}$.

Proposition Soit $r > 1$. L'épaisseur d'un ensemble de Cantor dynamique de classe C^r est strictement positive

Exemple: Soit $\lambda > 2$. Définissons $I_0 := [0, \lambda^{-1}]$, $I_1 := [1 - \lambda^{-1}, 1]$ et $f : I_0 \cup I_1 \to [0, 1]$ by

$$f(x) = \begin{cases} \lambda x & \text{pour } x \in I_0 \\ \lambda(x-1)+1 & \text{pour } x \in I_1 \end{cases}$$

L'ensemble $L := \bigcap_{n \geqslant 0} f^{-n}(I_0 \cup I_1)$ est un ensemble de Cantor dynamique d'épaisseur $(\lambda - 2)^{-1}$.

Proposition Soit $r > 1$. L'épaisseur d'un ensemble de Cantor dynamique de classe C^r est strictement positive et dépend continument de l'application f (dans la C^r-topologie).

Exemple: Soit $\lambda > 2$. Définissons $I_0 := [0, \lambda^{-1}]$, $I_1 := [1 - \lambda^{-1}, 1]$ et $f : I_0 \cup I_1 \to [0, 1]$ by

$$f(x) = \begin{cases} \lambda x & \text{pour } x \in I_0 \\ \lambda(x-1)+1 & \text{pour } x \in I_1 \end{cases}$$

L'ensemble $L := \bigcap_{n \geqslant 0} f^{-n}(I_0 \cup I_1)$ est un ensemble de Cantor dynamique d'épaisseur $(\lambda - 2)^{-1}$.

Proposition Soit $r > 1$. L'épaisseur d'un ensemble de Cantor dynamique de classe C^r est strictement positive et dépend continument de l'application f (dans la C^r-topologie).

Remarque Ce résultat est faux en classe C^1.

Régularité transversale de $W^s(K)$ en codimension 1

Régularité transversale de $W^s(K)$ en codimension 1

Soient M une variété, U une partie ouverte de M, $f : U \to M$ un plongement de classe C^2, $K \subset U$ un ensemble basique de f.

Régularité transversale de $W^s(K)$ en codimension 1

Soient M une variété, U une partie ouverte de M, $f : U \to M$ un plongement de classe C^2, $K \subset U$ un ensemble basique de f. On suppose que le fibré instable de $Tf_{|K}$ est de dimension 1.

Régularité transversale de $W^s(K)$ en codimension 1

Soient M une variété, U une partie ouverte de M, $f : U \to M$ un plongement de classe C^2, $K \subset U$ un ensemble basique de f. On suppose que le fibré instable de $Tf_{|K}$ est de dimension 1.

Proposition Il existe $r > 1$ tel que la lamination $W^s(K)$ soit transversalement de classe C^r.

Régularité transversale de $W^s(K)$ en codimension 1

Soient M une variété, U une partie ouverte de M, $f : U \to M$ un plongement de classe C^2, $K \subset U$ un ensemble basique de f. On suppose que le fibré instable de $Tf_{|K}$ est de dimension 1.

Proposition Il existe $r > 1$ tel que la lamination $W^s(K)$ soit transversalement de classe C^r.

Cela veut dire que les applications d'holonomie entre courbes transverses à $W^s(K)$ sont de classe C^r au sens de Whitney.

Régularité transversale de $W^s(K)$ en codimension 1

Soient M une variété, U une partie ouverte de M, $f : U \to M$ un plongement de classe C^2, $K \subset U$ un ensemble basique de f. On suppose que le fibré instable de $Tf_{|K}$ est de dimension 1.

Proposition Il existe $r > 1$ tel que la lamination $W^s(K)$ soit transversalement de classe C^r.

Cela veut dire que les applications d'holonomie entre courbes transverses à $W^s(K)$ sont de classe C^r au sens de Whitney.

Corollaire Supposons que K soit infini et ne soit pas un attracteur.

Régularité transversale de $W^s(K)$ en codimension 1

Soient M une variété, U une partie ouverte de M, $f : U \to M$ un plongement de classe C^2, $K \subset U$ un ensemble basique de f. On suppose que le fibré instable de $Tf_{|K}$ est de dimension 1.

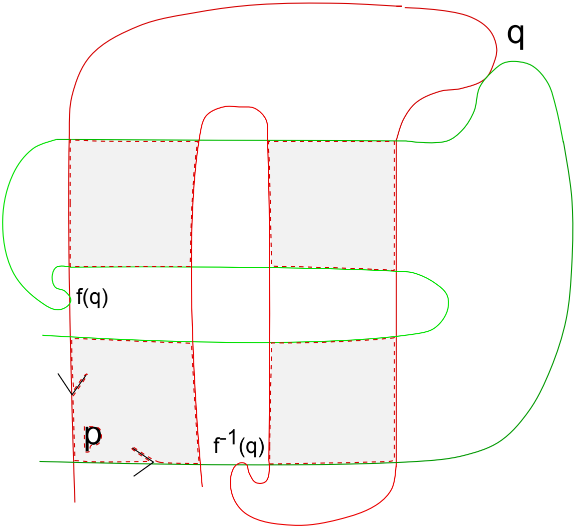
Proposition Il existe $r > 1$ tel que la lamination $W^s(K)$ soit transversalement de classe C^r.

Cela veut dire que les applications d'holonomie entre courbes transverses à $W^s(K)$ sont de classe C^r au sens de Whitney.

Corollaire Supposons que K soit infini et ne soit pas un attracteur. Alors l'intersection de $W^s(K)$ avec une courbe transverse à $W^s(K)$ (dont les extrémités n'appartiennent pas à $W^s(K)$) est un ensemble de Cantor dynamique de classe C^r.

Exemple de tangences homoclines robustes

Exemple de tangences homoclines robustes



Soit M une surface connexe compacte, et soit $f \in \mathrm{Diff}^2(M)$ un difféomorphisme.

Soit M une surface connexe compacte, et soit $f \in \mathrm{Diff}^2(M)$ un difféomorphisme. On suppose que f admet un ensemble basique (infini) de type selle K

Soit M une surface connexe compacte, et soit $f \in \mathrm{Diff}^2(M)$ un difféomorphisme. On suppose que f admet un ensemble basique (infini) de type selle K et un point fixe $p \in K$ tel que les variétés stables et instables de p soient quadratiquement tangentes en un point $q \in M \setminus K$.

Soit M une surface connexe compacte, et soit $f \in \mathrm{Diff}^2(M)$ un difféomorphisme. On suppose que f admet un ensemble basique (infini) de type selle K et un point fixe $p \in K$ tel que les variétés stables et instables de p soient quadratiquement tangentes en un point $q \in M \setminus K$. Notons τ_s (resp. τ_u) la borne supérieure des épaisseurs des ensembles de Cantor obtenus par intersection de K avec un voisinage de p dans $W^u(p)$ (resp. $W^s(p)$).

Soit M une surface connexe compacte, et soit $f \in \mathrm{Diff}^2(M)$ un difféomorphisme. On suppose que f admet un ensemble basique (infini) de type selle K et un point fixe $p \in K$ tel que les variétés stables et instables de p soient quadratiquement tangentes en un point $q \in M \setminus K$. Notons τ_s (resp. τ_u) la borne supérieure des épaisseurs des ensembles de Cantor obtenus par intersection de K avec un voisinage de p dans $W^u(p)$ (resp. $W^s(p)$).

Proposition (Newhouse) Supposons qu'on ait $\tau_s \tau_u > 1$.

Soit M une surface connexe compacte, et soit $f \in \mathrm{Diff}^2(M)$ un difféomorphisme. On suppose que f admet un ensemble basique (infini) de type selle K et un point fixe $p \in K$ tel que les variétés stables et instables de p soient quadratiquement tangentes en un point $q \in M \setminus K$. Notons τ_s (resp. τ_u) la borne supérieure des épaisseurs des ensembles de Cantor obtenus par intersection de K avec un voisinage de p dans $W^u(p)$ (resp. $W^s(p)$).

Proposition (Newhouse) Supposons qu'on ait $\tau_s \tau_u > 1$. Alors il existe un ouvert $\mathcal{U} \subset \mathrm{Diff}^2(M)$ tel que f appartienne à l'adhérence de $\mathcal{U}$

Soit M une surface connexe compacte, et soit $f \in \mathrm{Diff}^2(M)$ un difféomorphisme. On suppose que f admet un ensemble basique (infini) de type selle K et un point fixe $p \in K$ tel que les variétés stables et instables de p soient quadratiquement tangentes en un point $q \in M \setminus K$. Notons τ_s (resp. τ_u) la borne supérieure des épaisseurs des ensembles de Cantor obtenus par intersection de K avec un voisinage de p dans $W^u(p)$ (resp. $W^s(p)$).

Proposition (Newhouse) Supposons qu'on ait $\tau_s \tau_u > 1$. Alors il existe un ouvert $\mathcal{U} \subset \mathrm{Diff}^2(M)$ tel que f appartienne à l'adhérence de $\mathcal{U}$ et que, pour tout $g \in \mathcal{U}$, les laminations $W^s(K_g)$ et $W^u(K_g)$ aient une tangence quadratique au voisinage de q.