Magnétisme artificiel et interactions : condensats en rotation

Jean Dalibard

Chaire *Atomes et rayonnement*

Année 2013-14

COLLÈGE DE FRANCE
1530

Magnétisme dans une assemblée
de particule en interaction

Vaste champ de recherche, avec un magnétisme qui peut être orbital et/ou de spin

Ferromagnétisme ou antiferromagnétisme

➡ Supraconductivité et effet Meissner

➡ Effet Hall quantique

Spintronique

Effet Kondo

Isolants et supraconducteurs topologiques

Lien entre rotation et superfluidité

Magnétisme orbital $\longleftrightarrow$ Rotation

pulsation cyclotron ω_c — *fréquence de rotation* $\Omega = \omega_c / 2$

Gaz de Bose à N particules en interaction répulsive

$\longrightarrow$ Condensat de Bose-Einstein superfluide à température nulle

Que devient ce gaz en présence de magnétisme orbital, *i.e.*, quand il tourne ?

Quand on augmente le champ magnétique, un matériau supraconducteur (de type II) commence par se remplir de vortex, puis il revient à l'état normal.

Mais un gaz de Bose n'a pas d'état normal à température nulle...

Plan du cours

1. Interactions dans un gaz froid

   Longueur de diffusion, approximation de champ moyen, passage à deux dimensions

2. Vortex dans un condensat

   Fréquence critique, réseau d'Abrikosov et argument de Feynman

3. Rotation et niveau de Landau fondamental

   Vers la rotation rapide...

4. Au delà du champ moyen

   Etats fortement corrélés : seuil d'apparition et schémas de détection possibles

Plan du cours

1. Interactions dans un gaz froid

Longueur de diffusion, approximation de champ moyen, passage à deux dimensions

2. Vortex dans un condensat

Fréquence critique, réseau d'Abrikosov et argument de Feynman

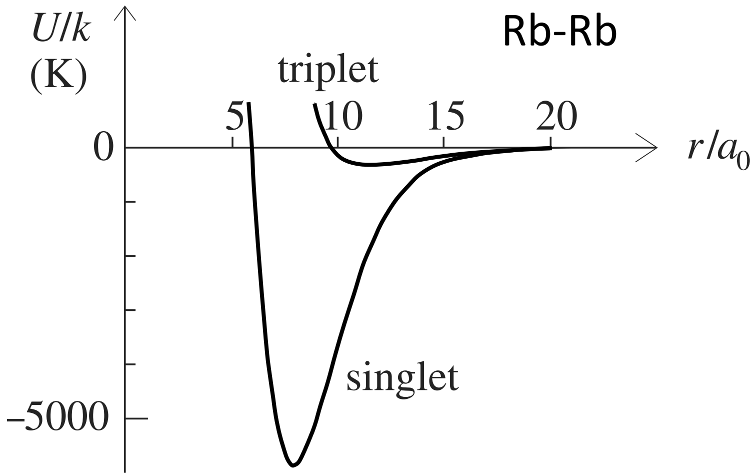
3. Rotation et niveau de Landau fondamental

Vers la rotation rapide...

4. Au delà du champ moyen

Etats fortement corrélés : seuil d'apparition et schémas de détection possibles

Interaction entre deux atomes neutres



Potentiel *a priori* compliqué, mais à très basse température (microkelvin), la partie isotrope de la section efficace de collision est généralement la seule à contribuer significativement (onde s)

Le potentiel d'interaction est alors représenté par un nombre, la longueur de diffusion a, et on peut le remplacer par un potentiel plus simple de même longueur de diffusion:

$$U^{(3D)}(\boldsymbol{r}) = \frac{4\pi\hbar^2 a}{M}\,\delta^{(3D)}(\boldsymbol{r})$$ **potentiel de contact**

Approximation de champ moyen

Hamiltonien du système de N atomes piégés et en interaction binaire :

$$\hat{H}^{(N)} = \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{\hat{p}_i^2}{2M} + V(\boldsymbol{r}_i) \right) + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,\, j \\ i \neq j}} U(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j)$$

On va s'intéresser à l'état fondamental de ce système,
qui est *a priori* une fonction d'onde $\Psi(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N)$

Une hypothèse qui simplifie considérablement le problème : « champ moyen »

$$\Psi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_N) = \psi(\boldsymbol{r}_1)\ \psi(\boldsymbol{r}_2) \ldots \psi(\boldsymbol{r}_N)$$

$$\int |\psi(\boldsymbol{r})|^2 \ d^3r = 1$$

néglige toute corrélation entre particules

Comment déterminer la fonction ψ qui représente au mieux le vrai état fondamental ?

L'énergie de Gross-Pitaevskii

Dans le cadre de l'approximation de champ moyen $\Psi(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N) = \psi(\boldsymbol{r}_1) \ldots \psi(\boldsymbol{r}_N)$

on va chercher la fonction ψ normée qui minimise l'énergie moyenne :

$$E^{(N)}[\psi] = \langle \Psi | \hat{H}^{(N)} | \Psi \rangle$$

Valeur explicite de l'énergie par particule $E[\psi] = E^{(N)}[\psi]/N$:

$$E[\psi] = \int \left(\frac{\hbar^2}{2M} |\boldsymbol{\nabla}\psi(\boldsymbol{r})|^2 + V(\boldsymbol{r})|\psi(\boldsymbol{r})|^2 + \frac{2\pi\hbar^2 aN}{M} |\psi(\boldsymbol{r})|^4 \right) \,\mathrm{d}^3 r$$

énergie cinétique	énergie de piégeage	énergie d'interaction

Formulation équivalente : la fonction ψ est solution de l'équation de Gross-Pitaevskii

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\Delta\psi(\boldsymbol{r}) + V(\boldsymbol{r})\psi(\boldsymbol{r}) + \frac{4\pi\hbar^2 aN}{M}|\psi(\boldsymbol{r})|^2\psi(\boldsymbol{r}) = \mu\, \psi(\boldsymbol{r})$$

μ : potentiel chimique

La longueur de cicatrisation ξ

Longueur associée aux interactions

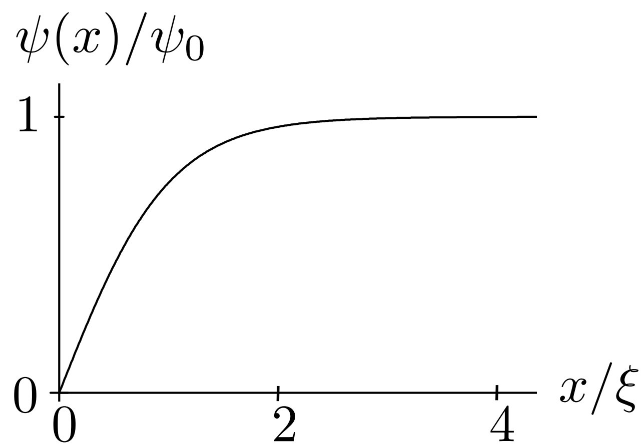
Exemple de problème :

- on place un paroi en $x = 0$, sur laquelle $\psi(x)$ doit s'annuler
- quand $x \to \infty,\ \psi(x) \to \psi_0 \propto (\text{densité})^{1/2}$

Il faut trouver le meilleur compromis entre :

- le terme d'énergie cinétique qui favorise des variations lentes de $\psi(x)$

- le terme d'énergie d'interaction répulsive qui tend à remplir uniformément tout le volume accessible.

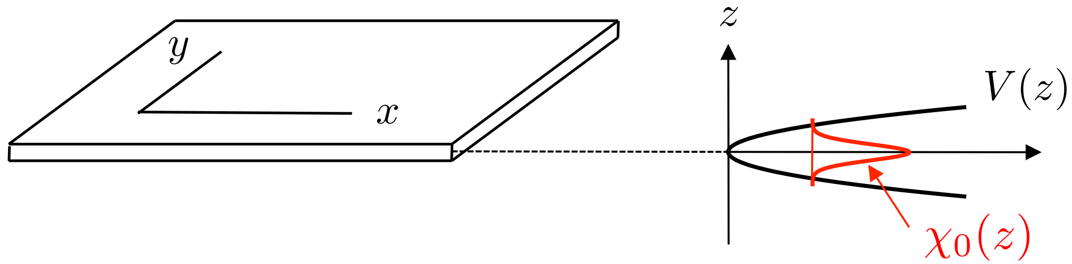


$$\psi(x) = \psi_0 \tanh(x/\xi) \qquad \xi = \frac{\hbar}{\sqrt{M\mu}}$$

Passage à deux dimensions

Ce passage va nous permettre de nous concentrer sur les termes importants pour l'étude du magnétisme et va simplifier le formalisme.

Le mouvement selon la direction z est supposé « gelé » par un fort potentiel de confinement $V(z)$



Ramène la recherche de l'état fondamental à une fonction ϕ : $\psi(x,y,z) = \phi(x,y)\,\chi_0(z)$

Energie par particule : $$E[\phi] = \int \left(\frac{\hbar^2}{2M}|\boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{r})|^2 + \frac{1}{2}M\omega^2 r^2|\phi(\boldsymbol{r})|^2 + \frac{\hbar^2}{2M}\,Ng\,|\phi(\boldsymbol{r})|^4 \right)\,\mathrm{d}^2r$$

cinétique **piège xy harmonique** **interaction**

Les interactions sont maintenant caractérisées par le nombre sans dimension $g = \sqrt{8\pi}\,\dfrac{a}{a_z}$

« taille » de l'état $\chi_0(z)$ selon z : $a_z = \sqrt{\hbar/M\omega_z}$

Echelles d'énergie dans un piège à deux dimensions

Trois termes « en compétition » dans l'énergie $E[\phi]$

Energie du piège	Energie cinétique	Energie d'interaction
$\frac{1}{2}M\omega^2\int r^2\|\phi\|^2$	$\frac{\hbar^2}{M}\int \|\boldsymbol{\nabla}\phi\|^2$	$\frac{\hbar^2}{M}Ng\int \|\phi\|^4$
Favorise des fonctions ϕ compactes, localisées au voisinage de 0	Favorisent des fonctions ϕ étalées dans le piège en xy	

On commence par comparer énergie cinétique et énergie d'interaction

Fonction ϕ normalisée, d'extension typique R autour de $r = 0$: $\phi \sim 1/R$ $\quad \int |\phi|^2 = 1$

Energie cinétique

$$\sim \frac{\hbar^2}{MR^2}$$

Energie d'interaction

$$\sim \frac{\hbar^2}{MR^2}Ng$$

Valeurs typiques de g : 10^{-2} à 1 . Dès que N >100, l'énergie d'interaction domine à 2D

Piège harmonique 2D et régime de Thomas-Fermi

Echelle de longueur « naturelle » : $a_\perp = \sqrt{\hbar/M\omega}$

On se place dans le cas $Ng \gg 1$: énergie cinétique << énergie d'interaction

L'équilibre du gaz résulte donc de la compétition entre énergies de piégeage et d'interaction

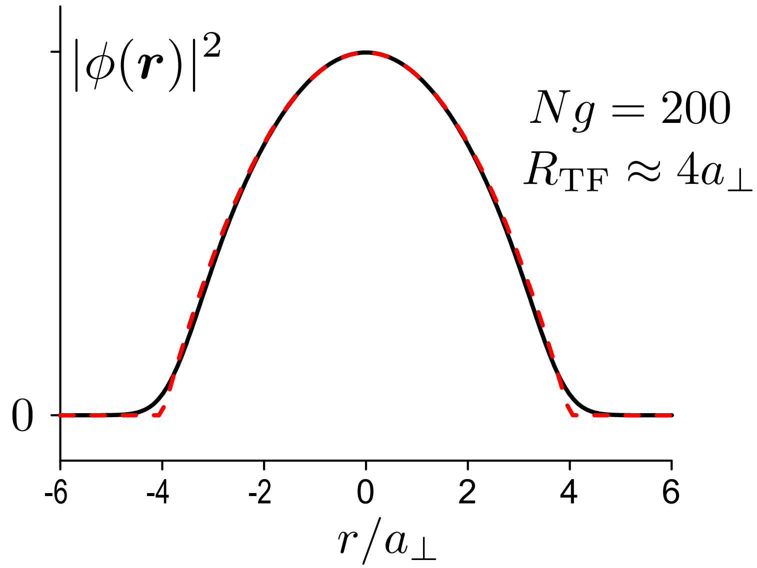
Equation de Gross-Pitaevskii : $$\cancel{-\frac{\hbar^2}{2M}\Delta\phi} + \frac{1}{2}M\omega^2 r^2 \cancel{\phi} + \frac{\hbar^2}{M} Ng\,|\phi|^2 \cancel{\phi} = \mu \cancel{\phi}$$

Solution en « parabole inversée » : $$Ng\,|\phi(\boldsymbol{r})|^2 = \frac{1}{2a_\perp^4}\left(R_{\rm TF}^2 - r^2\right) \qquad \mu = \frac{1}{2}M\omega^2 R_{\rm TF}^2$$

$$\mu = \hbar\omega \left(\frac{Ng}{\pi}\right)^{1/2} \gg \hbar\omega$$

$$R_{\rm TF} = a_\perp \left(\frac{4Ng}{\pi}\right)^{1/4} \gg a_\perp$$

$$\xi = \frac{\hbar}{\sqrt{M\mu}} \ll a_\perp$$



Plan du cours

1. Interactions dans un gaz froid

Longueur de diffusion, approximation de champ moyen, passage à deux dimensions

2. Vortex dans un condensat

Fréquence critique, réseau d'Abrikosov et argument de Feynman

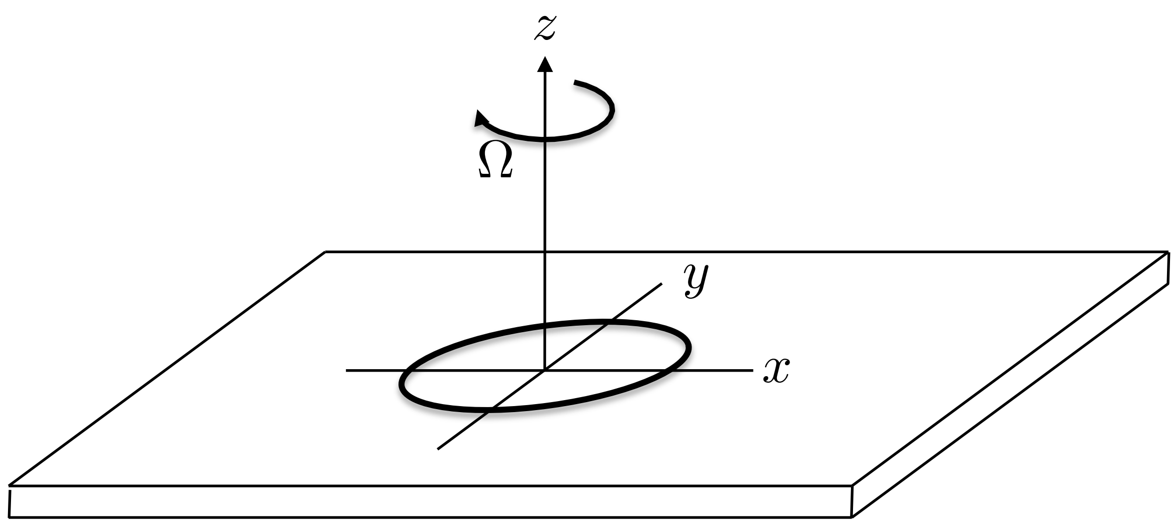
3. Rotation et niveau de Landau fondamental

Vers la rotation rapide...

4. Au delà du champ moyen

Etats fortement corrélés : seuil d'apparition et schémas de détection possibles

Condensat en rotation



Passage dans le référentiel tournant

Hamiltonien à une particule : $$\hat{H} = \frac{\hat{\boldsymbol{p}}^2}{2M} + \frac{1}{2} M\omega^2 \hat{\boldsymbol{r}}^2 - \Omega \hat{L}_z$$

Energie de Gross-Pitaevskii : $$E[\phi] \to E[\phi] - \underbrace{\Omega \int \phi^* \left(\hat{L}_z \phi \right) \, \mathrm{d}^2 r}_{}$$

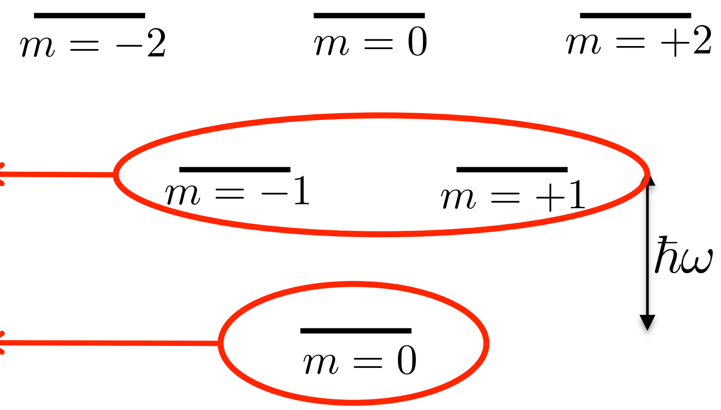
favorise l'apparition d'états de moment cinétique non nul

Les vortex (ou tourbillons quantiques)

Rappel sur l'oscillateur harmonique à deux dimensions

$$\psi_\pm(\boldsymbol{r}) = r\, \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\varphi}\, \mathrm{e}^{-r^2/2a_\perp^2}$$

$$\psi_0(\boldsymbol{r}) = \mathrm{e}^{-r^2/2a_\perp^2}$$



Etats propre de l'hamiltonien à une particule et du moment cinétique L_z

Les états $\psi_\pm(\boldsymbol{r})$ sont des états à un vortex :

- un point où la densité s'annule (ici $\boldsymbol{r} = 0$)
- une phase qui tourne de $\pm 2\pi$ autour de ce point
- un champ de vitesse orthoradial au voisinage de ce point $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = \pm \dfrac{\hbar}{Mr}\boldsymbol{u}_\varphi$

$$\phi(\boldsymbol{r}) = |\phi(\boldsymbol{r})|\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(\boldsymbol{r})} \;\rightarrow\; \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = \frac{\hbar}{M}\boldsymbol{\nabla}\theta(\boldsymbol{r})$$

Vortex à l'équilibre en présence d'interactions

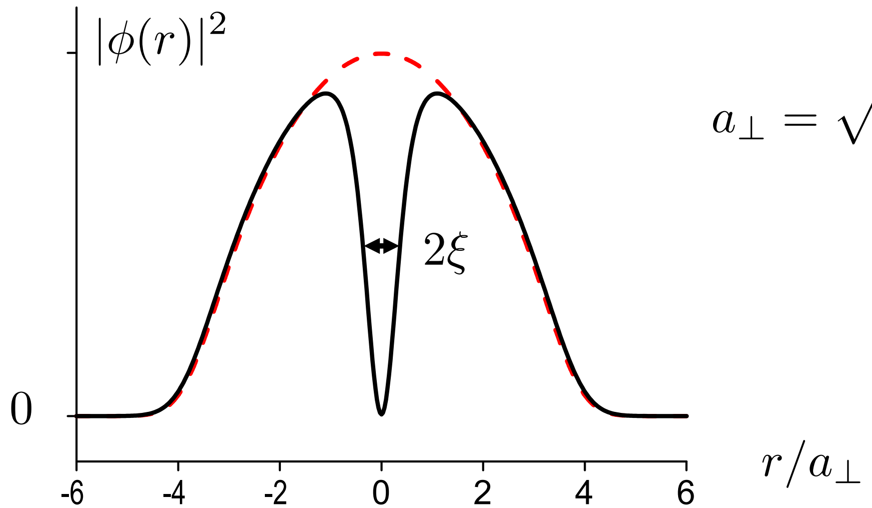
Etat d'énergie minimale de l'équation de Gross-Pitaevskii avec moment cinétique $\hbar$

En présence d'interactions répulsives entre atomes, sa taille à l'équilibre est ξ

$$Ng = 200$$

$$R_{\mathrm{TF}} \approx 4a_\perp$$

$$\xi \approx 0.35\, a_\perp$$



$$a_\perp = \sqrt{\hbar/M\omega}$$

Un vortex est-il énergétiquement favorable ?

La présence d'un vortex abaisse le terme d'énergie liée au passage dans le référentiel tournant : $\Omega \hat{L}_z \longrightarrow -\hbar\Omega$

Mais elle augmente le terme d'énergie cinétique à cause de $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = \dfrac{\hbar}{Mr}\boldsymbol{u}_\varphi$

$$\begin{aligned}\Delta E_{\text{tot}} &\approx -\hbar\Omega + \frac{M}{2}\int |\phi(\boldsymbol{r})|^2\ \boldsymbol{v}^2(\boldsymbol{r})\ \mathrm{d}^2 r \\ &\approx -\hbar\Omega + \frac{M}{2}\int_{\xi}^{R_{\text{TF}}} |\phi(\boldsymbol{r})|^2\ \frac{\hbar^2}{M^2 r^2}\ 2\pi r\ \ \mathrm{d}r \\ &\approx -\hbar\Omega + \hbar\omega\sqrt{\frac{\pi}{Ng}}\ \ln\frac{R_{\text{TF}}}{\xi}\end{aligned}$$

Fréquence de rotation critique correspondant à $\Delta E_{\text{tot}} < 0$

$$\Omega_c \ \approx\ \omega\sqrt{\frac{\pi}{Ng}}\ \ln\frac{R_{\text{TF}}}{\xi}$$

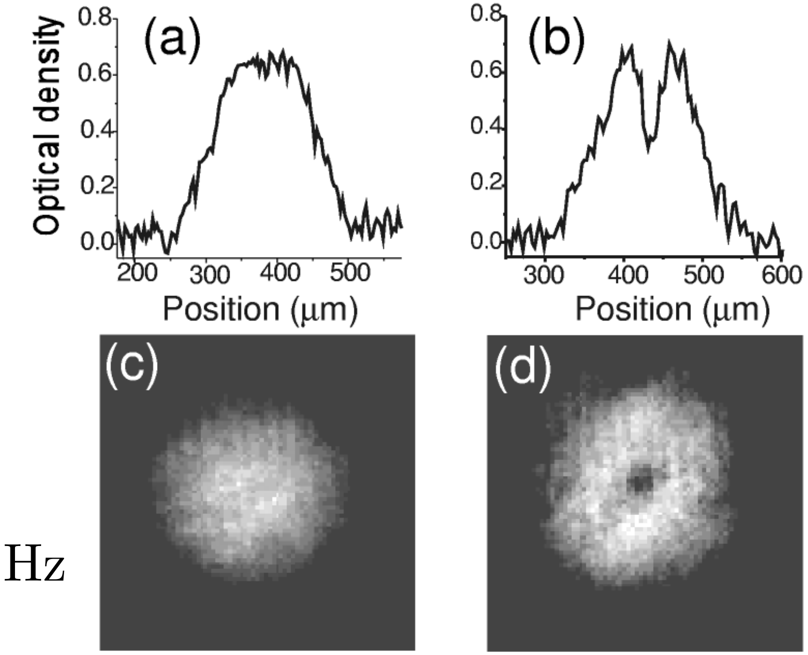
Limite de Thomas-Fermi :

$$Ng \gg 1 \quad \longrightarrow \quad \Omega_c \ll \omega$$

Premiers vortex dans un condensat tournant

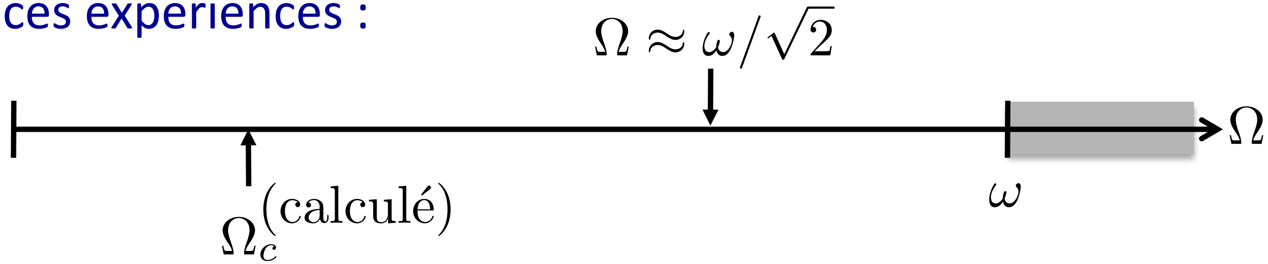
^{87}Rb,
10^5 atomes
ENS 2000

fréquence de piégeage en xy :
$\omega/2\pi = 220\,\mathrm{Hz}$



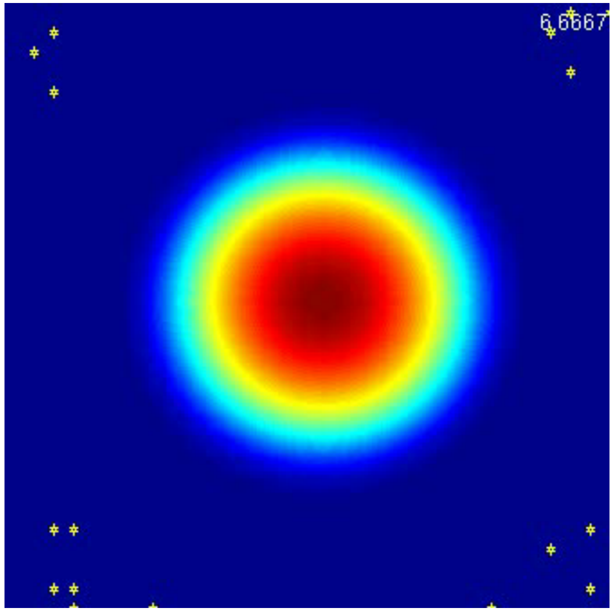
$\Omega/2\pi = 145\,\mathrm{Hz}$ (c) — (d) $\Omega/2\pi = 152\,\mathrm{Hz}$

Fréquence critique pour ces expériences :



Explication : pour faire entrer ce vortex, il faut passer par une instabilité dynamique

L'entrée des vortex dans un condensat tournant

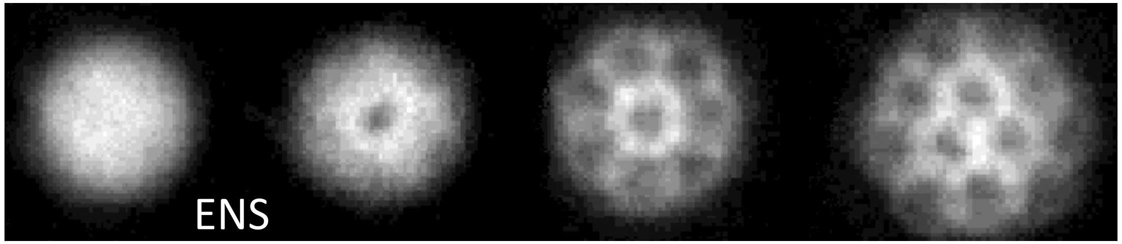


C. Lobo,
A. Sinatra,
Y. Castin,

Résolution numérique de l'équation
de Gross-Pitaevskii dépendant du temps

$$\Omega(t): \quad \Omega_i = 0 \rightarrow \Omega_f = 0.8\,\omega$$

Observation de vortex multiples pour des fréquences de rotation plus élevées



Nombre de vortex
en fonction de Ω ?

L'argument de Feynman

Comment mettre du moment cinétique dans un superfluide circulaire ?

Les vortex sont incontournables ! (égalt. Onsager)

- en dehors d'un vortex :

$$\phi(\boldsymbol{r}) = |\phi(\boldsymbol{r})|\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(\boldsymbol{r})} \xrightarrow{\text{si } |\phi(\boldsymbol{r})| \neq 0} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = \frac{\hbar}{M} \boldsymbol{\nabla}\theta(\boldsymbol{r}) \longrightarrow \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = 0$$

vorticité nulle

- sur un vortex au point $\boldsymbol{r}_0$:

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) \approx \frac{\hbar}{M|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}\boldsymbol{u}_\varphi \longrightarrow \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = \frac{2\pi\hbar}{M}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$$

Comparaison avec un fluide classique :

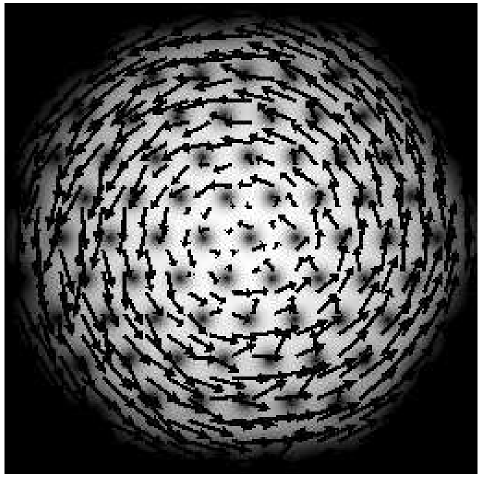
champ de rotation rigide : $\boldsymbol{v}_{\text{class.}}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r} \longrightarrow \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = 2\,\boldsymbol{\Omega}$

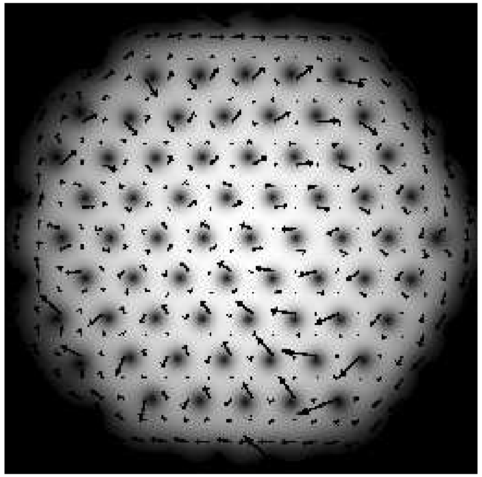
Les deux situations seront (en moyenne) équivalentes pour une densité de vortex $\dfrac{2\pi\hbar}{M}\rho_v = 2\Omega$

Confirmation numérique de l'argument de Feynman

Feder-Clark

Champ de vitesse dans
le référentiel du labo





Champ de vitesse dans
le référentiel tournant

- L'état stationnaire correspond bien à la densité de vortex prédite par Feynman pour assurer un champ de vitesse similaire (en moyenne) à la rotation rigide

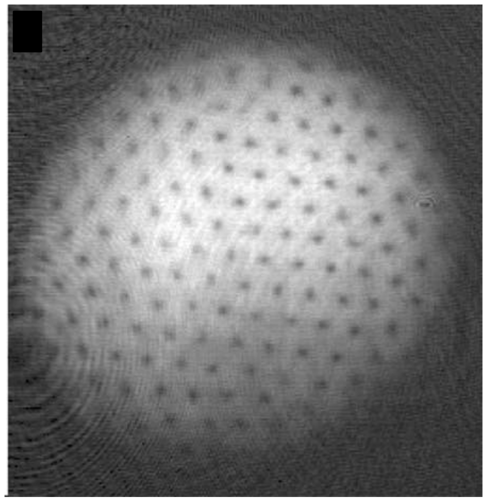
- Les vortex s'arrangent en un réseau régulier triangulaire [similaire au réseau d'Abrikosov pour des vortex dans un supraconducteur de type II]

Grands réseaux de vortex et loi de Feynman

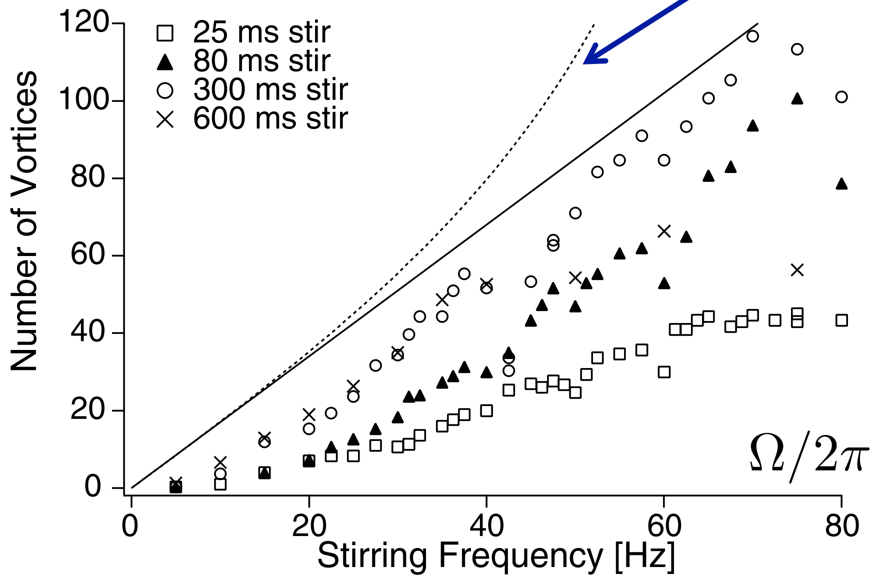
Nombre de vortex : $N_v = \rho_v \, \pi R_{\mathrm{TF}}^2 \qquad \text{avec} \quad \rho_v = \dfrac{M\Omega}{\pi\hbar}$

loi de Feynman

MIT 2001



$\Omega/2\pi = 60\,\mathrm{Hz}$



Piège contenant 50 millions d'atomes de ^{23}Na, avec $\omega/2\pi = 86\,\mathrm{Hz}$

Accord raisonnable avec la loi de Feynman, mais on ne l'atteint jamais complètement : mise à l'équilibre imparfaite ?

Forme d'équilibre du condensat en rotation

L'énergie totale est la somme de quatre termes :

$$E[\phi] = E_c[\phi] + E_p[\phi] + E_{\rm int}[\phi] - \Omega\langle L_z\rangle_\phi$$

- énergie potentielle : $E_p[\phi] = \frac{1}{2}M\omega^2 \int r^2|\phi|^2$
- en prenant le champ de rotation rigide $\boldsymbol{v} \approx \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}$ et en négligeant l'espace occupé par les cœurs des vortex :

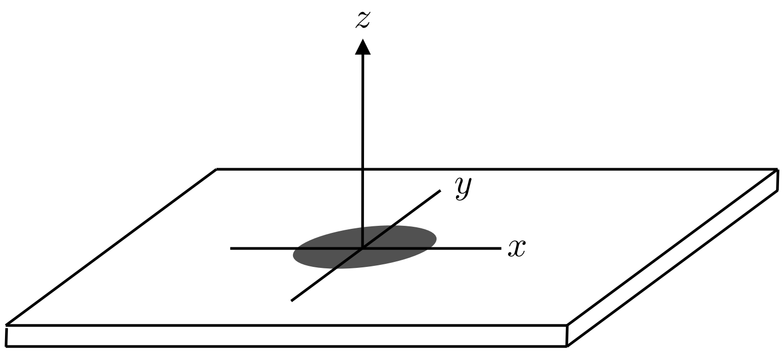
$$E_c[\phi] \approx \frac{1}{2}M\Omega^2 \int r^2|\phi|^2 \qquad\qquad -\Omega\langle L_z\rangle_\phi \approx -M\Omega^2 \int r^2|\phi|^2$$

ce qui conduit à : $E[\phi] \approx \frac{1}{2}M(\omega^2-\Omega^2) \int r^2|\phi|^2 \ + \ E_{\rm int}[\phi]$

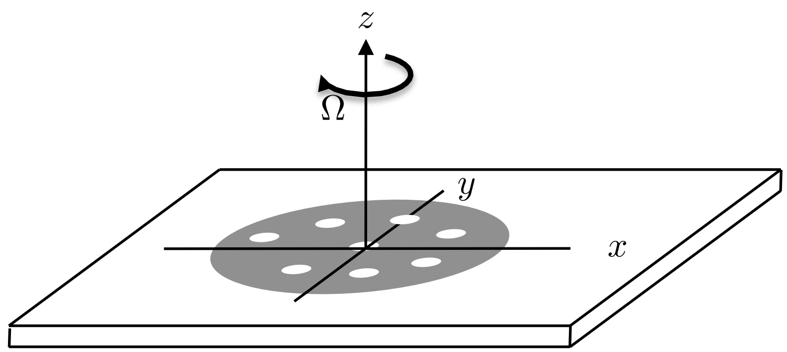
Equivalent à l'approximation de Thomas-Fermi en absence de rotation, pourvu qu'on fasse la substitution $\omega^2 \longrightarrow \omega^2 - \Omega^2$

déconfinement dû à la force centrifuge

Bilan de cette analyse



Condensat au repos



Condensat en rotation

Rayon de Thomas-Fermi : $R_{\mathrm{TF}} \propto \dfrac{1}{\sqrt{\omega}} \quad \longrightarrow \quad \dfrac{1}{(\omega^2 - \Omega^2)^{1/4}}$

Longueur de cicatrisation : $\xi \sim \dfrac{a_\perp^2}{R_{\mathrm{TF}}} \propto \dfrac{1}{\sqrt{\omega}} \quad \longrightarrow \quad \dfrac{1}{(\omega^2 - \Omega^2)^{1/4}}$

Les deux longueurs divergent quand on s'approche de la rotation critique $\Omega = \omega$

Plan du cours

1. Interactions dans un gaz froid

    Longueur de diffusion, approximation de champ moyen, passage à deux dimensions

2. Vortex dans un condensat

    Fréquence critique, réseau d'Abrikosov et argument de Feynman

3. Rotation et niveau de Landau fondamental

    Vers la rotation rapide...

4. Au delà du champ moyen

    Etats fortement corrélés : seuil d'apparition et schémas de détection possibles

Vers la limite de rotation rapide

Quand la fréquence de rotation $\Omega \to \omega$, la longueur de cicatrisation diverge

$$\xi \propto \left(\omega^2 - \Omega^2\right)^{-1/4} \to +\infty$$

Dès que la longueur de cicatrisation dépasse l'échelle de longueur de la particule unique $a_\perp$, elle perd sa pertinence physique.

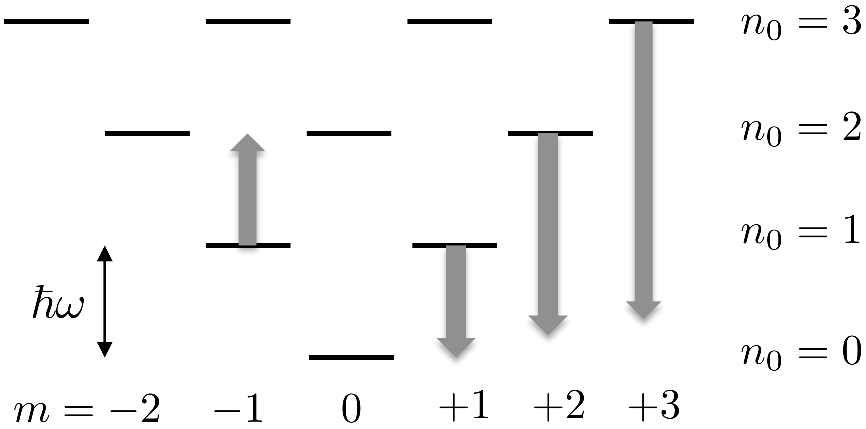
Valeur du potentiel chimique dans cette limite :

$$\mu = \frac{\hbar^2}{M\xi^2} \qquad \xi > a_\perp = \sqrt{\frac{\hbar}{M\omega}} \qquad \longrightarrow \qquad \mu < \hbar\omega$$

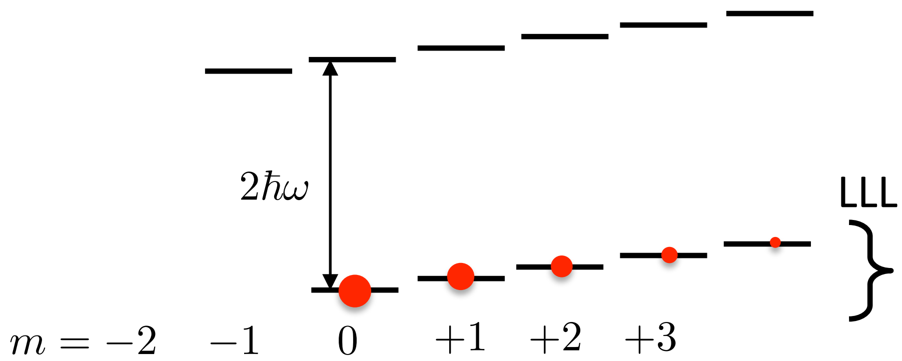
Il faut revenir aux états à une particule pour voir lesquels restent peuplés

Etats à une particule quand $\Omega \rightarrow \omega$

Piège harmonique à $\Omega = 0$



On ajoute $-\Omega L_z = -m\hbar\Omega$
pour passer dans le référentiel tournant

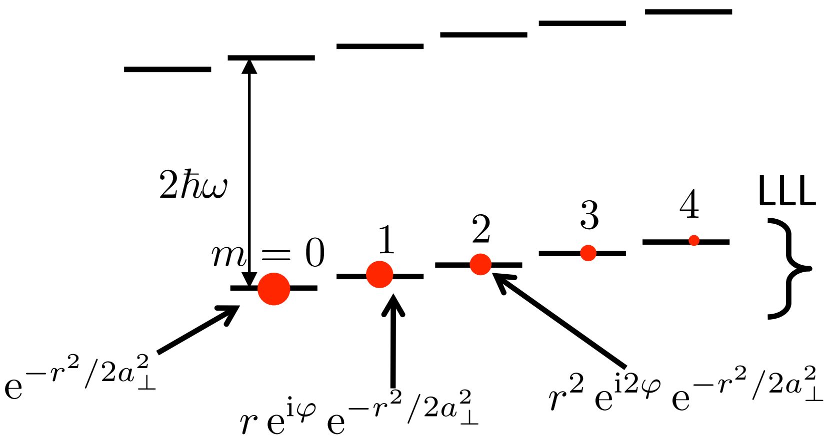


La limite $\mu < \hbar\omega$ correspond à n'occuper que le niveau de Landau fondamental

critère : $\dfrac{\Omega}{\omega} \gtrsim 1 - \dfrac{1}{Ng}$

1000 atomes, *g*=0.1 : $\Omega > 0.99\,\omega$

Les états du LLL



Base propre simple en jauge symétrique :

$$\phi_m(r,\varphi) \propto r^m\, e^{im\varphi}\, e^{-r^2/2a_\perp^2}$$
$$= u^m\, e^{-r^2/2a_\perp^2}$$

avec : $u = x + iy$

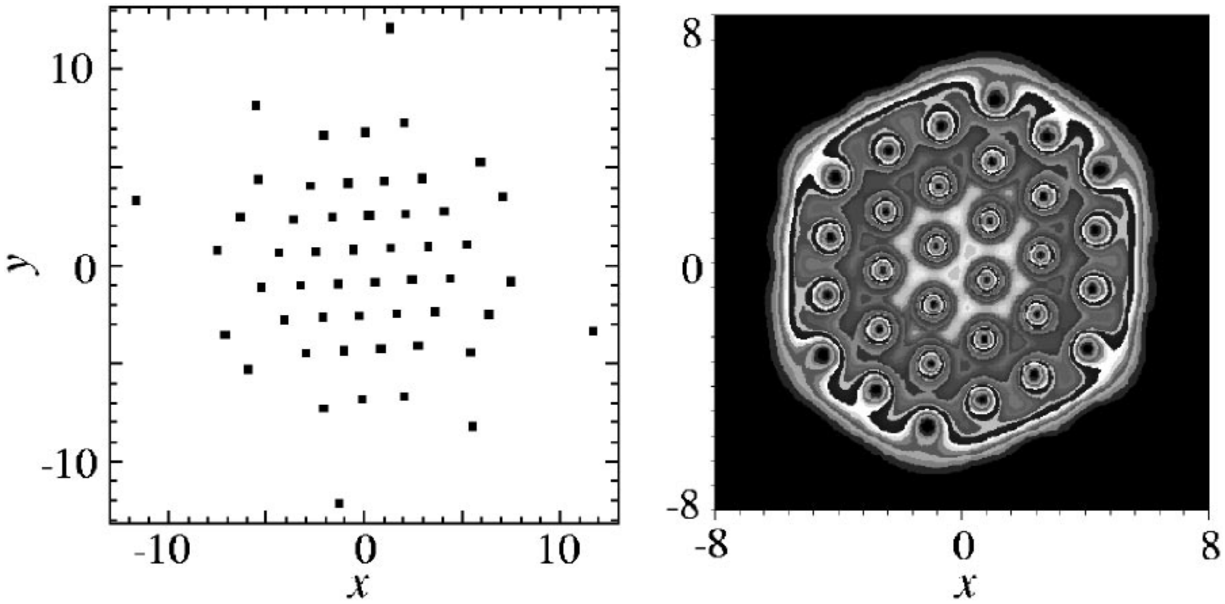
Fonction d'onde générale du LLL: $\phi(\boldsymbol{r}) = \sum_m \alpha_m \phi_m(\boldsymbol{r}) \;= P(u)\, e^{-r^2/2a_\perp^2}$

polynôme : $P(u) = \sum_m \alpha_m u^m = \prod_{m=1}^{m_{\max}} (u - u_m)$

Autour de la racine u_m du polynôme, la phase tourne de +2π : vortex !

Dans le LLL, il est équivalent de se donner la fonction d'onde (coefficients α_m) ou la position des vortex (racines u_m)

Etat fondamental dans le LLL (champ moyen)



Aftalion et al.

Etat à ~ 30 vortex

On a toujours un réseau de vortex régulier au centre (Feynman)

La distribution lissée a toujours une forme de parabole inversée (Thomas-Fermi)
mais le coefficient sans dimension caractérisant les interactions est renormalisé :

$g \;\rightarrow\; bg$ $\qquad\qquad$ $b \approx 1.1596$: paramètre d'Abrikosov

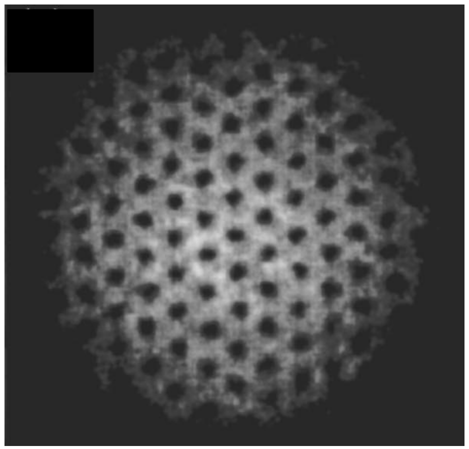
Nombre de vortex : $N_v \approx \left(\dfrac{bg\,N}{1-\Omega/\omega}\right)^{1/2}$

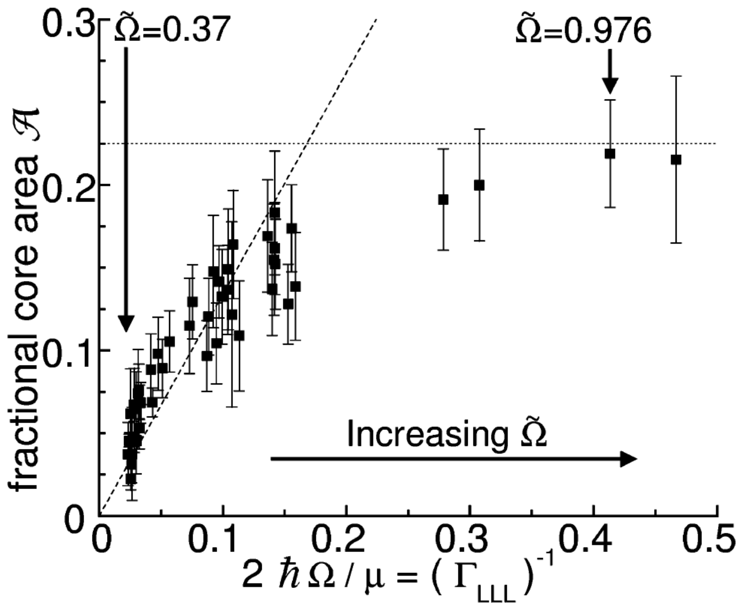
Expériences dans le LLL

Boulder : méthode de mise en rotation par évaporation, qui permet d'atteindre

$$\Omega = 0.993\,\omega$$

Etude de la fraction de la surface occupée par les cœurs de vortex, en fonction de Ω





100 000 atomes de rubidium, dans un piège qui
est effectivement 2D après la mise en rotation

Plan du cours

1. Interactions dans un gaz froid

Longueur de diffusion, approximation de champ moyen, passage à deux dimensions

2. Vortex dans un condensat

Fréquence critique, réseau d'Abrikosov et argument de Feynman

3. Rotation et niveau de Landau fondamental

Vers la rotation rapide...

4. Au delà du champ moyen

Etats fortement corrélés : seuil d'apparition et schémas de détection possibles

Limites de la théorie de champ moyen

Nombre de particules : N

Nombre d'états à une particule peuplés = nombre de vortex dans le LLL :

$$N_v \approx \left(\frac{g\,N}{1-\Omega/\omega}\right)^{1/2}$$

Quand $N_v \sim N$, on peut abaisser significativement l'énergie en considérant des états corrélés pour lesquels $\Psi(\boldsymbol{r}_1,\ldots,\boldsymbol{r}_N) \neq \psi(\boldsymbol{r}_1)\ldots\psi(\boldsymbol{r}_N)$

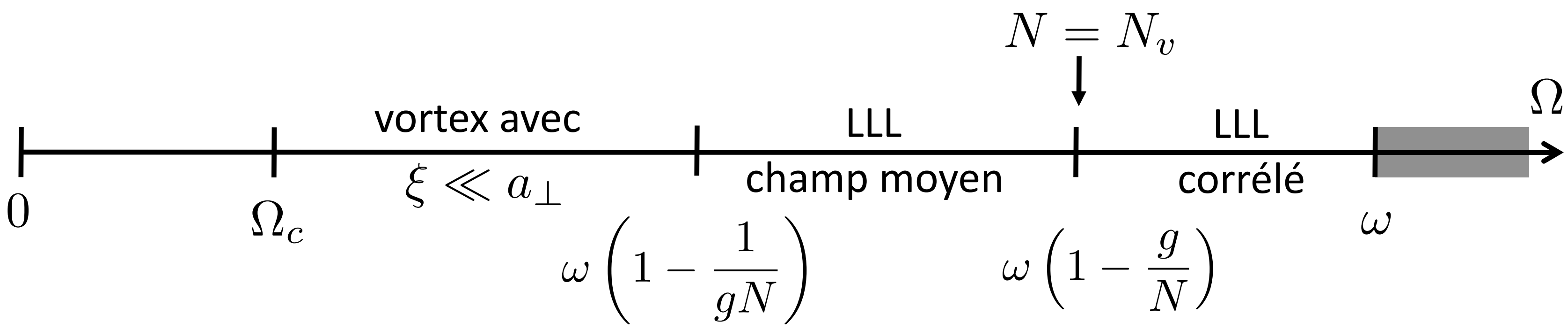


diagramme valable pour une interaction assez faible : $g < 1$

Comment chercher des états corrélés ?

On cherche l'état fondamental de

$$\hat{H} = \sum_i \left(\frac{\hat{\boldsymbol{p}}_i^2}{2M} + \frac{1}{2} M\omega^2 \hat{\boldsymbol{r}}_i^2 \right) + \frac{\hbar^2}{M}\, g \sum_{i<j} \delta^{(2)}(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j)$$

pour un moment cinétique total $\mathcal{L}$ donné

On reste dans le LLL, mais on considère maintenant des états corrélés

$$\Phi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_N) = \mathcal{P}(u_1, u_2, \ldots, u_N)\ \exp(-\sum_i r_i^2/2a_\perp^2)$$

où $\mathcal{P}$ est un polynôme symétrique (pour des bosons) des variables $u_1, u_2, \ldots, u_N$

Par exemple, $N = 2,\ \mathcal{L} = 2 :\quad \mathcal{P}(u_1, u_2) = \alpha(u_1^2 + u_2^2) + \beta u_1 u_2$

Plus généralement, somme de monômes $u_1^{\alpha_1} \ldots u_N^{\alpha_N} \qquad \sum_i \alpha_i = \mathcal{L}$

Configurations remarquables

- Quand $N_v \sim \dfrac{N}{10}$, fonte du réseau de vortex du fait des fluctuations quantiques

- Quand $N_v = 2N$ (facteur de remplissage ½), état de Laughlin

$$\mathcal{P}_{\rm Lau.}(u_1, u_2, \ldots, u_N) = \prod_{i<j} (u_i - u_j)^2$$

degré total du polynôme :

$$\mathcal{L} = N(N-1)$$

Jamais deux particules au même endroit : fortes corrélations !

Energie d'interaction nulle pour un potentiel de contact $\dfrac{\hbar^2}{M}\, g \sum_{i<j} \delta^{(2)}(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j)$

Séparé par un gap de tous les états excités de même moment cinétique

$$E_{\rm gap} \approx 0.1\, g\, \hbar\omega$$

Regnault-Jolicoeur

- Quand $N_v = N$ (facteur de remplissage 1), état de Moore-Read (Pfaffien)

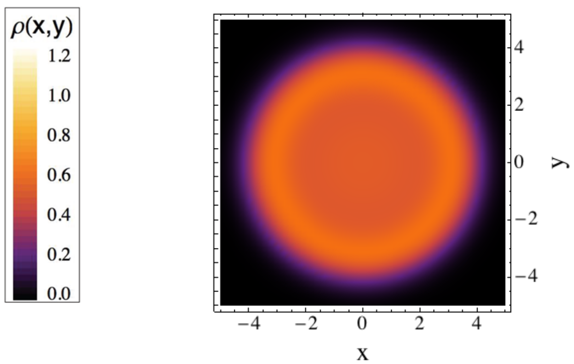
Comment détecter ces états corrélés ?

- Réduction des pertes inélastiques

  Etat de Laughlin : jamais deux ou trois atomes au même endroit

- Gap entre l'état fondamental et les états excités : incompressibilité

  Profil de densité plat pour un état de Laughlin dans un piège harmonique

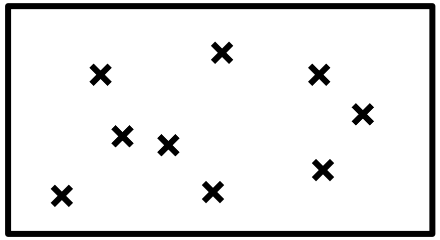


M. Roncaglia, M. Rizzi, J.D.,
calcul pour 9 particules

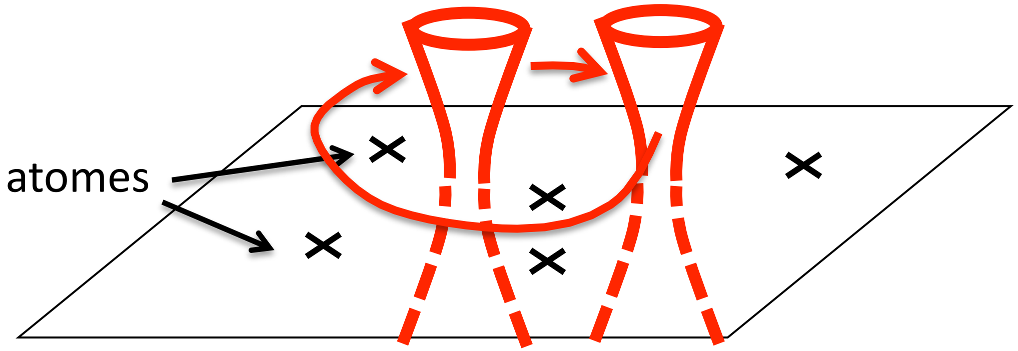
Comment détecter ces états corrélés (suite) ?

➡ Détections des atomes individuels après un temps de vol

Reconstruction des fonctions de corrélations spatiales



➡ Recherche de statistique non conventionnelles [anyons, (Wilczek, 1982)] pour les états excités de ces fluides



Paredes *et al.*

→ créer deux excitations (trous) avec deux faisceaux lasers

→ tourner une excitation autour de l'autre

→ Détecter la phase accumulée

Conclusions

On dispose désormais d'une grande panoplie d'outils pour construire le « bon » hamiltonien magnétique à une particule

Mise en évidence d'effets topologiques subtils

Un progrès décisif sera d'obtenir des états fortement corrélés, par exemple de type « effet Hall quantique fractionnaire »

Expériences d'atomes froids complémentaires des méthodes de diagonalisation exacte

Elles permettront d'aborder des questions importantes ouvertes sur la matière quantique topologique