ECHANGES D'INTERVALLES

Cours Collège de France
janvier-mars 2005

Jean-Christophe YOCCOZ

Contents

I Introduction

1 Billards polygonaux rationnels

Soit U un ouvert connexe (mais pas forcément simplement connexe) borné du plan, dont le bord ∂U est l'union d'un nombre fini de segments (rectilignes) : on dira que U est un **billard polygonal**. On dira que U est **rationnel** si l'angle formé par les directions de deux quelconques des segments formant le bord de U est un multiple rationnel de π.

On s'intéresse au flot du billard associé à la table U, c'est-à-dire au mouvement de particules se déplaçant dans U à vitesse uniforme et rebondissant élastiquement sur le bord de U (une trajectoire qui aboutit à un sommet de ∂U est stoppée ; mais ceci ne concerne qu'un ensemble de trajectoires de codimension 1).

Remarque : Le flot du billard dans le cas polygonal irrationnel est évidemment aussi très intéressant ; cependant les rares résultats connus sont obtenus par approximation du cas rationnel.

La façon la plus efficace et élégante d'étudier le flot d'un billard polygonal rationnel est de le considérer comme flot géodésique sur une surface de translation, suivant une construction que nous rappelons maintenant.

2 Définition d'une surface de translation

Une surface de translation est définie par

- une surface topologique compacte connexe M, munie d'une partie finie non vide Σ de M ; les points de Σ sont appelés points marqués ou singularités de la surface de translation ;
- un atlas maximal de cartes de $M^* := M - \Sigma$ par des ouverts de $\mathbf{C}$, tel que les changements de cartes soient localement des translations.

On exige de plus la condition suivante au voisinage de chaque point q de Σ : il existe un voisinage V de q dans M, un voisinage W de 0 dans $\mathbf{C}$ et un revêtement ramifié $\pi : (V, q) \to (W, 0)$ de degré fini m_q tel que les sections locales (hors de 0) de π soient des cartes de l'atlas.

Une surface de translation hérite de toutes les structures sur $\mathbf{C}$ invariantes par translation. C'est ainsi qu'une surface de translation est naturellement munie :

- d'une structure de surface de Riemann (sur M et pas seulement sur M^* !) ;
- d'une 1-forme holomorphe ω, sans zéros sur $M - \Sigma$, et possédant un zéro d'ordre $m_q - 1$ en un point $q \in \Sigma$; c'est la forme qui s'écrit dz dans les cartes de l'atlas ;
- d'une métrique plate $|dz|$ sur M^* ;
- d'une forme d'aire $dx \wedge dy$ sur M^*, qui s'écrit $m_q^2(x^2+y^2)^{m_q-1}dx \wedge dy$ au voisinage d'un point q de Σ.

Le flot géodésique associé à la métrique plate sur M^* n'est pas complet : on stoppe les géodésiques aboutissant aux points de Σ. Il est constitué d'une famille à un paramètre de flots associés au champ de vecteurs constants (i.e. invariants par translations) sur M^*. On prendra comme champ de référence le champ unitaire vertical représenté par $\frac{\partial}{\partial y}$ dans les cartes de l'atlas.

Comme les $m_q - 1$ apparaissent comme l'ordre des zéros d'une 1-forme holomorphe, le genre g de M est relié aux entiers m_q par la formule

$$2g - 2 = \sum_q (m_q - 1) \;\; ..$$

3 La surface de translation associée à un billard polygonal rationnel

Soit U un billard polygonal rationnel. Notons $\hat{U}$ la compactification par bouts premiers de U : un point de $\hat{U}$ est déterminé par un point z_0 de $\bar{U}$ et une composante de $B(z_0, \varepsilon) \cap U$ (ceci ne dépend pas de ε si ε est assez petit). On a une application canonique continue et surjective de $\hat{U}$ dans $\bar{U}$ qui est un homéomorphisme dès que chaque composante du bord de U est une courbe fermée simple (polygonale).

Un point de $\hat{U} - U$, d'image z_0 dans $\bar{U}$, est **régulier** si le secteur de $B(z_0, \varepsilon) \cap U$ qui lui correspond est plat, un sommet dans le cas contraire. Chaque composante de $\hat{U} - U$ est homéomorphe à un cercle et contient au moins 2 sommets. Le nombre de sommets est fini. On appelle **côté** de U une composante connexe de l'ensemble des points réguliers de $\hat{U} - U$. L'adhérence d'un côté C dans $\hat{U}$ est l'union de C et de deux sommets (distincts) qu'on appelle les extrémités de C. L'image de C dans $\bar{U}$ est un segment ouvert contenu dans $\bar{U} - U$. Un sommet est extrémité d'exactement deux côtés.

Pour chaque côté C, notons σ_C la symétrie orthogonale **vectorielle** par rapport à la direction de C. Notons G le sous-groupe de $O(2, \mathbf{R})$ engendré par les σ_C. Pour chaque sommet

q de $\hat{U} - U$, notons H_q le sous-groupe de G engendré par σ_C et $\sigma_{C'}$, où C et C' désignent les côtés aboutissant en q.

Il résulte de l'hypothèse de rationalité que G est fini. Plus précisément, si N est le plus petit entier tel que chaque angle entre côtés de U s'écrive $\pi m_i/N$, G est le groupe diédral d'ordre $2N$, engendré par une symétrie σ_C et les rotations d'ordre N. De même, si l'angle en un sommet q s'écrit sous forme irréductible $\pi m_q/N_q$ (avec $N_q \geq 2$ par définition d'un sommet), H_q est le groupe diédral d'ordre $2N_q$.

La surface de translation (M, Σ) associée au billard polygonal rationnel U est égale au quotient du produit $\hat{U} \times G$ par la relation d'équivalence suivante : deux points (z_0, g), (z_0', g') sont équivalents si et seulement si $z_0 = z_0'$ et de plus

- lorsque $z_0 \in U, g = g'$;
- lorsque z_0 appartient à un côté C de U, $g'g^{-1} = 1$ ou σ_C ;
- lorsque z_0 est un sommet, $g'g^{-1} \in H_{z_0}$.

On notera M l'espace quotient obtenu. C'est une surface topologique compacte (exercice!) et on dispose d'une application canonique de $\hat{U} \times G$ dans M. On note Σ l'ensemble des points qui sont image d'une paire (q, g) où q est un sommet : c'est donc une partie finie (non vide) de M.

Définissons sur $M - \Sigma$ un atlas de cartes tel que les changements de cartes soient localement des translations.

Pour $z_0 \in U, g_0 \in G$, on considère l'application

$$U \times \{g_0\} \longrightarrow \mathbf{R}^2 ,$$

$$(z, g_0) \longmapsto g_0(z) .$$

Pour z_0 appartenant à un côté C de U, $g_0 \in G$, on considère l'application

$$(U \cup C) \times \{g_0, g_0\sigma_C\} \longrightarrow \mathbf{R}^2$$

$$(z, g_0) \longmapsto g_0(z)$$

$$(z, g_0\sigma_C) \longmapsto g_0\tilde{\sigma}_C(z) ,$$

où on a identifié $z \in U \cup C$ à son image dans $\bar{U} \subset \mathbf{R}^2$ et on a noté $\tilde{\sigma}_C$ la symétrie orthogonale **affine** par rapport à la droite contenant l'image de C.

Il est clair que le système de cartes ainsi défini couvre $M - \Sigma$ et que les changements de cartes sont des translations. On complète cet atlas en un atlas maximal.

Reste à vérifier la propriété requise aux points de Σ. Un point de Σ est l'image de $(q, g_0 H_q)$ pour un sommet q et un élément $g_0 \in G$. Notons C, C' les deux côtés aboutissant en q. Définissons une application :

$$(U \cup C \cup C' \cup \{q\}) \times g_0 H_q \to \mathbf{R}^2$$
$$(z, g_0 h) \mapsto g_0 h(z - q) \ .$$

La restriction de cette application à un voisinage du point de Σ considéré a les propriétés requises. Le degré du revêtement ramifié est l'entier m_q (tel que l'angle en q est $\pi m_q / N_q$.

On a ainsi construit une surface de translation (M, Σ). Observons d'ailleurs que cette surface de translation est d'un type spécial, puisque le groupe G agit par isométries (action déduite de celle sur $\hat{U} \times G$ par translations à gauche de la deuxième coordonnée).

La relation entre trajectoires du billard dans U et géodésiques sur (M, Σ) s'explicite comme suit : soit $z(t), 0 < t < T$, une trajectoire du billard (ne passant pas par les sommet dans cet intervalle de temps), et soient $t_1 < \ldots < t_N$ les instants successifs dans $(0, T)$ où la trajectoire rebondit sur le bord de U ; notons C_i le côté rencontré à l'instant t_i et posons

$$\begin{aligned} & g_0 = 1 \ , \\ & g_{i+1} = g_i \sigma_{i+1} \quad \text{pour} \ \ 0 \leq i < N \ . \end{aligned}$$

Alors, pour tout $g \in G$, la courbe $\tilde{z}_g$ définie par

$$\tilde{z}_g(t) = \begin{cases} (z(t), g) & \text{pour} \ \ 0 < t \leq t_1 \\ (z(t), g g_i) & \text{pour} \ \ t_i \leq t \leq t_{i+1} \\ (z(t), g g_N) & \text{pour} \ \ t_N \leq t < T \end{cases}$$

est une géodésique pour la métrique plate de (M, Σ). La correspondance $(z, g) \longmapsto \tilde{z}_g$ est clairement biunivoque.

Remarque : Notons H_U le stabilisateur de U dans G modulo translations, c'est-à-dire le sous-groupe de G formé des $g \in G$ tels que $g(U)$ soit égal à un translaté $U + t_g$ de U. En général,

H_U est réduit à $\{1\}$ mais il peut être plus gros pour des tables symétriques. Le groupe H_U agit à droite, par isomorphismes de la structure de translation, via la formule

$$h(z,g) = (h^{-1}(z) + t_h, gh)\ .$$

On peut donc passer au quotient par l'action de H_U et obtenir une surface de translation réduite (M_1, Σ_1). On a alors un revêtement ramifié de degré $\# H_U$ de (M_1, Σ_1) par (M, Σ).

Exemple : Supposons que U est un polygône régulier à N côtés, $N \geq 3$. L'angle en chaque sommet est $\pi \frac{N-2}{N}$: lorsque N est impair, $N-2$ et N sont premiers entre eux et G est d'ordre $2N$; lorsque $N = 2N'$ est pair, N' et $N'-1$ sont premiers entre eux et G est d'ordre N. On a $\#\Sigma = N$ et on a en chaque point marqué $m_q = N-2$ (si N est impair) ou $N'-1$ (si N est pair). Le genre g_U de M est donc donné par

$$2g_U - 2 = \begin{cases} N(N-3) & \text{si } N \text{ est impair} \\ 2N'(N'-2) & \text{si } N \text{ est pair} \end{cases}$$

soit encore

$$g_U = \begin{cases} \dfrac{(N-1)(N-2)}{2} & \text{si } N \text{ est impair} \\ (N'-1)^2 & \text{si } N \text{ est pair} \end{cases}$$

Lorsque N est pair, le stabilisateur H_U est égal à G ; lorsque N est impair, c'est le sous groupe d'indice 2 de G formé des isométries directes : dans tous les cas, H_U est d'ordre N. Son action sur les sommets du polygône possède deux orbites si N est congru à 2 mod 4, 1 seule orbite sinon (exercice). Selon les cas, la surface réduite (M_1, Σ_1) aura donc 1 ou 2 points marqués. L'ordre de ramification au(x) point(s) marqué(s) est donc

$$m_1 = \begin{cases} N-2 & \text{si } N \text{ est impair} \\ \dfrac{N}{2} - 1 & \text{si } N \equiv 0 \bmod 4 \\ \dfrac{N-2}{4} & \text{si } N \equiv 2 \bmod 4\ . \end{cases}$$

Le genre g_1 de la surface réduite vérifie donc

$$2g_1 - 2 = \begin{cases} N-3 & \text{si } N \text{ est impair} \\ \frac{N}{2} - 2 & \text{si } N \equiv 0 \bmod 4 \\ \frac{N}{2} - 3 & \text{si } N \equiv 2 \bmod 4 \end{cases}$$

soit

$$g_1 = \begin{cases} \frac{N-1}{2} & \text{si } N \text{ est impair} \\ \frac{N}{4} & \text{si } N \equiv 0 \bmod 4 \\ \frac{N-2}{4} & \text{si } N \equiv 2 \bmod 4 \end{cases}$$

La surface est de genre 1 pour $N = 3, 4, 6$, de genre 2 pour $N = 5, 8, 10$, de genre ≥ 3 sinon.

4 Déformation d'une surface de translation par action de $GL(2, \mathbf{R})$

Soit (M, Σ) une surface de translation, notons $(\varphi_i : V_i \to W_i)$ les cartes de son atlas maximal. Soit $g \in GL(2, \mathbf{R})$; pour tout i, posons

$$\varphi_i^g := g \circ \varphi_i : V_i \to g(W_i) .$$

Soit V une composante connexe de $V_i \cap V_j$; le changement de cartes $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ dans $\varphi_i(V)$ est une translation $t_{i,j,V}$. On aura alors que

$$\varphi_j^g \circ (\varphi_i^g)^{-1} = g \circ t_{i,j,V} \circ g^{-1}$$

est encore une translation $t_{i,j,V}^g$. Par conséquent, les φ_i^g forment un atlas maximal qui définit une nouvelle structure de surface de translation sur (M, Σ).

On obtient ainsi une action à gauche de $GL(2, \mathbf{R})$ sur l'espace des modules (= classes d'isomorphisme) de surfaces de translation. Notons que tant le genre de la surface, comme le nombre et le type des points marqués, sont préservés par cette action.

Notons aussi l'action de certains sous-groupes de $GL(2, \mathbf{R})$:

- Le sous-groupe diagonal $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ correspond aux changements d'échelles ;

- Une surface de translation est canoniquement orientée ; l'action d'une involution telle que $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ change l'orientation ;
- le sous-groupe $SO(2, \mathbf{R})$ agit par isométries et fait pivoter la direction (verticale) de référence ;
- le sous-groupe $\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$, associé au flot géodésique sur la surface modulaire, définit un flot sur les espaces de modules de surfaces de translation appelé **flot de Teichmuller**.
- les sous-groupes paraboliques (horocycliques) $\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$ ont aussi leur rôle ...

5 Dynamique du champ de vecteurs vertical et échanges d'intervalles

Soit (M, Σ) une surface de translation. L'atlas permet d'y définir le champ de vecteurs constant "vertical" $\frac{\partial}{\partial y}$.

Ce champ de vecteurs n'est pas complet : plus précisément, pour chaque $q \in \Sigma$, d'indice de ramification m_q, il existe exactement m_q trajectoires du champ aboutissant en temps fini en q, et m_q trajectoires en émergeant : on appelle **séparatrices entrantes** les premières et **sortantes** les secondes.

Considérons dans (M, Σ) un segment géodésique non vertical S. On suppose que chacune des extrémités de S se trouve sur une séparatrice (point marqué inclus) et que le segment de cette séparatrice joignant l'extrémité au point marqué n'a pas d'autre intersection avec S.

Intéressons-nous à l'application de premier retour T_S du champ $\frac{\partial}{\partial y}$ sur S.

Comme $\frac{\partial}{\partial y}$ préserve la forme d'aire, le théorème de récurrence de Poincaré nous garantit que T_S est défini sur une partie de S de mesure totale (mesure de Lebesgue sur S). Un argument standard de la théorie des feuilletages, couplé avec l'hypothèse faite sur les extrémités de S, assure que le domaine de définition de T_S est ouvert. On voit aussi que, dans la coordonnée x sur S déduite de l'atlas de (M, Σ), la restriction de T_S à chaque composante connexe de son domaine de définition est une translation ; qui plus est, le temps de retour à S est constant dans chaque composante. Cette dernière propriété a pour conséquence qu'un point de S qui n'est pas extrémité de S mais est extrémité d'une composante connexe du domaine de définition de T_S doit appartenir à une séparatrice entrante. De même, un point de S qui n'est pas extrémité de S mais qui est extrémité d'une composante connexe du domaine de définition de T_S^{-1} doit appartenir àune séparatrice sortante. De plus, le segment de cette séparatrice (sortante ou entrante) qui joint le point marqué au point de S n'a pas d'autre intersection avec S, par définition d'une application de premier retour.

On conclut que le complémentaire du domaine de définition de T_S dans l'intérieur de S est un ensemble fini, dont la cardinalité ne dépasse pas celle des séparatrices entrantes. Le nombre d de composantes connexes du domaine de T_S (ou de T_S^{-1}) vérifie donc

$$d \leq \sum_{q \in \Sigma} m_q \ .$$

On a ainsi montré que T_S est un **échange d'intervalles** (linéaire).

Définition : Soit I un intervalle ouvert borné. Un **échange d'intervalles** est une application biunivoque T de son domaine $D_T \subset I$ sur son image $I_T \subset I$ telle que

- $I - D_T, I - I_T$ sont des parties finies (de même cardinal) ;
- la restriction de T à chaque composante de D_T est une translation (envoyant cette composante sur une composante de I_T)

Si dans la seconde partie de la définition, on demande seulement à la restriction de T d'être un homéomorphisme croissant (sur une composante connexe de I_T), on dira que T est un **échange d'intervalles généralisé**. S'il y a risque de confusion, on appelle **échanges d'intervalles linéaires** ceux satisfaisant à la condition initiale.

En général, l'application de retour T_S ne rend pas compte de toute la dynamique du champ vertical $\partial/\partial y$ car il peut y avoir des trajectoires ne rencontrant pas du tout S : l'exemple le plus simple est celui du tore $M = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$, avec deux points marqués (0, 0), (1/2, 0), et S le segment qui les joint, où l'application de retour sur S du champ vertical est l'identité.

Proposition : *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *toute demi-trajectoire infinie (positive ou négative) rencontre l'intérieur de S ;*

(ii) *chaque séparatrice (entrante ou sortante) rencontre l'intérieur de S ;*

(iii) $d = \Sigma m_q$.

Preuve : L'équivalence de (ii) et (iii) résulte de la discussion précédent la proposition. Par ailleurs, (i) implique trivialement (ii). Montrons que (ii) implique (i). Considérons l'ensemble Z des points de M^* dont l'orbite positive rencontre l'intérieur de S ou aboutit à un point marqué. Montrons que Z est ouvert et fermé dans M^*. Soit $z \in Z$; si l'orbite positive de z rencontre l'intérieur de S, il en sera de même pour tout point suffisamment proche de z ; si l'orbite positive de z rencontre un point marqué q, les orbites positives de points proches de z, si elles sont disjointes de celle de z, s'approcheront de q, suivront ensuite une séparatrice sortante, et rencontreront donc l'intérieur de S d'après (ii). On a ainsi montré que Z est ouvert.

Soit $(z_n)_{n\geq 0}$ une suite dans Z convergeant vers un point $z_\infty \in M^*$. Si, pour une sous-suite des z_n, l'orbite positive aboutit à un point marqué avant de rencontrer l'intérieur de S, le temps pour aboutir à ce point marqué reste borné d'après (ii) et l'orbite positive de z_∞ aboutit aussi à un point marqué. Dans le cas contraire, on peut supposer que l'orbite positive de z_n rencontre l'intérieur de S en un temps t_n ; comme les temps de retour dans S sont bornés, on peut supposer que la suite t_n converge vers une limite t_∞. Si l'orbite positive de z_∞ ne rencontre pas un point marqué avant le temps t_∞ (auquel cas $z_\infty \in Z$), elle se trouve sur S au temps t_∞ ; si elle se trouve sur l'intérieur de S, on conclut encore que $z_\infty \in S$. Finalement, supposons que l'orbite positive de z_∞ au temps t_∞ se trouve à l'une des extrémités de S ; si cette extrémité est un point marqué, on se trouve sur une séparatrice entrante, l'orbite positive de z_∞ aboutira à un point marqué ; si cette extrémité se trouve sur une séparatrice sortante, z_∞ s'y trouve aussi et on conclut par (ii) que l'orbite positive de z_∞ rencontre l'intérieur de S.

On a ainsi montré que Z est fermé. La partie non vide, ouverte et fermée Z est donc égale à M^*. On raisonne de même pour les orbites négatives.

□

Références sur les échanges d'intervalles

1. J. Coffrey "Some remarks concerning an example of a minimal, non uniquely ergodic interval exchange map" *Math. Z.* **199** (1988) 577-580.

2. G. Forni "Solutions of the cohomological equation for area-preserving flows on compact surfaces of higher genus" *Annals of Mathematics* **146** (1997) 295-344.

3. G. Forni "Deviation of ergodic averages for area-preserving flows on surfaces of higher genus" *Annals of Mathematics* **155** (2002) 1-103.

4. A. Katok and A.M. Stepin "Approximations in Ergodic Theory" *Russ. Math. Surv.* **22** (1967) 77-102.

5. M. Keane "Interval exchange transformations" *Math. Z.* **141** (1975) 25-31.

6. M. Keane "Non-ergodic interval exchnage transformations" *Isr. J. Math.* **26** (1977) 188-196.

7. S.P. Kerckhoff "Simplicial systems for interval exchange maps and measured foliations" *Ergod. Th. Dynam. Sys.* **5** (1985) 257-271.

8. H.B. Keynes and D. Newton "A "Minimal", Non-Uniquely Ergodic Interval Exchange Transformation" *Math. Z.* **148** (1976) 101-105.

9. R. Krikorian "Déviations de moyennes ergodiques, d'après Forni, Kontsevich, Zorich" *Séminaire Bourbaki* 2003-2004, 56ème année, exposé n^0 927, novembre 2003.

10. M. Kontsevich and A. Zorich "Connected components of the moduli spaces of Abelian differentials with prescribed singularities" *Inv. Math.* **153** (2003) 631-678.

11. H. Masur "Interval exchange transformations and measured foliations" *Annals of Mathematics* **115** (1982) 169-200.

12. S. Marmi, P. Moussa and J-C. Yoccoz "On the cohomological equation for interval exchange maps", *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **336** (2003) 941-948.

13. S. Marmi, P. Moussa and J-C. Yoccoz "The cohomological equation for Roth type interval exchange maps", preprint.

14. G. Rauzy "Echanges d'intervalles et transformations induites" *Acta Arit.* (1979) 315-328.

15. M. Rees "An alternative approach to the ergodic theory of measured foliations" *Ergod. th. Dyn. Sys.* **1** (1981) 461-488.

16. W. Veech "Interval exchange transformations" *Journal d'Analyse Mathématique* **33** (1978) 222-272.

17. W. Veech "Gauss measures for transformations on the space of interval exchange maps" *Ann. of Math.* **115** (1982) 201-242.

18. W. Veech "The Teichmuller geodesic flow" *Ann. of Math.* **124** (1986) 441-530.

19. W. Veech "The metric theory of interval exchange transformation I. Generic spectral properties" *Amer. J. of Math.* **106** (1984) 1331-1359.

20. W. Veech "The metric theory of interval exchange transformation II. Approximation by primitive interval exchanges" *Amer. J. of Math.* **106** (1984) 1361-1387.

21. W. Veech "The metric theory of interval exchange transformation III. The Sah Arnoux Fathi invariant" *Amer. J. of Math.* **106** (1984) 1389-1421.

22. J-C. Yoccoz "Continued Fraction Algorithms for Interval Exchange Maps : an Introduction", *Frontiers in Number Theory Geometry and Physics, proceedings of the Spring School at Les Houches, France, March 2003.*

23. A. Zorich "Finite Gauss measure on the space of interval exchange transformations. Lyapunov exponents" *Annales de l'Institut Fourier* Tome 46, fasc. 2 (1996) 325-370.

24. A. Zorich "Deviation for interval exchange transformations" *Ergod. th. Dyn. Sys.* **17** (1997), 1477-1499.

25. A. Zorich "On Hyperplane Sections of Periodic Surfaces" *Amer. Math. Soc. Translations* **179** (1997) 173-189.

26. A. Zorich "How Do the Leaves of a Closed 1-form Wind Around a Surface ?" in Pseudo-periodic Topology, V. Arnold, M. Kontsevich and A. Zorich editors, *Amer. Math. Soc. Translations* **197** (1999) 135-178.

27. A. Zorich "Flat Surfaces", to appear in *Frontiers in Number Theory Geometry and Physics, proceedings of the Spring School at Les Houches, France, March 2003.*

II Propriétés générales des échanges d'intervalles

1 Etiquetage

Nous définirons au prochain chapitre l'algorithme de Rauzy-Veech qui permet d'analyser la récurrence des orbites d'un échange d'intervalles. Dans cette optique, il est avantageux de considérer des échanges d'intervalles étiquetés, c'est-à-dire de donner un nom aux différentes composantes connexes du domaine (et donc aussi de l'image) de l'échange d'intervalles considéré.

Définition : Soit T un échange d'intervalles de domaine D_T, d'image I_T. Un **étiquetage** est la donnée d'un alphabet $\mathcal{A}$ et d'une paire de bijections, compatibles avec la dynamique, de $\mathcal{A}$ sur l'ensemble des composantes connexes de D_T et de I_T.

On notera $d = \#\mathcal{A}$ le nombre d'intervalles ; un étiquetage fournit deux bijections π_0 et π_1 de $\mathcal{A}$ sur $\{1, \ldots d\}$ qui indiquent dans quel ordre les composantes de D_T et celles de I_T sont respectivement rangées.

La paire de bijections $\mathcal{A} \underset{\pi_1}{\overset{\pi_0}{\rightrightarrows}} \{1, \dots d\}$ forme les **données combinatoires** de l'échange d'intervalles T. Un changement d'étiquetage correspond simplement à une bijection $\mathcal{A} \longmapsto \mathcal{A}'$ sur un autre alphabet $\mathcal{A}'$.

Pour un échange d'intervalles linéaire, il faut connaître, en sus des données combinatoires, les **longueurs** des intervalles échangés, c'est-à-dire un vecteur $\lambda(T)$ dans $\mathbf{R}^{\mathcal{A}}$ dont les composantes sont strictement positives.

Pour un échange d'intervalles **affine** (i.e. dont la restriction à chaque composante de D_T est une application affine), il faut connaître, en sus des données combinatoires, les longueurs des composantes de D_T et de celles de I_T, c'est-à-dire une paire de vecteurs $\lambda_0(T), \lambda_1(T)$ de composantes strictement positives et ayant la même somme de composantes.

2 Données combinatoires irréductibles

Définition : Les données combinatoires $\mathcal{A} \underset{\pi_1}{\overset{\pi_0}{\rightrightarrows}} \{1, \dots d\}$ sont **irréductibles** si pour tout $1 \leq k < d$, on a

$$\pi_0^{-1}(\{1, \dots k\}) \neq \pi_1^{-1}(\{1, \dots k\}) \ .$$

Supposons au contraire qu'on ait

$$\pi_0^{-1}(\{1, \dots k\}) = \pi_1^{-1}(\{1, \dots k\}) \ .$$

Pour un échange d'intervalles linéaire, cela veut dire qu'on a une juxtaposition d'un échange de k intervalles à gauche et de $d - k$ intervalles à droite dont les dynamiques peuvent être analysées séparément.

Pour un échange d'intervalles généralisé, ce n'est plus nécessairement le cas ; mais l'ensemble des points récurrents est néanmoins union de deux parties invariantes contenues dans des intervalles disjoints.

On supposera toujours dans la suite que les données combinatoires des échanges d'intervalles considérés sont irréductibles.

Notation : on utilisera en général des lettres majuscules pour les éléments de $\mathcal{A}$. La donnée $\mathcal{A} \underset{\pi_1}{\overset{\pi_0}{\rightrightarrows}} \{1, \dots d\}$ est alors notée

$$\pi_0^{-1}(1)\ldots\ldots\pi_0^{-1}(d)$$

$$\pi_1^{-1}(1)\ldots\ldots\pi_1^{-1}(d)$$

indiquant ainsi dans quel ordre on rencontre les intervalles dans D_T et I_T.

3 Le cas $d = 2$

A changement d'étiquetage près, il y a une seule donnée irréductible, qui permute les deux intervalles.

En recollant les deux extrémités de l'intervalle, on obtient un cercle (avec un point marqué) sur lequel l'échange d'intervalles linéaire (resp. généralisé) se lit comme une rotation distincte de l'identité (resp. un homéomorphisme préservant l'orientation ne fixant pas le point marqué).

On dispose d'une théorie extensive sur la dynamique des rotations et celle des homéomorphismes et difféomorphismes du cercle. Il va s'agir de voir dans quelle mesure ces résultats se prolongent aux échanges d'intervalles linéaires et généralisés.

4 Vecteur de translation et matrice Ω

Soit T un échange d'intervalles linéaire, de données combinatoires $\mathcal{A} \underset{\pi_1}{\overset{\pi_0}{\rightrightarrows}} \{1,\ldots d\}$. Notons $\lambda(T)$ le **vecteur des longueurs** des composantes de D_T (ou I_T). Chaque composante de D_T étant envoyée par une translation sur la composante correspondante de I_T, on définit aussi un vecteur de translations $\delta(T) \in \mathbf{R}^{\mathcal{A}}$. On a clairement

$$\delta_\alpha = \sum_{\pi_1\beta \leq \pi_1\alpha} \lambda_\beta - \sum_{\pi_0\beta \leq \pi_0\alpha} \lambda_\beta \ ,$$

c'est-à-dire

$$\delta = \Omega\lambda \ ,$$

où la matrice antisymétrique Ω est définie par

$$\Omega_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \pi_1\beta < \pi_1\alpha \ , \ \ \pi_0\beta > \pi_0\alpha \\ -1 & \text{si} \quad \pi_1\beta > \pi_1\alpha \ , \ \ \pi_0\beta < \pi_0\alpha \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On verra un peu plus loin comment Ω s'interprète en termes cohomologiques.

5 Données de suspension

On a vu comment obtenir des échanges d'intervalles comme applications de premier retour de champs de vecteurs constants sur des surfaces de translation. Nous indiquons ici la construction inverse.

Soit T un échange d'intervalles (linéaire) spécifié par ses données combinatoires $(\mathcal{A}, \pi_0, \pi_1)$ et son vecteur de longueur $\lambda(T)$.

Identifions $\mathbf{R}^2$ à $\mathbf{C}$ et donnons-nous un autre vecteur $\tau \in \mathbf{R}^{\mathcal{A}}$. Posons

$$\zeta = \lambda + i\tau \in \mathbf{C}^{\mathcal{A}} \ ,$$

et, pour $\alpha \in \mathcal{A}, \varepsilon \in \{0, 1\}$

$$\xi^\varepsilon_\alpha = \sum_{\pi_\varepsilon \beta < \pi_\varepsilon \alpha} \zeta_\beta \ .$$

Posons aussi

$$\zeta^* = \lambda^* + i\tau^* = \sum_{\mathcal{A}} \zeta_\beta \ .$$

.

Définition : On dit que τ définit des **données de suspension** pour $(\mathcal{A}, \pi_0, \pi_1)$ si on a

$$(*) \quad \begin{array}{lll} Im\ \ \xi^0_\alpha > 0 & \text{si} & \pi_0\alpha > 1\ ; \\ Im\ \ \xi^1_\alpha < 0 & \text{si} & \pi_1\alpha > 1\ . \end{array}$$

On posera $\theta = \xi^1 - \xi^0 \in \mathbf{C}^{\mathcal{A}}$, et on a donc

$$\theta = \Omega\zeta \ .$$

On écrira

$$\theta = \delta - ih \ ,$$

avec donc $h = -\Omega\tau$.

Observons que, si $(\mathcal{A}, \pi_0, \pi_1)$ n'est pas irréductible, aucune donnée de suspension n'existe : si $\pi_0^{-1}(\{1, \dots k\}) = \pi_1^{-1}(\{1, \dots k\})$, avec $\pi_0(\beta_0) = \pi_1(\beta_1) = k+1$, on aura $\xi^0_{\beta_0} = \xi^1_{\beta_1}$.

Observons aussi que les h_α sont toujours strictement positifs, même quand $\pi_\varepsilon(\alpha) = 1$ puisqu'alors $\xi^\varepsilon_\alpha = 0$.

6 Construction d'une surface de translation

Soient $(A, \pi_0, \pi_1), \lambda, \tau$ comme précédemment. Considérons les rectangles dans $\mathbf{C} = \mathbf{R}^2$:

$$R^0_\alpha = (Re\ \xi^0_\alpha, Re\ \xi^0_\alpha + \lambda_\alpha) \times [0, h_\alpha]\ ,$$

$$R^1_\alpha = (Re\ \xi^1_\alpha, Re\ \xi^1_\alpha + \lambda_\alpha) \times [-h_\alpha, 0]\ ,$$

ainsi que les segments semi-ouverts

$$S^0_\alpha = Re\ \xi^0_\alpha + i\ [0, Im\ \xi^0_\alpha),\ \text{pour}\ \pi_0(\alpha) > 1$$

$$S^1_\alpha = Re\ \xi^1_\alpha + i\ (Im\ \xi^1_\alpha, 0],\ \text{pour}\ \pi_1(\alpha) > 1\ .$$

Notons S^* le segment semi-ouvert vertical $[\lambda^*, \lambda^* + i\tau^*)$ (vide si $\tau^* = 0$).

Notons $Z = Z(\zeta)$ la région du plan union des R^ε_α et $S^\varepsilon_\alpha, \varepsilon \in \{0, 1\}, \alpha \in A$, et de S^*.

La translation par θ_α envoie R^0_α sur R^1_α. Si $\tau^* > 0$ (resp. $\tau^* < 0$), soient α_1, β_1 (resp. α_0, β_0) tels que $\pi_1(\alpha_1) = d, \pi_0(\beta_1) = \pi_0(\alpha_1) + 1$ (resp. $\pi_0(\alpha_0) = d, \pi_1(\beta_0) = \pi_1(\alpha_0) + 1$) ; la translation par θ_{α_1} (resp. θ_{α_0}) envoie la partie supérieure $\tilde{S}^0_{\beta_1}$ de $S^0_{\beta_1}$ sur S^* (resp. envoie S^* sur la partie inférieure $\tilde{S}^1_{\beta_0}$ de $S^1_{\beta_0}$).

Notons M^* l'espace obtenu à partir de Z en identifiant au moyen de ces translations R^0_α et R^1_α, et aussi, le cas échéant, $\tilde{S}^0_{\beta_1}$ et S^* ou $\tilde{S}^1_{\beta_0}$ et S^*.

Il est clair que M^* est une surface topologique munie d'un atlas (via Z) dont les changements de cartes sont des translations.

Considérons la compactification M de M^* par les bouts de M^*. Pour garantir que M est une surface de translation, il suffit d'examiner la géométrie de chaque bout de M^*, c'est-à-dire l'effet des identifications sur un voisinage des $2d$ points $\xi^*, \xi^\varepsilon_\alpha(\varepsilon \in \{0, 1\}, \alpha \in A$; on a

$\xi^0_{\alpha'_0} = \xi^1_{\alpha'_1} = 0$ si $\pi_0(\alpha'_0) = \pi_1(\alpha'_1) = 1$).

Notons $\tilde{\mathcal{A}}$ l'ensemble formé des paires $(\alpha, L), (\alpha, R), (\alpha \in \mathcal{A})$, où nous identifions $(\alpha_0, R) = (\alpha_1, R), (\alpha'_0, L) = (\alpha'_1, L)$ pour $\pi_0(\alpha_0) = \pi_1(\alpha_1) = d, \pi_0(\alpha'_0) = \pi_1(\alpha'_1) = 1$. L'ensemble $\tilde{\mathcal{A}}$ a donc $2d-2$ éléments. Nous associons à (α, L) (resp. (α, R)) la partie droite d'un voisinage de ξ^ε_α (resp. la partie gauche d'un voisinage de $\xi^\varepsilon_\alpha + \zeta_\alpha$).

Quand on tourne dans le sens positif autour des bouts de M^*, la permutation suivante de $\tilde{\mathcal{A}}$ indique dans quel ordre on rencontre ces différentes parties. Posons

$$\sigma(\alpha, R) = (\beta_0, L) \quad \text{avec} \quad \pi_0(\beta_0) = \pi_0(\alpha) + 1 \ ,$$

$$\sigma(\alpha, L) = (\beta_1, R) \quad \text{avec} \quad \pi_1(\beta_1) = \pi_1(\alpha) - 1 \ .$$

(Pour $\pi_0(\alpha_0) = d$, on a donc $\sigma(\alpha_0, R) = (\beta_0, L)$ avec $\pi_0(\beta_0) = \pi_0(\alpha_1) + 1$; de même pour $\sigma(\alpha'_1, L)$, avec $\pi_1(\alpha'_1) = 1$.)

Les bouts de M^* sont en correspondance biunivoque avec l'ensemble Σ des cycles de σ. Chaque cycle q de Σ est de longueur paire $2m_q$; la propriété requise par la définition des surfaces de translations est vérifiée au voisinage de q, avec un indice de ramification égal à m_q.

En conclusion, M est une surface de translation, dont les indices de ramification aux points marqués sont déterminés par σ.

On a

$$d - 1 = \frac{1}{2} \# \tilde{\mathcal{A}} = \sum_{q \in \Sigma} m_q \ ,$$

donc, si g désigne le genre de M, on a

$$2g - 2 = \sum_{q \in \Sigma} (m_q - 1)$$

d'où

$$d = 2g - 1 + \# \Sigma \ .$$

Par construction, l'échange d'intervalles T est l'application de retour du champ vertical $\frac{\partial}{\partial y}$ de M^* sur le segment horizontal ouvert joignant 0 à λ^* dans Z.

Exemple : Supposons que les données combinatoires vérifient $\pi_0(\alpha) + \pi_1(\alpha) = d + 1$ pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$ (renversement complet de l'ordre des intervalles). On vérifie immédiatement que :

- si d est pair, il y a un seul cycle ; on a $d = 2g$ et la forme holomorphe a au seul point marqué un zéro d'ordre $2g - 2$;
- si d est impair, il y a deux cycles de même longueur ; on a $d = 2g+1$, la forme holomorphe a en chaque point marqué un zéro d'ordre $g - 1$.

7 Homologie et cohomologie de M

Considérons les groupes d'homologie absolue $H_1(M^*, \mathbf{Z}), H_1(M, \mathbf{Z})$ et le groupe d'homologie relative $H_1(M, \Sigma, \mathbf{Z})$.

Le groupe $H_1(M, \mathbf{Z})$ est un $\mathbf{Z}$-module libre de rang $2g$.

Les groupes $H_1(M^*, \mathbf{Z}), H_1(M, , \Sigma, \mathbf{Z})$ sont des $\mathbf{Z}$-modules libres de rang $2g + \#\Sigma - 1 = d$.

On a des applications

$$H_1(M^*, \mathbf{Z}) \to H_1(M, \mathbf{Z}) \to H_1(M, \Sigma, \mathbf{Z})$$

où la première est surjective et la seconde injective.

Pour $\alpha \in A$, notons $[\zeta_\alpha]$ la classe de $H_1(M, \Sigma, \mathbf{Z})$ associée à un chemin joignant dans Z ξ^0_α à $\xi^0_\alpha + \zeta_\alpha$ (ou ξ^1_α à $\xi^1_\alpha + \zeta_\alpha$). Notons $[\theta_\alpha]$ la classe de $H_1(M^*, \mathbf{Z})$ associée à un chemin joignant dans Z le centre de R^0_α à celui de R^1_α.

La théorie de l'intersection fournit une application bilinéaire

$$H_1(M^*, \mathbf{Z}) \times H_1(M, \Sigma, \mathbf{Z}) \to \mathbf{Z}$$

qui met ces espaces en dualité. Les $[\zeta_\alpha], \alpha \in \mathcal{A}$ forment une base de $H_1(M, \Sigma, \mathbf{Z})$; les $[\theta_\alpha], \alpha \in \mathcal{A}$, forment une base de $H_1(M^*, \mathbf{Z})$. On a clairement

$$< [\theta_\alpha], [\zeta_\beta] >= \delta_{\alpha\beta}$$

donc on dispose de bases duales des espaces d'homologie considérés.

Quand on considère les $[\theta_\alpha]$ comme des classes dans $H_1(M, \mathbf{Z})$, on a

$$< [\theta_\alpha], [\theta_\beta] >= -\Omega_{\alpha\beta} \ .$$

L'image de $[\theta_\alpha]$ dans $H_1(M, \Sigma, \mathbf{Z})$, encore notée $[\theta_\alpha]$, vérifie

$$[\theta_\alpha] = \sum_\beta \Omega_{\alpha\beta}[\zeta_\beta] \ .$$

Quant aux groupes de cohomologie, on dispose d'applications

$$H^1(M, \Sigma, \mathbf{Z}) \to H^1(M, \mathbf{Z}) \to H^1(M^*, \mathbf{Z})$$

où la première est surjective et la seconde injective. La 1-forme holomorphe $\omega = dz$ détermine une classe $[\omega] \in H^1(M, \Sigma, \mathbf{C})$ vérifiant

$$< [\omega], [\zeta_\alpha] >= \zeta_\alpha$$

et dont l'image (encore notée $[\omega]$) dans $H^1(M^*, \mathbf{C})$ vérifie

$$< [\omega], [\theta_\alpha] >= \theta_\alpha \ .$$

La matrice Ω est la matrice de l'application linéaire

$$H^1(M, \Sigma, \mathbf{Z}) \to H^1(M^*, \mathbf{Z})$$

dans les bases duales de $([\xi_\alpha]), ([\theta_\alpha])$. L'image de Ω s'identifie donc avec l'image de $H^1(M, \mathbf{Z})$ dans $H^1(M^*, \mathbf{Z})$.

8 Action du flot de Teichmuller

L'action d'un élément g de $GL(2, \mathbf{R})$ transforme la surface de translation M construite à partir du vecteur $\zeta_\alpha \in \mathbf{C}^{\mathcal{A}}$ en une nouvelle surface construite à partir du vecteur $(g(\zeta_\alpha))_{\alpha \in \mathcal{A}}$, en identifiant $\mathbf{C}$ à $\mathbf{R}^2$.

Cependant, pour un élément général de $GL(2, \mathbf{R})$, les restrictions sur $(\xi_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$, à savoir $\lambda_\alpha = Re\zeta_\alpha > 0$ et les conditions (*) de données de suspension sur les $\tau_\alpha = Im\xi_\alpha$, ne sont pas préservées quand on passe de (ζ_α) à $(g(\zeta_\alpha))$.

Par contre le flot de Teichmuller, agissant par les matrices $g_t = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$, préserve ces restrictions (qui sont linéaires et ne mélangent pas λ et τ).

On notera que l'aire de la surface de translation M est donnée par

$$\mathcal{A} = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \lambda_\alpha h_\alpha = \sum_{\alpha,\beta \in \mathcal{A}} \tau_\beta \, \Omega_{\beta\alpha} \, \lambda_\alpha \; .$$

Elle est préservée par le flot de Teichmuller (et plus généralement par l'action de $SL(2, \mathbf{R})$).

9 Liaisons

Lorsque $d = 2$, la dynamique sur le cercle d'un échange d'intervalles, linéaire ou généralisé, est très différente suivant que le nombre de rotation est rationnel (dynamique d'ordre fini sur l'ensemble non errant) ou irrationnel (dynamique minimale quasipériodique sur l'ensemble non errant).

Pour $d > 2$, la séparation n'est pas aussi tranchée, puisque peuvent coexister des zones périodiques et des zones minimales. Nous nous intéressons à la notion la plus forte d'irrationalité, qui a été dégagée par Keane. Elle garantit, pour un échange d'intervalles linéaire, la minimalité.

Soient $(\mathcal{A},\pi_0,\pi_1)$ des données combinatoires irréductibles pour un échange d'intervalles généralisé T sur un intervalle I.

On appellera singularités de T (resp. de T^{-1}) les $d-1$ points de $I - D_T$ (resp. de $I - I_T$), ceci même si ces points ne sont pas forcément des discontinuités (de même qu'on peut avoir $m_q = 1$ en un point marqué d'une surface de translation). On notera u_α^0 (resp. u_α^1) la singularité de T (resp. de T^{-1}) qui est l'extrémité gauche de l'intervalle de nom α dans $I - D_T$ (resp. dans $I - I_T$), à condition que $\pi_0(\alpha) > 1$ (resp. $\pi_1(\alpha) > 1$).

Dans le cadre de II.5, pour un échange d'intervalles linéaire, on a donc

$$u_\alpha^\varepsilon = Re \xi_\alpha^\varepsilon \; ;$$

les u_α^0 (resp. u_α^1) sont en correspondance biunivoque avec les séparatrices entrantes (resp. sortantes) du champ de vecteurs vertical de la surface de translation M.

Associons à u_α^0 (resp. u_α^1) l'élément (α, L) (resp. (β, R), avec $\pi_1(\beta) = \pi_1(\alpha) - 1)$: on obtient ainsi une bijection (presque) canonique de l'union disjointe des singularités de T et T^{-1} sur l'ensemble $\tilde{\mathcal{A}}$ défini en II.6. Cette correspondance est compatible avec la géométrie de M au voisinage de ses points marqués, et permet de définir σ sur $\{u_\alpha^0, \pi_0(\alpha) > 1\} \sqcup \{u_\alpha^1, \pi_1(\alpha) > 1\}$. Tout ceci ne dépend que des données combinatoires, et a donc un sens pour un échange d'intervalles généralisé.

Définition : Une **liaison** pour l'échange d'intervalles généralisé T est un triplet (m, α, β) tel que m est un entier $\geq 0, u_\alpha^1, u_\beta^0$ sont des singularités de T^{-1}, T respectivement (i.e $\pi_1(\alpha) > 1, \pi_0(\beta) > 1$) et on a

$$T^m(u_\alpha^1) = u_\beta^0$$

En d'autres termes, une liaison est une orbite de T qui ne peut être prolongée indéfiniment ni pour les temps positifs ni pour les temps négatifs.

Nous nous intéresserons dans la suite uniquement à des échanges d'intervalles sans liaison. Auparavant, évoquons les divers phénomènes dynamiques associés à une liaison (m, α, β). Il y a plusieurs cas.

a) Les singularités u_α^1, u_β^0 n'appartiennent pas au même cycle de σ ; au niveau de la surface de translation, cela veut dire que les points marqués aux extrémités de l'orbite du champ vertical qui réalise la liaison sont distincts. On peut alors contracter en un point ce segment vertical, ce qui a pour effet, sans changer le genre de la surface, de diminuer d'une unité le nombre de points marqués.

b) Les singularités u_α^1, u_β^0 appartiennent au même cycle de σ, mais ne sont pas des éléments consécutifs de ce cycle.

Dans la surface de translation, on a un lacet vertical basé en un point marqué. Ce lacet n'est pas homologue à zéro, puisque la 1-forme holomorphe y a une intégrale (imaginaire pure) non nulle. Quand on coupe la surface le long de ce lacet, on obtient une surface dont le genre a diminué d'une unité, dont chacune des deux composantes du bord contient un point marqué hérité du précédent. On écrase chaque composante du bord. La surface qui en résulte a un point marqué de plus, mais une anse de moins, que la surface initiale.

c) Les singularités u_α^1, u_β^0 sont des éléments consécutifs d'un cycle de σ.

Si on effectuait les mêmes opérations qu'en b), on aboutirait à une singularité de type centre. En effet, le lacet basé au point marqué représentant la liaison borde dans ce cas un cylindre ouvert formé d'orbites périodiques du champ de vecteur vertical (si le cycle est de longueur 2, le même phénomène se produit des deux côtés du lacet : le point marqué est une “fausse” singularité situé sur un cylindre d'orbites périodiques). On peut ensuite, si la surface n'est pas déjà un tore, simplifier la combinatoire en écrasant en un cercle l'adhérence d'un tel cylindre ouvert maximal.

10 Les théorèmes de Keane

THÉORÈME 1 – *Soit T un échange d'intervalles linéaire sans liaison. Alors T est minimal : toute demi-orbite (positive ou négative) infinie de T est dense dans $I = \bar{D}_T = \bar{I}_T$.*

Remarque : Comme T est sans liaison, les données combinatoires sont forcément irréductibles.

LEMME 1 – *Un échange d'intervalles linéaire sans liaison n'a pas d'orbite périodique.*

Preuve : Sinon, il existerait un entier $m > 0$ tel que l'ensemble P_m des points fixes de T^m n'est pas vide. Poson $y^* = \inf P_m$. Etendons (provisoirement) T à l'union de I et de son extrémité gauche en imposant la continuité à droite. Le point y^* devient périodique de période m et son orbite contient une ou plusieurs singularités de T et T^{-1} (sinon, on n'aurait pas $y^* = \inf P_m$), ce qui donne lieu à une liaison.

□

Preuve du théorème : Etendons comme précédemment T par continuité à droite à l'union de I et de son extrémité gauche, notée $\hat{I}$.

Soit J un sous-intervalle non vide de $\hat{I}$, fermé à gauche, ouvert à droite, dont nous notons a l'extrémité gauche. Il suffit de montrer qu'on a

$$\bigcup_{n \geq 0} T^n(J) = \hat{I} \ .$$

Considérons l'application de premier retour T_J de T dans J. Par le théorème de récurrence de Poincaré , elle est définie sur un ensemble de mesure pleine dans J ; de plus, si elle est définie en x, l'une au moins des possibilités suivantes se produit :

- $x = a$;
- $T_J(x) = a$;
- l'orbite positive de x rencontre une singularité de T avant de retourner dans J ;
- l'application de retour est définie et est une translation au voisinage de x.

Or les trois premiers cas ne peuvent se produire que pour un nombre fini de points de J. On conclut que T_J est défini sur J tout entier, et qu'on a une partition de J en intervalles semi-ouverts $J_1, \dots, J_r$ et des entiers $n_1, \dots, n_r$ strictement positifs tels que la restriction de T_J à J_l est une translation coïncidant avec T^{n_l}.

Observons qu'on a alors

$$\begin{aligned} \hat{J} : &= \bigcup_{n \geq 0} \; T^n(J) \\ &= \bigcup_l \; \bigcup_{0 \leq n < n_l} \; T^n(J_l) \; . \end{aligned}$$

L'ensemble $\hat{J}$ est donc une union finie d'intervalles semi-ouverts. Il vérifie $T(\hat{J}) \subset \hat{J}$, donc $T(\hat{J}) = \hat{J}$. Supposons $\hat{J} \neq \hat{I}$.

Si $\hat{J}$ et $\hat{I} - \hat{J}$ étaient connexes, les données combinatoires ne seraient pas admissibles, d'où une liaison. Il existe donc un point $\hat{y}$ de I (distinct de l'extrémité gauche de $\hat{I}$!) qui est extrémité gauche d'une composante de $\hat{J}$. Si aucun point de l'orbite positive de $\hat{y}$ n'était une singularité de T, tous ces points appartiendraient à I et seraient extrémités gauches de composantes de $\hat{J}$; donc $\hat{y}$ serait périodique, contrairement au lemme 1. De même, l'orbite négative de $\hat{y}$ doit rencontrer une singularité de T^{-1}. L'orbite de $\hat{y}$ réalise donc une liaison. Cette contradiction garantit que $\hat{J} = \hat{I}$, ce qu'on voulait démontrer.

$\square$

THÉORÈME 2 – *Soit T un échange d'intervalles linéaire dont les données combinatoires sont irréductibles. Supposons que les longueurs λ_α des intervalles échangés sont rationnellement indépendantes. Alors T est sans liaison.*

Commençons par un lemme qui aurait été plus à sa place en II.5.

LEMME 2 – *Pour toute donnée combinatoire irréductible, il existe des données de suspension.*

Preuve : Posons $\tau_\alpha = \pi_1(\alpha) - \pi_0(\alpha)$. On a, si $\pi_0(\alpha) > 1$

$$\sum_{\pi_0(\beta) < \pi_0(\alpha)} \tau_\beta = \sum_{\pi_l < \pi_0(\alpha)} (\pi_1 \pi_0^{-1}(l) - l) > 0$$

si $(\mathcal{A}, \pi_0, \pi_1)$ est irréductible. De même, si $\pi_1(\alpha) > 1$, on a

$$\sum_{\pi_1(\beta)<\pi_1(\alpha)} \tau_\beta < 0 \ .$$

□

Preuve du théorème : Choisissons des données de suspension et construisons la surface de translation M. Supposons qu'il y ait une liaison. Elle est représentée dans M par un segment vertical dont les extrémités appartiennent à Σ. La classe de ce segment dans $H_1(M, \Sigma, \mathbf{Z})$ s'écrit $\sum_\alpha n_\alpha \zeta_\alpha$, pour certains entiers n_α. L'intégrale de la forme ω contre ce segment étant non nulle, et imaginaire pure, on obtient la relation non triviale $\sum_\alpha n_\alpha \lambda_\alpha = 0$ qui contredit l'hypothèse sur les λ_α.

□

Remarques : 1. Il devrait être clair au vu de la discussion de II.9 que seul un certain type de liaison est un obstacle à la minimalité. La réciproque du théorème 1 n'est donc pas valable. Par exemple, pour $\alpha \in (0, 1/2)$ irrationnel, $A = (0, \alpha), B = (\alpha, 2\alpha), C = (2\alpha, 1)$, la donnée combinatoire $\begin{matrix} ABC \\ BCA \end{matrix}$ produit la liaison $u_B^0 = u_C^1$.

2. De même, sauf si $d = 2$, il existe des exemples sans liaison mais dont les λ_α sont rationnellement dépendants. Prenons encore $\alpha \in (0, 1/2)$ irrationnel et la même donnée combinatoire $\begin{matrix} ABC \\ BCA \end{matrix}$, mais avec maintenant $A = (0, \alpha), B = (\alpha, \alpha + \frac{1}{2}), C = (\alpha + \frac{1}{2}, 1)$.

III L'algorithme de Rauzy-Veech

1 Le cas $d = 2$

Soit f un homéomorphisme du cercle préservant l'orientation et ne fixant pas 0. On lui associe l'échange d'intervalles généralisé défini par

$$T_f(x) = \begin{cases} \tilde{f}(x) & \text{pour} \quad x \in D_A = (0, \tilde{f}^{-1}(1)) \\ \tilde{f}(x) - 1 & \text{pour} \quad x \in D_B = (\tilde{f}^{-1}(1), 1) \end{cases}$$

où $\tilde{f}$ est le relèvement de f vérifiant $0 < \tilde{f}(0) < 1$. Les images de D_A, D_B sont données par $I_A = (\tilde{f}(0), 1), I_B = (0, \tilde{f}(0))$.

Lorsque $\tilde{f}$ est la translation par $\alpha \in (0, 1)$, on a $D_A = (0, 1 - \alpha), D_B = (1 - \alpha, 1), I_A = (\alpha, 1), I_B = (0, \alpha)$.

L'échange d'intervalles T_f est sans liaison si et seulement si 0 n'est pas un point périodique de f ; lorsque $\tilde{f}$ est la translation par α, cela veut dire que α est irrationnel.

L'analyse de la récurrence de f, lorsque son nombre de rotation α est irrationnel, passe par l'algorithme de fraction continue qui fournit les meilleures approximations rationnelles ; dynamiquement, cela correspond à considérer les applications de premier retour sur des intervalles de plus en plus petits.

Dynamiquement parlant, l'étape la plus basique de l'algorithme de fraction continue est la suivante.

Soient $f, \tilde{f}, \tau_f$ comme ci-dessus.

– si $\tilde{f}(0) = \tilde{f}^{-1}(1)$, 0 est de période 2 pour f et le nombre de rotation de $\tilde{f}$ est $1/2$;

– si $\tilde{f}(0) > \tilde{f}^{-1}(1)$, on appelle $\hat{T}_f$ l'application de retour de T_f sur I_B : on pose $\hat{D}_A = D_A, \hat{I}_A = T_f(I_A), \hat{D}_B = D_B \cap I_B, \hat{I}_B = T_f(\hat{D}_B)$ et on a

$$\hat{T}_f = \begin{cases} T_{f/D_B} \circ T_{f/D_A} & \text{sur} \quad \hat{D}_A \\ T_{f/D_B} & \text{sur} \quad \hat{D}_B \ . \end{cases}$$

– si $\tilde{f}(0) < \tilde{f}^{-1}(1)$, on appelle $\hat{T}_f$ l'application de retour de T_f sur D_A : on pose $\hat{I}_B = I_B, \hat{D}_B = T_f^{-1}(D_B), \hat{I}_A = D_A \cap I_A, \hat{D}_A = T_f^{-1}(\hat{I}_A)$ et on a

$$\hat{T}_f = \begin{cases} T_{f/D_A} & \text{sur} \quad \hat{D}_A \\ T_{f/D_B} \circ T_{f/D_A} & \text{sur} \quad \hat{D}_B \ . \end{cases}$$

On notera la symétrie entre les deux cas $\tilde{f}(0) > \tilde{f}^{-1}(1)$ et $\tilde{f}(0) < \tilde{f}^{-1}(1)$.

Lorsque $\tilde{f}$ est la translation par $\alpha \in (0,1)$, le cas $\tilde{f}(0) = \tilde{f}^{-1}(1)$ (resp. $> \tilde{f}^{-1}(1)$, resp. $< \tilde{f}^{-1}(1)$) correspond à $\alpha = 1/2$ (resp. $> 1/2$, resp. $< 1/2$). Lorsque $\alpha > 1/2$ (resp. $\alpha < 1/2$), les longueurs des intervalles pour $\hat{T}_f$ sont $\hat{\lambda}_A = 1-\alpha, \hat{\lambda}_B = 2\alpha-1$ (resp. $\hat{\lambda}_A = 1-2\alpha, \hat{\lambda}_B = \alpha$).

On examinera un peu plus loin comment se comporte l'itération de cette procédure. Auparavant, nous la définissons dans le cadre de données combinatoires irréductibles arbitraires.

2 Le pas élémentaire de l'algorithme de Rauzy-Veech

Soient $(\mathcal{A}, \pi_0, \pi_1)$ des données combinatoires irréductibles pour un échange d'intervalles généralisé sur un intervalle $I = (0, \lambda^*)$. Notons $u^0_{\max}$ (resp. $u^1_{\max}$) la plus grande singularité de T (resp.

de T^{-1}). Notons α_0 (resp. α_1) l'élément de $\mathcal{A}$ tel que $\pi_0(\alpha_0) = d$ (resp. $\pi_1(\alpha_1) = d$).

Si on a $u^0_{\max} = u^1_{\max}$, ceci constitue une liaison pour T. On arrête le processus. Sinon, on pose $\hat{\lambda}^* = \max(u^0_{\max}, u^1_{\max})$ et on considère l'application de retour $\hat{T}$ de T dans $(0, \hat{\lambda}^*) =: \hat{I}$.

Supposons d'abord que $u^0_{\max} < u^1_{\max}$. On pose alors

$$\begin{aligned}
\hat{D}_\alpha &= D_\alpha \quad \text{si} \ \alpha \neq \alpha_0 \ , \\
\hat{D}_{\alpha_0} &= D_{\alpha_0} \cap \hat{I} \ , \\
\hat{I}_\alpha &= I_\alpha \quad \text{si} \ \alpha \neq \alpha_0, \alpha_1 \ , \\
\hat{I}_{\alpha_0} &= T(\hat{D}_{\alpha_0}) = I_{\alpha_0} \cap T(\hat{I}) \ , \\
\hat{I}_{\alpha_1} &= T(I_{\alpha_1}) \ ,
\end{aligned}$$

et on a

$$\hat{T}_{/\hat{D}_\alpha} = \begin{cases} T_{/D_\alpha} & \text{si} \ \alpha \neq \alpha_1 \ , \\ T_{/D_{\alpha_0}} \circ T_{/D_{\alpha_1}} & \text{si} \ \alpha = \alpha_1 \ ; \end{cases}$$

(on observera qu'on a $\alpha_0 \neq \alpha_1$ puisque les données combinatoires sont irréductibles).

On voit ainsi que $\hat{T}$ est à nouveau un échange d'intervalles généralisé qui peut être étiqueté par le même alphabet $\mathcal{A}$ que T. Les données combinatoires de $\hat{T}$ vérifient :

$$\hat{\pi}_0(\alpha) = \pi_0(\alpha) \ \text{ pour tout } \ \alpha \in \mathcal{A} \ ,$$

$$\hat{\pi}_1(\alpha) = \begin{cases} \pi_1(\alpha) & \text{si} \ \pi_1(\alpha) \leq \pi_1(\alpha_0) \ , \\ \pi_1(\alpha_0) + 1 & \text{si} \ \alpha = \alpha_1 \ , \\ \pi_1(\alpha) + 1 & \text{si} \ \pi_1(\alpha_0) < \pi_1(\alpha) < d \ . \end{cases}$$

Elles sont à nouveau irréductibles.

Le cas $u^0_{\max} > u^1_{\max}$ est symétrique. On pose dans ce cas

$$
\begin{aligned}
\hat{I}_\alpha &= I_\alpha \quad \text{si} \ \ \alpha \neq \alpha_1 \ , \\
\hat{I}_{\alpha_1} &= I_{\alpha_1} \cap \hat{I} \ , \\
\hat{D}_\alpha &= D_\alpha \quad \text{si} \ \ \alpha \neq \alpha_0, \alpha_1 \ , \\
\hat{D}_{\alpha_0} &= T^{-1}(D_{\alpha_0)} \ , \\
\hat{D}_{\alpha_1} &= T^{-1}(\hat{I}_{\alpha_1}) = D_{\alpha_1} \cap T^{-1}(\hat{I}) \ \ ,
\end{aligned}
$$

et on a

$$
\hat{T}_{/\hat{D}_\alpha} = \begin{cases} T_{/D_\alpha} & \text{si} \ \ \alpha \neq \alpha_0 \ , \\ T_{/D_{\alpha_0}} \circ T_{/D_{\alpha_1}} & \text{si} \ \ \alpha = \alpha_0 \ . \end{cases}
$$

Les données combinatoires vérifient maintenant

$$
\hat{\pi}_1(\alpha) = \pi_1(\alpha) \ \text{ pour tout } \ \alpha \in \mathcal{A} \ ,
$$

$$
\hat{\pi}_0(\alpha) = \begin{cases} \pi_0(\alpha) & \text{si} \ \ \pi_0(\alpha) \leq \pi_0(\alpha_1) \ , \\ \pi_0(\alpha_1) + 1 & \text{si} \ \ \alpha = \alpha_0 \ , \\ \pi_0(\alpha) + 1 & \text{si} \ \ \pi_0(\alpha_1) < \pi_0(\alpha) < d \ . \end{cases}
$$

Considérons en particulier le cas d'un échange d'intervalles linéaire.

Les cas $u^0_{\max} = u^1_{\max}, u^0_{\max} < u^1_{\max}, u^0_{\max} > u^1_{\max}$ correspondent respectivement à $\lambda_{\alpha_0} = \lambda_{\alpha_1}, \lambda_{\alpha_0} > \lambda_{\alpha_1}, \lambda_{\alpha_0} < \lambda_{\alpha_1}$. La relation entre les nouvelles longueurs et les anciennes est donnée par

$$
\hat{\lambda}_\alpha = \lambda_\alpha \quad \text{si} \ \ \alpha \neq \alpha_0, \alpha_1 \ ,
$$

$$
\hat{\lambda}_{\alpha_0} = \begin{cases} \lambda_{\alpha_0} & \text{si} \ \ \lambda_{\alpha_0} < \lambda_{\alpha_1} \ , \\ \lambda_{\alpha_0} - \lambda_{\alpha_1} & \text{si} \ \ \lambda_{\alpha_0} > \lambda_{\alpha_1} \ , \end{cases}
$$

$$
\hat{\lambda}_{\alpha_1} = \begin{cases} \lambda_{\alpha_1} & \text{si} \ \ \lambda_{\alpha_0} > \lambda_{\alpha_1} \ , \\ \lambda_{\alpha_1} - \lambda_{\alpha_0} & \text{si} \ \ \lambda_{\alpha_0} < \lambda_{\alpha_1} \ , \end{cases}
$$

soit

$$\lambda = V\hat{\lambda}\ ,$$

$$V = \begin{cases} 1 + E_{\alpha_0\alpha_1} & \text{si } \lambda_{\alpha_0} > \lambda_{\alpha_1} \\ 1 + E_{\alpha_1\alpha_0} & \text{si } \lambda_{\alpha_1} > \lambda_{\alpha_0}\ . \end{cases}$$

La matrice V appartient à $SL(\mathbf{Z}^{\mathcal{A}})$ et ses coefficients sont positifs ou nuls.

3 Diagrammes de Rauzy

Notons R_0 (resp. R_1) le changement de données combinatoires associé au cas $u^0_{\max} < u^1_{\max}$ (resp. $u^0_{\max} > u^1_{\max}$) dit de type 0 (resp. de type 1).

On a vu que R_0 (resp. R_1) ne change pas π_0 (resp. π_1) et compose π_1 (resp. π_0) par une permutation circulaire de $\{k+1, \ldots, d\}$, où $k = \pi_1(\alpha_0)$ (resp. $k = \pi_0(\alpha_1)$).

Comme on va être amené à itérer la procédure, on compose R_0, R_1 de toutes les façons possibles, ce qui produit des diagrammes de Rauzy.

Plus précisément, étant donné un alphabet $\mathcal{A}$, on construit le graphe orienté suivant :

- les sommets du graphe sont les paires (π_0, π_1) de données combinatoires irréductibles ;
- chaque sommet (π_0, π_1) est origine d'exactement deux arêtes qui le joignent à $R_0(\pi_0, \pi_1)$, $R_1(\pi_0, \pi_1)$; ces arêtes sont dites de type 0 et 1.

On vérifie immédiatement que R_0, R_1 sont inversibles et que chaque sommet est donc également extrémité d'exactement deux arêtes (une de chaque type).

Définition : Un diagramme de Rauzy est une composante connexe de ce graphe.

A changement d'étiquetage près, il y a un seul diagramme de Rauzy pour $d = 2$ et $d = 3$:

$$\begin{tikzcd} \begin{matrix}\mathrm{AB}\\ \mathrm{BA}\end{matrix} \arrow[loop left, "1"] \arrow[loop right, "0"] \end{tikzcd}$$

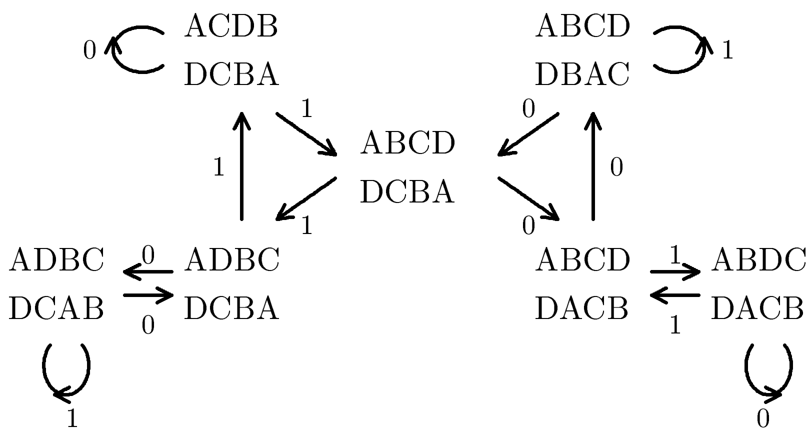
$d = 2$

$$\begin{tikzcd} \begin{matrix}\mathrm{ACB}\\ \mathrm{CBA}\end{matrix} \arrow[loop left, "0"] \arrow[r, shift left, "1"] & \begin{matrix}\mathrm{ABC}\\ \mathrm{CBA}\end{matrix} \arrow[l, shift left, "1"] \arrow[r, shift left, "0"] & \begin{matrix}\mathrm{ABC}\\ \mathrm{CAB}\end{matrix} \arrow[l, shift left, "0"] \arrow[loop right, "1"] \end{tikzcd}$$

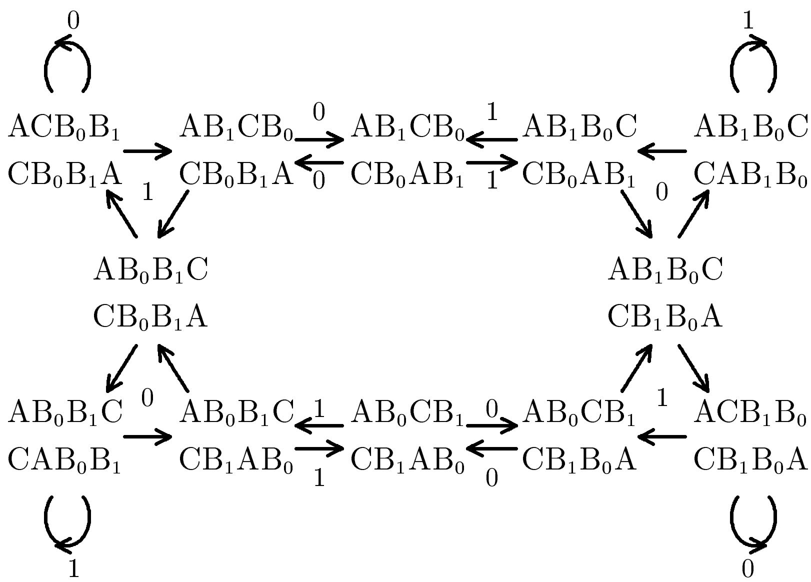
$d = 3$

Les surfaces de translation correspondantes sont des tores avec respectivement 1 (pour $d = 2$) et 2 (pour $d = 3$) points marqués.

Pour $d = 4$, il y a, à changement d'étiquetage près, exactement deux diagrammes de Rauzy.



$d = 4 \quad , \quad g = 2$



$d = 4 \quad , \quad g = 1$

Comme indiqué, les surfaces de translation correspondant au premier diagramme sont de genre 2, avec 1 point marqué. Celles associées au second diagramme sont de genre 1, avec 3 points marqués.

Chaque diagramme de Rauzy possède une symétrie involutive canonique, qui échange le type des flèches et correspond à inverser le sens du temps : tout le formalisme est effectivement symétrique par inversion de la flèche du temps.

Le deuxième diagramme avec $d = 4$ possède une symétrie supplémentaire (qui respecte le type des flèches) associée au changement d'étiquetage permutant B_0 et B_1.

4 Le pas élémentaire pour les suspensions

Soit T un échange d'intervalles **linéaire**, de données combinatoires $(\mathcal{A}, \pi_0, \pi_1)$ irréductibles, et vérifiant $\lambda_{\alpha_0} \neq \lambda_{\alpha_1}$, de sorte que $\hat{T}$ est bien défini.

Soient $\tau = (\tau_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}} \in \mathbf{R}^{\mathcal{A}}$ des données de suspension pour T (cf. II.5) ; cela permet, suivant II.6, de construire une surface de translation M (dépendant des données combinatoires et de $\zeta = \lambda + i\tau$).

Les longueurs des intervalles de T sont reliées à celles de $\hat{T}$ par (cf. III.2)

$$\lambda = V\hat{\lambda} \, .$$

Définissons $\hat{\zeta} = \hat{\lambda} + i\hat{\tau}$ par

$$\zeta = V\hat{\zeta} \, .$$

LEMME 3 – *Le vecteur $\hat{\tau}$ définit des données de suspension pour les données combinatoires $(\mathcal{A}, \hat{\pi}_0, \hat{\pi}_1)$ de $\hat{T}$.*

Preuve : Supposons par exemple que $\lambda_{\alpha_0} > \lambda_{\alpha_1}$, l'autre cas étant symétrique. On a donc $\hat{\zeta}_\alpha = \zeta_\alpha$ pour $\alpha \neq \alpha_0$ et $\hat{\zeta}_{\alpha_0} = \zeta_{\alpha_0} - \zeta_{\alpha_1}$.

On aura donc, dans les notations de II.5 :

$$\hat{\xi}^0_\alpha = \xi^0_\alpha \quad \text{pour tout} \ \ \alpha \in \mathcal{A}$$

Quant aux $\hat{\xi}^1_\alpha$, on a

$$
\begin{aligned}
\hat{\xi}^1_\alpha &= \xi^1_\alpha \quad \text{pour} \quad \alpha \neq \alpha_1 \ , \\
\hat{\xi}^1_{\alpha_1} &= \xi^1_{\alpha_0} + \zeta_{\alpha_0} - \zeta_{\alpha_1} \\
&= \zeta^* + \theta_{\alpha_0} - \zeta_{\alpha_1} \\
&= \xi^1_{\alpha_1} + \theta_{\alpha_0} \ .
\end{aligned}
$$

Comme l'image inverse de 1 est la même par π_0 et $\hat{\pi}_0$ (resp. par π_1 et $\hat{\pi}_1$), la condition (*) est vérifiée par les $\hat{\xi}^\varepsilon_\alpha$.

$\square$

Nous pouvons donc, à partir de $\hat{T}$ et des données de suspension $\hat{\tau}$, construire une surface de translation $\hat{M}$.

Les surfaces de translation M et $\hat{M}$ sont **canoniquement isomorphes**. En effet, la région $\hat{Z}$ qui sert de base à la construction de $\hat{M}$ est obtenue à partir de la région Z qui sert de base à la construction de M par découpage d'une bande verticale de largeur $\min(\lambda_{\alpha_0}, \lambda_{\alpha_1})$ à la droite de Z et recollement des deux morceaux de cette bande (de hauteurs respectives $h_{\alpha_0}, h_{\alpha_1}$) suivant les segments horizontaux appropriés. Voir les figures. Les détails sont laissés au lecteur.

On observera qu'on a

$$
\hat{\zeta}^* = \begin{cases} \xi^1_{\alpha_1} & \text{si} \ \ \lambda_{\alpha_0} > \lambda_{\alpha_1} \\[2ex] \xi^0_{\alpha_0} & \text{si} \ \ \lambda_{\alpha_0} < \lambda_{\alpha_1} \end{cases}
$$

La proposition suivante est maintenant immédiate.

On note $\tilde{\mathcal{C}}(\pi_0, \pi_1)$ le cône des $\zeta \in \mathbf{C}^{\mathcal{A}}$ qui vérifient

$$
\lambda_\alpha > 0 \ \ , \ \ \forall \alpha \in \mathcal{A}
$$

$$
(*) \begin{cases} Im \xi^0_\alpha > 0 & , \ \ \text{si} \ \ \pi_0(\alpha) > 1 \\[2ex] Im \xi^1_\alpha < 0 & , \ \ \text{si} \ \ \pi_1(\alpha) > 1 \ . \end{cases}
$$

On considère aussi les sous-cônes des $\tilde{\mathcal{C}}(\pi_0, \pi_1)$:

$$\tilde{\mathcal{C}}_0(\pi_0,\pi_1) = \{\lambda_{\alpha_0} > \lambda_{\alpha_1}\} \ ,$$

$$\tilde{\mathcal{C}}_1(\pi_0,\pi_1) = \{\lambda_{\alpha_1} > \lambda_{\alpha_0}\} \ ,$$

$$\tilde{\mathcal{C}}^0(\pi_0,\pi_1) = \{\tau^* < 0\} \ ,$$

$$\tilde{\mathcal{C}}^1(\pi_0,\pi_1) = \{\tau^* > 0\} \ .$$

Proposition 2 : *Soit $\gamma : (\pi_0,\pi_1) \to (\hat{\pi}_0,\hat{\pi}_1)$ une arête dans un diagramme de Rauzy de type $\varepsilon \in \{0,1\}$, et soit V la matrice de $SL(\mathbf{Z}^{\mathcal{A}})$ associée à cette arête. La relation*

$$\zeta = V\hat{\zeta}$$

établit un isomorphisme linéaire entre $\tilde{\mathcal{C}}_\varepsilon(\pi_0,\pi_1)$ et $\tilde{\mathcal{C}}^\varepsilon(\hat{\pi}_0,\hat{\pi}_1)$.

□

Au niveau des λ seuls, on note $\mathcal{C}(\pi_0,\pi_1)$ le cône positif de $\mathbf{R}^{\mathcal{A}}$ et on définit les sous-cônes

$$\mathcal{C}_0(\pi_0,\pi_1) = \{\lambda_{\alpha_0} > \lambda_{\alpha_1}\} \ ,$$

$$\mathcal{C}_1(\pi_0,\pi_1) = \{\lambda_{\alpha_1} > \lambda_{\alpha_0}\} \ .$$

On a maintenant, dans le cadre de la proposition, que $\lambda = V\hat{\lambda}$ établit un isomorphisme linéaire entre $\mathcal{C}_\varepsilon(\pi_0,\pi_1)$ et $\mathcal{C}(\hat{\pi}_0,\hat{\pi}_1)$.

5 Formalisme pour l'itération de l'algorithme

Soient $(\mathcal{A},\pi_0,\pi_1)$ des données combinatoires irréductibles pour un échange d'intervalles généralisé T.

Dans le cas d'égalité $u^0_{\max} = u^1_{\max}$, on a une liaison $(0,\alpha_0,\alpha_1)$, avec $\pi_0(\alpha_0) = \pi_1(\alpha_1) = d$.

Quand $u^0_{\max} \neq u^1_{\max}$, on construit l'application de retour $\hat{T}$, qui est un échange d'intervalles généralisé sur $\hat{I}$.

Les liaisons éventuelles de $\hat{T}$ sont bien évidemment reliées à celles de T puisque les orbites de $\hat{T}$ sont les intersections de celle de T avec $\hat{I}$.

Plus précisément, supposons que $u^0_{\max} < u^1_{\max}$ (l'autre cas est symétrique). A une liaison (m, α, β) de T, correspond une liaison $(\hat{m}, \alpha, \beta)$ de $\hat{T}$, avec $\hat{m} \leq m$, et même $\hat{m} < m$ si $\alpha = \alpha_1$; cette correspondance est biunivoque.

En particulier, $\hat{T}$ est sans liaison lorsque T est sans liaison. Dans ce cas, on peut itérer le pas élémentaire de l'algorithme de Rauzy-Veech sans jamais tomber dans le cas d'égalité $u^0_{\max} = u^1_{\max}$.

Introduisons quelques notations relatives à l'itération de l'algorithme.

Soit $\mathcal{D}$ le diagramme de Rauzy contenant la donnée combinatoire (π_0, π_1) de l'échange d'intervalles généralisé T. On pose $T = T^{(0)}$. L'algorithme produit (si on ne rencontre pas le cas d'égalité) une suite d'échanges d'intervalles généralisés $T^{(n)}$ sur une suite décroissante d'intervalles $I^{(n)}$. On notera $(\pi^{(n)}_0, \pi^{(n)}_1)$ la donnée combinatoire de $T^{(n)}$. Par construction de $\mathcal{D}$, au passage de $T^{(n-1)}$ à $T^{(n)}$ est associé une arête $\gamma^{(n)}$ de $\mathcal{D}$ qui joint $(\pi^{(n-1)}_0, \pi^{(n-1)}_1)$ à $(\pi^{(n)}_0, \pi^{(n)}_1)$. On obtient donc, à partir du sommet initial (π_0, π_1), un chemin infini dans $\mathcal{D}$ formé de la suite d'arêtes composables $(\gamma^{(n)})_{n>0}$.

On a vu que chaque arête $\gamma^{(n)}$ de $\mathcal{D}$ a un **type** $\varepsilon_n \in \{0, 1\}$, égal à 0 (resp. 1) si $u^0_{\max} < u^1_{\max}$ (resp. $u^0_{\max} > u^1_{\max}$) pour $T^{(n-1)}$.

On associera aussi un **nom** $\alpha \in \mathcal{A}$ à chaque arête γ de $\mathcal{D}$: si $(\tilde{\pi}_0, \tilde{\pi}_1)$ est l'origine de γ, et γ est de type ε, alors α est l'élément de $\mathcal{A}$ tel que $\tilde{\pi}_\varepsilon(\alpha) = d$. En d'autres termes, c'est le nom de l'intervalle raccourci par le pas correspondant du processus.

A chaque arête γ de $\mathcal{D}$ est aussi associée une matrice $V = V_\gamma \in SL(\mathbf{Z}^{\mathcal{A}})$:

$$V = \mathbf{1} + E_{\alpha_\varepsilon \alpha_{1-\varepsilon}}$$

où ε est le type de γ et $E_{\alpha\beta}$ est la matrice élémentaire usuelle avec un seul terme non nul égal à 1 en position (α, β).

A la suite $(\gamma^{(n)})_{n>0}$ est donc associée une suite $(V^{(n)})_{n>0}$ dans $SL(\mathbf{Z}^{\mathcal{A}})$. Lorsque T (et donc tous les $T^{(n)}$ aussi) est linéaire, et qu'on note $\lambda^{(n)}$ le vecteur des longueurs de $T^{(n)}$, on a

$$\lambda^{(n-1)} = V^{(n)} \lambda^{(n)} .$$

Pour $m \leq n$, on posera

$$Q^{(m,n)} = V^{(m+1)} \dots V^{(n)} \ ,$$

de sorte que

$$\lambda^{(m)} = Q^{(m,n)} \lambda^{(n)}$$

dans le cas linéaire.

Même pour un échange d'intervalles généralisé, les coefficients $Q^{(m,n)}_{\alpha\beta}$ ont une interprétation naturelle. Notons d'abord que ce sont des entiers positifs ou nuls (avec $Q^{(m,n)} \in SL(\mathbf{Z}^{\mathcal{A}})$).

Par construction, $T^{(n)}$ est l'application de premier retour de $T^{(m)}$ dans l'intervalle $I^{(n)}$. Notons $D^{(n)}_{\beta}, \beta \in \mathcal{A}$, les composantes du domaine de $T^{(n)}$. Alors le temps passé, sous $T^{(m)}$, par $\mathrm{D}^{(n)}_{\beta}$ dans $\mathrm{D}^{(m)}_{\alpha}$ avant retour dans $I^{(n)}$ est égal à $Q^{(m,n)}_{\alpha\beta}$. Le temps de retour dans $I^{(n)}$ est donc

$$Q^{(m,n)}_{\beta} = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} Q^{(m,n)}_{\alpha\beta} \ .$$

On notera simplement $Q^{(n)}$ pour $Q^{(0,n)}$.

Par ailleurs, supposons que T soit linéaire, et qu'on ait choisi des données de suspension τ pour T. L'itération de l'algorithme permet d'obtenir une suite $(\tau^{(n)})_{n\geq 0}$ de données de suspension et on aura bien sûr, en posant $\zeta^{(n)} = \lambda^{(n)} + i\tau^{(n)}$:

$$\zeta^{(m)} = Q^{(m,n)} \zeta^{(n)} \ .$$

Ces données de suspension permettent de construire une suite de surfaces de translation $M^{(n)}$, canoniquement identifiées à la surface de translation initiale M. La construction fournit à chaque étape une base $\hat{\xi}^{(n)}_{\alpha}$ du groupe d'homologie $H_1(M, \sum, \mathbf{Z})$. On a alors

$$[\zeta^{(m)}_{\alpha}] = \sum_{\beta in \mathcal{A}} Q^{(m,n)}_{\alpha\beta} [\zeta^{(n)}_{\beta}] \ .$$

Notons $\Omega^{(n)}$ la matrice associée à la donnée combinatoire $(\pi^{(n)}_0, \pi^{(n)}_1)$.

Les vecteurs de translation $\theta^{(n)}$ vérifient

$$\theta^{(n)}_{\alpha} = \sum_{\beta} \Omega^{(n)}_{\alpha\beta} \zeta^{(n)}_{\beta}$$

et sont reliés entre eux par

$$\theta_\alpha^{(n)} = \sum V_{\beta\alpha}^{(n)} \theta_\beta^{(n-1)}$$

ce qui par itération donne

$$\theta^{(n)} =^t Q^{(m,n)} \theta^{(m)}$$

ou encore, pour les classes d'homologie dans $H_1(M^*, \mathbf{Z})$

$$[\hat{\theta}_\alpha^{(n)}] = \sum_\beta Q_{\beta\alpha}^{(m,n)} [\theta_\beta^{(m)}] \ .$$

On a donc

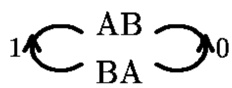
$$\Omega^{(n)} =^t Q^{(m,n)} \Omega^{(m)} Q^{(m,n)} \ .$$

Lorsqu'il y a un seul point marqué, i.e. $d = 2g$, les matrices antisymétriques $\Omega^{(n)}$ sont inversibles et représentent (au signe près) la forme (symplectique) d'intersection de $H_1(M, \mathbf{Z})$ dans les bases $(\theta_\alpha^{(n)})_{\alpha \in \mathcal{A}}$. Les matrices $Q^{(m,n)}$ sont alors **symplectiques** (par rapport aux formes symplectiques $\Omega^{(m)}, \Omega^{(n)}$).

6 Itération de l'algorithme : le cas $d = 2$

On reprend le cadre de III.1 : f est un homéomorphisme du cercle ne fixant pas 0, $\tilde{f}$ est le relèvement de f tel que $\tilde{f}(0) \in (0, 1)$, et T est l'échange d'intervalles associé à f. On suppose que T est sans liaison, c'est à dire que 0 n'est pas périodique pour f.

Le diagramme de Rauzy est simplement



donc un chemin dans le diagramme est complètement spécifié par la suite des types des arêtes empruntées. Notons α le nombre de rotation de $\tilde{f}$. On a $\alpha \in [0, 1]$.

Remarque : Lorsque $d = 2$, l'absence de liaison est une condition non seulement suffisante mais aussi nécessaire pour pouvoir itérer l'algorithme sans jamais tomber dans le cas d'égalité. C'est encore vrai lorsque $d > 2$ pour des échanges linéaires, mais pas des échanges généralisés.

On a vu que le type de la première arête empruntée est 0 (resp. 1) si et seulement si $\tilde{f}^{-1}(1) < \tilde{f}(0)$ (resp. $\tilde{f}^{-1}(1) > \tilde{f}(0)$), soit encore $\tilde{f}^2(0) > 1$ (resp. $\tilde{f}^2(0) < 1$), ce qui implique $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1]$ (resp. $\alpha \in [0, \frac{1}{2}]$).

Prenons $\mathcal{A} = \{A, B\}$. Soit $\underline{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_N)$ une suite finie d'arêtes spécifiées par leurs types $\underline{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N)$. Les matrices V sont ici égales à :

$$V_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad V_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Considérons

$$Q = Q(\underline{\gamma}) = V_{\varepsilon_1} \ldots V_{\varepsilon_N} = \begin{pmatrix} Q_{AA} & Q_{AB} \\ Q_{BA} & Q_{BB} \end{pmatrix} ,$$

et l'intervalle de Farey

$$\begin{aligned} I(\underline{\gamma}) &= \left[\tfrac{Q_{BA}}{Q_{AA}+Q_{BA}} \, , \, \tfrac{Q_{BB}}{Q_{AB}+Q_{BB}} \right] \\ &= \left[\tfrac{P_A}{Q_A} \, , \, \tfrac{P_B}{Q_B} \right] . \end{aligned}$$

Proposition 3 : *Les N premiers pas de l'algorithme appliqué à T sont donnés par $\underline{\gamma}$ si et seulement si on a*

$$\tilde{f}^{Q_B}(0) - P_B < 0 < \tilde{f}^{Q_A}(0) - P_A .$$

Quand c'est le cas, l'échange d'intervalles $T^{(N)}$ produit par l'algorithme est donné par :

$$D_A^{(N)} = (0, \tilde{f}^{-Q_B}(0) + P_B) ,$$

$$D_B^{(N)} = (\tilde{f}^{-Q_B}(0) + P_B, \tilde{f}^{Q_A - Q_B}(0) + P_B - P_A) ,$$

$$I_A^{(N)} = (\tilde{f}^{-Q_A}(0) - P_A, \tilde{f}^{Q_A - Q_B}(0) + P_B - P_A) ,$$

$$I_B^{(N)} = (0, \tilde{f}^{-Q_A}(0) - P_A) ,$$

$$T^{(N)}/D_A^{(N)} = T^{Q_A} = \tilde{f}^{Q_A} - P_A ,$$

$$T^{(N)}/D_B^{(N)} = T^{Q_B} = \tilde{f}^{Q_B} - P_B .$$

Preuve : Par induction sur N. Toutes les vérifications sont immédiates.

$\square$

COROLLAIRE 1 – *Supposons que*

$$\tilde{f}^{Q_B}(0) - P_B < 0 < \tilde{f}^{Q_A}(0) - P_A .$$

On a $\rho(\tilde{f}) = P_B/Q_B$ *(resp.* $\rho(\tilde{f}) = P_A/Q_A$*) si et seulement si le chemin infini associé à* T *est égal à* $\underline{\gamma}$ *suivi d'une infinité d'arêtes de type 0 (resp. de type 1).*

COROLLAIRE 2 – *Supposons que le nombre de rotation* α *de* $\tilde{f}$ *soit irrationnel et écrivons son développement en fraction continue*

$$\alpha = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}}$$

La suite des types des arêtes du chemin associé à T *est alors donnée par*

$$1^{a_1-1}0^{a_2}1^{a_3}\dots$$

$\square$

Nous allons maintenant étendre partiellement ces résultats pour des données combinatoires plus générales.

7 Chemins pleins

Nous allons caractériser les chemins $(\delta^{(n)})_{n>0}$ qui correspondent à des échanges d'intervalles **linéaires** sans liaison. Lorsque $d = 2$, c'est le cas de nombre de rotation irrationnel ; d'après les Corollaires 1 et 2, ceci se produit si et seulement si chaque type (ou encore chaque nom, cela revient au même pour $d = 2$) est pris une infinité de fois.

Définition : Un chemin infini $(\gamma^{(n)})_{n>0}$ dans un diagramme de Rauzy $\mathcal{D}$ est **plein** si chaque nom de $\mathcal{A}$ est pris une infinité de fois par les arêtes du chemin.

Proposition 4 : *Le chemin associé à un échange d'intervalles linéaire sans liaison est plein.*

Remarque : On verra plus loin que la réciproque est vraie : tout chemin plein correspond à au moins un échange d'intervalles linéaire sans liaison.

Preuve : Notons $\mathcal{A}'$ l'ensemble des noms qui ne sont pas pris une infinité de fois. Les noms de $\mathcal{A}'$ ne sont donc pas pris par les $\gamma^{(n)}$ avec $n \geq n_0$.

Les longueurs $\lambda_\alpha^{(n)}, \alpha \in \mathcal{A}'$, ne dépendent donc pas de $n \geq n_0$ (cf. définition du nom). On ne peut donc avoir $\pi_\varepsilon^{(n)}(\alpha) = d \quad (\alpha \in \mathcal{A}', \varepsilon \in \{0,1\}, n \geq n_0)$ qu'un nombre fini de fois, car chaque occurrence conduit à retrancher $\lambda_\alpha^{(n_0)}$ à une autre longueur. On a donc $\pi_\varepsilon^{(n)}(\alpha) < d$ pour $\varepsilon \in \{0,1\}, \alpha \in \mathcal{A}', n \geq n_1 > n_0$. Au vu des opérations de Rauzy R_0, R_1, cela veut dire que les suites $(\pi_\varepsilon^{(n)}(\alpha))_{n \geq n_1}$ (pour $\varepsilon \in \{0,1\}, \alpha \in \mathcal{A}'$) sont croissantes, et qu'elles sont donc constantes pour $n \geq n_2 \geq n_1$.

Supposons qu'on ait $\pi_0^{(n_2)}(\alpha) > \pi_0^{(n_2)}(\beta)$ pour $\alpha \in \mathcal{A}', \beta \notin \mathcal{A}'$. Au vu de R_0, R_1, on aura $\pi_0^{(n)}(\beta) = \pi_0^{(n_2)}(\beta)$ pour $n \geq n_2$. Par définition de $\mathcal{A}'$, il existe $n \geq n_2$ tel que $\pi_1^{(n)}(\beta) = d$. Mais ceci implique que $\pi_0^{(n+1)}(\alpha) \neq \pi_0^{(n)}(\alpha)$, une contradiction.

On a donc $\pi_0^{(n_2)}(\alpha) < \pi_0^{(n_2)}(\beta)$, et de même $\pi_1^{(n_2)}(\alpha) < \pi_1^{(n_2)}(\beta)$, pour tous $\alpha \in \mathcal{A}', \beta \notin \mathcal{A}'$. Comme les données combinatoires sont irréductibles, on doit avoir $\mathcal{A}' = \emptyset$.

□

Remarque : On a seulement utilisé que l'algorithme ne s'arrête pas, i.e le cas d'égalité ne se produit jamais.

COROLLAIRE 3 – *Pour un échange d'intervalles linéaire sans liaison, la longueur des intervalles de retour $I^{(n)}$ tend vers 0 quand n croît.*

Preuve : Les longueurs $\lambda_\alpha^{(n)}$ des composantes du domaine de $T^{(n)}$ forment des suites décroissantes, donc convergentes vers des limites λ_α^∞. Soit $\varepsilon > 0$, et n_0 tel qu'on ait $\lambda_\alpha^{(n)} \leq \lambda_\alpha^\infty + \varepsilon$ pour $n \geq n_0, \alpha \in \mathcal{A}$. Soient $\alpha \in \mathcal{A}$ et $n_1 > n_0$ tel que le nom de $\gamma^{(n_1-1)}$ soit α et celui de $\gamma^{(n_1)}$ soit $\beta \neq \alpha$. On a donc

$$\begin{aligned} \lambda_\beta^\infty \leq \lambda_\beta^{(n_1+1)} &= \lambda_\beta^{(n_1)} - \lambda_\alpha^{(n_1)} \\ &\leq \lambda_\beta^\infty + \varepsilon - \lambda_\alpha^\infty , \end{aligned}$$

donc $\lambda_\alpha^\infty \leq \varepsilon$. Comme α et ε sont arbitraires, cela prouve le corollaire.

□

COROLLAIRE 4 – *Soit T un échange d'intervalles linéaire, avec des données combinatoires irréductibles. Si l'algorithme de Rauzy-Veech ne s'arrête pas, T est sans liaison.*

Preuve : Comme on l'a indiqué après la proposition 4, cette proposition, et le corollaire 3, sont encore valables dès que l'algorithme ne s'arrête pas. Par ailleurs, on a observé, au début de III.5, qu' une liaison $(m^{(n)}, \alpha, \beta)$ pour $T^{(n)}$ correspondait à une liaison $(m^{(n+1)}, \alpha, \beta)$ pour $T^{(n+1)}$, avec $m^{(n+1)} \leq m^{(n)}$ et même $m^{(n+1)} < m^{(n)}$ si $\pi_1^{(n)}(\alpha) = d$ (resp. $\pi_0^{(n)}(\beta) = d$) et $\gamma^{(n)}$ est de type 0 (resp. 1). Cette dernière situation ne pouvant se produire qu'un nombre fini de fois, on aurait que u_α^1 ne dépend pas de n pour n assez grand, contredisant le corollaire 3.

□

Proposition 5 : *Soit* $(\gamma^{(n)})_{n>0}$ *un chemin plein et soit* $(V^{(n)})$ *la suite de matrices de* $SL(\mathbf{Z}^{\mathcal{A}})$ *correspondante. Posons, pour* $n \geq 0$ *:*

$$Q^{(n)} = V^{(1)} \dots V^{(n)} .$$

Il existe $N > 0$ *tel qu'on ait* $Q_{\alpha\beta}^{(n)} > 0$ *pour tous* $\alpha, \beta \in \mathcal{A}, n \geq N$.

Preuve : Compte tenu de la forme des $V^{(n)}$ chaque suite d'entiers positifs ou nuls $(Q_{\alpha\beta}^{(n)})_{n\geq 0}$ est croissante, et il s'agit de voir qu'elle n'est pas identiquement nulle. C'est évidemment le cas si $\alpha = \beta$.

Soient $\alpha = \alpha_1, \beta$ des éléments distincts de $\mathcal{A}$. Soit $n_1 > 0$ le plus petit entier tel que le nom de $\gamma^{(n_1)}$ soit α_1 ; on a donc

$$V^{(n_1)} = \mathbf{1} + E_{\alpha_1\alpha_2} ,$$

pour un certain $\alpha_2 \neq \alpha_1$, et donc $Q_{\alpha_1\alpha_2}^{(n)} > 0$ pour $n \neq n_1$. Si $\alpha_2 = \beta$, on obtient la conclusion désirée.

Si $\alpha_2 \neq \beta$, soit $n_1' > n_1$ le plus petit entier $> n_1$ tel que le nom de $\gamma^{(n_1')}$ ne soit ni α_1, ni α_2, puis soit $n_2 > n_1'$ le plus petit entier $> n_1'$ tel que le nom $\hat{\alpha}$ de $\gamma^{(n_2)}$ soit α_1 ou α_2 ; on a donc

$$V^{(n_2)} = \mathbf{1} + E_{\hat{\alpha}\alpha_3} \ ; ,$$

où α_3 est le nom de $\gamma^{(n_2-1)}$ donc est distinct de α_1 et α_2. Comme on avait $Q_{\alpha_1\alpha_2}^{(n_2-1)} > 0$, on conclut qu'on a

$$Q_{\alpha_1\alpha_3}^{(n_2)} > 0$$

quelle que soit la valeur de $\hat{\alpha}$. Si on a $\alpha_3 = \beta$, on obtient la conclusion désirée. Sinon on poursuit le processus, qui doit s'arrêter par épuisement de l'alphabet.

□

Soit $\underline{\gamma} = (\gamma^{(1)}, \ldots, \gamma^{(n)})$ un chemin fini joignant un sommet (π_0, π_1) à un sommet $(\hat{\pi}_0, \hat{\pi}_1)$. On note $V^{(1)}, \ldots, V^{(n)}$ les matrices associes à $\gamma^{(1)}, \ldots, \gamma^{(n)}$ et on pose

$$Q(\underline{\gamma}) = V^{(1)} \ldots V^{(n)} .$$

On désigne par $\mathcal{C}(\underline{\gamma})$ le cône ouvert image par $Q(\underline{\gamma})$ du cône positif. On considère $\mathcal{C}(\underline{\gamma})$ comme un sous-cône de $\mathcal{C}(\pi_0, \pi_1)$.

Par construction, $\mathcal{C}(\underline{\gamma})$ est exactement formé des vecteurs de longueurs λ vérifiant la propriété suivante : le chemin associé à l'échange d'intervalles linéaire spécifié par la donnée combinatoire (π_0, π_1) et le vecteur λ commence par $\underline{\gamma}$.

COROLLAIRE 5 – *Soit $\underline{\gamma} = (\gamma^{(n)})_{n>0}$ un chemin infini plein. Pour $n \geq 0$, posons*

$$\underline{\gamma}(n) = (\gamma^{(1)}, \ldots, \gamma^{(n)}) .$$

L'intersection $\mathcal{C}(\underline{\gamma})$ de la suite décroissante de cônes ouverts $\mathcal{C}(\underline{\gamma}(n))$ est non vide ; l'union $\mathcal{C}(\underline{\gamma}) \cup \{0\}$ est un cône simplicial fermé de dimension $< d$.

Preuve : D'après la proposition 5, pour tout $m \geq 0$, il existe $n > m$ tel que tous les coefficients du produit $V^{(m+1)} \ldots V^{(n)}$ soient strictement positifs. Cela veut dire que l'adhérence de $\mathcal{C}(\underline{\gamma}(n))$ est contenue dans $\mathcal{C}(\underline{\gamma}(m)) \cup \{0\}$.

Notons $e_\alpha^{(n)}$ l'image par $Q(\underline{\gamma}(n))$ du vecteur de base e_α de $\mathbf{R}^{\mathcal{A}}$. Choisissons une sous-suite n_k et des vecteurs unitaires e_α^∞ tels que pour tout $\alpha \in A$, la sous-suite $e_\alpha^{(n_k)}/\|e_\alpha^{(n_k)}\|$ converge vers e_α^∞ (le choix de normes est sans importance). On vérifie immédiatement qu'on a

$$\mathcal{C}(\underline{\gamma}) \cup \{0\} = \{\sum_\alpha t_\alpha e_\alpha^\infty \ , \ t_\alpha \geq 0\} .$$

Les vecteurs e_α^∞ ne peuvent être linéairement indépendants car les matrices $Q(\underline{\gamma}(n))$ sont unimodulaires et les normes $\|e_\alpha^{(n)}\|$ deviennent arbitrairement grandes d'après la proposition 5.

A ce stade, on sait donc que $\mathcal{C}(\underline{\gamma}) \cup \{0\}$ est un cône polyédral convexe fermé de dimension $< d$. On verra au numéro suivant que $\mathcal{C}(\underline{\gamma})$ s'identifie naturellement au cône des mesures finies invariantes (pour un échange d'intervalles dont le vecteur des longueurs appartient à $\mathcal{C}(\underline{\gamma})$) ; les rayons extrémaux correspondent aux mesures ergodiques et deux telles mesures sont proportionnelles ou étrangères. Ceci permet de conclure que $\mathcal{C}(\underline{\gamma}) \cup \{0\}$ est simplicial.

□

8 Mesures invariantes par un échange d'intervalles linéaire

N'importe quel échange d'intervalles linéaire préserve la mesure de Lebesgue (de l'intervalle sur lequel il opère).

On verra au chapitre suivant qu'en général, mais pas toujours lorsque $d \geq 4$, un échange d'intervalles linéaire sans liaison n'a pas (à proportionnalité près) d'autre mesure borélienne finie invariante.

On va voir ici que ces questions ont une traduction très naturelle dans le cadre de l'algorithme de Rauzy-Veech.

Soit T un échange d'intervalles linéaire sans liaison sur un intervalle $I = (0, \lambda^*)$. Notons $\mathcal{M}_T$ le cône convexe des mesures boréliennes finies invariantes par T, muni de la topologie faible. Notons $\underline{\gamma} = (\gamma^{(n)})_{n>0}$ le chemin associé à T par l'algorithme de Rauzy-Veech. Notons enfin $\mathcal{E}_T$ l'ensemble des échanges d'intervalles linéaires $\tilde{T}$ sur un intervalle $\tilde{I} = (0, \tilde{\lambda}^*)$ qui sont topologiquement conjugués à T par un homémorphisme croissant de I sur $\tilde{I}$.

Nous allons voir que $\mathcal{E}_T, \mathcal{M}_T$ et $\mathcal{C}(\underline{\gamma})$ sont en correspondance naturelle et biunivoque.

Etant donné $\lambda \in \mathcal{C}(\underline{\gamma})$, notons T_λ l'échange d'intervalles linéaire qui a même données combinatoire que T et a λ pour vecteur de longueurs.

Etant donné $\tilde{T} \in \mathcal{E}_T$, notons $\lambda(\tilde{T})$ son vecteur de longueurs.

Etant donné $\mu \in \mathcal{M}_T$, notons $\lambda(\mu)$ le vecteur de $\mathbf{R}^{\mathcal{A}}$ dont les composantes sont les μ-mesures des composantes du domaine de T.

Toute mesure $\mu \in \mathcal{M}_T$ est sans atome et son support est I d'après le théorème 1 ; on peut donc lui associer un homéomorphisme H_μ de I sur $(0, \mu(I))$ défini par

$$H_\mu(x) = \mu((0, x)) \ ;$$

l'échange d'intervalles généralisé $T_\mu = H_\mu \circ T \circ H_\mu^{-1}$ sur $(0, \mu(I))$ préserve la mesure de Lebesgue, et est donc linéaire.

Etant donné $\tilde{T} \in \mathcal{E}_T$, la conjugaison croissante $H_{\tilde{T}}$ de $\tilde{T}$ avec T est unique : en effet, comme T est minimal, le seul homéomorphisme croissant de I qui commute avec T est l'identité. L'image de la mesure de Lebesgue par $H_{\tilde{T}}$ est une mesure $\mu(\tilde{T})$ invariante par T.

Proposition 6 : *Les applications $\tilde{T} \mapsto \lambda(\tilde{T}), \tilde{T} \mapsto \mu(\tilde{T})\mu \mapsto \lambda(\mu), \mu \mapsto T_\mu, \lambda \mapsto T_\lambda$ mettent $\mathcal{E}_T, \mathcal{M}_T, \mathcal{C}(\underline{\gamma})$ en correspondances naturelles, biunivoques et compatibles. Ce sont des homéomorphismes. De plus $\mu \mapsto \lambda(\mu)$ est linéaire.*

Preuve : Elle consiste en une série de vérifications

1. Les applications $\mu \mapsto T_\mu, \tilde{T} \mapsto \mu(\tilde{T})$ sont inverses l'une de l'autre et réalisent une bijection entre $\mathcal{M}_T$ et $\mathcal{E}_T$.

2. Soit $\tilde{T} \in \mathcal{E}_T$; comme $\tilde{T}$ est topologiquement conjugué à T par un homéomorphisme croissant, le chemin associé à $\tilde{T}$ par l'algorithme de Rauzy-Veech est le même que pour T. Donc $\lambda(\tilde{T})$ appartient à $\mathcal{C}(\underline{\gamma})$.

3. Pour tout $\lambda \in \mathcal{C}(\underline{\gamma})$, l'algorithme de Rauzy-Veech appliqué à T_λ ne s'arrête pas ; donc T_λ est sans liaison et donc minimal, et en particulier l'orbite positive $(T_\lambda^n(0^+))_{n>0}$ est dense (dans l'intervalle où agit T_λ). De plus, comme T_λ est sans liaison, les applications $\lambda \mapsto T_\lambda^n(0^+)$ sont continues, et les applications

$$\lambda \mapsto T_\lambda^n(0^+) - T_\lambda^m(0^+) \quad (\text{pour } n \neq m)$$

ne s'annulent pas, et on donc un signe constant. L'application $T^m(0^+) \mapsto T_\lambda^m(0^+)$ réalise une bijection croissante entre ensembles denses et se prolonge donc uniquement en un homéomorphisme qui conjugue T et T_λ. Donc $T_\lambda \in \mathcal{E}_T$.

4. Les applications $\tilde{T} \mapsto \lambda(\tilde{T}), \lambda \mapsto T_\lambda$ sont évidemment inverses l'une de l'autre. L'application $\mu \mapsto \lambda(\mu)$ est composée de $\mu \mapsto T_\mu$ et $T \to T_\lambda$.

5. La correspondance $\lambda \to T_\lambda, \tilde{T} \to \lambda(\tilde{T})$ est un homéomorphisme (par définition de la topologie de $\mathcal{C}_T$!

6. L'application $\mu \mapsto H_\mu$ est continue car la mesure $\mu((x-\varepsilon, x+\varepsilon))$ tend vers 0 uniformément en x et μ lorsque ε tend vers 0. L'application $\mu \mapsto T_\mu$ est donc aussi continue. Comme le projectivisé de $\mathcal{M}_T$ est compact, c'est un homéomorphisme.

7. Finalement $\mu \mapsto \lambda(\mu)$ est évidemment linéaire.

□

9 Echanges d'intervalles quasipériodiques

Définition : Soit T un échanges d'intervalles généralisé. On dit que T est **quasipériodique** si

- les données combinatoires sont irréductibles ;
- il n'y a pas de liaison ;
- le chemin associé à T par l'algorithme de Rauzy-Veech est plein.

Pour un échange linéaire, la seconde condition implique les deux autres. Ce n'est pas le cas, même pour $d = 2$, si T n'est pas linéaire. Pour $d = 2$, T est quasipériodique si et seulement si le nombre de rotation de l'homéomorphisme du cercle correspondant à T est irrationnel.

Un homéomorphisme du cercle dont le nombre de rotation est irrationnel est semi-conjugué à la rotation correspondante. On a un résultat semblable pour les échanges d'intervalles quasipériodiques.

Proposition 7 : *Soit T un échange d'intervalles généralisé et soit T_0 un échange d'intervalles linéaire ayant les mêmes chemins associés par l'algorithme de Rauzy-Veech. Il existe alors une application croissante (au sens large), continue et surjective h de l'intervalle I de T sur l'intervalle I_0 de T_0 vérifiant*

$$T_0 \circ H = H \circ T$$

Remarque : T_0 n'est pas forcément uniquement défini par T mais les divers choix possibles sont topologiquement conjugués (cf. Prop. 6).

Preuve : Notons $T_0^{(n)}$ (resp. $T^{(n)}$) la suite d'échanges d'intervalles produite par l'algorithme. Notons $u_{0,\alpha}(n)$ (resp. $v_{0,\alpha}(n)$, resp. $u_\alpha(n)$, resp. $v_\alpha(n)$) les singularités de $T_0^{(n)}$ (resp. de $(T_0^{(n)})^{-1}$, resp. de $T^{(n)}$, resp. de $(T^{(n)})^{-1}$). On a, avec les notations de III.5

$$T_0^{Q_\alpha^{(n)}}([u_{0,\alpha}(n)]^+) = [v_{0,\alpha}(n)]^+$$

(limites par valeurs supérieures), et de même pour T. De plus, il existe des entiers $Q_\alpha^+(n), Q_\alpha^-(n)$ positifs ou nuls tels que

$$Q_\alpha^+(n) + Q_\alpha^-(n) = Q_\alpha^{(n)} - 1 \ ,$$

$$T_0^{Q_\alpha^-(n)}(u_{0,\alpha}(n)) = u_{0,\alpha}(0) \ ,$$

$$T_0^{Q_\alpha^+(n)}(v_{0,\alpha}(0)) = v_{0,\alpha}(n) \ ,$$

et de même pour T. Les suites $Q_\alpha^\pm(n)$ sont croissantes et tendent vers l'infini. Définissons

$$\begin{aligned} S_0(n) &= \{T_0^{-j}(u_{0,\alpha}(0)), 0 \leq j < Q_\alpha^-(n), \pi_0\alpha > 1\} \\ &\cup \ \{T_0^{j}(v_{0,\alpha}(0), 0 \leq j < Q_\alpha^+(n), \pi_1\alpha > 1\} \end{aligned}$$

et de même $S(n)$. Les points de $S_0(n)$ sont exactement les extrémités gauches des intervalles images des composantes du domaine de $T_0^{(n)}$ avant retour dans l'intervalle $I_0^{(n)}$ où agit $T_0^{(n)}$. Comme T_0 est sans liaison, les points énumérés dans la définition de $S_0(n)$ sont **distincts**. La suite $S_0(n)$ est croissante et l'union $S_0(\infty)$ est exactement formée des orbites positives des singularités de T_0^{-1} et des orbites négatives des singularités de T_0. En particulier, comme T_0 est minimal, $S_0(\infty)$ est dense dans I_0.

Comme T et T_0 partagent le même chemin pour l'algorithme, les formules

$$h(T^{-j}(u_\alpha(0))) = T_0^{-j}(u_{0,\alpha}(0)), j \geq 0$$

$$h(T^{j}(v_\alpha(0))) = T_0^{j}(v_{0,\alpha}(0)), j \geq 0$$

définissent une bijection croissante de $S(\infty)$ sur $S_0(\infty)$. Par construction, h conjugue T à T_0 sur ces ensembles.

Comme $S_0(\infty)$ est dense dans I_0, il existe une unique application croissante de l'intervalle I où agit T dans I_0 qui prolonge h ; on la note encore du même nom. Ce prolongement est continu et surjectif. Par continuité, on a

$$h \circ T = T_0 \circ h$$

dès que les deux membres sont définis.

□

Remarque : Il est possible qu'un intervalle situé à une extrémité d'une composnte du domaine de T soit envoyé par h sur une singularité de T_0. Si on veut des applications partout définies, il faut compactifier suivant la méthode de III.10.

Précisons ce qui se passe lorsque la semi-conjugaison h n'est pas un homéomorphisme. Lorsque $d = 2$, on se trouve en présence de contre-exemples de Denoy. En général, la situation est très similaire à celle des contre-exemples de Denjoy, mais légèrement compliquée par la présence de "vraies" singularités.

Commençons par observer que h est un homéomorphisme si et seulement si $S(\infty)$ est dense dans I, et donc si et seulement si T est minimal.

Supposons que ce ne soit pas le cas. Soit J un intervalle ouvert maximal de I sur lequel h est constant. Il y a deux possibilités :

- J est une composante connexe de $I - \overline{S(\infty)}$;
- J est l'union d'un point de $S(\infty)$ et de deux composantes connexes de $I - \overline{S(\infty)}$ adjacentes à ce point.

Inversement, h est bien sûr constante sur toute composante connexe de $I - \overline{S(\infty)}$. Les points isolés de $\overline{S(\infty)}$ sont exactement les points de $S(\infty)$ contenus dans un intervalle ouvert sur lequel h est constante.

On observera que $S(\infty)$ est exactement l'union des singularités de tous les itérés (positifs et négatifs) de T. Les composantes de $I - \overline{S(\infty)}$ sont permutées sans cycle par la dynamique.

L'image par h de l'ensemble des composantes de $I - \overline{S(\infty)}$ est invariant par T_0 et dénombrable.

Appelons Ω l'ensemble (fermé dans I) des points non isolés de $\overline{S(\infty)}$; l'image réciproque par h d'un point de I_0 est donc soit un point de Ω, soit l'adhérence d'une composante connexe de $I - \Omega$.

Comme T_0 est minimal, on voit que

- $T(D_T \cap \Omega) = I_T \cap \Omega$;
- Ω est exactement l'ensemble d'accumulation dans I de n'importe quelle demi-orbite infinie de T (positive ou négative) ; en particulier, la restriction de T à Ω est minimale.

Lorsque h est un homéomorphisme, les mesures boréliennes finies sur I invariantes par T sont évidemment exactement les images par h^{-1} des mesures invariantes par T_0 (formant un cône simplicial fermé, cf Prop. 6).

C'est encore, mutatis mutandis, ce qui se passe lorsque h n'est pas un homéomorphisme. D'après ce qui précède, le support de n'importe quelle mesure finie invariante par T est égal à Ω, et ces mesures n'ont jamais d'atomes. D'autre part, la restriction de h à Ω est presque injective puisque chaque point de I_0 a une image réciproque à l'exception d'un ensemble dénombrable de points qui en ont 2, ensemble qui est de mesure nulle pour toute mesure non atomique sur I_0. Par conséquent, pour chaque $\mu_0 \in \mathcal{M}_{T_0}$ il existe exactement une mesure finie μ sur Ω telle que $h_* \mu = \mu_0$, et cette mesure est invariante par T. Donc h_* permet à nouveau d'identifier mesures invariantes par T et mesures invariantes par T_0.

10 Une construction à la Denjoy

La construction qui suit répond à 2 objectifs

- adapter la construction de contre-exemples de Denjoy sur le cercle pour obtenir des échanges d'intervalles quasipériodiques non minimaux ;
- disposer d'une version continue et compactifiée des échanges d'intervalles qui permette d'appliquer les théorèmes standard de dynamique topologique.

Soit T un échange d'intervalles linéaire sans liaison sur un intervalle $I = (0, \lambda^*)$. Notons u_α^0 (avec $\pi_0(\alpha) > 1$) les singularités de T, u_α^1 (avec $\pi_1(\alpha) > 1$) celles de T^{-1}. Comme au numéro précédent, on définit

$$\begin{aligned} S(\infty) &= \{T^{-j}(u_\alpha^0), j \geq 0, \pi_0(\alpha) > 1\} \\ &\cup \{T^j(u_\alpha^1), j \geq 0, \pi_1(\alpha) > 1\} \,, \end{aligned}$$

qui est l'union des singularités des $T^j, j \in \mathbf{Z}$.

Posons

$$\tilde{I} = \bar{I} \sqcup (S(\infty) \times \{+, -\}$$

et notons $p : \tilde{I} \to \bar{I}$ la projection naturelle. Munissons $\tilde{I}$ d'un ordre total en prolongeant celui de $\bar{I}$ par

$$v < (u, -) < u < (u, +) < w$$

pour tous $v, u, w \in \bar{I}$ avec $v < u < w$ dans $\bar{I}$ et $u \in S(\infty)$. Posons aussi

$$\begin{aligned} S_+ &= \{u_\alpha^0 \ , \ \pi_0(\alpha) > 1\} \ , \\ S_- &= \{u_\alpha^1 \ , \ \pi_1(\alpha) > 1\} \ . \end{aligned}$$

Définissons une bijection $\tilde{T}$ de $\tilde{I} - S_+$ sur $\tilde{I} - S_-$ par les formules :

(i) $\tilde{T}(x) = T(x)$ pour $x \in I - S_+$;

(ii) $\tilde{T}((x, \pm)) = (T(x), \pm)$ pour $x \in S(\infty) - S_+$;

(iii) $\tilde{T}((u_\alpha^0, +)) = (u_\alpha^1, +)$ si $\pi_0(\alpha) > 1, \pi_1(\alpha) > 1$;

(iv) $\tilde{T}((u_\alpha^0, -)) = (u_{\alpha'}^1, -)$ si $\pi_0(\alpha) > 1$ et l'élément β tel que $\pi_0(\beta) = \pi_0(\alpha) - 1$ vérifie $\pi_1(\beta) < d, \pi_1(\beta) = \pi_1(\alpha') - 1$;

(v) $\tilde{T}((u_\alpha^0, +)) = 0$ si $\pi_1(\alpha) = 1$,

(vi) $\tilde{T}((u_\alpha^0, -)) = \lambda^*$ si $\pi_0(\alpha) > 1$ et l'élément β tel que $\pi_0(\beta) = \pi_0(\alpha) - 1$ vérifie $\pi_1(\beta) = d$;

(vii) $\tilde{T}(0) = (u_\alpha^1, +)$ avec $\pi_0(\alpha) = 1$,

(viii) $\tilde{T}(\lambda^*) = (u_\alpha^1, -)$ avec $\pi_1(\alpha) = \pi_1(\alpha_0) + 1, \pi_0(\alpha_0) = d$.

(les cas (iii), (iv) concernent chacun (d - 2) points ; les cas (v), (vi), (vii), (viii) chacun un seul point).

On observera que $\tilde{T}$ (resp. $\tilde{T}^{-1}$) est strictement croissante sur tout "intervalle" de $\tilde{I}$ ne rencontrant pas S_+ (resp. S_-). La restriction de $\tilde{T}$ à $\tilde{I} - S(\infty)$ est une bijection de cet ensemble dans lui-même.

Soit E une partie dénombrable de $\tilde{I}$ contenant $S(\infty)$ et invariante par $\tilde{T}$ dans le sens où

$$\tilde{T}(E - S(\infty)) = E - S(\infty) \ .$$

Soit $(l_x)_{x \in E}$ une famille sommable de réels strictement positifs.

Posons

$$\hat{\lambda}^* = \lambda^* + \sum_E l_x, \qquad \hat{I} = [0, \hat{\lambda}^*]$$

et définissons, pour $x \in \tilde{I}$

$$\begin{array}{ll} \sigma(x) = p(x) + \sum_{y<x} l_y & \text{si } x \notin E \ , \\ \begin{cases} \sigma^-(x) = p(x) + \sum_{y<x} l_y \\ \sigma^+(x) = p(x) + \sum_{y\leq x} l_y = \sigma^-(x) + l_x \end{cases} & \text{si } x \in E \ . \end{array}$$

Pour $x \in E$, notons J_x l'intervalle ouvert $(\sigma^-(x), \sigma^+(x))$ de longueur l_x. Définissons

$$K = \hat{I} - \cup_{S(\infty)} J_x \ ,$$

et une application $\hat{h}$ de K sur $\tilde{I} - S(\infty)$ par

$$\hat{h}^{-1}(x) \begin{cases} = \sigma(x) & \text{si } x \notin E \ , \\ = \bar{J}_x & \text{si } x \in E - S(\infty) \end{cases}$$

Finalement, notons $\hat{T}$ l'application de K dans lui-même définie par

- $\hat{h}(\hat{T}(u)) = \tilde{T}(\hat{h}(u))$, si $\hat{h}(u) \notin E$
- pour $x \in E - S(\infty)$, la restriction de $\hat{T}$ à $\bar{J}_x$ est l'application affine croissante qui envoie cet intervalle sur $\bar{J}_{\tilde{T}(x)}$.

Nous vérifions maintenant successivement les propriétés suivantes.

– $\sigma^-(x) < \sigma^+(x)$ pour tout $x \in E$;

– $\sigma(x) < \sigma(x')$ pour $x, x' \in \tilde{I} - E, x' > x$,
$\sigma^+(x) < \sigma(x')$ pour $x \in E, x' \in \tilde{I} - E, x' > x$,
$\sigma(x) < \sigma^-(x')$ pour $x \in \tilde{I} - E, x' \in E, x' > x$,
$\sigma^+(x) < \sigma^-(x')$ pour $x, x' \in E, x' > x$.

– $\sigma(\lambda^*) = \hat{\lambda}^*$ si $\lambda* \notin E$,
$\sigma^+(\lambda^*) = \hat{\lambda}^*$ si $\lambda^* \in E$,
$\sigma(0) = 0$ si $0 \notin E$,
$\sigma^-(0) = 0$ si $0 \in E$.

– toute partie de $\tilde{I}$ (resp. de $\tilde{I} - S(\infty)$) admet une borne inférieure et une borne supérieure dans $\tilde{I}$ (resp. dans $\tilde{I} - S(\infty)$) ;

– pour $u \in \hat{I}, u > 0$, soit il existe $x \in E$ avec $u \in \bar{J}_x$, soit on a $u = \sigma(y)$ avec $y = \sup\{x \in \tilde{I} - E, \sigma(x) \leq u\} \notin E$.

– $\hat{h}$ est bien définie et croissante : en particulier, pour $x \in S(\infty), \hat{h}(\sigma^{\pm}(x)) = (x, \pm)$, (éléments qui peuvent ou non appartenir à E).

– $\hat{T}$ est une bijection de K dans lui-même.

– $\hat{T}$ est un homéomophisme de la partie compacte K de $\hat{I}$.

– $\hat{h} \circ \hat{T} = \tilde{T} \circ \hat{h}$ partout sur K.

Quand on prend $E = S(\infty), \hat{h}$ est une bijection de K sur $\tilde{I} - S(\infty)$; on obtient ainsi une version $\hat{T}$ de T sur l'espace compact K obtenu en dédoublant les orbites des singularités.

En général, E est l'union de $S(\infty)$ et d 'une famille au plus dénombrable d'orbites (complètes) de $\tilde{T}$ dans $\tilde{I} - S(\infty)$; on obtient une version $\hat{T}$ sur l'espace compact K d'un échange d'intervalles généralisé T^* dont la semi-conjugaison h avec T n'est pas injective au-dessus des orbites de $E - S(\infty)$; plus précisément, on obtient T^* en annulant les l_x, $x \in S(\infty)$, dans la construction précédente (lorsque $E = S(\infty)$, cela donne $\hat{h} = id$ et $\hat{T} = T$); l'image inverse par la semi-conjugaison h^* entre T^* et T d'un point $x \in I$ est

- $\{\sigma(x)\}$ si $x \notin E$;
- l'intervalle J_x^* si $x \in E - S(\infty)$
- $\{\sigma(x)\}, \bar{J}^*_{(x,-)}, \bar{J}^*_{(x,+)}$ ou$\bar{J}^*_{(x,-)} \cup \bar{J}^*_{(x,+)}$ lorsque $x \in S(\infty)$, suivant qu'aucun, l'un, ou les deux points $(x, \pm)$ appartiennent à E.

IV Unique ergodicité

1 Nombre de mesures ergodiques

D'après la proposition 6 de III.8, le cône des mesures finies invariantes par un échange d'intervalles linéaire sans liaison s'identifie au cône $\mathcal{C}(\underline{\gamma})$ déterminé par l'algorithme de Rauzy-Veech, et celui-ci est simplicial de dimension $< d$ d'après le corollaire 5 de III.7.

D'après III.9, il en est de même pour un échange d'intervalles quasipériodique.

Le corollaire 5 permet donc de conclure qu'il y a au plus $d - 1$ mesures de probabilité invariantes.

Lorsque $d = 2$, on retrouve le fait bien connu que les rotations irrationnelles sont uniquement ergodiques. Lorsque $d > 2$, on peut améliorer ce résultat.

Rappelons que le genre d'une surface de translation obtenue par suspension de l'échange d'intervalles linéaire T est donné par

$$d = 2g + \nu - 1$$

où $\nu > 0$ est le nombre de points marqués qui est aussi le nombre de cycles de la permutation σ déterminée par les données combinatoires de T (cf II.6).

Proposition 9 : *Un échange d'intervalles (généralisé) quasipériodique a au plus g mesures de probabilité invariantes.*

Remarque : On verra que cette borne est réalisée.

Preuve : Il suffit, d'après III.9, de traiter le cas d'un échange d'intervalles linéaire. Nous commençons par deux lemmes qui ont un intérêt intrinsèque.

LEMME 4 – *Soit $\underline{\gamma} = (\gamma^{(1)}, \ldots, \gamma^{(N)})$ un lacet dans un diagramme de Rauzy, basé en un point (π_0, π_1). Notons Ω la matrice anti-symétrique associée à cette donnée combinatoire et $Q(\underline{\gamma})$ l'automorphisme de $\mathbf{R}^{\mathcal{A}}$ associé à $\underline{\gamma}$ (cf III.5).*

La restriction de $Q(\underline{\gamma})$ au noyau de Ω est l'identité sur ce sous-esapce.

Le lemme permet donc d'identifier entre eux de façon canonique les noyaux des matrices Ω associées aux divers sommets du diagramme. Notons (d'après II.7) que le rang de Ω est $2g$, et que Ω définit une forme symplectique sur le quotient $\mathbf{R}^{\mathcal{A}}/ker\ \Omega$.

Preuve du lemme : Définissons, en tout sommet du diagramme, les formes linéaires

$$u_\alpha^\varepsilon = \sum_{\pi_\varepsilon \beta < \pi_\varepsilon \alpha} \lambda_\beta \quad , \quad \alpha \in \mathcal{A} \quad , \quad \varepsilon \in \{0, 1\} .$$

L'équation du noyau de Ω est

$$u_\alpha^0 = u_\alpha^1 \quad , \quad \forall\, \alpha \in \mathcal{A} .$$

Or, quand on applique une flèche de type 0 (resp. de type 1), aucun des u_α^0 ne change (resp. aucun des u_α^1) car ni π_0, ni les λ_α avec $\pi_0(\alpha) < d$ ne sont affectés. D'autre part, comme on a, d'après III.5,

$$\hat{\Omega} = {}^tV\Omega V$$

V envoie bien le noyau de $\hat{\Omega}$ dans le noyau de Ω. Donc aucun des u_α^ε n'évolue le long du lacet $\underline{\gamma}$.

LEMME 5 – *Soit* $\underline{\gamma} = (\gamma^{(n)})_{n\geq 1}$ *un chemin plein issu d'un sommet* (π_0, π_1) *et soit* $\mathcal{C}(\underline{\gamma})$ *le cône simplicial associé. L'intersection du sous-espace engendré par* $\mathcal{C}(\underline{\gamma})$ *et du noyau de la matrice* $\Omega(\pi_0, \pi_1)$ *est réduite à* $\{0\}$.

Preuve : Sinon, il existe des vecteurs distincts v, v' dans $\mathcal{C}(\underline{\gamma})$ tels que $v - v' \in Ker\ \Omega$. D'après le lemme 4, l'image $Q(\underline{\gamma}(n))^{-1}(v - v')$ ne dépend que de $(\pi_0^{(n)}, \pi_1^{(n)})$, donc sa norme est minorée. Or d'après la proposition 5 de III.7, les vecteurs positifs $Q(\underline{\gamma}(n))^{-1}(v)$ et $Q(\underline{\gamma}(n))^{-1}(v')$ tendent vers 0. Cette contradiction prouve le lemme.

□

Preuve de la proposition : Supposons que le sous-espace vectoriel engendré par le cône $\mathcal{C}(\underline{\gamma})$ (où $\underline{\gamma} = (\gamma^{(n)})_{n\geq 1}$ est maintenant le chemin associé à l'échange d'intervalles considéré) soit de dimension $> g$. D'après le lemme 5, il en est donc de même pour son image dans $\mathbf{R}^{\mathcal{A}}/ker\ \Omega$ (Ω désignant la matrice associée à l'origine du chemin). Dans cet espace symplectique, un espace isotrope est de dimension $\leq g$. Il existe donc des vecteurs v, v' dans $\mathcal{C}(\underline{\gamma})$ tels que

$${}^tv\ \Omega v' > 0\ .$$

Or on a, en posant $v(n) = Q(\underline{\gamma}(n))^{-1}(v), \quad v'(n) = Q(\underline{\gamma}(n))^{-1}(v')$,

$${}^tv(n)\, \Omega^{(n)}\ v'(n) = {}^tv\, \Omega\, v',$$

alors que les vecteurs $v(n), v'(n)$ tendent vers 0 d'après la prop. 5 de III.7. Cette contradiction montre que la dimension du sous-espace engendré par $\mathcal{C}(\underline{\gamma})$ est $\leq g$.

□

2 Construction d'exemples non uniquement ergodiques

La borne dans la proposition 9 est optimale. En effet, pour tout entier pair $d = 2g$, la donnée combinatoire (π_0, π_1) telle que

$$\pi_0(\alpha) + \pi_1(\alpha) = d + 1 \quad , \quad \forall\, \alpha \in \mathcal{A}$$

correspond à une surface de genre g avec un point marqué (un zéro de la forme holomorphe de multiplicité $2g - 2$). Nous allons décrire le diagramme de Rauzy $\mathcal{D}(d)$ correspondant, puis construire des exemples linéaires sans liaison possédant exactement g mesures de probabilité invariantes ergodiques.

Les diagrammes de Rauzy $\mathcal{D}(d)$ dans les cas $d = 2, 3, 4$ sont indiqués en III.3. On en fait, pour des valeurs arbitraires de d (pour le moment, d n'est pas nécessairement pair), une description par récurrence de la façon suivante.

a) Nous choisissons comme alphabet $\mathcal{A} = \{1, \dots, d\}$, et pour sommet initial les applications

$$\pi_0^*(k) = k$$
$$\pi_1^*(k) = d + 1 - k\ .$$

Changer le sens du temps revient à échanger π_0 et π_1 , T et T^{-1}, et changer le type des flèches ; si nous changeons en même temps le nom des intervalles par l'involution $k \to d+1-k$, c'est-à-dire si nous associons au sommet (π_0, π_1) le sommet $(\check{\pi}_0, \check{\pi}_1)$ défini par

$$\check{\pi}_0(k) = \pi_1(d + 1 - k)\ ,$$
$$\check{\pi}_1(k) = \pi_0(d + 1 - k)\ ,$$

nous obtenons une involution du diagramme de Rauzy considéré dont (π_0^*, π_1^*) est l'unique sommet fixe.

b) Pour tout sommet (π_0, π_1), on a $\pi_0(1) = 1$, $\pi_1(d) = 1$; de plus on a toujours $\pi_0(2) = 2$ ou $\pi_1(d - 1) = 2$, et (π_0^*, π_1^*) et l'unique sommet vérifiant ces deux égalités. Soit (π_0, π_1) un sommet distinct de (π_0^*, π_1^*) ; on dit que ce sommet est de type 0 (resp.1) si $\pi_0(2) = 2$ (resp. $\pi_1(d - 1) = 2$) ; ceci se produit si et seulement si tout chemin joignant (π_0^*, π_1^*) à (π_0, π_1) sans repasser par (π_0^*, π_1^*) commence par une flèche de type 0.

On dira qu'un sommet (π_0, π_1) de type 0 (resp. de type 1) est de type $(0, k)$ (resp. de type $(1, k)$) si on a $\pi_1(d-k) = 2$ (resp. $\pi_0(k+1) = 2$), l'entier k peut ici varier entre 2 et $d-1$. Pour

$\varepsilon = 0, 1$, le cycle de flèches de type ε issu de (π_0^*, π_1^*) connecte (π_0^*, π_1^*) à un sommet de type $(\varepsilon, d-1)$ puis un sommet de type $(\varepsilon, k+1)$ à un sommet de type (ε, k) (pour $d-1 > k \geq 2$) et enfin un sommet de type $(\varepsilon, 2)$ à (π_0^*, π_1^*) ; les sommets de type $(\varepsilon, k), 2 \leq k \leq d-1$ apparaissant dans ce cycle sont appelés **racines**.

c) Pour un sommet (π_0, π_1) de type (ε, k), qui n'est pas la racine de type (ε, k), les extrémités des deux flèches issues de (π_0, π_1), et les origines des deux flèches aboutissant en (π_0, π_1) sont aussi de type (ε, k).

Qui plus est, la partie du diagramme formée par les sommets de type (ε, k) et les flèches qui les connectent est isomorphe à la "moitié" du diagramme $\mathcal{D}(k)$ formé du point base (π_0^*, π_1^*) , des sommets de type $1 - \varepsilon$, et des flèches qui les connectent. L'isomorphisme, pour $\varepsilon = 0$, est donné par les formules suivantes : à un sommet (π_0, π_1) de type $(0, k)$ est associé le sommet (π_0', π_1') de $\mathcal{D}(k)$ défini par :

$$\pi_0'(j) = \pi_0(j + d - k) - d + k \quad , \quad 1 \leq j \leq k$$

$$\pi_1'(j) = \pi_1(j + d - k) - d + k \quad , \quad 1 \leq j < k$$

$$\pi_1'(k) = 1 \ .$$

Les formules pour $\varepsilon = 1$ sont similaires. Une flèche connecte deux sommets de type (ε, k) si et seulement si une flèche connecte leurs images dans $\mathcal{D}(k)$; le type des flèches est respecté par cet isomorphisme.

Notre description de $\mathcal{D}(d)$ est maintenant complète. Toutes les vérifications sont immédiates et laissées au lecteur. Le diagramme $\mathcal{D}(d)$ comporte $2^{d-1} - 1$ sommets et le même nombre de flèches de chaque type.

Nous supposons désormais que $d = 2g$ est pair et décrivons une famille de lacets basés en (π_0^*, π_1^*).

Soient $m_1, \ldots, m_g$ des entiers ≥ 0. Définissons le lacet $\gamma(m_1, \ldots, m_g)$ par la suite des types des flèches parcourues à partir de (π_0^*, π_1^*) :

$$1^{d-2}\ 0^{m_1}\ 1\ 0^2\ 1^{d-4}\ 0^{m_2}\ 1\ 0^2\ 1^{d-6} \ldots\ 0^{m_{g-1}} 1\ 0^2\ 1^{m_g}\ 0\ .$$

La suite des noms de flèches correspondante est

$$1^{d-2}\ 2^{m_1}\ 1d^2\ 3^{d-4}\ 4^{m_2}\ 3d^2\ 5^{d-6}\dots(d-2)^{m_{g-1}}(d-3)d^2(d-1)^{m_g}d\ .$$

Notons que chaque nom apparaît au moins une fois si les m_i sont positifs.

Le chemin $\underline{\gamma}$ auquel nous allons nous intéresser est la concaténation de lacets $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_\ell, \dots$ avec

$$\gamma_\ell = \gamma(m_{\ell g+1}, \dots, m_{(\ell+1)g})\ ,$$

la suite $(m_s)_{s>0}$ croissant très rapidement vers l'infini. On notera qu'un tel chemin est plein.

Notons $\overrightarrow{Q_i}(n), 1 \leq i \leq d$, les colonnes de la matrice $Q^{(n)}$ associée aux n premières flèches de $\underline{\gamma}$. Rappelons que si la (n+1)ème flèche a pour nom i, et que l'autre flèche issue du même sommet a pour nom j, on aura

$$\overrightarrow{Q_r}(n+1) = \overrightarrow{Q_r}(n) \qquad \text{pour } r \neq j$$
$$\overrightarrow{Q_j}(n+1) = \overrightarrow{Q_j}(n) + \overrightarrow{Q_i}(n),$$

(on rajoute le vecteur “préféré” au vecteur “négligé”).

Examinons d'abord l'effet du premier lacet γ_1.

- lors des $(d-2)$ premiers pas, on ajoute $\overrightarrow{Q_1} = e_1$ à chacun des vecteurs $\overrightarrow{Q_d}, \dots, \overrightarrow{Q_4}, \overrightarrow{Q_3}$ qui deviennent donc respectivement égaux à $e_d + e_1, \dots e_3 + e_1$;
- on ajoute m_1 fois $\overrightarrow{Q_2} = e_2$ à $\overrightarrow{Q_1}$ qui devient égal à $e_1 + m_1 e_2$; on ajoute ensuite une fois $\overrightarrow{Q_1}$ à $\overrightarrow{Q_2}$ qui devient égal à $e_1 + (m_1+1)\ e_2$; donc $\overrightarrow{Q_1}$ et $\overrightarrow{Q_2}$ sont alors grands et orientés suivant e_2 approximativement ;
- on ajoute $\overrightarrow{Q_d} = e_d + e_1$ à $\overrightarrow{Q_1}$ puis à $\overrightarrow{Q_2}$: ceci n'affecte sensiblement ni la norme, ni la direction de ces vecteurs ;
- on ajoute $\overrightarrow{Q_3} = e_3 + e_1$ à chacun des vecteurs $\overrightarrow{Q_d}, \dots \overrightarrow{Q_5}$, qui deviennent égaux à $e_k + e_3 + 2e_1 (5 \leq k \leq d)$;
- on ajoute m_2 fois $\overrightarrow{Q_4} = e_4 + e_1$ à $\overrightarrow{Q_3} = e_3 + e_1$ puis une fois $\overrightarrow{Q_3}$ à $\overrightarrow{Q_4}$: les deux vecteurs $\overrightarrow{Q_3}$ et $\overrightarrow{Q_4}$ deviennent donc approximativement orientés suivant $e_4 + e_1$, de taille $\sim m_2$ choisie beaucoup plus grande que m_1 ;

- on continue de parcourir γ_1, en choisissant $1 << m_1 << m_2 << \ldots << m_g$. A l'extrémité de γ_1 (au sommet (π_0^*, π_1^*)), les vecteurs $\overrightarrow{Q_1}, \overrightarrow{Q_2}, \ldots \overrightarrow{Q_d}$ sont disposés comme suit :
  - $\overrightarrow{Q_1}, \overrightarrow{Q_2}$ sont de taille $\sim m_1$, orientés approximativement suivant $e_2 =: f_1$;
  - $\overrightarrow{Q_3}, \overrightarrow{Q_4}$ sont de taille $\sim m_2$, orientés approximativement suivant $e_4 + e_1 =: f_2$;
  - $\overrightarrow{Q_5}, \overrightarrow{Q_6}$ sont de taille $\sim m_3$, orientés approximativement suivant $e_6 + e_3 + 2e_1 =: f_3$;
  - $\overrightarrow{Q_{d-3}}, \overrightarrow{Q_{d-2}}$ sont de taille $\sim m_{g-1}$, orientés approximativement suivant $f_{g-1} := e_{d-2} + e_{d-5} + \ldots + 2^{g-3}e_1$;
  - $\overrightarrow{Q_{d-1}}, \overrightarrow{Q_d}$ sont de taille $\sim m_g$, orientés approximativement suivant $f_g := e_{d-1} + e_{d-3} + \ldots + 2^{g-2}e_1$.

La forme triangulaire des vecteurs $f_1, \ldots, f_g$ garantit que ceux-ci forment une famille indépendante de g vecteurs dans $\mathbf{Z}^{\mathcal{A}}$.

Examinons l'effet des lacets ultérieurs $\gamma_2, \ldots$. On montre par récurrence que, si la suite $(m_s)_{s>0}$ croît assez vite, pour tout $1 \leq \ell \leq g$ et tout $r > 0$:

- les vecteurs $\overrightarrow{Q_{2k-1}}, \overrightarrow{Q_{2k}}$ restent dirigés approximativement suivant f_k ;
- juste avant d'emprunter la boucle de nom $2k$ (de nom $2g-1$ si $k = g$) à m_{rg+k} reprises, on a
$$\|\overrightarrow{Q_{2\ell-1}}\| \sim \|\overrightarrow{Q_{2\ell}}\| \ , \ 1 \leq \ell \leq g$$
  et les rapports $\dfrac{\|\overrightarrow{Q_{2k+2}}\|}{\|\overrightarrow{Q_{2k}}\|}, \ldots, \dfrac{\|\overrightarrow{Q_{2g}}\|}{\|\overrightarrow{Q_{2g-2}}\|} \ , \ \dfrac{\|\overrightarrow{Q_2}\|}{\|\overrightarrow{Q_{2g}}\|} \ , \ldots \ , \dfrac{\|\overrightarrow{Q_{2k-2}}\|}{\|\overrightarrow{Q_{2k-4}}\|}$ sont extrêmement grands ;
- après avoir emprunté m_{rg+k} fois la boucle, la norme de $\overrightarrow{Q_{2k-1}}$($\overrightarrow{Q_{2g}}$ si $k = g$) est multipliée par un facteur approximativement égal à m_{rg+k}, sans affecter sensiblement la direction de ce vecteur ;
- la flèche suivante ajoute $\overrightarrow{Q_{2k-1}}$ à $\overrightarrow{Q_{2k}}$($\overrightarrow{Q_{2g}}$ à $\overrightarrow{Q_{2g-1}}$ si $k = g$) et ce vecteur devient donc approximativement de même taille et direction que $\overrightarrow{Q_{2k-1}}$($\overrightarrow{Q_{2g}}$ si $k = g$) ;
- les quelques flèches intermédiaires suivantes avant d'arriver à la prochaine boucle parcourue m_{rg+k+1} fois ajoutent chaque fois un vecteur à un vecteur beaucoup plus long, ne changeant ainsi sensiblement ni sa norme ni sa direction.

Il est clair qu'un choix approprié des m_s produit des suites $\overrightarrow{Q_{2k-1}(n)}, \overrightarrow{Q_{2k}(n)}$ dont les directions convergent vers la même limite $f_k(\infty)$ qui peut être choisie arbitrairement proche de f_k.

Le cône simplical $\mathcal{C}(\underline{\gamma})$ est alors de dimension g.

3 Le théorème de Masur et Veech

Lorsque le genre de la surface de translation associé à une donnée combinatoire (π_0, π_1) est égal à 1, tout échange d'intervalles quasi périodique de type (π_0, π_1) est uniquement ergodique : cela généralise (à peine) le cas des rotations irrationnelles et des homéomorphismes du cercle sans points périodiques.

Lorsque le genre est > 1, on vient de voir que le résultat correspondant n'est pas vrai. On a cependant le résultat suivant, conjecturé par Keane et démontré par Masur et Veech.

THÉORÈME 3 – (Masur, Veech) *Pour toute donnée combinatoire irréductible, presque tout choix du vecteur des longueurs produit un échange d'intervalles (linéaire) uniquement ergodique.*

La mesure de référence est évidemment la mesure de Lebesgue sur le cône positif de $\mathbf{R}^{\mathcal{A}}$, ou plutôt sur le projectivisé Δ de ce cône positif.

On munit Δ de la métrique de Hilbert : la distance entre deux points distincts de Δ est le logarithme du birapport formé par ces deux points et les deux points d'intersection de la droite qui les contient avec le bord de Δ. Cette métrique est contractée au sens large (resp. au sens strict) par toute matrice à coefficients positifs ou nuls (resp. strictement positifs).

Etant donnée (π_0, π_1) irréductible, presque tout vecteur de longueurs produit un échange d'intervalles linéaire sans liaison (Théorème 2), et on peut donc appliquer l'algorithme de Rauzy-Veech. Nous allons déduire le théorème 3 du résultat suivant, qui sera démontré au prochain chapitre.

Proposition 10 : *Soit (π_0, π_1) une donnée combinatoire irréductible. Il existe $N > 0$ tel que, pour presque tout vecteur de longueurs λ, on ait, pour une infinité d'entiers n*

$$Q_{\alpha\beta}^{(n,n+N)} > 0 \quad , \quad \forall\, \alpha, \beta \in \mathcal{A} \,.$$

Remarque : Pour le théorème 3, on peut se contenter de l'énoncé plus faible où on permet à

N de dépendre de λ.

Preuve du théorème 3 : Lorsque N est fixé, il n'y a qu'un nombre fini de possibilités pour les matrices $Q^{(n,n+N)}$; il existe donc une constante $k = k_N \in (0,1)$ telle que la métrique de Hilbert soit k-contractée par toute matrice $Q^{(n,n+N)}$ dont les coefficients sont strictement positifs. Pour les mêmes raisons, l'image du cône positif par une telle matrice $Q^{(n,n+N)}$ est de diamètre $\leq K = K_N$ pour la métrique de Hilbert. Supposons donc qu'on ait $n_0 < n_0 + N \leq n_1 < n_1 + N \leq \ldots < n_\ell + N$, avec $Q^{(n_i,n_i+N)}_{\alpha\beta} > 0$ pour tous $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$.

Comme les matrices $Q^{(n_i+N,n_{i+1})}, Q^{(0,n_0)}$ contractent au sens large la métrique de Hilbert, le diamètre pour cette métrique de l'image par $Q^{(0,n_\ell+N)}$ de Δ est $\leq k^\ell K$. Comme ℓ peut être choisi arbitrairement grand, on conclut que $\mathcal{C}(\underline{\gamma})$ est un rayon et T est uniquement ergodique.

$\square$

V Accélérations de l'algorithme et mesures invariantes

1 Le cas $d = 2$

Le diagramme de Rauzy ayant un seul sommet, l'algorithme de Rauzy-Veech induit une dynamique du projectivisé Δ du cône positif de $\mathbf{R}^{\mathcal{A}}$ dans lui-même.

En prenant $\mathcal{A} = \{A, B\}, \pi_0(A) = \pi_1(B) = 1, \pi_0(B) = \pi_1(A) = 2$, et en prenant comme coordonnée projective $x = \dfrac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B}$ qui est le nombre de rotation, cette dynamique est représentée par l'application $\tilde{g}$ définie comme suit.

Pour $0 < \lambda_A < \lambda_B$, c'est-à-dire $1/2 < x < 1$, on est dans le domaine de la flèche de type 0 et on a
$$\tilde{g}(x) = \frac{\lambda_B - \lambda_A}{\lambda_A + (\lambda_B - \lambda_A)} = 2 - \frac{1}{x} \ ,$$

Pour $0 < \lambda_B < \lambda_A$, c'est-à-dire $0 < x < 1/2$, on est dans le domaine de la flèche de type 1 et on a
$$\tilde{g}(x) = \frac{\lambda_B}{(\lambda_A - \lambda_B) + \lambda_B} = \frac{x}{1-x} \ ,$$

L'application $\tilde{g}$ commute avec l'involution $x \to 1 - x$. La mesure $\dfrac{dx}{x(1-x)}$ est invariante par $\tilde{g}$. Mais cette mesure est infinie. Comme $\tilde{g}$ a des points fixes paraboliques en 0 et en 1, il est en fait impossible que $\tilde{g}$ possède une mesure finie invariante équivalente à la mesure de Lebesgue.

On peut représenter ausi la dynamique de la façon suivante. On remplace le domaine $(0,1) - \{1/2\}$ de $\tilde{g}$ par deux copies de l'intervalle $(0,1)$ en posant

$$h(x) = \begin{cases} (\frac{\lambda_A}{\lambda_B}, 0) = (\frac{1-x}{x}, 0) & \text{si} \quad \lambda_A < \lambda_B \ , \\ (\frac{\lambda_B}{\lambda_A}, 1) = (\frac{x}{1-x}, 1) & \text{si} \quad \lambda_B < \lambda_A \ . \end{cases}$$

La dynamique $h\ \tilde{g}\ h^{-1}$ est maintenant donnée par

$$h\ \tilde{g}\ h^{-1}(y, \varepsilon) = (g(y), \varepsilon')$$

avec

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{y}{1-y} & \text{pour} \quad 0 < y \leq 1/2 \ , \\ \dfrac{1-y}{y} & \text{pour} \quad 1/2 \leq y < 1 \ . \end{cases}$$

et

$$\varepsilon' = \begin{cases} \varepsilon & \text{pour} \quad 0 < y \leq 1/2 \ , \\ 1 - \varepsilon & \text{pour} \quad 1/2 \leq y < 1 \ . \end{cases}$$

La mesure invariante $\dfrac{dx}{x(1-x)}$ correspond à une copie de $\dfrac{dy}{y}$ sur chaque copie de $(0,1)$.
La mesure (infinie) $\dfrac{dy}{y}$ est invariante par g.

L'application g est reliée à l'application de Gauss G qui engendre le développement en fraction continue. Plus précisément, on a

$$G(y) = g^n(y) \ ,$$

où n est le plus petit entier > 0 tel que $g^{n-1}(y) \in [1/2, 1]$; en relevant à $I \times \{0,1\}$, cela correspond au plus petit entier tel que $\varepsilon' = 1 - \varepsilon$.

La mesure finie $\dfrac{dx}{1+x}$ est invariante par G.

Lorsque $d > 2$, Veech a construit une mesure équivalente à la mesure de Lebesgue invariante par l'algorithme de Rauzy-Veech, mais à nouveau cette mesure est infinie. Zorich a découvert comment accélérer l'algorithme de façon à obtenir une mesure finie équivalente à la mesure de Lebesgue. Nous allons présenter simultanément la construction de ces deux mesures.

2 Extensions naturelles

Soit $\mathcal{D}$ un diagramme de Rauzy, $Som(\mathcal{D})$ l'ensemble de ses sommets.

Au chapitre précédent (III.4), on a introduit les cônes $\tilde{\mathcal{C}}(\pi_0, \pi_1)$ formés des $\zeta \in \mathbf{C}^{\mathcal{A}}$ vérifiant

$$\begin{aligned} Re\, \zeta_\alpha > 0 \quad &, \quad \forall\, \alpha \in \mathcal{A}\ , \\ Im\, \xi^0_\alpha > 0 \quad &, \quad \text{si } \pi_0\, \alpha > 1\ , \\ Im\, \xi^1_\alpha < 0 \quad &, \quad \text{si } \pi_1\, \alpha > 1\ . \end{aligned}$$

On a aussi introduit les sous-cônes :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{C}}_0(\pi_0, \pi_1) &= \{\lambda_{\alpha_0} > \lambda_{\alpha_1}\}\ , \\ \tilde{\mathcal{C}}_1(\pi_0, \pi_1) &= \{\lambda_{\alpha_0} < \lambda_{\alpha_1}\}\ , \\ \tilde{\mathcal{C}}^0(\pi_0, \pi_1) &= \{Im\, \zeta^* < 0\}\ , \\ \tilde{\mathcal{C}}^1(\pi_0, \pi_1) &= \{Im\, \zeta^* > 0\}\ , \end{aligned}$$

où $\quad \pi_0(\alpha_0) = \pi_1(\alpha_1) = d \quad$ et $\quad \zeta^* = \sum_\alpha \zeta_\alpha$.

La dynamique de l'extension naturelle de l'algorithme de Rauzy-Veech est alors donnée par

$$\tilde{\mathcal{R}} : ((\pi_0, \pi_1), \zeta) \to (R_\varepsilon(\pi_0, \pi_1), V^{-1}\zeta)\ ,$$

où $\zeta \in \tilde{\mathcal{C}}_\varepsilon(\pi_0, \pi_1)$, V est la matrice de $SL(\mathbf{Z}^{\mathcal{A}})$ associée à la flèche de type ε issue de (π_0, π_1), et $R_\varepsilon(\pi_0, \pi_1)$ est l'extrémité de cette flèche. L'image par V^{-1} de $\tilde{\mathcal{C}}_\varepsilon(\pi_0, \pi_1)$ est exactement égale à $\tilde{\mathcal{C}}(R_\varepsilon(\pi_0, \pi_1))$ (prop. 2 de III.4).

Le domaine de $\tilde{\mathcal{R}}$ est donc, à un ensemble de codimension 1 près, donné par

$$\tilde{\mathcal{C}} = \{(\pi_0, \pi_1), \zeta)\ ,\ \zeta \in \tilde{\mathcal{C}}(\pi_0, \pi_1)\}\ ,$$

avec les décompositions (toujours à un ensemble de codimension 1 près)

$$\tilde{\mathcal{C}} = \tilde{\mathcal{C}}_0 \cup \tilde{\mathcal{C}}_1 = \tilde{\mathcal{C}}^0 \cup \tilde{\mathcal{C}}^1 \ .$$

Suivant Zorich, on considère

$$\tilde{\mathcal{C}}_0^1 = \tilde{\mathcal{C}}_0 \cap \tilde{\mathcal{C}}^1 \ , \ \tilde{\mathcal{C}}_1^0 = \tilde{\mathcal{C}}_1 \cup \tilde{\mathcal{C}}^0$$

et l'application de premier retour $\tilde{\mathcal{Z}}$ de $\tilde{\mathcal{R}}$ dans $\tilde{\mathcal{C}}_0^1 \cup \tilde{\mathcal{C}}_1^0$. Comme $\tilde{\mathcal{R}}$ envoie $\tilde{\mathcal{C}}_\varepsilon$ sur $\tilde{\mathcal{C}}^\varepsilon$, $\tilde{\mathcal{Z}}$ échange $\tilde{\mathcal{C}}_0^1$ et $\tilde{\mathcal{C}}_1^0$.

L'application $\tilde{\mathcal{Z}}$ relève l'application $\mathcal{Z}$ définie sur le produit $\tilde{\mathcal{C}}$ de $Som(\mathcal{D})$ par le cône positif de $\mathbf{R}^{\mathcal{A}}$ comme suit : on écrit comme d'habitude $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_1$ (à un ensemble de codimension un près), où $\mathcal{C}_\varepsilon$ est le domaine $\{\lambda_{\alpha_\varepsilon} > \lambda_{\alpha_{1-\varepsilon}}\}$ de la flèche de type ε ; on pose ensuite

$$\mathcal{Z}(\omega) = \mathcal{R}^{n(\omega)}(\omega) \ ,$$

où $n(\omega)$ est le plus petit entier tel que ω et $\mathcal{R}^n(\omega)$ ne sont pas dans le même domaine $\mathcal{C}_\varepsilon$.

3 Mesures invariantes pour les extensions naturelles

On munit chaque cône $\tilde{\mathcal{C}}(\pi_0, \pi_1)$ de la restriction de la mesure de Lebesgue de $\mathbf{C}^{\mathcal{A}}$. Cela fournit une mesure sur $\tilde{\mathcal{C}}$ qu'on note m_0^* et qui est invariante par $\tilde{\mathcal{R}}$ puisque $\tilde{\mathcal{R}}$ est inversible (modulo sous-espaces de codimension un) et chaque matrice V appartient à $SL(\mathbf{Z}^{\mathcal{A}})$.

La restriction de m_0^* à $\tilde{\mathcal{C}}_1^0 \cup \tilde{\mathcal{C}}_0^1$, notée m_0, est évidemment invariante par l'application de retour $\tilde{\mathcal{Z}}$.

Etant donné $((\pi_0 \ , \ \pi_1), \zeta) \in \tilde{\mathcal{C}}$, nous pouvons construire une surface de translation et calculer son aire ; celle-ci est donnée par

$$A = \sum_\alpha \lambda_\alpha \, h_\alpha \ ,$$

avec $\lambda = Re\, \zeta \ , \ h = -\Omega(\pi_0, \pi_1) Im\, \zeta$.

D'après III.4 , la fonction A sur $\tilde{\mathcal{C}}$ est invariante par $\tilde{\mathcal{R}}$. On va donc pouvoir restreindre $\tilde{\mathcal{R}}, \tilde{\mathcal{Z}}, m_0^*, m_0$ au domaine $\{A \leq 1\}$; on note m_1^*, m_1 les restrictions des mesures, qui sont bien sûr invariantes par les restrictions des applications. Il n'y a cependant toujours pas de récurrence pour les applications considérées puisque les longueurs λ_α tendent vers 0.

Pour obtenir de la récurrence non triviale, on introduit le flot de Teichmuller (agissant sur les surfaces de translation construites à partir des points de $\mathcal{C}$). Quand on écrit $\zeta = \lambda + i\ \tau$, ce flot est donc défini par

$$U^t((\pi_0, \pi_1), \lambda + i\ \tau) = ((\pi_0, \pi_1), e^t\ \lambda + e^{-t} i\ \tau)\ .$$

On notera que $\tilde{\mathcal{C}}, \tilde{\mathcal{C}}_\varepsilon, \tilde{\mathcal{C}}^\varepsilon$ sont invariants par l'action du flot, ainsi donc que $\tilde{\mathcal{C}}_1^0$ et $\tilde{\mathcal{C}}_0^1$. L'aire A est aussi préservée par le flot. Les mesures m_0, m_1, m_0^*, m_1^* sont donc toutes invariantes par le flot de Teichmuller.

Le flot de Teichmuller permet de normaliser les longueurs horizontales données par les λ_α. Plus précisément, étant donnés

$$\mathcal{R}((\pi_0, \pi_1), \lambda) = ((\hat{\pi}_0, \hat{\pi}_1), \hat{\lambda})\ ,$$

avec $\lambda^* = \Sigma \lambda_\alpha$, $\hat{\lambda}^* = \Sigma\ \hat{\lambda}_\alpha$, on pose

$$t :=\ log\ \lambda^* - \log \hat{\lambda}^*\ ,$$

$$\mathcal{R}^\bullet((\pi_0, \pi_1), \lambda) = ((\hat{\pi}_0, \hat{\pi}_1), \hat{\lambda}\ e^t)$$

qu'on relève en

$$\mathcal{R}^\bullet((\pi_0, \pi_1), \zeta) = U^t \circ \tilde{\mathcal{R}}((\pi_0, \pi_1), \zeta)$$

pour $Re\ \zeta = \lambda$. Notons que U^t et $\tilde{\mathcal{R}}$ commutent.

La fonction λ^* sur $\tilde{\mathcal{C}}$ est invariante par $\mathcal{R}^\bullet$ et $\tilde{\mathcal{R}}^\bullet$.

Notons m_2^* la projection de m_1^* sur $\mathcal{C}$ on obtient une mesure m_2^* invariante par $\mathcal{R}$ et homogène en λ. On peut donc restreindre m_2^* au sous-espace de codimension $1\{\lambda^* = 1\}$; on obtient une mesure m^* qui est invariante par $\mathcal{R}^\bullet$ car t est constant le long des orbites du flot de Teichmuller.

On procède de même pour $\mathcal{Z}$, à ceci près qu'une normalisation différente est préférable (pour la simplicité de formules qui apparaîtront ultérieurement). Lorsque

$$\mathcal{Z}((\pi_0, \pi_1), \lambda) = ((\pi_0', \pi_1'), \lambda')\ ,$$

on pose

$$t = \log \hat{\lambda}^* - \log \hat{\lambda}'^*$$

où $\quad \hat{\lambda}^* = \sum_{\alpha \neq \alpha_{1-\varepsilon}} \lambda_\alpha \ , \ \pi_0\ \alpha_0 = \pi_1\ \alpha_1 = d$ et $\lambda_{\alpha_\varepsilon} > \lambda_{\alpha_{1-\varepsilon}}$ ($\hat{\lambda}'^*$ étant défini de façon analogue).

On définit alors $\mathcal{Z}^\bullet, \tilde{\mathcal{Z}}^\bullet$ à partir de $\mathcal{Z}$ comme $\mathcal{R}^\bullet, \tilde{\mathcal{R}}^\bullet$ à partir de $\mathcal{R}$, mais avec cette valeur de t qui rend $\hat{\lambda}^*$ invariant. On projette m_1 sur $\mathcal{C}$ pour obtenir une mesure m_2 qu'on restreint à $\{\hat{\lambda}^* = 1\}$ par homogénéité pour obtenir une mesure m.

4 Densités de m^* et m

Pour calculer la densité des mesures m, m^* (ou m_2, m_2^*) par rapport à la mesure de Lebesgue, nous devons calculer le volume des fibres des projections ayant servi à définir ces mesures.

Notons donc $\Gamma^* = \Gamma^*(\pi_0, \pi_1)$ le cône de $\mathbf{R}^{\mathcal{A}}$ formé des données de suspension τ qui vérifient (cf II.5)

$$(*) \qquad \begin{aligned} \sum_{\pi_0\beta < \pi_0\alpha} \tau_\beta > 0 \qquad \text{pour} \quad \pi_0\alpha > 1 \ , \\ \sum_{\pi_1\beta < \pi_1\alpha} \tau_\beta < 0 \qquad \text{pour} \quad \pi_1\alpha > 1 \ . \end{aligned}$$

Posons aussi $\tau^* = \sum \tau_\beta$ et

$$\Gamma_0 = \{\tau \in \Gamma^* \ , \ \tau^* > 0\}$$

$$\Gamma_1 = \{\tau \in \Gamma^* \ , \ \tau^* < 0\} \ .$$

La fibre dont nous avons à calculer le volume est $\Gamma^* \cap \{A \leq 1\}$ pour m^* (ou m_2^*). S'agissant de m (ou m_2), la fibre est égale à $\Gamma_0 \cap \{A \leq 1\}$ si $\lambda_{\alpha_0} > \lambda_{\alpha_1}$, à $\Gamma_1 \cap \{A \leq 1\}$ si $\lambda_{\alpha_0} < \lambda_{\alpha_1}$.

Pour fixer les idées, nous supposerons que $\lambda_{\alpha_0} > \lambda_{\alpha_1}$, le calcul étant complètement symétrique dans l'autre cas.

Soit Γ un cône **simplicial** ouvert contenu dans Γ^*. Choisissons une base $\tau^{(1)}, \ldots, \tau^{(d)}$ de $\mathbf{R}^{\mathcal{A}}$ de volume 1 engendrant Γ :

$$\Gamma = \{\sum_1^d t_i\ \tau^{(i)} \quad , \quad t_i > 0\} \ .$$

Posons $h^{(i)} = -\Omega\, \tau^{(i)}$ pour $1 \leq i \leq d$. Comme l'aire A est donnée par

$$\begin{aligned} A &= \textstyle\sum_\alpha \lambda_\alpha\, h_\alpha \\ &= \textstyle\sum_1^d t_i \sum_\alpha \lambda_\alpha\, h_\alpha^{(i)} , \end{aligned}$$

on a

$$vol(\Gamma \cap \{A \leq 1\}) = \frac{1}{d!}(\Pi_{i=1}^d (\sum_\alpha \lambda_\alpha\, h_\alpha^{(i)}))^{-1}$$

Notons que les $h_\alpha^{(i)}$ sont positifs ou nuls puisque les vecteurs $\tau^{(i)}$ appartiennent à l'adhérence de Γ^*. Notons aussi qu'on peut décomposer (à un ensemble de codimension un près) le cône polyédral Γ^* en un nombre fini de cônes simpliciaux Γ du type précédent. La densité de m_2^* (ou m^*) est donc une fonction rationnelle homogène de degré $-d$.

Pour comprendre le comportement de la densité près du bord du cône positif, il faut savoir comment s'annulent au bord du cône positif les formes linéaires $\sum_\alpha \lambda_\alpha\, h_\alpha^{(j)}$, $1 \leq j \leq d$.

Dans cette optique, posons, pour $1 \leq j \leq d$

$$W_j^* = \{\alpha \in \mathcal{A} \ ,\ h_\alpha^{(j)} \neq 0\} \ .$$

Soit X une partie de $\mathcal{A}$, non vide et distincte de $\mathcal{A}$. Notons F_X le sous-espace de $\mathbf{R}^{\mathcal{A}}$ d'équation $\{\lambda_\alpha = 0 \ ,\ \forall\, \alpha \in X^c\ \}$. La forme linéaire $\sum \lambda_\alpha\, h_\alpha^{(j)}$ s'annule donc identiquement sur F_X si et seulement si $W_j^* \cap X = \phi$, et nous posons

$$m^*(X) = \#\{j, W_j^* \cap X = \phi\} \ .$$

Quand on s'intéresse à m ou m_2, il faut supposer que le cône simplicial ouvert est contenu dans Γ_0 (en supposant $\lambda_{\alpha_0} > \lambda_{\alpha_1}$).

La formule pour le volume de la fibre est la même, mais ne nous concerne que si $\lambda_{\alpha_0} > \lambda_{\alpha_1}$). On pose donc

$$\hat{\lambda}_\alpha = \begin{cases} \lambda_\alpha & \text{si} \quad \alpha \neq \alpha_0 \ , \\ \lambda_{\alpha_0} - \lambda_{\alpha_1} & \text{si} \quad \alpha = \alpha_0 \ , \end{cases}$$

$$\hat{h}_\alpha = \begin{cases} h_\alpha & \text{si} \quad \alpha \neq \alpha_1 \ , \\ h_{\alpha_0} + h_{\alpha_1} & \text{si} \quad \alpha = \alpha_1 \ . \end{cases}$$

On a alors $A = \sum \ \lambda_\alpha h_\alpha = \sum \hat{\lambda}_\alpha \hat{h}_\alpha$ et on écrit

$$vol(\Gamma \cap \{A \leq 1\}) = \frac{1}{d!}(\prod_{i=1}^{d}(\sum_{\alpha} \hat{\lambda}_\alpha \hat{h}_\alpha^{(i)} \ ))^{-1}$$

Pour comprendre comment le second membre explose au bord du cône $\{\hat{\lambda}_\alpha > 0\}$, on définit

$$W_j = \{\alpha \in \mathcal{A}, \hat{h}_\alpha^{(j)} \neq 0\} \ ,$$

$$m(X) = \#\{j, W_j \cap X = \phi\} \ .$$

Remarque : La densité de m (ou m_2) dans $\{\lambda_{\alpha_0} > \lambda_{\alpha_1}\}$ est donc donnée par une fonction rationnelle $X^0_{\pi_0,\pi_1}$, homogène de degré $-d$; de même, dans $\{\lambda_{\alpha_1} > \lambda_{\alpha_0}\}$, la densité est donnée par une fonction rationnelle $X^1_{\pi_0,\pi_1}$. La densité de m^* (ou m_2^*) dans le cône positif est donnée par

$$X_{\pi_0,\pi_1} = X^0_{\pi_0,\pi_1} + X^1_{\pi_0,\pi_1} \ .$$

On va voir que X^0 est intégrable dans $\{\hat{\lambda}^* = 1 \ , \lambda_{\alpha_0} > \lambda_{\alpha_1}\}, X^1$ est intégrable dans $\{\hat{\lambda}^* = 1 \ , \lambda_{\alpha_1} > \lambda_{\alpha_0}\}$, mais la somme X n'est pas intégrable dans le projectivisé Δ du cône positif ! Ceci tient à la disposition particulière des pôles de ces densités.

5 Le lemme fondamental

Soit X une partie de $\mathcal{A}$, non vide et distincte de $\mathcal{A}$. On a vu que le terme de la densité de m^* (resp. m) provenant du cône simplicial λ a un pôle sur la facette $\{\lambda_\alpha = 0, \alpha \in X^c\}$ (resp. $\{\hat{\lambda}_\alpha = 0, \alpha \in X^c\}$) d'ordre $m^*(X)$ (resp. $m(X)$). Notons E^*_X (resp. E_X) le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^{\mathcal{A}}$ engendré par l'intersection de l'adhérence $\bar{\Gamma}^*$ (resp. $\bar{\Gamma}_0$) avec le sous-espace des τ tels que $h = -\Omega\tau$ vérifie $h_\alpha = 0$ pour tout $\alpha \in X$).

Lorsque Γ décrit les cônes simpliciaux contenus dans Γ^* (resp. dans Γ_0), ou plus simplement parcourt les éléments d'une décomposition de Γ^* (resp. Γ_0) en cônes simpliciaux, la borne supérieure de $m^*(X)$ (resp. de $m(X)$) est égale à la dimension de E^*_X (resp. de E_X).

La dimension de E^*_X (resp. de E_X) est donc l'ordre du pôle de la densité de m_2^* (resp. de m_2) sur la facette $\{\lambda_\alpha = 0 \ , \alpha \in X^c\}$ (resp $\{\hat{\lambda}_\alpha = 0 \ , \alpha \in X^c\}$).

Il est facile de voir qu'on a toujours $E^*_X \supset E_X$: en effet, $\Gamma_0 \subset \Gamma^*$ et $\hat{h}_\alpha = 0$ entraîne $h_\alpha = 0$ dans $\overline{\Gamma}^*$ car les hauteurs sont positives ou nulles.

Proposition 11 : *Pour toute partie X de $\mathcal{A}$, non vide et distincte de $\mathcal{A}$, on a*

$$\text{codim } E_X^* \geq \# X \ ,$$

$$\text{codim } E_X > \# X \ .$$

LEMME 6 – 1 - *Soit $\tau \in E_X^* \cap \overline{\Gamma}^*$. Pour tout $\alpha \in X$, on a $Im\ \xi_\alpha^0 = Im\ \xi_\alpha^1 = 0$. Pour tout $\alpha \neq \alpha_0, \alpha_1, \alpha \in X$ (avec $\pi_0\alpha_0 = \pi_1\alpha_1 = d$), on a $\tau_\alpha = 0$. Si α_0 et α_1 appartiennent à X, on a $\tau_{\alpha_0} = \tau_{\alpha_1} = 0$.*

2 - *Soit $\tau \in E_X \cap \overline{\Gamma}_0$. Pour tout $\alpha \in X$, on a $Im\ \xi_\alpha^0 = Im\ \xi_\alpha^1 = \tau_\alpha = 0$. De plus, si $\alpha_1 \in X$, on a $Im\ \xi_{\alpha_0}^0 = Im\ \xi_{\alpha_0}^1 = \tau_{\alpha_0} = 0$.*

Preuve du lemme : 1 - Pour tout $\alpha \in X$, on a $h_\alpha = Im\ \xi_\alpha^0 - Im\ \xi_\alpha^1 = 0$ avec $Im\ \xi_\alpha^0 \geq 0$ et $Im\ \xi_\alpha^1 \leq 0$, donc $Im\ \xi_\alpha^0 = Im\ \xi_\alpha^1 = 0$. Si $\alpha \neq \alpha_0, \alpha_1$, on a aussi $Im\ \xi_\alpha^0 + \tau_\alpha \geq 0$ et $Im\ \xi_\alpha^1 + \tau_\alpha \leq 0$, donc $\tau_\alpha = 0$. Si $\alpha_0, \alpha_1 \in X$, on a $Im\ \xi_{\alpha_0}^1 + \tau_{\alpha_0} \leq 0$, $Im\ \xi_{\alpha_1}^0 + \tau_{\alpha_1} \geq 0, \tau^* = Im\ \xi_{\alpha_0}^0 + \tau_{\alpha_0} = Im\ \xi_{\alpha_1}^1 + \tau_{\alpha_1}$, d'où $\tau_{\alpha_0} = \tau_{\alpha_1} = 0$.
2 - Pour tout $\alpha \in X$, on a $\hat{h}_\alpha = 0$ donc $h_\alpha = 0$ et $Im\ \xi_\alpha^0 = Im\ \xi_\alpha^1 = 0$ comme précédemment. Si $\alpha \neq \alpha_1$, on a $Im\ \xi_\alpha^0 + \tau_\alpha \geq 0$ (même si $\alpha = \alpha_0$) et $Im\ \xi_\alpha^1 + \tau_\alpha \leq 0$, donc $\tau_\alpha = 0$. Supposons que $\alpha_1 \in X$. Alors $\hat{h}_{\alpha_1} = h_{\alpha_1} + h_{\alpha_0} = 0$, d'où $h_{\alpha_0} = h_{\alpha_1} = 0$ et $Im\ \xi_{\alpha_0}^0 = Im\ \xi_{\alpha_0}^1 = 0$.

On obtient alors $\tau_{\alpha_0} = \tau_{\alpha_1} = 0$ comme dans la première partie du lemme.

□

Preuve de la proposition : 1 - Traitons d'abord le cas de E_X^*. On exhibe des formes linéaires indépendantes s'annulant sur $E_X^* \cap \overline{\Gamma}^*$, donc sur E_X^*, en utilisant le lemme. Si $1 \notin \pi_0(X)$, les formes $Im\ \xi_\alpha^0$, $\alpha \in X$, conviennent.

De même si $1 \notin \pi_1(X)$ avec les formes $Im\ \xi_\alpha^1$. S'il existe $\beta \in X$, distinct de α_0 et α_1, tel que l'élément suivant pour π_0 (resp. π_1) n'appartient pas à X, les formes $Im\ \xi_\alpha^0$ (resp. $Im\ \xi_\alpha^1$), pour $\alpha \in X, \pi_0\ \alpha > 1$ (resp. $\pi_1\alpha > 1$), jointes à τ_β, conviennent.

Dans le cas restant, on a α_0 et $\alpha_1 \in X$, donc les formes $Im\ \xi_\alpha^0(\alpha \in X, \pi_0\alpha > 1)$ et τ_{α_0} conviennent.

2 - Traitons maintenant le cas de E_X. Si $\pi_0(X)$ n'est pas un segment initial, on conclut en utilisant les formes $Im\ \xi_\alpha^0$ telles que $\alpha \in X, \pi_0\alpha > 1$ et les formes τ_β, où β est un élément de X dont le successeur pour π_0 n'appartient pas à X (le cas $\beta = \alpha_0$ étant autorisé si $\alpha_0 \in X$).

Supposons que $\pi_0(X)$ soit un intervalle initial. Alors $\pi_1(X)$ n'est pas un intervalle initial. Si $\alpha_1 \notin X$, on utilise les formes $Im\ \xi^1_\alpha$, avec $\alpha \in X, \pi_1\ \alpha > 1$ et les formes τ_beta, où β est un élément de X dont le sucesseur pour π_1 n'appartient pas à X.

Si $\alpha_1 \in X$, on utilise les formes $Im\ \xi^0_\alpha$, avec $\alpha \in X, \pi_0\ \alpha > 1$, la forme τ_{α_0} et la forme τ_β, où β est le dernier élément de X pour π_0.

Dans tous les cas, la forme triangulaire du système de formes considéré garantit l'indépendance et prouve les inégalités annoncées sur la codimension des sous-espaces considérés.

$\square$

6 Intégrabilité de la densité de m

Rappelons qu'on utilise la normalisation $\{\hat{\lambda}^* = 1\}$ dans le cône $\{\hat{\lambda}_\alpha > 0\}$. On décompose le simplexe

$$\hat{\Delta} = \{\hat{\lambda} \in \mathbf{R}^{\mathcal{A}}, \hat{\lambda}_\alpha > 0, \hat{\lambda}^* = 1\}$$

en morceaux $\hat{\Delta}(\underline{n})$ de la façon suivante. L'ensemble des indices est

$$\mathcal{N} = \{\underline{n} \in \mathbf{N}^{\mathcal{A}},\ \min_\alpha\ n_\alpha = 0\}.$$

Pour $\underline{n} \in \mathcal{N}, \hat{\Delta}(\underline{n})$ est constitué des $\hat{\lambda} \in \hat{\Delta}$ tels que $\hat{\lambda}_\alpha \geq \frac{1}{2d}$ si $n_\alpha = 0$ et

$$\frac{1}{2d}\ 2^{1-n_\alpha} > \hat{\lambda}_\alpha \geq \frac{1}{2d}\ 2^{-n_\alpha}$$

si $n_\alpha > 0$. On a bien une partition

$$\hat{\Delta} = \bigsqcup_{\mathcal{N}}\ \hat{\Delta}(\underline{n}).$$

Dans chaque $\hat{\Delta}(\underline{n})$ l'ordre de grandeur de chacun des $\hat{\lambda}_\alpha$ est fixé. Le volume (pour la mesure de Lebesgue) de $\hat{\Delta}(\underline{n})$ est donné par

$$c^{-1} \leq 2^{|\underline{n}|_1}\ vol\hat{\Delta}(\underline{n}) \leq c\ ,$$

où $|\underline{n}|_1 = \sum_\alpha\ n_\alpha$ et c ne dépend que de d.

Soit Γ un cône simplicial contenu dans Γ_0 comme en V.4 (à nouveau, nous traitons le cas $\lambda_{\alpha_0} > \lambda_{\alpha_1}$, l'autre cas étant symétrique) ; d'après la discussion de V.4, la contribution de Γ à la densité de m est dans $\Delta(\underline{n})$ du même ordre que

$$2^{\sum_{j=1}^{d} \min_{W_j}\ n_\alpha}.$$

Fixons un instant $\underline{n} \in \mathcal{N}$. Notons

$$0 = n^0 < n^1 < \dots$$

les valeurs prises par les n_α ; pour $i \geq 0$, désignons paar V^i l'ensemble des α tels que $n_\alpha \geq n^i$, et par $\tilde{V}^i$ l'ensemble des $j \in \{1, \dots, d\}$ tels que $W_j \subset V^i$. On a

$$\begin{aligned} |\underline{n}|_1 &= \sum_{i \geq 0} n^i(\#(V^i - V^{i+1})) \\ &= \sum_{i > 0} (n^i - n^{i-1}) \# V^i \ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{d} \min_{W_j} n_\alpha &= \sum_{i \geq 0} n^i(\#(\tilde{V}^i - \tilde{V}^{i+1})) \\ &= \sum_{i > 0} (n^i - n^{i-1}) \# \tilde{V}^i \ . \end{aligned}$$

Or, d'après la proposition 11, on a, pour $0 < \# V^i < d$

$$\begin{aligned} \# \tilde{V}^i &= m((V^i)^c) \\ &\leq \dim E_{V^{ic}} \ . \\ &< d - \#(V^i)^c = \# V^i \ . \end{aligned}$$

On en déduit qu'on a

$$|\underline{n}|_1 \geq |\underline{n}|_\infty + \sum_1^d \min_{W_j} \ n_\alpha$$

(en notant comme d'habitude $|\underline{n}|_\infty = \max_\alpha |n_\alpha|$)

On conclut que la densité χ de m par rapport à la mesure de Lebesgue vérifie dans $\Delta(\underline{n})$:

$$\chi \ vol \ \Delta(\underline{n}) \leq c \ 2^{-|\underline{n}|_\infty}$$

Comme le nombre de multiindices $\underline{n}$ tels que $|\underline{n}|_\infty = N$ est d'ordre N^{d-2} lorsque N est grand, on conclut avec Zorich que la mesure m est finie. On a d'ailleurs montré l'estimation.

Proposition 12 : *La mesure m vérifie, pour tout $\varepsilon > 0$:* $m(\{\min_\alpha \hat{\lambda}_\alpha < \varepsilon\}) \leq c(\log \ \varepsilon^{-1})^{d-2} \ \varepsilon$,

où la constante c ne dépend que de d.

7 Preuve de la version faible de la proposition 10

Nous montrons ici la version de la proposition 10 qui suffit pour la démonstration du théorème 3 de IV.3. La version forte sera démontrée plus loin. Nous voulons donc montrer que, pour toute donnée combinatoire irréductible, et presque tout choix de vecteur de longueurs λ, il existe $N > 0$ tel qu'on ait, pour une infinité d'entiers $n \geq 0$ et tous $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$

$$Q^{(n,n+N)}_{\alpha\beta} > 0 \ .$$

C'est une application immédiate du théorème de récurrence de Poincaré. Soit λ un vecteur de longueurs. D'après la proposition 5 de III.7, il existe N tel qu'on ait

$$Q^{(0,N)}_{\alpha\beta} > 0 \ , \ \forall \ \alpha, \beta \in \mathcal{A}$$

D'après le théorème de récurrence de Poincaré, il existe presque sûrement (en λ) une infinité d'entiers n tels qu'on ait

$$\mathcal{Z}^n((\pi_0, \pi_1), \lambda) = ((\pi_0, \pi_1), \lambda^{(n)}) \ ,$$

$\lambda^{(n)}$ étant suffisamment proche de λ pour qu'on ait $Q^{(0,N)}(\lambda^{(n)}) = Q^{(0,N)}(\lambda)$. Ceci démontre la version faible de la prop. 10. Observons que le même argument donnera la version forte dès que nous saurons que la mesure m est *ergodique*.

8 Ergodicité des mesures invariantes

Nous allons voir, suivant Veech, que la dynamique $\mathcal{R}$ de l'algorithme de Rauzy-Veech et son accélération $\mathcal{Z}$ sont ergodiques par rapport à la mesure de Lebesgue (qui est quasi-invariante) ; il revient au même de dire que les mesures invariantes construites respectivement par Veech et Zorich sont ergodiques.

La preuve de l'ergodicité suit un schéma classique qui repose sur un contrôle de distortion, c'est-à-dire de variation du jacobien.

Commençons par calculer le jacobien en question.

Munissons le projectivisé Δ du cône positif de $\mathbf{R}^{\mathcal{A}}$ de la mesure de Lebesgue induite par l'identification de Δ avec le simplexe $\{\Sigma \ \lambda_\alpha = 1 \ , \ \lambda_\alpha > 0\}$.

Soit $Q \in SL(\mathbf{R}^{\mathcal{A}})$ une matrice unimodulaire à coefficients positifs ou nuls ; on note encore Q l'application projective de Δ dans lui-même induite par Q. Pour $\beta \in \mathcal{A}$, on désigne par Q_β la somme des coefficients de Q dans la colonne d'indice β.

LEMME 7 – *Le jacobien de l'application projective induite par Q, en un point $\lambda = (\lambda_\alpha)$ normalisé par $\lambda^* = 1$, est égal à*

$$(\sum_{\beta \in \mathcal{A}} Q_\beta \, \lambda_\beta)^{-d} \, .$$

Preuve : En effet Q est unimodulaire et $(\Sigma \, Q_\beta \, \lambda_\beta)^{-1}$ est le rapport de l'homothétie qui ramène le vecteur $Q(\lambda)$ dans le simplexe normalisé.

□

En particulier, pour avoir un bon contrôle du jacobien, il suffit de contrôler la taille relative des Q_β.

Nous pouvons maintenant aborder la preuve du théorème suivant.

THÉORÈME 4 (Veech) – *Soient $\mathcal{D}$ un diagramme de Rauzy, Δ le projectivisé du cône positif de $\mathbf{R}^{\mathcal{A}}$ et $\mathcal{R}$ la transformation de Rauzy-Veech considérée comme une transformation projective par morceaux de $Som\mathcal{D} \times \Delta$. Alors $\mathcal{R}$ et son accélération $\mathcal{Z}$ sont ergodiques par rapport à la mesure de Lebesgue. Les mesures invariantes, absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue, sont donc uniquement déterminées par cette propriété, et sont ergodiques.*

Preuve : Comme un ensemble borélien invariant par $\mathcal{R}$ l'est aussi par $\mathcal{Z}$, il suffit de voir que $\mathcal{Z}$ est ergodique.

Considérons la partition η du domaine $X = Som\mathcal{D} \times \Delta$ de $\mathcal{Z}$ par les arêtes de $\mathcal{D}$: les atomes de η sont les simplexes (projectifs) $\{(\pi_0, \pi_1, \lambda), \lambda_\alpha > 0 \ , \ \lambda_{\alpha_\varepsilon} > \lambda_{\alpha_{1-\varepsilon}}\}$ associés aux différentes arêtes de $\mathcal{D}$.

Pour $n \geq 0$, notons η_n la partition

$$\eta_n = \eta \wedge \mathcal{Z}^{-1}\eta \wedge \cdots \wedge \mathcal{Z}^{-n}\eta \, .$$

D'après le théorème 3, pour Lebesgue presque tout $x \in X$, l'intersection des atomes $\eta_n(x)$ de η_n qui contiennent x est réduite à x.

La propriété suivante en résulte : pour toute partie borélienne Y de X, et pour presque tout point y de Y, on a

$$(*) \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{Leb\ (\eta_n(y)\cap Y)}{Leb\ \eta_n(y)} = 1\ .$$

Soit Y une partie borélienne de X, invariante par $\mathcal{Z}$ telle que $Leb\ (Y) > 0$. D'après la version faible de la proposition 10, pour presque tout $y \in Y$, il existe $N > 0$ et une infinité d'entiers n tels qu'on ait

$$Q^{n,n+N}_{\alpha,\beta} > 0\ ,\ \forall\, \alpha, \beta \in \mathcal{A}$$

(où $Q^{m,n)}$ est la suite de matrices associée au développement de Rauzy-Veech de y). Un coup d'oeil au paragraphe V.7. permet de préciser cette affirmation : il existe un entier $N' > 0$ tel que la matrice $Q^{0,N}$ associée aux N' premières itérations de $\mathcal{Z}$ en y vérifie $Q^{(0,N)}_{\alpha,\beta} > 0$ pour tous $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$; et de plus, pour une infinité d'entiers n', le point $\mathcal{Z}^{n'}(y)$ appartient à la même composante du domaine de $\mathcal{Z}^{N'}$ que y. En notant $Q^{(0,n)}$ la matrice associée aux n' premières itérations de $\mathcal{Z}$ en y, on a donc

$$1 \le Q^{(n,n+N)}_{\alpha,\beta} = Q^{(0,N)}_{\alpha,\beta} \le C_N$$

pour tous $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$. Or on a

$$Q^{(n+N)}_{\beta} = \sum_{\alpha} Q^{(n)}_{\alpha}\ Q^{(n,n+N)}_{\alpha,\beta}$$

dont on déduit

$$(**) \qquad \max_{\beta}\ Q^{(n+N)}_{\beta} \le C_N\ \min_{\beta}\ Q^{(n+N)}_{\beta}\ .$$

Pour $n \ge 0$, notons $\eta^n(y)$ l'atome de η image par $\mathcal{Z}^n$ de $\eta_n(y)$. D'après le lemme 7 et les relations (*), (**), tout atome de η, qui est égal à $\eta^{n'+N'}(y)$ pour une infinité d'entiers n' comme ci-dessus, est contenu dans Y modulo un ensemble de mesure de Lebesgue nulle. Donc Y contient ($mod.0$) un atome de η. La connexité de $\mathcal{D}$ implique qu'on doit alors avoir $Leb(X - Y) = 0$. □

9 Exposants de Lyapounov

Soit $x = (\pi_0, \pi_1, \lambda)$ un point du domaine X de l'application de Zorich $\mathcal{Z}$ (vue au niveau projectif). Ecrivons

$$\mathcal{Z}(x) = (\hat{\pi}_0, \hat{\pi}_1, Z_1(x)^{-1}(\lambda))\ ,$$

où $Z_1(x)$ est le premier terme du développement accéléré en fraction continue de x. (cf V.8).

L'application $Z_1(x)$ dans la formule ci-dessus doit être vue au niveau projectif, mais on est évidemment conduit à considérer le produit gauche $\mathcal{Z}_1$ au-dessus de $\mathcal{Z}$ défini par

$$\begin{array}{ccc} X \times \mathbf{R}^{\mathcal{A}} & \rightarrow & X \times \mathbf{R}^{\mathcal{A}} \\ (x, v) & \mapsto & (\mathcal{Z}(x), Z_1(x)^{-1} v) \end{array}$$

ainsi d'ailleurs que le dual $\mathcal{Z}_1^*$:

$$\begin{array}{ccc} X \times \mathbf{R}^{\mathcal{A}} & \rightarrow & X \times \mathbf{R}^{\mathcal{A}} \\ (x, w) & \mapsto & (\mathcal{Z}(x), t_{Z_1(x) w} \end{array}$$

(strictement parlant, l'espace $\mathbf{R}^{\mathcal{A}}$ qui apparait ici est le dual du précédent).

Nous sommes en mesure d'appliquer le théorème ergodique multiplicatif d'Oseledets car la condition d'intégrabilité requise, celle de $\log \|Z_1\|$ et de $\log \|Z_1^{-1}\|$, est amplement satisfaite d'après la prop. 2 :

LEMME 8 – *La mesure de Zorich m sur X vérifie, pour tout $1 > \varepsilon > 0$:*

$$m(\{\max \|Z_1\|, \|Z_1^{-1}\| > \varepsilon^{-1}\}) \leq c(\log \varepsilon^{-1})^{d-2} \varepsilon \ .$$

Preuve : En effet, si Z_1 est le résultat de n opérations élémentaires de Rauzy-Veech, on a $\|Z_1\|_\infty = \|Z_1^{-1}\|_\infty = n + 1$ et $\min\limits_{\alpha} \hat{\lambda}_\alpha \leq n^{-1}$, d'où le résultat d'après la prop. 12 .

□

Le sous-espace localement constant $Ker\ \Omega$ est invariant par $\mathcal{Z}_1$. D'après le lemme 4 du chapitre IV, la dynamique sur ce sous-espace est triviale, en particulier les $d - 2g$ exposants de Lyapounov correspondants sont identiquement nuls.

La dynamique de $\mathcal{Z}_1$, sur le quotient par $Ker\ \Omega$, est conjuguée via Ω à la dynamique de $\mathcal{Z}_1^*$ sur le sous-espace localement constant invariant $Im\ \Omega$. Cela résulte du caractère symplectique des matrices V et donc aussi Z_1.

Comme la mesure m est ergodique, les exposants de Lyapounov de $\mathcal{Z}_1$ et $\mathcal{Z}_1^*$ sont presque partout constants. Notons $\theta_1 \geq \theta_2 \geq \cdots \geq \theta_d$ les exposants de $\mathcal{Z}_1$, comptés avec multiplicité et rangés par ordre décroissant. On a donc le résultat suivant.

Proposition 13 : *Les θ_i sont aussi les exposants de Lyapounov de $\mathcal{Z}_1^*$. On a de plus*

$$\theta_i + \theta_{d+1-i} = 0 \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq d \ ,$$

$$\theta_i = 0 \qquad\qquad \text{pour} \quad g < i \leq d - g \ .$$

Le résultat suivant s'inscrit dans la continuité du théorème de Perron-Frobenius.

THÉORÈME 5 (Veech) – *On a $\theta_1 > \theta_2, \theta_d < \theta_{d-1}$.*

Preuve : D'après la prop. 14, il suffit de montrer la seconde assertion.

Comme la mesure de Zorich m est ergodique, la conclusion de la prop. 10 est valide, et on sait même que pour presque tout $x \in X$, il existe un ensemble d'entiers n de densité positive tels qu'on a

$$Q^{(n,n+N)}_{\alpha,\beta} > 0 \ , \ \forall \, \alpha, \beta \in \mathcal{A}$$

où N est un entier, indépendant de x. On en déduit, comme dans la preuve du théorème 3, que les diamètres des images $Q^{(0,n)}(\Delta)$ tendent exponentiellement vite vers 0 pour presque tout $x \in X$. Or, l'application tangente à $\mathcal{Z}$ en un point $x = (\pi_0, \pi_1, \lambda)$ de X est donnée par l'application induite par $Z_1(x)^{-1}$ de $\mathbf{R}^{\mathcal{A}}/\mathbf{R}\lambda$ vers $\mathbf{R}^{\mathcal{A}}/\mathbf{R}\hat{\lambda}$, avec $(\hat{\lambda} = Z_1(x)^{-1}(\lambda)$. La contraction exponentielle constatée ci-dessus mène donc à la conclusion suivante : pour presque tout $x = (\pi_0, \pi_1, \lambda) \in X$, il existe une sous-suite d'entiers n_k telle qu'on ait, pour tout vecteur $v \in \mathbf{R}^{\mathcal{A}}$ non multiple de λ

$$\limsup_{k \to +\infty} \frac{1}{n_k} \log \frac{\|[Q^{0,n_k})]^{-1}(\lambda)\|}{\|[Q^{0,n_k})]^{-1}(v)\|} < 0$$

Clairement, ceci n'est possible que si on a $\theta_d < \theta_{d-1}$, la fibre $\mathbf{R}\lambda$ du fibré tautologique au-dessus de X étant associée au plus petit exposant de Lyapounov θ_d .

Remarques 1 - On vient de voir que le fibré tautologique des vecteurs de longueurs est associé au plus petit exposant de Lyapounov θ_d. Le plus petit exposant pour le produit gauche $\mathcal{Z}_1^*$ est aussi θ_d, et le fibré associé et cette fois le fibré des vecteurs de translation.

2 - Le lecteur se convaincra facilement que les conclusions de la prop. 13 et du théorème 5 sont valides pour toute mesure finie μ invariante par Z, ergodique, pour laquelle l'hypothèse d'intégrabilité du théorème d'Oseledets est vérifiée. C'est par exemple le cas pour les mesures atomiques associées aux orbites périodiques de Z. Les résultats de Forni et Avila-Viana ci-dessous ne sont par contre pas valables dans cette généralité.

On conclut ce numéro par deux résultats qui renforcent la prop. 13 et le théorème 5, mais dont on ne donnera pas de dmonstration.

THÉORÈME 6 (Forni) – *On a* $\theta_g > 0$.

THÉORÈME 7 (Avila-Viana) – *On a* $\theta_1 > \theta_2 > \cdots > \theta_g > 0$.

10 Accélérations d'ordre supérieur

Soit $\mathcal{D}$ un diagramme de Rauzy.

Rappelons que l'application de Zorich $\mathcal{Z}$ est définie à partir de l'application de Rauzy-Veech $\mathcal{R}$ de la façon suivante : on itère $\mathcal{R}$ tant que le type de l'arête correspondante de $\mathcal{D}$ reste le même.

Rappelons qu'à chaque arête de $\mathcal{D}$ est associé non seulement un type (0 ou 1) mais un nom (un élément de $\mathcal{A}$) qui est la dernière lettre de $\mathcal{A}$ pour π_0 ou π_1 (suivant que le type est 0 ou 1).

Pour une arête de type ε, la bijection π_ε est la même à l'origine et à l'extrêmité de l'arête. Par conséquent, le long d'un chemin de $\mathcal{D}$, il y a changement de nom exactement en même temps qu'il y a changement de type.

L'application $\mathcal{Z}$ est donc obtenue par itération de $\mathcal{R}$ tant que le nom des arêtes parcourues reste le même.

Cela suggère la généralisation suivante.

Définitions

1 - Soit $\mathcal{B}$ une partie de $\mathcal{A}$, non vide et distincte de $\mathcal{A}$. Un $\mathcal{B}$-chemin est un chemin dans $\mathcal{D}$ dont les noms des arêtes appartiennent à $\mathcal{B}$.

2 - Soit $1 \leq D < d$. Un D-chemin est un chemin dans $\mathcal{D}$ dont les noms des arêtes prennent au plus D valeurs. Il existe donc une partie $\mathcal{B}$ avec $\#\mathcal{B} = D$ telle que ce chemin soit un $\mathcal{B}$-chemin.

3 - Soit $\underline{\gamma} = (\gamma^{(n)})_{n\geq 1}$ un chemin infini dans $\mathcal{D}$. Un $\mathcal{B}$-segment (resp. $\mathcal{D}$-segment) est un segment $(\gamma^{(n)})_{N<n\leq N'}$ qui est un $\mathcal{B}$-chemin (resp. D-chemin). Il est dit maximal si $(\gamma^{(n)})_{N<n\leq N'+1}$ n'est pas un $\mathcal{B}$-segment (resp. un D-segment).

4 - Soit $\underline{\gamma} = (\gamma^{(n)})_{n\geq 1}$ un chemin infini plein dans $\mathcal{D}$. Soit $1 \leq D < d$. La décomposition de $\underline{\gamma}$ en D-segments maximaux est donnée par la suite $(n_D(k))_{k\geq 0}$ telle que $n_D(0) = 0$ et, pour tout $k > 0$, le segment

$$(\gamma^{(n)})_{n_D(k-1)<n\leq n_D(k)}$$

est un D-segment maximal. On notera $Z_D(k)$ le produit des matrices V associées aux arêtes de ce segment :

$$Z_D(k) = V^{n_D(k-1)+1} \cdots V^{n_D(k)}$$

Remarque : Le cas $D = 1$ est celui considéré par Zorich. L'autre cas intéressant est, comme on le verra ci-dessous, le cas $D = d-1$. Les cas intermédiaires $1 < D < d-1$ (pour $d \geq 4$) ont un rôle plus technique.

L'utilité de la décomposition en D-segments maximaux, pour $D = d-1$, résulte du fait suivant, à comparer avec la proposition 5 de III.7.

Proposition 14 : *Soit $\underline{\gamma} = (\gamma^{(n)})_{n\geq 1}$ un chemin infini plein dans $\mathcal{D}$.*

Lorsque $d = 2$, les coefficients de chaque produit $Z_1(k)\ Z_1(k+1)$ sont strictement positifs.

Lorsque $d \geq 3$, les coefficients de chaque produit $Z_{d-1}(k) \cdots Z_{d-1}(k+2d-4)$ sont strictement positifs.

Preuve : L'assertion pour $d = 2$ est immédiate. On suppose $d \geq 3$ et on reprend la preuve de la proposition 5 de III.7.

Soient donc α, β des éléments distincts de $\mathcal{A}$.

On se ramène immédiatement au cas $k = 1$ et on doit montrer qu'on a

$$Q_{\alpha\beta}^{n(2d-3)} > 0$$

où on écrit $n(\ell)$ pour $n_{d-1}(\ell)$.

On pose $\alpha = \alpha_1$; on définit n_1 comme le plus petit entier n tel que le nom de $\gamma^{(n)}$ est α_1 ; on a donc

$$n_1 \leq n(1) + 1 \; .$$

On appelle α_2 le nom de l'arête distincte de $\gamma^{(n)}$ mais ayant même origine. On a $Q^{(n_1)}_{\alpha_1,\alpha_2} > 0$ et on conclut si $\alpha_2 = \beta$. Sinon, on définit n'_1 comme le plus petit entier $n > n_1$ tel que le nom de $\gamma^{(n)}$ n'est ni α_1, ni α_2. On a donc

$$n'_1 \leq n(2) + 1 \; .$$

On définit ensuite n_2 comme le plus petit entier $n > n'_1$ tel que le nom de $\gamma^{(n)}$ est α_1 ou α_2. On a donc

$$n_2 \leq n(3) \; ,$$

$$Q^{(n_2)}_{\alpha_1\alpha_3} > 0 \; ,$$

avec un élément α_3 distinct de α_1 et α_2. Si $\alpha_3 = \beta$ (en particulier si $d = 3$), on conclut ; sinon on définit n'_2 comme le plus petit entier $n > n_2$ tel que le nom de $\gamma^{(n)}$ n'est ni α_1, ni α_2, ni α_3, puis n_3 comme le plus petit entier $n > n'_2$ tel que le nom de $\gamma^{(n)}$ est α_1, α_2 ou α_3. On a alors

$$n'_2 \leq n(4) + 1 \; ,$$

$$n_3 \leq n(5) \; ,$$

$$Q^{(n_3)}_{\alpha_1\alpha_4} > 0$$

pour un élément α_4 distinct de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. La procédure finit par épuiser les lettres de $\mathcal{A}$ et on conclut.

$\square$