

Perturbations multidimensionnelles des polynômes quadratiques (II)

Jean-Christophe Yoccoz

Collège de France

13 avril 2016

Soit D un entier au moins égal à 1. On souhaite étudier la dynamique d'une application de la forme

$$f_{c,B}(x, y) = (P_c(x), 0) + (B_1(x, y), B_2(x, y)),$$

où

- ▶ $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^D$;
- ▶ P_c est le **polynôme quadratique** $P_c(x) = x^2 + c$;
- ▶ Le domaine de définition de B_1 et B_2 (et donc aussi de $f_{c,B}$) est une boîte $\mathcal{B} := [-3, 3] \times \mathfrak{B}(\mathcal{U})$, où $\mathfrak{B}(\mathcal{U})$ est la boule euclidienne de rayon $\mathcal{U} \leq 1$ centrée à l'origine de \mathbb{R}^D .

On suppose que B_1, B_2 sont de classe C^2 et **petites** dans \mathcal{B} .
On posera

$$b = \max(\|B_1\|_{C^2}, \|B_2\|_{C^2}) \ll 1.$$

On supposera aussi $b < \mathfrak{U}/2$.

On suppose que B_1, B_2 sont de classe C^2 et **petites** dans \mathcal{B} .
On posera

$$b = \max(\|B_1\|_{C^2}, \|B_2\|_{C^2}) \ll 1.$$

On supposera aussi $b < \mathfrak{U}/2$.

Le paramètre c sera astreint à vérifier les conditions suivantes:

$$c > -2, \quad 0 < b \ll c + 2 \ll 1.$$

On suppose que B_1, B_2 sont de classe C^2 et **petites** dans \mathcal{B} .
On posera

$$b = \max(\|B_1\|_{C^2}, \|B_2\|_{C^2}) \ll 1.$$

On supposera aussi $b < \mathfrak{U}/2$.

Le paramètre c sera astreint à vérifier les conditions suivantes:

$$c > -2, \quad 0 < b \ll c + 2 \ll 1.$$

Exemple: Pour $D = 1$, $\mathfrak{U} = 1$, $B_1(x, y) = \pm by$, $B_2(x, y) = bx$,

$$f_{c,B} = (x^2 + c \pm by, bx),$$

On obtient la famille de difféomorphismes polynomiaux du plan dite **famille de Hénon**, qui a fait l'objet de nombreuses études.

Le théorème de Jakobson

On note Sto l'ensemble des paramètres $c \in [-2, 1/4]$ qui ont la propriété suivante:

P_c possède une mesure de probabilité μ qui soit **invariante**, **ergodique**, **absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue**, et ait un exposant de Lyapunov θ **strictement positif**:
for μ -presque tout x

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log |DP_c^n(x)| = \theta.$$

Le théorème de Jakobson

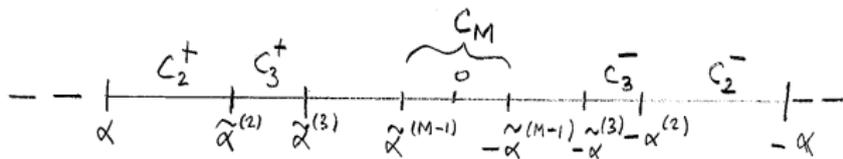
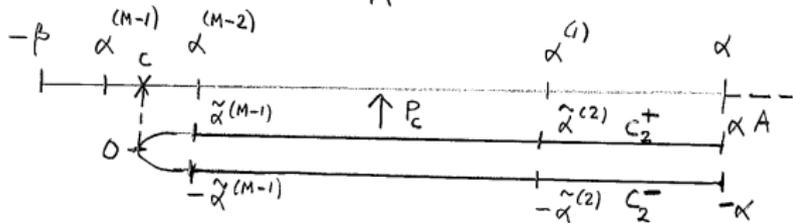
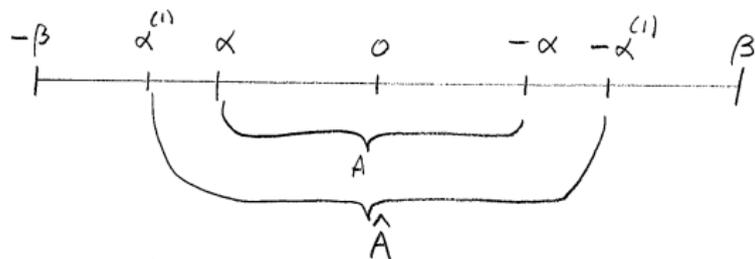
On note Sto l'ensemble des paramètres $c \in [-2, 1/4]$ qui ont la propriété suivante:

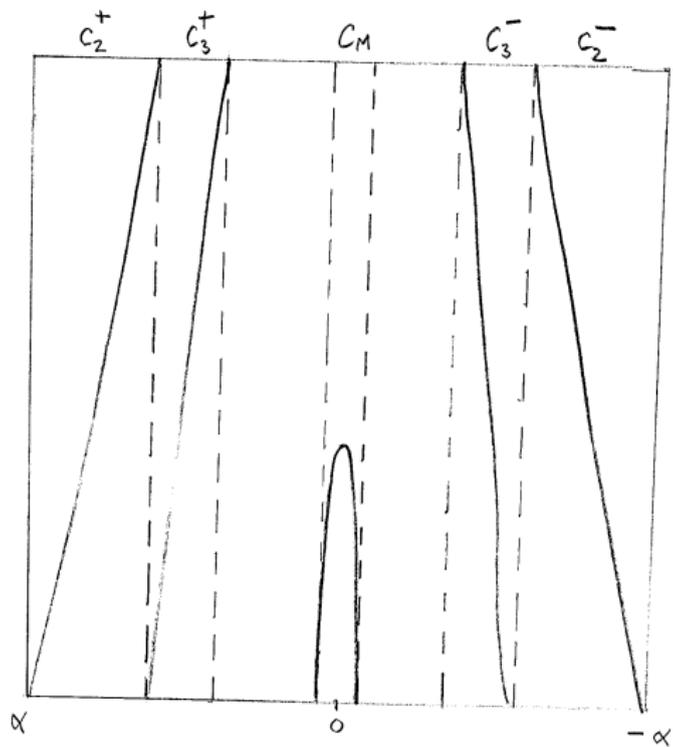
P_c possède une mesure de probabilité μ qui soit **invariante**, **ergodique**, **absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue**, et ait un exposant de Lyapunov θ **strictement positif**:
for μ -presque tout x

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log |DP_c^n(x)| = \theta.$$

Théorème (Jakobson 1981) *L'ensemble Sto est de mesure de Lebesgue positive. Plus précisément,*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \text{Leb} (Sto \cap [-2, -2 + \varepsilon]) = 1.$$





GRAPHE DE R

Dynamique symbolique en dimension 1. Itinéraire critique

Pour $2 \leq n < M$, on a défini $C_n^+ := (\tilde{\alpha}^{(n-1)}, \tilde{\alpha}^{(n)})$ et l'intervalle symétrique $C_n^- := (-\tilde{\alpha}^{(n)}, -\tilde{\alpha}^{(n-1)})$. On pose aussi $C_M^+ := (\tilde{\alpha}^{M-1}, 0)$ et $C_M^- := (0, -\tilde{\alpha}^{M-1})$.

Dynamique symbolique en dimension 1. Itinéraire critique

Pour $2 \leq n < M$, on a défini $C_n^+ := (\tilde{\alpha}^{(n-1)}, \tilde{\alpha}^{(n)})$ et l'intervalle symétrique $C_n^- := (-\tilde{\alpha}^{(n)}, -\tilde{\alpha}^{(n-1)})$. On pose aussi $C_M^+ := (\tilde{\alpha}^{M-1}, 0)$ et $C_M^- := (0, -\tilde{\alpha}^{M-1})$.

Notons \mathcal{A} l'alphabet

$$\mathcal{A} := \{C_n^\varepsilon, 2 \leq n \leq M, \varepsilon \in \{+, -\}\}.$$

Dynamique symbolique en dimension 1. Itinéraire critique

Pour $2 \leq n < M$, on a défini $C_n^+ := (\tilde{\alpha}^{(n-1)}, \tilde{\alpha}^{(n)})$ et l'intervalle symétrique $C_n^- := (-\tilde{\alpha}^{(n)}, -\tilde{\alpha}^{(n-1)})$. On pose aussi $C_M^+ := (\tilde{\alpha}^{M-1}, 0)$ et $C_M^- := (0, -\tilde{\alpha}^{M-1})$.

Notons \mathcal{A} l'alphabet

$$\mathcal{A} := \{C_n^\varepsilon, 2 \leq n \leq M, \varepsilon \in \{+, -\}\}.$$

Définition Pour un point $x \in A$ vérifiant $P_c^n(x) \neq 0, \alpha$ pour tout $n \geq 0$, l'**itinéraire** de x est la suite $\theta(x) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ définie par

$$R^n(x) \in \theta_n(x), \quad \forall n \geq 0.$$

Dynamique symbolique en dimension 1. Itinéraire critique

Pour $2 \leq n < M$, on a défini $C_n^+ := (\tilde{\alpha}^{(n-1)}, \tilde{\alpha}^{(n)})$ et l'intervalle symétrique $C_n^- := (-\tilde{\alpha}^{(n)}, -\tilde{\alpha}^{(n-1)})$. On pose aussi $C_M^+ := (\tilde{\alpha}^{M-1}, 0)$ et $C_M^- := (0, -\tilde{\alpha}^{M-1})$.

Notons \mathcal{A} l'alphabet

$$\mathcal{A} := \{C_n^\varepsilon, 2 \leq n \leq M, \varepsilon \in \{+, -\}\}.$$

Définition Pour un point $x \in A$ vérifiant $P_c^n(x) \neq 0, \alpha$ pour tout $n \geq 0$, l'**itinéraire** de x est la suite $\theta(x) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ définie par

$$R^n(x) \in \theta_n(x), \quad \forall n \geq 0.$$

On suppose que $P_c^n(0) \neq 0, \alpha$ pour tout $n > 0$.

Définition L'**itinéraire critique** est la suite $(\Theta_n)_{n>0}$ définie par

$$R^n(0) \in \Theta_n, \quad \forall n > 0.$$

Points fixes de $f_{c,B}$

Pour $c \in [-2, 1/4)$, on note $\beta(c) := \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - 4c})$ et $\alpha(c) := \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - 4c})$ les deux points fixes de P_c .

Pour c proche de -2 , on a

$$\beta(c) = 2 - \frac{1}{3}(c+2) + O((c+2)^2), \quad \alpha(c) = -1 + \frac{1}{3}(c+2) + O((c+2)^2).$$

Les points fixes de $f_{c,0}$ sont $(\beta(c), 0)$ et $(\alpha(c), 0)$.

Points fixes de $f_{c,B}$

Pour $c \in [-2, 1/4)$, on note $\beta(c) := \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - 4c})$ et $\alpha(c) := \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - 4c})$ les deux points fixes de P_c .

Pour c proche de -2 , on a

$$\beta(c) = 2 - \frac{1}{3}(c+2) + O((c+2)^2), \quad \alpha(c) = -1 + \frac{1}{3}(c+2) + O((c+2)^2).$$

Les points fixes de $f_{c,0}$ sont $(\beta(c), 0)$ et $(\alpha(c), 0)$.

Par le théorème des fonctions implicites, $f_{c,B}$ a deux points fixes $\beta(c, B)$ et $\alpha(c, B)$ qui vérifient

$$\beta(c, B) = (\beta(c), 0) + O(b), \quad \alpha(c, B) = (\alpha(c), 0) + O(b).$$

Variétés stables des points fixes

La **variété stable locale** de $\beta = \beta(c, B)$ est l'ensemble

$$W_{loc}^s(\beta) := \{(x, y) \mid |x - \beta(c)| < 2b, \|y\| \leq \mathfrak{U}, \lim_n f_{c,B}^n(x, y) = \beta\}.$$

Variétés stables des points fixes

La **variété stable locale** de $\beta = \beta(c, B)$ est l'ensemble

$$W_{loc}^s(\beta) := \{(x, y) \mid |x - \beta(c)| < 2b, \|y\| \leq \mathcal{U}, \lim_n f_{c,B}^n(x, y) = \beta\}.$$

D'après le **théorème de la variété stable**, $W_{loc}^s(\beta)$ est le graphe d'une application de class C^2 : $\mathfrak{B}(\mathcal{U}) \rightarrow (\beta(c) - 2b, \beta(c) + 2b)$ qui est $O(b)$ proche d'une constante dans la C^2 -topologie.

Variétés stables des points fixes

La **variété stable locale** de $\beta = \beta(c, B)$ est l'ensemble

$$W_{loc}^s(\beta) := \{(x, y) \mid |x - \beta(c)| < 2b, \|y\| \leq \mathcal{U}, \lim_n f_{c,B}^n(x, y) = \beta\}.$$

D'après le **théorème de la variété stable**, $W_{loc}^s(\beta)$ est le graphe d'une application de class C^2 : $\mathfrak{B}(\mathcal{U}) \rightarrow (\beta(c) - 2b, \beta(c) + 2b)$ qui est $O(b)$ proche d'une constante dans la C^2 -topologie.

L'image inverse $f_{c,B}^{-1}(W_{loc}^s(\beta))$ a **deux composantes connexes**. L'une est égale à $W_{loc}^s(\beta)$. L'autre est un graphe $O(b)$ proche de $\{x = -\beta(c)\}$.

Variétés stables des points fixes

La **variété stable locale** de $\beta = \beta(c, B)$ est l'ensemble

$$W_{loc}^s(\beta) := \{(x, y) \mid |x - \beta(c)| < 2b, \|y\| \leq \mathcal{U}, \lim_n f_{c,B}^n(x, y) = \beta\}.$$

D'après le **théorème de la variété stable**, $W_{loc}^s(\beta)$ est le graphe d'une application de class C^2 : $\mathfrak{B}(\mathcal{U}) \rightarrow (\beta(c) - 2b, \beta(c) + 2b)$ qui est $O(b)$ proche d'une constante dans la C^2 -topologie.

L'image inverse $f_{c,B}^{-1}(W_{loc}^s(\beta))$ a **deux composantes connexes**. L'une est égale à $W_{loc}^s(\beta)$. L'autre est un graphe $O(b)$ proche de $\{x = -\beta(c)\}$. On notera (abusivement) $W_{loc}^s(-\beta)$ cette deuxième composante.

Variétés stables des points fixes

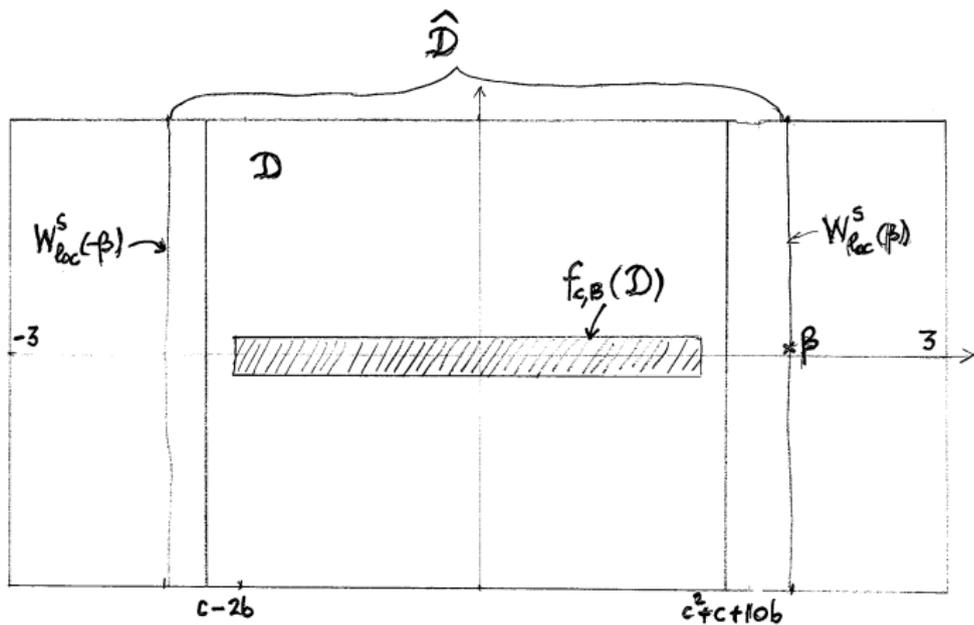
La **variété stable locale** de $\beta = \beta(c, B)$ est l'ensemble

$$W_{loc}^s(\beta) := \{(x, y) \mid |x - \beta(c)| < 2b, \|y\| \leq \mathcal{U}, \lim_n f_{c,B}^n(x, y) = \beta\}.$$

D'après le **théorème de la variété stable**, $W_{loc}^s(\beta)$ est le graphe d'une application de class C^2 : $\mathfrak{B}(\mathcal{U}) \rightarrow (\beta(c) - 2b, \beta(c) + 2b)$ qui est $O(b)$ proche d'une constante dans la C^2 -topologie.

L'image inverse $f_{c,B}^{-1}(W_{loc}^s(\beta))$ a **deux composantes connexes**. L'une est égale à $W_{loc}^s(\beta)$. L'autre est un graphe $O(b)$ proche de $\{x = -\beta(c)\}$. On notera (abusivement) $W_{loc}^s(-\beta)$ cette deuxième composante.

Les mêmes conclusion valent pour l'autre point fixe $\alpha := \alpha(c, B)$ de $f_{c,B}$.



L'attracteur potentiel

Dans la figure précédente:

- ▶ $\hat{\mathcal{D}}$ est le tube dans $\{\|y\| \leq \mathcal{U}\}$ borné par $W_{loc}^s(\beta)$ et $W_{loc}^s(-\beta)$.
- ▶ \mathcal{D} est le tube dans $\{\|y\| \leq \mathcal{U}\}$ borné par $\{x = c - 2b\}$ et $\{x = c^2 + c + 10b\}$.

L'attracteur potentiel

Dans la figure précédente:

- ▶ $\hat{\mathcal{D}}$ est le tube dans $\{\|y\| \leq \mathcal{U}\}$ borné par $W_{loc}^s(\beta)$ et $W_{loc}^s(-\beta)$.
- ▶ \mathcal{D} est le tube dans $\{\|y\| \leq \mathcal{U}\}$ borné par $\{x = c - 2b\}$ et $\{x = c^2 + c + 10b\}$.

On a

$$\overline{f_{c,B}(\mathcal{D})} \subset \mathcal{D}.$$

L'attracteur potentiel

Dans la figure précédente:

- ▶ $\hat{\mathcal{D}}$ est le tube dans $\{\|y\| \leq \mathcal{U}\}$ borné par $W_{loc}^s(\beta)$ et $W_{loc}^s(-\beta)$.
- ▶ \mathcal{D} est le tube dans $\{\|y\| \leq \mathcal{U}\}$ borné par $\{x = c - 2b\}$ et $\{x = c^2 + c + 10b\}$.

On a

$$\overline{f_{c,B}(\mathcal{D})} \subset \mathcal{D}.$$

L'attracteur potentiel \mathfrak{A} est la partie compacte

$$\mathfrak{A} := \bigcap_{n \geq 0} f_{c,B}^n(\mathcal{D}) = \bigcap_{n \geq 0} f_{c,B}^n(\hat{\mathcal{D}}).$$

L'objectif principal

Pour **chaque entier M assez grand**, pour **tout $b \ll 4^{-M}$** , on veut construire un ensemble $E_{M,B}$ de paramètres c (dits **fortement réguliers** dans la suite) avec les propriétés suivantes:

L'objectif principal

Pour **chaque entier M assez grand**, pour **tout $b \ll 4^{-M}$** , on veut construire un ensemble $E_{M,B}$ de paramètres c (dits **fortement réguliers** dans la suite) avec les propriétés suivantes:

- ▶ $E_{M,B} \subset [-2 + \aleph 4^{-M}, -2 + \aleph 4^{1-M}]$ (avec $\aleph := \frac{4\pi^2}{9}$);

L'objectif principal

Pour **chaque entier M assez grand**, pour **tout $b \ll 4^{-M}$** , on veut construire un ensemble $E_{M,B}$ de paramètres c (dits **fortement réguliers** dans la suite) avec les propriétés suivantes:

- ▶ $E_{M,B} \subset [-2 + \aleph 4^{-M}, -2 + \aleph 4^{1-M}]$ (avec $\aleph := \frac{4\pi^2}{9}$);
- ▶ $\frac{\text{Leb}(E_{M,B})}{\aleph(4^{1-M} - 4^{-M})} \geq \delta_M$, avec $\lim_{M \rightarrow \infty} \delta_M = 1$;

L'objectif principal

Pour **chaque entier M assez grand**, pour **tout $b \ll 4^{-M}$** , on veut construire un ensemble $E_{M,B}$ de paramètres c (dits **fortement réguliers** dans la suite) avec les propriétés suivantes:

- ▶ $E_{M,B} \subset [-2 + \aleph 4^{-M}, -2 + \aleph 4^{1-M}]$ (avec $\aleph := \frac{4\pi^2}{9}$);
- ▶ $\frac{\text{Leb}(E_{M,B})}{\aleph(4^{1-M} - 4^{-M})} \geq \delta_M$, avec $\lim_{M \rightarrow \infty} \delta_M = 1$;
- ▶ Pour $c \in E_{M,B}$, l'attracteur \mathfrak{A} supporte une mesure **ergodique physique** μ invariante par $f_{c,B}$. En fait, Lebesgue presque tout point de $\hat{\mathfrak{D}}$ est μ -générique;

L'objectif principal

Pour **chaque entier M assez grand**, pour **tout $b \ll 4^{-M}$** , on veut construire un ensemble $E_{M,B}$ de paramètres c (dits **fortement réguliers** dans la suite) avec les propriétés suivantes:

- ▶ $E_{M,B} \subset [-2 + \aleph 4^{-M}, -2 + \aleph 4^{1-M}]$ (avec $\aleph := \frac{4\pi^2}{9}$);
- ▶ $\frac{\text{Leb}(E_{M,B})}{\aleph(4^{1-M} - 4^{-M})} \geq \delta_M$, avec $\lim_{M \rightarrow \infty} \delta_M = 1$;
- ▶ Pour $c \in E_{M,B}$, l'attracteur \mathfrak{A} supporte une mesure **ergodique physique** μ invariante par $f_{c,B}$. En fait, Lebesgue presque tout point de $\hat{\mathfrak{D}}$ est μ -générique;
- ▶ La mesure μ a un exposant de Lyapunov **strictement positif** et D exposants **strictement négatifs**.

Combinatoire initiale pour $f_{C,B}$

On a défini les variétés stables locales $W_{loc}^s(\alpha)$, $W_{loc}^s(\beta)$ des points fixes α, β de $f_{C,B}$.

Combinatoire initiale pour $f_{c,B}$

On a défini les variétés stables locales $W_{loc}^s(\alpha)$, $W_{loc}^s(\beta)$ des points fixes α, β de $f_{c,B}$.

On a appelé $W_{loc}^s(-\alpha)$ (resp. $W_{loc}^s(-\beta)$) la composante de $f_{c,B}^{-1}(W_{loc}^s(\alpha))$ (resp. $f_{c,B}^{-1}(W_{loc}^s(\beta))$) distincte de $W_{loc}^s(\alpha)$ (resp. $W_{loc}^s(\beta)$).

Combinatoire initiale pour $f_{c,B}$

On a défini les variétés stables locales $W_{loc}^s(\alpha)$, $W_{loc}^s(\beta)$ des points fixes α, β de $f_{c,B}$.

On a appelé $W_{loc}^s(-\alpha)$ (resp. $W_{loc}^s(-\beta)$) la composante de $f_{c,B}^{-1}(W_{loc}^s(\alpha))$ (resp. $f_{c,B}^{-1}(W_{loc}^s(\beta))$) distincte de $W_{loc}^s(\alpha)$ (resp. $W_{loc}^s(\beta)$).

On appellera A la région ouverte connexe de \mathcal{D} bordée par $W_{loc}^s(\alpha)$ et $W_{loc}^s(-\alpha)$.

Combinatoire initiale pour $f_{c,B}$

On a défini les variétés stables locales $W_{loc}^s(\alpha)$, $W_{loc}^s(\beta)$ des points fixes α, β de $f_{c,B}$.

On a appelé $W_{loc}^s(-\alpha)$ (resp. $W_{loc}^s(-\beta)$) la composante de $f_{c,B}^{-1}(W_{loc}^s(\alpha))$ (resp. $f_{c,B}^{-1}(W_{loc}^s(\beta))$) distincte de $W_{loc}^s(\alpha)$ (resp. $W_{loc}^s(\beta)$).

On appellera A la région ouverte connexe de \mathcal{D} bordée par $W_{loc}^s(\alpha)$ et $W_{loc}^s(-\alpha)$.

L'image inverse $f_{c,B}^{-1}(W_{loc}^s(-\alpha))$ a **deux composantes connexes**, situées de part et d'autre de l'hyperplan $\{x = 0\}$.

Combinatoire initiale pour $f_{c,B}$

On a défini les variétés stables locales $W_{loc}^s(\alpha)$, $W_{loc}^s(\beta)$ des points fixes α, β de $f_{c,B}$.

On a appelé $W_{loc}^s(-\alpha)$ (resp. $W_{loc}^s(-\beta)$) la composante de $f_{c,B}^{-1}(W_{loc}^s(\alpha))$ (resp. $f_{c,B}^{-1}(W_{loc}^s(\beta))$) distincte de $W_{loc}^s(\alpha)$ (resp. $W_{loc}^s(\beta)$).

On appellera A la région ouverte connexe de \mathcal{D} bordée par $W_{loc}^s(\alpha)$ et $W_{loc}^s(-\alpha)$.

L'image inverse $f_{c,B}^{-1}(W_{loc}^s(-\alpha))$ a **deux composantes connexes**, situées de part et d'autre de l'hyperplan $\{x = 0\}$. On note (abusivement!) $W_{loc}^s(\alpha^{(1)})$ celle qui est située dans $\{x < 0\}$, $W_{loc}^s(-\alpha^{(1)})$ celle qui est située dans $\{x > 0\}$.

Combinatoire initiale pour $f_{c,B}$

On a défini les variétés stables locales $W_{loc}^s(\alpha)$, $W_{loc}^s(\beta)$ des points fixes α, β de $f_{c,B}$.

On a appelé $W_{loc}^s(-\alpha)$ (resp. $W_{loc}^s(-\beta)$) la composante de $f_{c,B}^{-1}(W_{loc}^s(\alpha))$ (resp. $f_{c,B}^{-1}(W_{loc}^s(\beta))$) distincte de $W_{loc}^s(\alpha)$ (resp. $W_{loc}^s(\beta)$).

On appellera A la région ouverte connexe de \mathcal{D} bordée par $W_{loc}^s(\alpha)$ et $W_{loc}^s(-\alpha)$.

L'image inverse $f_{c,B}^{-1}(W_{loc}^s(-\alpha))$ a **deux composantes connexes**, situées de part et d'autre de l'hyperplan $\{x = 0\}$. On note (abusivement!) $W_{loc}^s(\alpha^{(1)})$ celle qui est située dans $\{x < 0\}$, $W_{loc}^s(-\alpha^{(1)})$ celle qui est située dans $\{x > 0\}$.

De même, pour $n > 0$, L'image inverse $f_{c,B}^{-1}(W_{loc}^s(-\alpha^{(n)}))$ a **deux composantes connexes**, situées de part et d'autre de l'hyperplan $\{x = 0\}$. On note $W_{loc}^s(\alpha^{(n+1)})$ celle qui est située dans $\{x < 0\}$, $W_{loc}^s(-\alpha^{(n+1)})$ celle qui est située dans $\{x > 0\}$.

Pour tout $n > 0$, les hypersurfaces $W_{loc}^s(\pm\alpha^{(n)})$ sont des graphes d'applications de classe C^2 : $\mathfrak{B}(U) \rightarrow \mathbb{R}$ qui sont $O(b)$ -proches dans la C^2 -topologie des applications constantes $y \mapsto \pm\alpha^{(n)}(c, 0)$.

Pour tout $n > 0$, les hypersurfaces $W_{loc}^s(\pm\alpha^{(n)})$ sont des **graphes** d'applications de classe C^2 : $\mathfrak{B}(U) \rightarrow \mathbb{R}$ qui sont $O(b)$ -proches dans la C^2 -topologie des applications constantes $y \mapsto \pm\alpha^{(n)}(c, 0)$.

La constante implicite dans $O(b)$ est **uniforme** (par rapport à n).

Pour tout $n > 0$, les hypersurfaces $W_{loc}^s(\pm\alpha^{(n)})$ sont des **graphes** d'applications de classe C^2 : $\mathfrak{B}(\mathcal{U}) \rightarrow \mathbb{R}$ qui sont $O(b)$ -proches dans la C^2 -topologie des applications constantes $y \mapsto \pm\alpha^{(n)}(c, 0)$.

La constante implicite dans $O(b)$ est **uniforme** (par rapport à n).

Soit $y_0 \in \mathfrak{B}(\mathcal{U})$. Pour tout $M \geq 2$, il existe une (unique) valeur $c(y_0, M)$ telle que l'image par $f_{c,B}$ du segment "horizontal" $\{y = y_0\} \cap A$ **rencontre** $W_{loc}^s(\alpha^{(M-1)})$ ssi $c \leq c(y_0, M)$.

Pour tout $n > 0$, les hypersurfaces $W_{loc}^s(\pm\alpha^{(n)})$ sont des **graphes** d'applications de classe C^2 : $\mathfrak{B}(\mathcal{U}) \rightarrow \mathbb{R}$ qui sont $O(b)$ -proches dans la C^2 -topologie des applications constantes $y \mapsto \pm\alpha^{(n)}(c, 0)$.

La constante implicite dans $O(b)$ est **uniforme** (par rapport à n).

Soit $y_0 \in \mathfrak{B}(\mathcal{U})$. Pour tout $M \geq 2$, il existe une (unique) valeur $c(y_0, M)$ telle que l'image par $f_{c,B}$ du segment "horizontal" $\{y = y_0\} \cap A$ rencontre $W_{loc}^s(\alpha^{(M-1)})$ ssi $c \leq c(y_0, M)$.

On a de plus

$$c(y_0, M) - c(y_1, M) = O(b),$$

uniformément en $M \geq 2, y_0, y_1 \in \mathfrak{B}(\mathcal{U})$

Pour tout $n > 0$, les hypersurfaces $W_{loc}^s(\pm\alpha^{(n)})$ sont des graphes d'applications de classe C^2 : $\mathfrak{B}(\mathcal{U}) \rightarrow \mathbb{R}$ qui sont $O(b)$ -proches dans la C^2 -topologie des applications constantes $y \mapsto \pm\alpha^{(n)}(c, 0)$.

La constante implicite dans $O(b)$ est uniforme (par rapport à n).

Soit $y_0 \in \mathfrak{B}(\mathcal{U})$. Pour tout $M \geq 2$, il existe une (unique) valeur $c(y_0, M)$ telle que l'image par $f_{c,B}$ du segment "horizontal" $\{y = y_0\} \cap A$ rencontre $W_{loc}^s(\alpha^{(M-1)})$ ssi $c \leq c(y_0, M)$.

On a de plus

$$c(y_0, M) - c(y_1, M) = O(b),$$

uniformément en $M \geq 2, y_0, y_1 \in \mathfrak{B}(\mathcal{U})$ et, lorsque $b \ll 4^{-M}$,

$$c(y, M) + 2 = \frac{4\pi^2}{9} 4^{-M} (1 + o(1)).$$

Pour tout $n > 0$, les hypersurfaces $W_{loc}^s(\pm\alpha^{(n)})$ sont des graphes d'applications de classe C^2 : $\mathfrak{B}(\mathcal{U}) \rightarrow \mathbb{R}$ qui sont $O(b)$ -proches dans la C^2 -topologie des applications constantes $y \mapsto \pm\alpha^{(n)}(c, 0)$.

La constante implicite dans $O(b)$ est uniforme (par rapport à n).

Soit $y_0 \in \mathfrak{B}(\mathcal{U})$. Pour tout $M \geq 2$, il existe une (unique) valeur $c(y_0, M)$ telle que l'image par $f_{c,B}$ du segment "horizontal" $\{y = y_0\} \cap A$ rencontre $W_{loc}^s(\alpha^{(M-1)})$ ssi $c \leq c(y_0, M)$.

On a de plus

$$c(y_0, M) - c(y_1, M) = O(b),$$

uniformément en $M \geq 2, y_0, y_1 \in \mathfrak{B}(\mathcal{U})$ et, lorsque $b \ll 4^{-M}$,

$$c(y, M) + 2 = \frac{4\pi^2}{9} 4^{-M} (1 + o(1)).$$

On fixe dans la suite un grand entier M , on suppose que $b \ll 4^{-M}$, et on ne considère que des paramètres c vérifiant

$$c(y_0, M) < c < c(y_1, M - 1), \quad \forall y_0, y_1 \in \mathfrak{B}(\mathcal{U}).$$

Pour tout $n > 0$, les hypersurfaces $W_{loc}^s(\pm\alpha^{(n)})$ sont des graphes d'applications de classe C^2 : $\mathfrak{B}(\mathcal{U}) \rightarrow \mathbb{R}$ qui sont $O(b)$ -proches dans la C^2 -topologie des applications constantes $y \mapsto \pm\alpha^{(n)}(c, 0)$.

La constante implicite dans $O(b)$ est uniforme (par rapport à n).

Soit $y_0 \in \mathfrak{B}(\mathcal{U})$. Pour tout $M \geq 2$, il existe une (unique) valeur $c(y_0, M)$ telle que l'image par $f_{c,B}$ du segment "horizontal" $\{y = y_0\} \cap A$ rencontre $W_{loc}^s(\alpha^{(M-1)})$ ssi $c \leq c(y_0, M)$.

On a de plus

$$c(y_0, M) - c(y_1, M) = O(b),$$

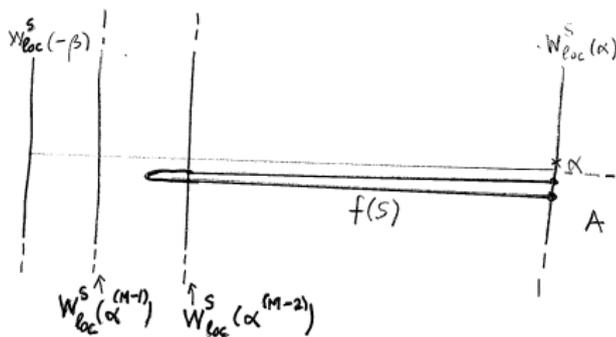
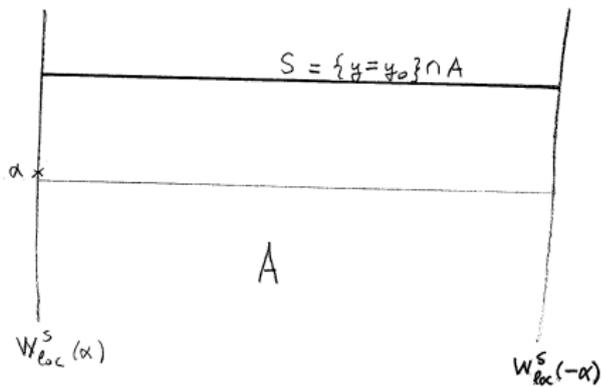
uniformément en $M \geq 2, y_0, y_1 \in \mathfrak{B}(\mathcal{U})$ et, lorsque $b \ll 4^{-M}$,

$$c(y, M) + 2 = \frac{4\pi^2}{9} 4^{-M} (1 + o(1)).$$

On fixe dans la suite un grand entier M , on suppose que $b \ll 4^{-M}$, et on ne considère que des paramètres c vérifiant

$$c(y_0, M) < c < c(y_1, M - 1), \quad \forall y_0, y_1 \in \mathfrak{B}(\mathcal{U}).$$

Ces paramètres forment un intervalle \mathfrak{C}_M . La différence symétrique de \mathfrak{C}_M avec l'intervalle $[-2 + \varkappa 4^{-M}, -2 + \varkappa 4^{1-M}]$, est de mesure de Lebesgue $o(4^{-M})$.



Les hypersurfaces $W_{loc}^s(\pm\tilde{\alpha}^{(n)})$

Soit $c \in \mathfrak{C}_M$. Pour $1 \leq n \leq M - 2$, l'image inverse $f_{c,B}^{-1}(W_{loc}^s(\alpha^{(n)}))$ a **deux composantes connexes**, situées de part et d'autre de l'hyperplan $\{x = 0\}$. On note $W_{loc}^s(\tilde{\alpha}^{(n+1)})$ celle qui est située dans $\{x < 0\}$, $W_{loc}^s(-\tilde{\alpha}^{(n+1)})$ celle qui est située dans $\{x > 0\}$.

Les hypersurfaces $W_{loc}^s(\pm\tilde{\alpha}^{(n)})$

Soit $c \in \mathfrak{C}_M$. Pour $1 \leq n \leq M - 2$, l'image inverse $f_{c,B}^{-1}(W_{loc}^s(\alpha^{(n)}))$ a **deux composantes connexes**, situées de part et d'autre de l'hyperplan $\{x = 0\}$. On note $W_{loc}^s(\tilde{\alpha}^{(n+1)})$ celle qui est située dans $\{x < 0\}$, $W_{loc}^s(-\tilde{\alpha}^{(n+1)})$ celle qui est située dans $\{x > 0\}$.

Les hypersurfaces $W_{loc}^s(\pm\tilde{\alpha}^{(n+1)})$ sont des **graphes** d'applications de classe C^2 : $\mathfrak{B}(U) \rightarrow \mathbb{R}$.

Les hypersurfaces $W_{loc}^s(\pm\tilde{\alpha}^{(n)})$

Soit $c \in \mathfrak{C}_M$. Pour $1 \leq n \leq M - 2$, l'image inverse $f_{c,B}^{-1}(W_{loc}^s(\alpha^{(n)}))$ a **deux composantes connexes**, situées de part et d'autre de l'hyperplan $\{x = 0\}$. On note $W_{loc}^s(\tilde{\alpha}^{(n+1)})$ celle qui est située dans $\{x < 0\}$, $W_{loc}^s(-\tilde{\alpha}^{(n+1)})$ celle qui est située dans $\{x > 0\}$.

Les hypersurfaces $W_{loc}^s(\pm\tilde{\alpha}^{(n+1)})$ sont des **graphes** d'applications de classe C^2 : $\mathfrak{B}(U) \rightarrow \mathbb{R}$.

Pour $2 \leq n \leq M - 1$, on note C_n^+ (resp. C_n^-) le "tube" ouvert de $A \subset \mathfrak{D}$ délimité par $W_{loc}^s(\tilde{\alpha}^{(n)})$ et $W_{loc}^s(\tilde{\alpha}^{(n-1)})$ (resp. par $W_{loc}^s(-\tilde{\alpha}^{(n)})$ et $W_{loc}^s(-\tilde{\alpha}^{(n-1)})$). On convient ici que $\tilde{\alpha}^{(1)} = \alpha$.

Les hypersurfaces $W_{loc}^s(\pm\tilde{\alpha}^{(n)})$

Soit $c \in \mathfrak{C}_M$. Pour $1 \leq n \leq M - 2$, l'image inverse $f_{c,B}^{-1}(W_{loc}^s(\alpha^{(n)}))$ a **deux composantes connexes**, situées de part et d'autre de l'hyperplan $\{x = 0\}$. On note $W_{loc}^s(\tilde{\alpha}^{(n+1)})$ celle qui est située dans $\{x < 0\}$, $W_{loc}^s(-\tilde{\alpha}^{(n+1)})$ celle qui est située dans $\{x > 0\}$.

Les hypersurfaces $W_{loc}^s(\pm\tilde{\alpha}^{(n+1)})$ sont des **graphes** d'applications de classe C^2 : $\mathfrak{B}(U) \rightarrow \mathbb{R}$.

Pour $2 \leq n \leq M - 1$, on note C_n^+ (resp. C_n^-) le "tube" ouvert de $A \subset \mathfrak{D}$ délimité par $W_{loc}^s(\tilde{\alpha}^{(n)})$ et $W_{loc}^s(\tilde{\alpha}^{(n-1)})$ (resp. par $W_{loc}^s(-\tilde{\alpha}^{(n)})$ et $W_{loc}^s(-\tilde{\alpha}^{(n-1)})$). On convient ici que $\tilde{\alpha}^{(1)} = \alpha$.

On note C_M le "tube" de A délimité par $W_{loc}^s(\tilde{\alpha}^{(M-1)})$ et $W_{loc}^s(-\tilde{\alpha}^{(M-1)})$

Les hypersurfaces $W_{loc}^s(\pm\tilde{\alpha}^{(n)})$

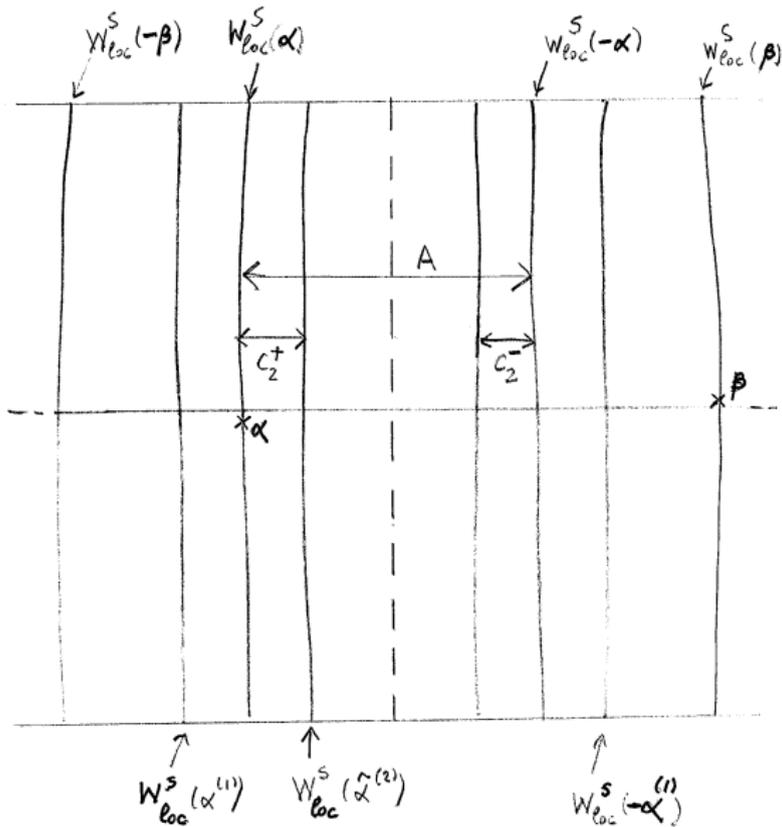
Soit $c \in \mathfrak{C}_M$. Pour $1 \leq n \leq M - 2$, l'image inverse $f_{c,B}^{-1}(W_{loc}^s(\alpha^{(n)}))$ a **deux composantes connexes**, situées de part et d'autre de l'hyperplan $\{x = 0\}$. On note $W_{loc}^s(\tilde{\alpha}^{(n+1)})$ celle qui est située dans $\{x < 0\}$, $W_{loc}^s(-\tilde{\alpha}^{(n+1)})$ celle qui est située dans $\{x > 0\}$.

Les hypersurfaces $W_{loc}^s(\pm\tilde{\alpha}^{(n+1)})$ sont des **graphes** d'applications de classe C^2 : $\mathfrak{B}(U) \rightarrow \mathbb{R}$.

Pour $2 \leq n \leq M - 1$, on note C_n^+ (resp. C_n^-) le "tube" ouvert de $A \subset \mathfrak{D}$ délimité par $W_{loc}^s(\tilde{\alpha}^{(n)})$ et $W_{loc}^s(\tilde{\alpha}^{(n-1)})$ (resp. par $W_{loc}^s(-\tilde{\alpha}^{(n)})$ et $W_{loc}^s(-\tilde{\alpha}^{(n-1)})$). On convient ici que $\tilde{\alpha}^{(1)} = \alpha$.

On note C_M le "tube" de A délimité par $W_{loc}^s(\tilde{\alpha}^{(M-1)})$ et $W_{loc}^s(-\tilde{\alpha}^{(M-1)})$

Le temps de retour dans A d'un point de C_n^\pm , $2 \leq n < M$, (resp. C_M) est égal à n (resp. M) .



Les régions C_M , C_M^+ , C_M^-

En dimension 1 ($b = 0$), on a divisé l'intervalle

$C_M := (\tilde{\alpha}^{(M)}, -\tilde{\alpha}^{(M)})$ en $C_M^+ := (\tilde{\alpha}^{(M)}, 0)$ et $C_M^- := (0, -\tilde{\alpha}^{(M)})$.

Les régions C_M , C_M^+ , C_M^-

En dimension 1 ($b = 0$), on a divisé l'intervalle

$C_M := (\tilde{\alpha}^{(M)}, -\tilde{\alpha}^{(M)})$ en $C_M^+ := (\tilde{\alpha}^{(M)}, 0)$ et $C_M^- := (0, -\tilde{\alpha}^{(M)})$.

Ceci a une signification **dynamique** car le point critique 0 de P_c est aussi critique pour les **itérés** de P_c .

Les régions C_M , C_M^+ , C_M^-

En dimension 1 ($b = 0$), on a divisé l'intervalle $C_M := (\tilde{\alpha}^{(M)}, -\tilde{\alpha}^{(M)})$ en $C_M^+ := (\tilde{\alpha}^{(M)}, 0)$ et $C_M^- := (0, -\tilde{\alpha}^{(M)})$.

Ceci a une signification **dynamique** car le point critique 0 de P_c est aussi critique pour les **itérés** de P_c .

Pour $f_{c,B}$ (qui n'a a priori pas de point critique au sens usuel), on peut considérer l'hypersurface $\{x = v(y)\}$, où $v(y)$ est l'unique point critique de $x \mapsto x^2 + c + B_1(x, y)$. Cette hypersurface divise le tube C_M en deux sous-tubes.

Les régions C_M , C_M^+ , C_M^-

En dimension 1 ($b = 0$), on a divisé l'intervalle $C_M := (\tilde{\alpha}^{(M)}, -\tilde{\alpha}^{(M)})$ en $C_M^+ := (\tilde{\alpha}^{(M)}, 0)$ et $C_M^- := (0, -\tilde{\alpha}^{(M)})$.

Ceci a une signification **dynamique** car le point critique 0 de P_c est aussi critique pour les **itérés** de P_c .

Pour $f_{c,B}$ (qui n'a a priori pas de point critique au sens usuel), on peut considérer l'hypersurface $\{x = v(y)\}$, où $v(y)$ est l'unique point critique de $x \mapsto x^2 + c + B_1(x, y)$. Cette hypersurface divise le tube C_M en deux sous-tubes.

Mais cette hypersurface n'a pas de signification dynamique intrinsèque et ne représente qu'une **première approximation** d'un ensemble critique **dynamiquement défini**.

Les régions C_M , C_M^+ , C_M^-

En dimension 1 ($b = 0$), on a divisé l'intervalle $C_M := (\tilde{\alpha}^{(M)}, -\tilde{\alpha}^{(M)})$ en $C_M^+ := (\tilde{\alpha}^{(M)}, 0)$ et $C_M^- := (0, -\tilde{\alpha}^{(M)})$.

Ceci a une signification **dynamique** car le point critique 0 de P_c est aussi critique pour les **itérés** de P_c .

Pour $f_{c,B}$ (qui n'a a priori pas de point critique au sens usuel), on peut considérer l'hypersurface $\{x = v(y)\}$, où $v(y)$ est l'unique point critique de $x \mapsto x^2 + c + B_1(x, y)$. Cette hypersurface divise le tube C_M en deux sous-tubes.

Mais cette hypersurface n'a pas de signification dynamique intrinsèque et ne représente qu'une **première approximation** d'un ensemble critique **dynamiquement défini**.

Un des enjeux de l'étude est de donner un sens dynamique aux symboles C_M^+ et C_M^- .

Dynamique symbolique pour l'application de retour dans A

Notons R l'application de premier retour de $f_{C,B}$ dans A .

Dynamique symbolique pour l'application de retour dans A

Notons R l'application de premier retour de $f_{C,B}$ dans A .

Notons \mathcal{A}^\dagger l'alphabet

$$\mathcal{A}^\dagger := \{C_n^\varepsilon, 2 \leq n < M, \varepsilon \in \{+, -\}\} \cup \{C_M\}.$$

Dynamique symbolique pour l'application de retour dans A

Notons R l'application de premier retour de $f_{C,B}$ dans A .

Notons \mathcal{A}^\dagger l'alphabet

$$\mathcal{A}^\dagger := \{C_n^\varepsilon, 2 \leq n < M, \varepsilon \in \{+, -\}\} \cup \{C_M\}.$$

Définition Pour un point $x \in A$ dont l'orbite positive ne converge pas vers α , l'itinéraire grossier de x est la suite $\theta(x)$ d'éléments de \mathcal{A}^\dagger définie par

$$R^n(x) \in \theta_n(x), \quad \forall n \geq 0.$$

Références:

- ▶ J.Palis, J-C.Yoccoz, *Implicit formalism for Affine-like maps and parabolic composition*, Global Analysis of Dynamical Systems, IOP, London (2001), 67-87.
- ▶ J.Palis, J-C.Yoccoz, *Non-uniformly hyperbolic horseshoes arising from bifurcations of Poincaré heteroclinic cycles*, Publ. Math. IHES, 110, (2009), 1-217.

Dans la seconde référence, voir en particulier le chapitre 3 et l'appendice A.

Formalisme implicite pour les difféomorphismes de type affine

On reprend les notations des articles ci-dessus. En particulier, B ne désigne **pas** la perturbation dans $f_{c,B}$!

Formalisme implicite pour les difféomorphismes de type affine

On reprend les notations des articles ci-dessus. En particulier, B ne désigne **pas** la perturbation dans $f_{c,B}$!

Considérons un difféomorphisme $F : P \rightarrow Q, (x_0, y_0) \mapsto (x_1, y_1)$ où

Formalisme implicite pour les difféomorphismes de type affine

On reprend les notations des articles ci-dessus. En particulier, B ne désigne **pas** la perturbation dans $f_{c,B}$!

Considérons un difféomorphisme $F : P \rightarrow Q$, $(x_0, y_0) \mapsto (x_1, y_1)$ où

- ▶ P est une bande "verticale" de $[-1, 1]^2$:

$$P = \{(x_0, y_0) \in [-1, 1]^2, \varphi^-(y_0) \leq x_0 \leq \varphi^+(y_0)\}.$$

Formalisme implicite pour les difféomorphismes de type affine

On reprend les notations des articles ci-dessus. En particulier, B ne désigne **pas** la perturbation dans $f_{c,B}$!

Considérons un difféomorphisme $F : P \rightarrow Q$, $(x_0, y_0) \mapsto (x_1, y_1)$ où

- ▶ P est une bande "verticale" de $[-1, 1]^2$:

$$P = \{(x_0, y_0) \in [-1, 1]^2, \varphi^-(y_0) \leq x_0 \leq \varphi^+(y_0)\}.$$

- ▶ Q est une bande "horizontale" de $[-1, 1]^2$:

$$Q = \{(x_1, y_1) \in [-1, 1]^2, \psi^-(x_1) \leq y_1 \leq \psi^+(x_1)\}.$$

Formalisme implicite pour les difféomorphismes de type affine

On reprend les notations des articles ci-dessus. En particulier, B ne désigne **pas** la perturbation dans $f_{c,B}$!

Considérons un difféomorphisme $F : P \rightarrow Q$, $(x_0, y_0) \mapsto (x_1, y_1)$ où

- ▶ P est une bande "verticale" de $[-1, 1]^2$:

$$P = \{(x_0, y_0) \in [-1, 1]^2, \varphi^-(y_0) \leq x_0 \leq \varphi^+(y_0)\}.$$

- ▶ Q est une bande "horizontale" de $[-1, 1]^2$:

$$Q = \{(x_1, y_1) \in [-1, 1]^2, \psi^-(x_1) \leq y_1 \leq \psi^+(x_1)\}.$$

Définition Le difféomorphisme F est **de type affine** si la restriction au graphe de F de la projection $(x_0, y_0, x_1, y_1) \mapsto (y_0, x_1)$ est un **difféomorphisme** sur $[-1, 1]^2$.

Il existe alors des fonctions (lisses) $A, B : [-1, 1]^2 \rightarrow [-1, 1]$ telles que

$$F(x_0, y_0) = (x_1, y_1) \iff x_0 = A(y_0, x_1), y_1 = B(y_0, x_1).$$

Il existe alors des fonctions (lisses) $A, B : [-1, 1]^2 \rightarrow [-1, 1]$ telles que

$$F(x_0, y_0) = (x_1, y_1) \iff x_0 = A(y_0, x_1), y_1 = B(y_0, x_1).$$

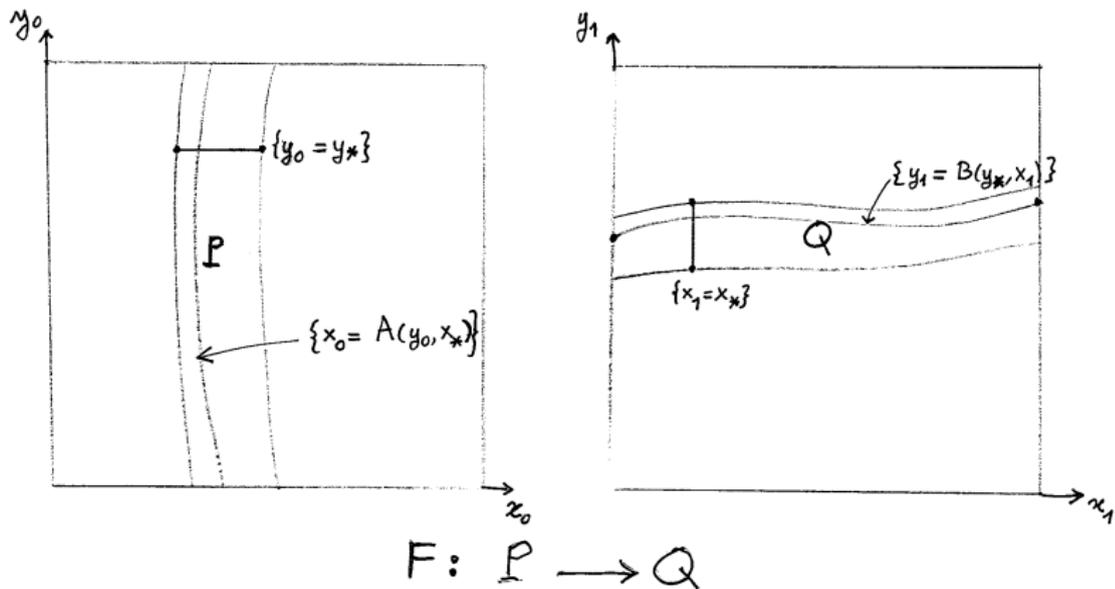
La paire (A, B) est la **représentation implicite** de F .

Il existe alors des fonctions (lisses) $A, B : [-1, 1]^2 \rightarrow [-1, 1]$ telles que

$$F(x_0, y_0) = (x_1, y_1) \iff x_0 = A(y_0, x_1), y_1 = B(y_0, x_1).$$

La paire (A, B) est la **représentation implicite** de F .

Les dérivées partielles A_x, B_y **ne s'annulent pas** sur $[-1, 1]^2$.



Des relations

$$dx_0 = A_y dy_0 + A_x dx_1, \quad dy_1 = B_y dy_0 + B_x dx_1,$$

Des relations

$$dx_0 = A_y dy_0 + A_x dx_1, \quad dy_1 = B_y dy_0 + B_x dx_1,$$

on tire

$$DF = A_x^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -A_y \\ B_x & A_x B_y - A_y B_x \end{pmatrix}.$$

Des relations

$$dx_0 = A_y dy_0 + A_x dx_1, \quad dy_1 = B_y dy_0 + B_x dx_1,$$

on tire

$$DF = A_x^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -A_y \\ B_x & A_x B_y - A_y B_x \end{pmatrix}.$$

$$DF^{-1} = B_y^{-1} \begin{pmatrix} A_x B_y - A_y B_x & A_y \\ -B_x & 1 \end{pmatrix}.$$

Des relations

$$dx_0 = A_y dy_0 + A_x dx_1, \quad dy_1 = B_y dy_0 + B_x dx_1,$$

on tire

$$DF = A_x^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -A_y \\ B_x & A_x B_y - A_y B_x \end{pmatrix}.$$

$$DF^{-1} = B_y^{-1} \begin{pmatrix} A_x B_y - A_y B_x & A_y \\ -B_x & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\det DF = A_x^{-1} B_y.$$

Soient $u, v, \lambda > 0$ des constantes vérifiant

$$1 < uv \leq \lambda^2.$$

Soient $u, v, \lambda > 0$ des constantes vérifiant

$$1 < uv \leq \lambda^2.$$

Définition Le difféomorphisme de type affine F satisfait la **condition de cône de paramètres u, v, λ** si, pour tout vecteur tangent (X_0, Y_0) d'image (X_1, Y_1) sous DF , on a

Soient $u, v, \lambda > 0$ des constantes vérifiant

$$1 < uv \leq \lambda^2.$$

Définition Le difféomorphisme de type affine F satisfait la **condition de cône de paramètres u, v, λ** si, pour tout vecteur tangent (X_0, Y_0) d'image (X_1, Y_1) sous DF , on a

$$|Y_0| \leq u|X_0| \Rightarrow |Y_1| \leq v^{-1}|X_1| \text{ et } |X_1| \geq \lambda|X_0|,$$

Soient $u, v, \lambda > 0$ des constantes vérifiant

$$1 < uv \leq \lambda^2.$$

Définition Le difféomorphisme de type affine F satisfait la **condition de cône de paramètres u, v, λ** si, pour tout vecteur tangent (X_0, Y_0) d'image (X_1, Y_1) sous DF , on a

$$|Y_0| \leq u|X_0| \Rightarrow |Y_1| \leq v^{-1}|X_1| \text{ et } |X_1| \geq \lambda|X_0|,$$

$$|X_1| \leq v|Y_1| \Rightarrow |X_0| \leq u^{-1}|Y_0| \text{ et } |Y_0| \geq \lambda|Y_1|.$$

Lemme Lorsque F est représenté implicitement par (A, B) , la condition de cône de paramètres u, v, λ est équivalente aux inégalités

$$\lambda|A_x| + u|A_y| \leq 1,$$

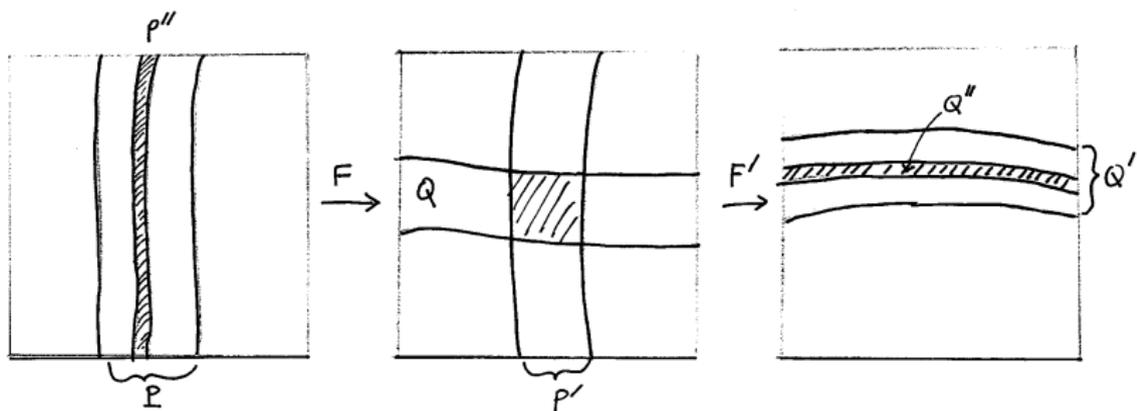
$$\lambda|B_y| + v|B_x| \leq 1.$$

On suppose que le difféomorphisme de type affine F , représenté implicitement par (A, B) , est de classe au moins C^2 .

On suppose que le difféomorphisme de type affine F , représenté implicitement par (A, B) , est de classe au moins C^2 .

Définition La distortion $Dist(F)$ de F est définie par

$$Dist(F) := \sup_{[-1,1]^2} \max \left(\begin{array}{ccc} |\partial_x \log |A_x||, & |\partial_y \log |A_x||, & |A_{yy}| \\ |\partial_x \log |B_y||, & |\partial_y \log |B_y||, & |B_{xx}| \end{array} \right).$$



Composition (simple) de difféomorphismes de type affine

Soient $F : P \rightarrow Q$ et $F' : P' \rightarrow Q'$ des difféomorphismes de type affine satisfaisant la même condition de cône de paramètres λ, u, v .
On note (A, B) la représentation implicite de F , (A', B') celle de F' .

Composition (simple) de difféomorphismes de type affine

Soient $F : P \rightarrow Q$ et $F' : P' \rightarrow Q'$ des difféomorphismes de type affine satisfaisant la même condition de cône de paramètres λ, u, v . On note (A, B) la représentation implicite de F , (A', B') celle de F' . Le domaine de la composition $F'' := F' \circ F$ est la bande verticale $P'' := P \cap F^{-1}(P')$, son image est la bande horizontale $Q'' := Q' \cap F'(Q)$.

Composition (simple) de difféomorphismes de type affine

Soient $F : P \rightarrow Q$ et $F' : P' \rightarrow Q'$ des difféomorphismes de type affine satisfaisant la même condition de cône de paramètres λ, u, v . On note (A, B) la représentation implicite de F , (A', B') celle de F' .

Le domaine de la composition $F'' := F' \circ F$ est la bande verticale $P'' := P \cap F^{-1}(P')$, son image est la bande horizontale $Q'' := Q' \cap F'(Q)$.

Proposition *Le difféomorphisme F'' est de type affine et vérifie la condition de cône de paramètres u, v, λ^2 .*

Composition (simple) de difféomorphismes de type affine

Soient $F : P \rightarrow Q$ et $F' : P' \rightarrow Q'$ des difféomorphismes de type affine satisfaisant la même condition de cône de paramètres λ, u, v . On note (A, B) la représentation implicite de F , (A', B') celle de F' .

Le domaine de la composition $F'' := F' \circ F$ est la bande verticale $P'' := P \cap F^{-1}(P')$, son image est la bande horizontale $Q'' := Q' \cap F'(Q)$.

Proposition *Le difféomorphisme F'' est de type affine et vérifie la condition de cône de paramètres u, v, λ^2 .*

Notons (A'', B'') la représentation implicite de F'' .

La fonction

$$\Delta := 1 - A'_x B_y$$

vérifie $\Delta > 1 - u^{-1}v^{-1} > 0$.

La fonction

$$\Delta := 1 - A'_x B_y$$

vérifie $\Delta > 1 - u^{-1}v^{-1} > 0$. Les dérivées partielles de A'' , B'' s'expriment en fonction de celles de A , B , A' , B' par les formules suivantes:

$$\begin{aligned} A''_x &= A_x A'_x \Delta^{-1}, & A''_y &= A_y + A'_y A_x B_y \Delta^{-1}, \\ B''_y &= B_y B'_y \Delta^{-1}, & B''_x &= B'_x + B_x A'_x B'_y \Delta^{-1}. \end{aligned}$$

La fonction

$$\Delta := 1 - A'_x B_y$$

vérifie $\Delta > 1 - u^{-1}v^{-1} > 0$. Les dérivées partielles de A'' , B'' s'expriment en fonction de celles de A , B , A' , B' par les formules suivantes:

$$\begin{aligned} A''_x &= A_x A'_x \Delta^{-1}, & A''_y &= A_y + A'_y A_x B_y \Delta^{-1}, \\ B''_y &= B_y B'_y \Delta^{-1}, & B''_x &= B'_x + B_x A'_x B'_y \Delta^{-1}. \end{aligned}$$

Remarque Bien sûr, les valeurs des différentes dérivées partielles doivent être prises aux points appropriés!

La fonction

$$\Delta := 1 - A'_x B_y$$

vérifie $\Delta > 1 - u^{-1}v^{-1} > 0$. Les dérivées partielles de A'' , B'' s'expriment en fonction de celles de A , B , A' , B' par les formules suivantes:

$$\begin{aligned} A''_x &= A_x A'_x \Delta^{-1}, & A''_y &= A_y + A'_y A_x B_y \Delta^{-1}, \\ B''_y &= B_y B'_y \Delta^{-1}, & B''_x &= B'_x + B_x A'_x B'_y \Delta^{-1}. \end{aligned}$$

Remarque Bien sûr, les valeurs des différentes dérivées partielles doivent être prises aux points appropriés!

La distortion de F'' est contrôlée par

$$\text{Dist}(F'') \leq \max \left(\begin{array}{l} \text{Dist}(F) + C \max |B_y| (\text{Dist}(F) + \text{Dist}(F')) \\ \text{Dist}(F') + C \max |A'_x| (\text{Dist}(F) + \text{Dist}(F')) \end{array} \right),$$

avec $C = C(\lambda, u, v)$.

Le formalisme implicite dans un cadre plus général

Soient M, N des espaces de Banach. On considère un germe d'application de classe C^1 :

$$F : (M \times N, 0) \rightarrow (M \times N, 0), \quad (x_0, y_0) \mapsto (x_1, y_1) = F(x_0, y_0)$$

Le formalisme implicite dans un cadre plus général

Soient M, N des espaces de Banach. On considère un germe d'application de classe C^1 :

$$F : (M \times N, 0) \rightarrow (M \times N, 0), \quad (x_0, y_0) \mapsto (x_1, y_1) = F(x_0, y_0)$$

qui satisfait la **condition de transversalité** suivante:

Le formalisme implicite dans un cadre plus général

Soient M, N des espaces de Banach. On considère un germe d'application de classe C^1 :

$$F : (M \times N, 0) \rightarrow (M \times N, 0), \quad (x_0, y_0) \mapsto (x_1, y_1) = F(x_0, y_0)$$

qui satisfait la **condition de transversalité** suivante:

L'image par F de toute tranche $\{y = y_0\}$ est transverse à toute tranche $\{x = x_1\}$.

Le formalisme implicite dans un cadre plus général

Soient M, N des espaces de Banach. On considère un germe d'application de classe C^1 :

$$F : (M \times N, 0) \rightarrow (M \times N, 0), \quad (x_0, y_0) \mapsto (x_1, y_1) = F(x_0, y_0)$$

qui satisfait la **condition de transversalité** suivante:

L'image par F de toute tranche $\{y = y_0\}$ est transverse à toute tranche $\{x = x_1\}$.

En d'autres termes, on peut écrire localement le **graphe de F** comme

$$\begin{aligned}x_0 &= S(y_0, x_1), \\y_1 &= T(y_0, x_1),\end{aligned}$$

où

$$S : (N \times M, 0) \rightarrow (M, 0), \quad T : (N \times M, 0) \rightarrow (N, 0)$$

sont des germes d'applications de classe C^1 .

Le formalisme implicite dans un cadre plus général

Soient M, N des espaces de Banach. On considère un germe d'application de classe C^1 :

$$F : (M \times N, 0) \rightarrow (M \times N, 0), \quad (x_0, y_0) \mapsto (x_1, y_1) = F(x_0, y_0)$$

qui satisfait la **condition de transversalité** suivante:

L'image par F de toute tranche $\{y = y_0\}$ est transverse à toute tranche $\{x = x_1\}$.

En d'autres termes, on peut écrire localement le **graphe de F** comme

$$\begin{aligned}x_0 &= S(y_0, x_1), \\y_1 &= T(y_0, x_1),\end{aligned}$$

où

$$S : (N \times M, 0) \rightarrow (M, 0), \quad T : (N \times M, 0) \rightarrow (N, 0)$$

sont des germes d'applications de classe C^1 . La condition de transversalité signifie que la différentielle partielle $S_x := \frac{\partial S}{\partial x_1}$ est **invertible**.

On a

$$\begin{aligned} dx_0 &= S_y dy_0 + S_x dx_1, \\ dy_1 &= T_y dy_0 + T_x dx_1, \end{aligned}$$

où $S_y : N \rightarrow M$, $S_x : M \rightarrow M$, $T_y : N \rightarrow N$, $T_x : M \rightarrow N$ sont des opérateurs bornés (dépendant de y_0, x_1).

On a

$$\begin{aligned}dx_0 &= S_y dy_0 + S_x dx_1, \\ dy_1 &= T_y dy_0 + T_x dx_1,\end{aligned}$$

où $S_y : N \rightarrow M$, $S_x : M \rightarrow M$, $T_y : N \rightarrow N$, $T_x : M \rightarrow N$ sont des opérateurs bornés (dépendant de y_0, x_1).

En inversant S_x , on obtient

$$\begin{aligned}dx_1 &= S_x^{-1} dx_0 - S_x^{-1} S_y dy_0, \\ dy_1 &= T_y S_x^{-1} dx_0 + (T_y - T_x S_x^{-1} S_y) dy_0.\end{aligned}$$

Condition de cône (partielle)

Soient $u, v > 0$ des constantes vérifiant $uv > 1$.

Définition Le germe $F : (x_0, y_0) \mapsto (x_1, y_1)$ vérifie la **condition de cône (partielle) de paramètres u, v** si la différentielle de F vérifie

$$(*) \quad \|dy_0\| \leq u \|dx_0\| \Rightarrow \|dy_1\| \leq v^{-1} \|dx_1\|.$$

Condition de cône (partielle)

Soient $u, v > 0$ des constantes vérifiant $uv > 1$.

Définition Le germe $F : (x_0, y_0) \mapsto (x_1, y_1)$ vérifie la **condition de cône (partielle) de paramètres u, v** si la différentielle de F vérifie

$$(*) \quad \|dy_0\| \leq u \|dx_0\| \Rightarrow \|dy_1\| \leq v^{-1} \|dx_1\|.$$

Supposons que le germe F soit représenté implicitement par des applications S, T .

Condition de cône (partielle)

Soient $u, v > 0$ des constantes vérifiant $uv > 1$.

Définition Le germe $F : (x_0, y_0) \mapsto (x_1, y_1)$ vérifie la **condition de cône (partielle) de paramètres u, v** si la différentielle de F vérifie

$$(*) \quad \|dy_0\| \leq u \|dx_0\| \Rightarrow \|dy_1\| \leq v^{-1} \|dx_1\|.$$

Supposons que le germe F soit représenté implicitement par des applications S, T .

Proposition Pour que F vérifie la condition de cône (partielle) de paramètres u, v , il **suffit** que les différentielles partielles de S, T vérifient

$$(**) \quad \|S_y\| < u^{-1}, \quad \|T_x\| < v^{-1}, \quad \|S_x\| \|T_y\| \leq (u^{-1} - \|S_y\|)(v^{-1} - \|T_x\|).$$

Condition de cône (partielle)

Soient $u, v > 0$ des constantes vérifiant $uv > 1$.

Définition Le germe $F : (x_0, y_0) \mapsto (x_1, y_1)$ vérifie la **condition de cône (partielle) de paramètres u, v** si la différentielle de F vérifie

$$(*) \quad \|dy_0\| \leq u \|dx_0\| \Rightarrow \|dy_1\| \leq v^{-1} \|dx_1\|.$$

Supposons que le germe F soit représenté implicitement par des applications S, T .

Proposition *Pour que F vérifie la condition de cône (partielle) de paramètres u, v , il suffit que les différentielles partielles de S, T vérifient*

$$(**) \quad \|S_y\| < u^{-1}, \quad \|T_x\| < v^{-1}, \quad \|S_x\| \|T_y\| \leq (u^{-1} - \|S_y\|)(v^{-1} - \|T_x\|).$$

La preuve, un simple calcul, est laissée en exercice.

Composition et formalisme implicite

Soient

$$\begin{aligned} F &: (M \times N, 0) \rightarrow (M \times N, 0), & (x_0, y_0) &\mapsto (x_1, y_1) \\ F' &: (M \times N, 0) \rightarrow (M \times N, 0), & (x_1, y_1) &\mapsto (x_2, y_2) \end{aligned}$$

des germes d'application de classe C^1 .

Soient

$$\begin{aligned} F &: (M \times N, 0) \rightarrow (M \times N, 0), & (x_0, y_0) &\mapsto (x_1, y_1) \\ F' &: (M \times N, 0) \rightarrow (M \times N, 0), & (x_1, y_1) &\mapsto (x_2, y_2) \end{aligned}$$

des germes d'application de classe C^1 . Définissons

$$F'' := F' \circ F : (M \times N, 0) \rightarrow (M \times N, 0), (x_0, y_0) \mapsto (x_2, y_2)$$

Composition et formalisme implicite

Soient

$$\begin{aligned} F &: (M \times N, 0) \rightarrow (M \times N, 0), & (x_0, y_0) &\mapsto (x_1, y_1) \\ F' &: (M \times N, 0) \rightarrow (M \times N, 0), & (x_1, y_1) &\mapsto (x_2, y_2) \end{aligned}$$

des germes d'application de classe C^1 . Définissons

$$F'' := F' \circ F : (M \times N, 0) \rightarrow (M \times N, 0), (x_0, y_0) \mapsto (x_2, y_2)$$

Supposons que F (resp. F') soit représenté implicitement par des applications $S(y_0, x_1) = x_0$, $T(y_0, x_1) = y_1$ (resp. $S'(y_1, x_2) = x_1$, $T'(y_1, x_2) = y_2$), et que de plus F, F' vérifient la même condition de cône de paramètres u, v .

Composition et formalisme implicite

Soient

$$\begin{aligned} F &: (M \times N, 0) \rightarrow (M \times N, 0), & (x_0, y_0) &\mapsto (x_1, y_1) \\ F' &: (M \times N, 0) \rightarrow (M \times N, 0), & (x_1, y_1) &\mapsto (x_2, y_2) \end{aligned}$$

des germes d'application de classe C^1 . Définissons

$$F'' := F' \circ F : (M \times N, 0) \rightarrow (M \times N, 0), (x_0, y_0) \mapsto (x_2, y_2)$$

Supposons que F (resp. F') soit représenté implicitement par des applications $S(y_0, x_1) = x_0$, $T(y_0, x_1) = y_1$ (resp. $S'(y_1, x_2) = x_1$, $T'(y_1, x_2) = y_2$), et que de plus F, F' vérifient la même condition de cône de paramètres u, v .

Alors F'' vérifie aussi cette condition de cône, donc peut être représenté implicitement par des applications $S''(y_0, x_2) = x_0$, $T''(y_0, x_2) = y_2$.

Composition et formalisme implicite

Soient

$$\begin{aligned} F &: (M \times N, 0) \rightarrow (M \times N, 0), & (x_0, y_0) &\mapsto (x_1, y_1) \\ F' &: (M \times N, 0) \rightarrow (M \times N, 0), & (x_1, y_1) &\mapsto (x_2, y_2) \end{aligned}$$

des germes d'application de classe C^1 . Définissons

$$F'' := F' \circ F : (M \times N, 0) \rightarrow (M \times N, 0), (x_0, y_0) \mapsto (x_2, y_2)$$

Supposons que F (resp. F') soit représenté implicitement par des applications $S(y_0, x_1) = x_0$, $T(y_0, x_1) = y_1$ (resp. $S'(y_1, x_2) = x_1$, $T'(y_1, x_2) = y_2$), et que de plus F, F' vérifient la même condition de cône de paramètres u, v .

Alors F'' vérifie aussi cette condition de cône, donc peut être représenté implicitement par des applications $S''(y_0, x_2) = x_0$, $T''(y_0, x_2) = y_2$.

On va exprimer les différentielles partielles de S'' , T'' en fonction de celles de S, T, S', T' .

Dans les relations

$$dx_0 = S_y dy_0 + S_x dx_1,$$

$$dy_1 = T_y dy_0 + T_x dx_1,$$

$$dx_1 = S'_y dy_1 + S'_x dx_2,$$

$$dy_2 = T'_y dy_1 + T'_x dx_2,$$

il faut éliminer dx_1, dy_1 .

Dans les relations

$$dx_0 = S_y dy_0 + S_x dx_1,$$

$$dy_1 = T_y dy_0 + T_x dx_1,$$

$$dx_1 = S'_y dy_1 + S'_x dx_2,$$

$$dy_2 = T'_y dy_1 + T'_x dx_2,$$

il faut éliminer dx_1, dy_1 . On a

$$(\mathbf{1}_M - S'_y T_x) dx_1 = S'_y T_y dy_0 + S'_x dx_2,$$

$$(\mathbf{1}_N - T_x S'_y) dy_1 = T_y dy_0 + T_x S'_x dx_2.$$

Dans les relations

$$\begin{aligned} dx_0 &= S_y dy_0 + S_x dx_1, & dx_1 &= S'_y dy_1 + S'_x dx_2, \\ dy_1 &= T_y dy_0 + T_x dx_1, & dy_2 &= T'_y dy_1 + T'_x dx_2, \end{aligned}$$

il faut éliminer dx_1, dy_1 . On a

$$\begin{aligned} (\mathbf{1}_M - S'_y T_x) dx_1 &= S'_y T_y dy_0 + S'_x dx_2, \\ (\mathbf{1}_N - T_x S'_y) dy_1 &= T_y dy_0 + T_x S'_x dx_2. \end{aligned}$$

Proposition Les opérateurs $S'_y T_x, T_x S'_y$ vérifient

$$\|S'_y T_x\| \leq (uv)^{-1} < 1, \quad \|T_x S'_y\| \leq (uv)^{-1} < 1,$$

Dans les relations

$$\begin{aligned} dx_0 &= S_y dy_0 + S_x dx_1, & dx_1 &= S'_y dy_1 + S'_x dx_2, \\ dy_1 &= T_y dy_0 + T_x dx_1, & dy_2 &= T'_y dy_1 + T'_x dx_2, \end{aligned}$$

il faut éliminer dx_1, dy_1 . On a

$$\begin{aligned} (\mathbf{1}_M - S'_y T_x) dx_1 &= S'_y T_y dy_0 + S'_x dx_2, \\ (\mathbf{1}_N - T_x S'_y) dy_1 &= T_y dy_0 + T_x S'_x dx_2. \end{aligned}$$

Proposition Les opérateurs $S'_y T_x, T_x S'_y$ vérifient

$$\|S'_y T_x\| \leq (uv)^{-1} < 1, \quad \|T_x S'_y\| \leq (uv)^{-1} < 1,$$

donc $\Delta_M := \mathbf{1}_M - S'_y T_x$ et $\Delta_N := \mathbf{1}_N - T_x S'_y$ sont inversibles

Dans les relations

$$\begin{aligned} dx_0 &= S_y dy_0 + S_x dx_1, & dx_1 &= S'_y dy_1 + S'_x dx_2, \\ dy_1 &= T_y dy_0 + T_x dx_1, & dy_2 &= T'_y dy_1 + T'_x dx_2, \end{aligned}$$

il faut éliminer dx_1, dy_1 . On a

$$\begin{aligned} (\mathbf{1}_M - S'_y T_x) dx_1 &= S'_y T_y dy_0 + S'_x dx_2, \\ (\mathbf{1}_N - T_x S'_y) dy_1 &= T_y dy_0 + T_x S'_x dx_2. \end{aligned}$$

Proposition Les opérateurs $S'_y T_x, T_x S'_y$ vérifient

$$\|S'_y T_x\| \leq (uv)^{-1} < 1, \quad \|T_x S'_y\| \leq (uv)^{-1} < 1,$$

donc $\Delta_M := \mathbf{1}_M - S'_y T_x$ et $\Delta_N := \mathbf{1}_N - T_x S'_y$ sont inversibles avec

$$\|\Delta_M^{-1}\| \leq (1 - (uv)^{-1})^{-1}, \quad \|\Delta_N^{-1}\| \leq (1 - (uv)^{-1})^{-1}.$$

Dans les relations

$$\begin{aligned} dx_0 &= S_y dy_0 + S_x dx_1, & dx_1 &= S'_y dy_1 + S'_x dx_2, \\ dy_1 &= T_y dy_0 + T_x dx_1, & dy_2 &= T'_y dy_1 + T'_x dx_2, \end{aligned}$$

il faut éliminer dx_1, dy_1 . On a

$$\begin{aligned} (\mathbf{1}_M - S'_y T_x) dx_1 &= S'_y T_y dy_0 + S'_x dx_2, \\ (\mathbf{1}_N - T_x S'_y) dy_1 &= T_y dy_0 + T_x S'_x dx_2. \end{aligned}$$

Proposition Les opérateurs $S'_y T_x, T_x S'_y$ vérifient

$$\|S'_y T_x\| \leq (uv)^{-1} < 1, \quad \|T_x S'_y\| \leq (uv)^{-1} < 1,$$

donc $\Delta_M := \mathbf{1}_M - S'_y T_x$ et $\Delta_N := \mathbf{1}_N - T_x S'_y$ sont inversibles avec

$$\|\Delta_M^{-1}\| \leq (1 - (uv)^{-1})^{-1}, \quad \|\Delta_N^{-1}\| \leq (1 - (uv)^{-1})^{-1}.$$

Remarque La proposition est évidente lorsque F, F' vérifient (**), mais l'hypothèse (*) est en fait suffisante.

Preuve: Soit $m_1 \in M$. Posons $m_0 := S_x(m_1)$, $m'_1 := S'_y T_x(m_1)$. On a

$$DF_{(x_0, y_0)}(m_0, 0) = (m_1, T_x(m_1)),$$

Preuve: Soit $m_1 \in M$. Posons $m_0 := S_x(m_1)$, $m'_1 := S'_y T_x(m_1)$. On a

$$DF_{(x_0, y_0)}(m_0, 0) = (m_1, T_x(m_1)),$$

$$DF_{(x_1, y_1)}(m'_1, T_x(m_1)) \in \{0\} \times N.$$

Preuve: Soit $m_1 \in M$. Posons $m_0 := S_x(m_1)$, $m'_1 := S'_y T_x(m_1)$. On a

$$DF_{(x_0, y_0)}(m_0, 0) = (m_1, T_x(m_1)),$$

$$DF_{(x_1, y_1)}(m'_1, T_x(m_1)) \in \{0\} \times N.$$

D'après la condition de cône pour F , on a

$$\|T_x(m_1)\| \leq v^{-1} \|m_1\|.$$

Preuve: Soit $m_1 \in M$. Posons $m_0 := S_x(m_1)$, $m'_1 := S'_y T_x(m_1)$. On a

$$DF_{(x_0, y_0)}(m_0, 0) = (m_1, T_x(m_1)),$$

$$DF_{(x_1, y_1)}(m'_1, T_x(m_1)) \in \{0\} \times N.$$

D'après la condition de cône pour F , on a

$$\|T_x(m_1)\| \leq v^{-1} \|m_1\|.$$

D'après la condition de cône pour F' , on a

$$\|T_x(m_1)\| \geq u \|m'_1\|.$$

Preuve: Soit $m_1 \in M$. Posons $m_0 := S_x(m_1)$, $m'_1 := S'_y T_x(m_1)$. On a

$$DF_{(x_0, y_0)}(m_0, 0) = (m_1, T_x(m_1)),$$

$$DF_{(x_1, y_1)}(m'_1, T_x(m_1)) \in \{0\} \times N.$$

D'après la condition de cône pour F , on a

$$\|T_x(m_1)\| \leq v^{-1} \|m_1\|.$$

D'après la condition de cône pour F' , on a

$$\|T_x(m_1)\| \geq u \|m'_1\|.$$

On conclut que $\|m'_1\| \leq (uv)^{-1} \|m_1\|$ et $\|S'_y T_x\| \leq (uv)^{-1}$.

Preuve: Soit $m_1 \in M$. Posons $m_0 := S_x(m_1)$, $m'_1 := S'_y T_x(m_1)$. On a

$$DF_{(x_0, y_0)}(m_0, 0) = (m_1, T_x(m_1)),$$

$$DF_{(x_1, y_1)}(m'_1, T_x(m_1)) \in \{0\} \times N.$$

D'après la condition de cône pour F , on a

$$\|T_x(m_1)\| \leq v^{-1} \|m_1\|.$$

D'après la condition de cône pour F' , on a

$$\|T_x(m_1)\| \geq u \|m'_1\|.$$

On conclut que $\|m'_1\| \leq (uv)^{-1} \|m_1\|$ et $\|S'_y T_x\| \leq (uv)^{-1}$.

La preuve pour $T_x S'_y$ est analogue. \square

D'après la Proposition et les formules pour dx_1, dy_1 , on a

$$\begin{aligned} dx_1 &= \Delta_M^{-1}(S'_y T_y dy_0 + S'_x dx_2), \\ dy_1 &= \Delta_N^{-1}(T_y dy_0 + T_x S'_x dx_2). \end{aligned}$$

D'après la Proposition et les formules pour dx_1, dy_1 , on a

$$\begin{aligned}dx_1 &= \Delta_M^{-1}(S'_y T_y dy_0 + S'_x dx_2), \\dy_1 &= \Delta_N^{-1}(T_y dy_0 + T_x S'_x dx_2).\end{aligned}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned}S''_x &= S_x \Delta_M^{-1} S'_x, \\T''_y &= T'_y \Delta_N^{-1} T_y, \\S''_y &= S_y + S_x \Delta_M^{-1} S'_y T_y, \\T''_x &= T'_x + T'_y \Delta_N^{-1} T_x S'_x.\end{aligned}$$

Soit D un entier positif. On considère un germe d'application H de classe C^2 :

$$H: \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^{1+D}, \mathbf{0}) & \rightarrow & (\mathbb{R}^{1+D}, \mathbf{0}) \\ (x_0, y_0) & \mapsto & (x_1, y_1) \end{array}$$

avec $x_0, x_1 \in \mathbb{R}, y_0, y_1 \in \mathbb{R}^D$.

Soit D un entier positif. On considère un germe d'application H de classe C^2 :

$$H: \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^{1+D}, \mathbf{0}) & \rightarrow & (\mathbb{R}^{1+D}, \mathbf{0}) \\ (x_0, y_0) & \mapsto & (x_1, y_1) \end{array}$$

avec $x_0, x_1 \in \mathbb{R}, y_0, y_1 \in \mathbb{R}^D$.

On suppose que:

(★) La restriction au graphe de H de la projection $(x_0, y_0, x_1, y_1) \mapsto (y_0, x_1)$ présente en $(0, 0, 0, 0)$ une singularité de type pli.

Singularités de type pli (rappel)

Un germe de classe C^2 : $f : (\mathbb{R}^{1+D}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{1+D}, 0)$ présente à l'origine une **singularité de type pli** si

Singularités de type pli (rappel)

Un germe de classe C^2 : $f : (\mathbb{R}^{1+D}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{1+D}, 0)$ présente à l'origine une **singularité de type pli** si

- ▶ D_0f est de rang exactement D . On note $e \in \mathbb{R}^{1+D}$ un vecteur engendrant le noyau de D_0f .

Singularités de type pli (rappel)

Un germe de classe $C^2: f : (\mathbb{R}^{1+D}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{1+D}, 0)$ présente à l'origine une **singularité de type pli** si

- ▶ D_0f est de rang exactement D . On note $e \in \mathbb{R}^{1+D}$ un vecteur engendrant le noyau de D_0f .
- ▶ $D_0^2f(e, e)$ est **transverse** à l'image de D_0f .

Singularités de type pli (rappel)

Un germe de classe C^2 : $f : (\mathbb{R}^{1+D}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{1+D}, 0)$ présente à l'origine une **singularité de type pli** si

- ▶ $D_0 f$ est de rang exactement D . On note $e \in \mathbb{R}^{1+D}$ un vecteur engendrant le noyau de $D_0 f$.
- ▶ $D_0^2 f(e, e)$ est **transverse** à l'image de $D_0 f$.

De façon équivalente, on peut écrire f sous la forme $f = h \circ n \circ h'$, où $h, h' : (\mathbb{R}^{1+D}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{1+D}, 0)$ sont des germes de difféomorphismes et

$$n(x, y) = (x^2, y).$$

Proposition *La condition (★) est vérifiée par $H = (H^{(1)}, H^{(2)})$ si et seulement si*

$$H_x^{(1)}(0, 0) = 0, \quad H_{xx}^{(1)}(0, 0) \neq 0.$$

Proposition La condition (★) est vérifiée par $H = (H^{(1)}, H^{(2)})$ si et seulement si

$$H_x^{(1)}(0, 0) = 0, \quad H_{xx}^{(1)}(0, 0) \neq 0.$$

Preuve Notons π la projection $(x_0, y_0, x_1, y_1) \mapsto (y_0, x_1)$. L'espace tangent à l'origine T_H au graphe Γ_H de H a pour équations

$$x_1 = H_x^{(1)} x_0 + H_y^{(1)} y_0, \quad y_1 = H_x^{(2)} x_0 + H_y^{(2)} y_0.$$

Proposition La condition (★) est vérifiée par $H = (H^{(1)}, H^{(2)})$ si et seulement si

$$H_x^{(1)}(0, 0) = 0, \quad H_{xx}^{(1)}(0, 0) \neq 0.$$

Preuve Notons π la projection $(x_0, y_0, x_1, y_1) \mapsto (y_0, x_1)$. L'espace tangent à l'origine T_H au graphe Γ_H de H a pour équations

$$x_1 = H_x^{(1)} x_0 + H_y^{(1)} y_0, \quad y_1 = H_x^{(2)} x_0 + H_y^{(2)} y_0.$$

Le noyau de $\pi|_{T_H}$ est donc non trivial ssi $H_x^{(1)}(0, 0) = 0$.

Proposition La condition (★) est vérifiée par $H = (H^{(1)}, H^{(2)})$ si et seulement si

$$H_x^{(1)}(0, 0) = 0, \quad H_{xx}^{(1)}(0, 0) \neq 0.$$

Preuve Notons π la projection $(x_0, y_0, x_1, y_1) \mapsto (y_0, x_1)$. L'espace tangent à l'origine T_H au graphe Γ_H de H a pour équations

$$x_1 = H_x^{(1)} x_0 + H_y^{(1)} y_0, \quad y_1 = H_x^{(2)} x_0 + H_y^{(2)} y_0.$$

Le noyau de $\pi|_{T_H}$ est donc non trivial ssi $H_x^{(1)}(0, 0) = 0$. Dans ce cas, le noyau est engendré par $e = (1, 0, 0, H_x^{(2)})$

Proposition La condition (★) est vérifiée par $H = (H^{(1)}, H^{(2)})$ si et seulement si

$$H_x^{(1)}(0, 0) = 0, \quad H_{xx}^{(1)}(0, 0) \neq 0.$$

Preuve Notons π la projection $(x_0, y_0, x_1, y_1) \mapsto (y_0, x_1)$. L'espace tangent à l'origine T_H au graphe Γ_H de H a pour équations

$$x_1 = H_x^{(1)} x_0 + H_y^{(1)} y_0, \quad y_1 = H_x^{(2)} x_0 + H_y^{(2)} y_0.$$

Le noyau de $\pi|_{T_H}$ est donc non trivial ssi $H_x^{(1)}(0, 0) = 0$. Dans ce cas, le noyau est engendré par $e = (1, 0, 0, H_x^{(2)})$ et l'image a pour équation $\{x_1 = H_y^{(1)} y_0\}$.

Proposition La condition (★) est vérifiée par $H = (H^{(1)}, H^{(2)})$ si et seulement si

$$H_x^{(1)}(0, 0) = 0, \quad H_{xx}^{(1)}(0, 0) \neq 0.$$

Preuve Notons π la projection $(x_0, y_0, x_1, y_1) \mapsto (y_0, x_1)$. L'espace tangent à l'origine T_H au graphe Γ_H de H a pour équations

$$x_1 = H_x^{(1)} x_0 + H_y^{(1)} y_0, \quad y_1 = H_x^{(2)} x_0 + H_y^{(2)} y_0.$$

Le noyau de $\pi|_{T_H}$ est donc non trivial ssi $H_x^{(1)}(0, 0) = 0$. Dans ce cas, le noyau est engendré par $e = (1, 0, 0, H_x^{(2)})$ et l'image a pour équation $\{x_1 = H_y^{(1)} y_0\}$. On a alors

$$H^{(1)}(t, 0) = \frac{1}{2} H_{xx}^{(1)}(0, 0) t^2 + o(t^2),$$

Proposition La condition (★) est vérifiée par $H = (H^{(1)}, H^{(2)})$ si et seulement si

$$H_x^{(1)}(0, 0) = 0, \quad H_{xx}^{(1)}(0, 0) \neq 0.$$

Preuve Notons π la projection $(x_0, y_0, x_1, y_1) \mapsto (y_0, x_1)$. L'espace tangent à l'origine T_H au graphe Γ_H de H a pour équations

$$x_1 = H_x^{(1)} x_0 + H_y^{(1)} y_0, \quad y_1 = H_x^{(2)} x_0 + H_y^{(2)} y_0.$$

Le noyau de $\pi|_{T_H}$ est donc non trivial ssi $H_x^{(1)}(0, 0) = 0$. Dans ce cas, le noyau est engendré par $e = (1, 0, 0, H_x^{(2)})$ et l'image a pour équation $\{x_1 = H_y^{(1)} y_0\}$. On a alors

$$H^{(1)}(t, 0) = \frac{1}{2} H_{xx}^{(1)}(0, 0) t^2 + o(t^2),$$

donc la condition de transversalité sur $D^2 \pi|_{\Gamma_H}(e, e)$ est équivalente à $H_{xx}^{(1)}(0, 0) \neq 0$. \square

Supposons que $H = (H^{(1)}, H^{(2)}) : (x_0, y_0) \mapsto (x_1, y_1)$ vérifie la condition (★).

Supposons que $H = (H^{(1)}, H^{(2)}) : (x_0, y_0) \mapsto (x_1, y_1)$ vérifie la condition (★).

Définissons des germes $\Xi : \mathbb{R}^D \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\Upsilon : \mathbb{R}^D \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^D$ et $Q : \mathbb{R}^D \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\Xi(y_0, w) := w, \quad \Upsilon(y_0, x_1, w) := H^{(2)}(w, y_0), \quad Q(y_0, x_1, w) := H^{(1)}(w, y_0) - x_1.$$

Supposons que $H = (H^{(1)}, H^{(2)}) : (x_0, y_0) \mapsto (x_1, y_1)$ vérifie la condition (★).

Définissons des germes $\Xi : \mathbb{R}^D \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\Upsilon : \mathbb{R}^D \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^D$ et $Q : \mathbb{R}^D \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\Xi(y_0, w) := w, \quad \Upsilon(y_0, x_1, w) := H^{(2)}(w, y_0), \quad Q(y_0, x_1, w) := H^{(1)}(w, y_0) - x_1.$$

On a alors $H(x_0, y_0) = (x_1, y_1)$ dès que

$$\begin{aligned} x_0 &= \Xi(y_0, w) \\ y_1 &= \Upsilon(y_0, x_1, w) \\ Q(y_0, x_1, w) &= 0. \end{aligned}$$

Supposons que $H = (H^{(1)}, H^{(2)}) : (x_0, y_0) \mapsto (x_1, y_1)$ vérifie la condition (★).

Définissons des germes $\Xi : \mathbb{R}^D \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\Upsilon : \mathbb{R}^D \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^D$ et $Q : \mathbb{R}^D \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\Xi(y_0, w) := w, \quad \Upsilon(y_0, x_1, w) := H^{(2)}(w, y_0), \quad Q(y_0, x_1, w) := H^{(1)}(w, y_0) - x_1.$$

On a alors $H(x_0, y_0) = (x_1, y_1)$ dès que

$$\begin{aligned} x_0 &= \Xi(y_0, w) \\ y_1 &= \Upsilon(y_0, x_1, w) \\ Q(y_0, x_1, w) &= 0. \end{aligned}$$

La condition (★) implique (en $x_0 = y_1 = w = 0$)

$$Q_w = 0, \quad Q_{ww} \neq 0, \quad Q_x = -1 \neq 0, \quad \Xi_w = 1 \neq 0.$$

Inversement, donnons-nous des germes $\Xi : \mathbb{R}^D \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
 $\Upsilon : \mathbb{R}^D \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^D$ et $Q : \mathbb{R}^D \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Inversement, donnons-nous des germes $\Xi : \mathbb{R}^D \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
 $\Upsilon : \mathbb{R}^D \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^D$ et $Q : \mathbb{R}^D \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant en
 $x_0 = y_1 = w = 0$

$$(\blacktriangle) \quad Q_w = 0, \quad Q_{ww} \neq 0, \quad Q_x \neq 0, \quad \Xi_w \neq 0.$$

Inversement, donnons-nous des germes $\Xi : \mathbb{R}^D \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
 $\Upsilon : \mathbb{R}^D \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^D$ et $Q : \mathbb{R}^D \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant en
 $x_0 = y_1 = w = 0$

$$(\blacktriangle) \quad Q_w = 0, \quad Q_{ww} \neq 0, \quad Q_x \neq 0, \quad \Xi_w \neq 0.$$

Proposition *Le système*

$$\begin{aligned} (ImpQuad) \quad x_0 &= \Xi(y_0, w) \\ y_1 &= \Upsilon(y_0, x_1, w) \\ Q(y_0, x_1, w) &= 0, \end{aligned}$$

détermine des applications $x_1 = H^{(1)}(x_0, y_0)$, $y_1 = H^{(2)}(x_0, y_0)$.

Inversement, donnons-nous des germes $\Xi : \mathbb{R}^D \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
 $\Upsilon : \mathbb{R}^D \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^D$ et $Q : \mathbb{R}^D \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant en
 $x_0 = y_1 = w = 0$

$$(\blacktriangle) \quad Q_w = 0, \quad Q_{ww} \neq 0, \quad Q_x \neq 0, \quad \Xi_w \neq 0.$$

Proposition *Le système*

$$\begin{aligned} (ImpQuad) \quad x_0 &= \Xi(y_0, w) \\ y_1 &= \Upsilon(y_0, x_1, w) \\ Q(y_0, x_1, w) &= 0, \end{aligned}$$

détermine des applications $x_1 = H^{(1)}(x_0, y_0)$, $y_1 = H^{(2)}(x_0, y_0)$.

En effet, comme $\Xi_w \neq 0$, la première relation détermine une application
 $w := W(x_0, y_0)$.

Inversement, donnons-nous des germes $\Xi : \mathbb{R}^D \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\Upsilon : \mathbb{R}^D \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^D$ et $Q : \mathbb{R}^D \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant en $x_0 = y_1 = w = 0$

$$(\blacktriangle) \quad Q_w = 0, \quad Q_{ww} \neq 0, \quad Q_x \neq 0, \quad \Xi_w \neq 0.$$

Proposition *Le système*

$$\begin{aligned}
 (ImpQuad) \quad x_0 &= \Xi(y_0, w) \\
 y_1 &= \Upsilon(y_0, x_1, w) \\
 Q(y_0, x_1, w) &= 0,
 \end{aligned}$$

détermine des applications $x_1 = H^{(1)}(x_0, y_0)$, $y_1 = H^{(2)}(x_0, y_0)$.

En effet, comme $\Xi_w \neq 0$, la première relation détermine une application $w := W(x_0, y_0)$. Comme $Q_x \neq 0$, la troisième relation détermine alors $x_1 = H^{(1)}(x_0, y_0)$.

Inversement, donnons-nous des germes $\Xi : \mathbb{R}^D \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\Upsilon : \mathbb{R}^D \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^D$ et $Q : \mathbb{R}^D \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant en $x_0 = y_1 = w = 0$

$$(\blacktriangle) \quad Q_w = 0, \quad Q_{ww} \neq 0, \quad Q_x \neq 0, \quad \Xi_w \neq 0.$$

Proposition *Le système*

$$\begin{aligned}
 (ImpQuad) \quad x_0 &= \Xi(y_0, w) \\
 y_1 &= \Upsilon(y_0, x_1, w) \\
 Q(y_0, x_1, w) &= 0,
 \end{aligned}$$

détermine des applications $x_1 = H^{(1)}(x_0, y_0)$, $y_1 = H^{(2)}(x_0, y_0)$.

En effet, comme $\Xi_w \neq 0$, la première relation détermine une application $w := W(x_0, y_0)$. Comme $Q_x \neq 0$, la troisième relation détermine alors $x_1 = H^{(1)}(x_0, y_0)$. Finalement, la seconde relation détermine $y_1 = H^{(2)}(x_0, y_0)$.

Proposition *L'application H vérifie la condition (★).*

Proposition *L'application H vérifie la condition (★).*

Preuve: En dérivant par rapport à x_0 la relation

$$Q(y_0, H^{(1)}(x_0, y_0), W(x_0, y_0)) = 0,$$

on obtient

$$(1) \quad Q_x H_x^{(1)} + Q_w W_x = 0.$$

Proposition *L'application H vérifie la condition (★).*

Preuve: En dérivant par rapport à x_0 la relation

$$Q(y_0, H^{(1)}(x_0, y_0), W(x_0, y_0)) = 0,$$

on obtient

$$(1) \quad Q_x H_x^{(1)} + Q_w W_x = 0.$$

La relation $Q_w = 0$ implique donc $H_x^{(1)} = 0$ car $Q_x \neq 0$.

Proposition *L'application H vérifie la condition (★).*

Preuve: En dérivant par rapport à x_0 la relation

$$Q(y_0, H^{(1)}(x_0, y_0), W(x_0, y_0)) = 0,$$

on obtient

$$(1) \quad Q_x H_x^{(1)} + Q_w W_x = 0.$$

La relation $Q_w = 0$ implique donc $H_x^{(1)} = 0$ car $Q_x \neq 0$. En dérivant à l'origine (où l'on a $Q_w = H_x^{(1)} = 0$) par rapport à x_0 la relation (1), on obtient

$$Q_x H_{xx}^{(1)} + Q_{ww} W_x^2 = 0.$$

Proposition *L'application H vérifie la condition (★).*

Preuve: En dérivant par rapport à x_0 la relation

$$Q(y_0, H^{(1)}(x_0, y_0), W(x_0, y_0)) = 0,$$

on obtient

$$(1) \quad Q_x H_x^{(1)} + Q_w W_x = 0.$$

La relation $Q_w = 0$ implique donc $H_x^{(1)} = 0$ car $Q_x \neq 0$. En dérivant à l'origine (où l'on a $Q_w = H_x^{(1)} = 0$) par rapport à x_0 la relation (1), on obtient

$$Q_x H_{xx}^{(1)} + Q_{ww} W_x^2 = 0.$$

On a aussi $W_x = \Xi_w^{-1} \neq 0$. On conclut que $H_{xx}^{(1)} = -Q_x^{-1} Q_{ww} W_x^2 \neq 0$.

Proposition *L'application H vérifie la condition (★).*

Preuve: En dérivant par rapport à x_0 la relation

$$Q(y_0, H^{(1)}(x_0, y_0), W(x_0, y_0)) = 0,$$

on obtient

$$(1) \quad Q_x H_x^{(1)} + Q_w W_x = 0.$$

La relation $Q_w = 0$ implique donc $H_x^{(1)} = 0$ car $Q_x \neq 0$. En dérivant à l'origine (où l'on a $Q_w = H_x^{(1)} = 0$) par rapport à x_0 la relation (1), on obtient

$$Q_x H_{xx}^{(1)} + Q_{ww} W_x^2 = 0.$$

On a aussi $W_x = \Xi_w^{-1} \neq 0$. On conclut que $H_{xx}^{(1)} = -Q_x^{-1} Q_{ww} W_x^2 \neq 0$. On a vu plus haut que les relations $H_x^{(1)} = 0$, $H_{xx}^{(1)} \neq 0$ impliquent que H vérifie la condition (★). \square

Définition Le système (*ImpQuad*) (avec des germes Ξ, Υ, Q vérifiant (\blacktriangle)), constitue une **représentation implicite** de l'application H vérifiant (\star).

Définition Le système (*ImpQuad*) (avec des germes Ξ, Υ, Q vérifiant (\blacktriangle)), constitue une **représentation implicite** de l'application H vérifiant (\star).

Remarque On a vu qu'une application H vérifiant (\star) possède toujours une représentation implicite. Mais une telle représentation est loin d'être unique.

Soit H une application vérifiant (★), représentée implicitement par un système (*ImpQuad*).

Soit H une application vérifiant (\star), représentée implicitement par un système (*ImpQuad*). On suppose (par exemple) que $Q_{ww} > 0$. On définit une fonction $q(y_0, x_1) := \min_w Q(y_0, x_1, w)$. On a $q(0, 0) = 0$.

Soit H une application vérifiant (\star) , représentée implicitement par un système (*ImpQuad*). On suppose (par exemple) que $Q_{ww} > 0$. On définit une fonction $q(y_0, x_1) := \min_w Q(y_0, x_1, w)$. On a $q(0, 0) = 0$. L'image par $\pi : (x_0, y_0, x_1, y_1) \mapsto (y_0, x_1)$ du graphe de H est le domaine $\{q(y_0, x_1) \leq 0\}$. La courbe lisse $\{q(y_0, x_1) = 0\}$ est l'image du pli de $\pi|_{\Gamma_H}$.

Soit H une application vérifiant (\star), représentée implicitement par un système ($ImpQuad$). On suppose (par exemple) que $Q_{ww} > 0$. On définit une fonction $q(y_0, x_1) := \min_w Q(y_0, x_1, w)$. On a $q(0, 0) = 0$.

L'image par $\pi : (x_0, y_0, x_1, y_1) \mapsto (y_0, x_1)$ du graphe de H est le domaine $\{q(y_0, x_1) \leq 0\}$. La courbe lisse $\{q(y_0, x_1) = 0\}$ est l'image du pli de $\pi|_{\Gamma_H}$.

Dans la région $\{q(y_0, x_1) < 0\}$, l'équation (en la variable w) $Q(y_0, x_1, w) = 0$ possède deux solutions $W_-(y_0, x_1) < W_+(y_0, x_1)$.

Soit H une application vérifiant (\star), représentée implicitement par un système ($ImpQuad$). On suppose (par exemple) que $Q_{ww} > 0$. On définit une fonction $q(y_0, x_1) := \min_w Q(y_0, x_1, w)$. On a $q(0, 0) = 0$.

L'image par $\pi : (x_0, y_0, x_1, y_1) \mapsto (y_0, x_1)$ du graphe de H est le domaine $\{q(y_0, x_1) \leq 0\}$. La courbe lisse $\{q(y_0, x_1) = 0\}$ est l'image du pli de $\pi|_{\Gamma_H}$.

Dans la région $\{q(y_0, x_1) < 0\}$, l'équation (en la variable w) $Q(y_0, x_1, w) = 0$ possède deux solutions $W_-(y_0, x_1) < W_+(y_0, x_1)$. Les deux sections de $\pi|_{\Gamma_H}$ dans $\{q < 0\}$ sont données par

$$\begin{aligned} x_0 &= \Xi(y_0, W_\varepsilon(y_0, x_1)) &=: S_\varepsilon(y_0, x_1), \\ y_1 &= \Upsilon(y_0, x_1, W_\varepsilon(y_0, x_1)) &=: T_\varepsilon(y_0, x_1), \end{aligned}$$

avec $\varepsilon \in \{-1, +1\}$.

Soit H une application vérifiant (\star), représentée implicitement par un système (*ImpQuad*). On suppose (par exemple) que $Q_{ww} > 0$. On définit une fonction $q(y_0, x_1) := \min_w Q(y_0, x_1, w)$. On a $q(0, 0) = 0$.

L'image par $\pi : (x_0, y_0, x_1, y_1) \mapsto (y_0, x_1)$ du graphe de H est le domaine $\{q(y_0, x_1) \leq 0\}$. La courbe lisse $\{q(y_0, x_1) = 0\}$ est l'image du pli de $\pi|_{\Gamma_H}$.

Dans la région $\{q(y_0, x_1) < 0\}$, l'équation (en la variable w) $Q(y_0, x_1, w) = 0$ possède deux solutions $W_-(y_0, x_1) < W_+(y_0, x_1)$. Les deux sections de $\pi|_{\Gamma_H}$ dans $\{q < 0\}$ sont données par

$$\begin{aligned} x_0 &= \Xi(y_0, W_\varepsilon(y_0, x_1)) &=: S_\varepsilon(y_0, x_1), \\ y_1 &= \Upsilon(y_0, x_1, W_\varepsilon(y_0, x_1)) &=: T_\varepsilon(y_0, x_1), \end{aligned}$$

avec $\varepsilon \in \{-1, +1\}$. Ces équations représentent implicitement H dans les régions $\{Q_w < 0\}$ (pour $\varepsilon = -1$) et $\{Q_w > 0\}$ (pour $\varepsilon = +1$).

Soit H une application vérifiant (\star), représentée implicitement par un système (*ImpQuad*). On suppose (par exemple) que $Q_{ww} > 0$. On définit une fonction $q(y_0, x_1) := \min_w Q(y_0, x_1, w)$. On a $q(0, 0) = 0$.

L'image par $\pi : (x_0, y_0, x_1, y_1) \mapsto (y_0, x_1)$ du graphe de H est le domaine $\{q(y_0, x_1) \leq 0\}$. La courbe lisse $\{q(y_0, x_1) = 0\}$ est l'image du pli de $\pi|_{\Gamma_H}$.

Dans la région $\{q(y_0, x_1) < 0\}$, l'équation (en la variable w) $Q(y_0, x_1, w) = 0$ possède deux solutions $W_-(y_0, x_1) < W_+(y_0, x_1)$. Les deux sections de $\pi|_{\Gamma_H}$ dans $\{q < 0\}$ sont données par

$$\begin{aligned} x_0 &= \Xi(y_0, W_\varepsilon(y_0, x_1)) &=: S_\varepsilon(y_0, x_1), \\ y_1 &= \Upsilon(y_0, x_1, W_\varepsilon(y_0, x_1)) &=: T_\varepsilon(y_0, x_1), \end{aligned}$$

avec $\varepsilon \in \{-1, +1\}$. Ces équations représentent implicitement H dans les régions $\{Q_w < 0\}$ (pour $\varepsilon = -1$) et $\{Q_w > 0\}$ (pour $\varepsilon = +1$).

Rappelons qu'on a $H_x^{(1)} = -Q_x^{-1} \Xi_w^{-1} Q_w$.

On omet dans les formules ci-dessous la dépendance par rapport à $\varepsilon \in \{-1, +1\}$. De $Q(y_0, x_1, W(y_0, x_1)) = 0$, on déduit:

$$W_x = -Q_w^{-1} Q_x, \quad W_y = -Q_w^{-1} Q_y.$$

Différentielles partielles de $S_\varepsilon, T_\varepsilon$

On omet dans les formules ci-dessous la dépendance par rapport à $\varepsilon \in \{-1, +1\}$. De $Q(y_0, x_1, W(y_0, x_1)) = 0$, on déduit:

$$W_x = -Q_w^{-1} Q_x, \quad W_y = -Q_w^{-1} Q_y.$$

Les formules pour S, T donnent alors

$$\begin{aligned} S_x &= \Xi_w W_x &= -\Xi_w Q_w^{-1} Q_x, \\ S_y &= \Xi_y + \Xi_w W_y &= \Xi_y - \Xi_w Q_w^{-1} Q_y, \\ T_x &= \Upsilon_x + \Upsilon_w W_x &= \Upsilon_x - \Upsilon_w Q_w^{-1} Q_x, \\ T_y &= \Upsilon_y + \Upsilon_w W_y &= \Upsilon_y - \Upsilon_w Q_w^{-1} Q_y \end{aligned}$$

Itération initiale

Rappelons qu'on étudie

$$f_{c,B} : (x_0, y_0) \mapsto (x_1, y_1) = (x_0^2 + c + B_1(x_0, y_0), B_2(x_0, y_0)),$$

avec $b = \max(\|B_1\|_{C^2}, \|B_2\|_{C^2}) \ll 4^{-M}$.

Itération initiale

Rappelons qu'on étudie

$$f_{c,B} : (x_0, y_0) \mapsto (x_1, y_1) = (x_0^2 + c + B_1(x_0, y_0), B_2(x_0, y_0)),$$

avec $b = \max(\|B_1\|_{C^2}, \|B_2\|_{C^2}) \ll 4^{-M}$.

La courbe $\{2x_0 + B_{1,x}(x_0, y_0) = 0\}$ est lisse et $O(b)$ -distante dans la C^1 -topologie de $\{x_0 = 0\}$.

Itération initiale

Rappelons qu'on étudie

$$f_{c,B} : (x_0, y_0) \mapsto (x_1, y_1) = (x_0^2 + c + B_1(x_0, y_0), B_2(x_0, y_0)),$$

avec $b = \max(\|B_1\|_{C^2}, \|B_2\|_{C^2}) \ll 4^{-M}$.

La courbe $\{2x_0 + B_{1,x}(x_0, y_0) = 0\}$ est lisse et $O(b)$ -distante dans la C^1 -topologie de $\{x_0 = 0\}$. Comme on a $2 + B_{1,xx}(x_0, y_0) > 2 - b$, l'application $f_{c,B}$ vérifie la condition (★) le long de cette courbe, qui constitue une première approximation du "lieu critique".

Itération initiale

Rappelons qu'on étudie

$$f_{c,B} : (x_0, y_0) \mapsto (x_1, y_1) = (x_0^2 + c + B_1(x_0, y_0), B_2(x_0, y_0)),$$

avec $b = \max(\|B_1\|_{C^2}, \|B_2\|_{C^2}) \ll 4^{-M}$.

La courbe $\{2x_0 + B_{1,x}(x_0, y_0) = 0\}$ est lisse et $O(b)$ -distante dans la C^1 -topologie de $\{x_0 = 0\}$. Comme on a $2 + B_{1,xx}(x_0, y_0) > 2 - b$, l'application $f_{c,B}$ vérifie la condition (★) le long de cette courbe, qui constitue une première approximation du "lieu critique". L'application $f_{c,B}$ est implicitement représentée par le système (*ImpQuad*), avec

$$\begin{aligned} \text{(Start)} \quad \Xi(y_0, w) &= w, \\ \Upsilon(y_0, x_1, w) &= B_2(w, y_0), \\ Q(y_0, x_1, w) &= w^2 + c + B_1(w, y_0) - x_1. \end{aligned}$$

Itération initiale

Rappelons qu'on étudie

$$f_{c,B} : (x_0, y_0) \mapsto (x_1, y_1) = (x_0^2 + c + B_1(x_0, y_0), B_2(x_0, y_0)),$$

avec $b = \max(\|B_1\|_{C^2}, \|B_2\|_{C^2}) \ll 4^{-M}$.

La courbe $\{2x_0 + B_{1,x}(x_0, y_0) = 0\}$ est lisse et $O(b)$ -distante dans la C^1 -topologie de $\{x_0 = 0\}$. Comme on a $2 + B_{1,xx}(x_0, y_0) > 2 - b$, l'application $f_{c,B}$ vérifie la condition (★) le long de cette courbe, qui constitue une première approximation du "lieu critique". L'application $f_{c,B}$ est implicitement représentée par le système (*ImpQuad*), avec

$$\begin{aligned} \text{(Start)} \quad \Xi(y_0, w) &= w, \\ \Upsilon(y_0, x_1, w) &= B_2(w, y_0), \\ Q(y_0, x_1, w) &= w^2 + c + B_1(w, y_0) - x_1. \end{aligned}$$

On a observé ci-dessus que $\Xi_w \equiv 1$, $Q_x \equiv -1$ et $Q_{ww} = 2 + B_{1,ww}$ vérifie $|Q_{ww} - 2| < b$. Les relations (▲) sont donc satisfaites.

L'objectif **qualitatif** de la sélection des paramètres (fortement réguliers) est de ne **jamais avoir à considérer la composition de deux itérés H, H' de $f_{c,B}$ qui vérifient la condition (★).**

L'objectif **qualitatif** de la sélection des paramètres (fortement réguliers) est de ne **jamais avoir à considérer la composition de deux itérés H, H' de $f_{c,B}$ qui vérifient la condition (★).**

Pour le théorème de Jakobson, ceci correspond à l'existence d'une suite strictement croissante d'entiers (N_k) telle que $c_k = P_c^{N_k}(0)$ appartienne à un intervalle **régulier** J_k d'ordre $n_k := N_{k+1} - N_k$.

L'objectif **qualitatif** de la sélection des paramètres (fortement réguliers) est de ne **jamais avoir à considérer la composition de deux itérés H, H' de $f_{c,B}$ qui vérifient la condition (★).**

Pour le théorème de Jakobson, ceci correspond à l'existence d'une suite strictement croissante d'entiers (N_k) telle que $c_k = P_c^{N_k}(0)$ appartienne à un intervalle **régulier** J_k d'ordre $n_k := N_{k+1} - N_k$.

Par contre, il faudra contrôler la **précomposition** et la **postcomposition** d'un itéré H vérifiant (★) avec des itérés "de type affine".