

# *Cohérence et superfluidité dans les gaz atomiques*

## **Cours 4**

***Fin du chapitre 3 + chapitre 4***

Jean Dalibard

Chaire *Atomes et rayonnement*

Année 2015-16



COLLÈGE  
DE FRANCE  
— 1530 —

*Cohérence et superfluidité dans les gaz atomiques*

## Chapitre 3 (suite et fin)

# Gaz en interaction et critère de Landau

Jean Dalibard

Chaire *Atomes et rayonnement*

Année 2015-16



COLLÈGE  
DE FRANCE  
— 1530 —

# Bilan du cours 3

Equation de Gross-Pitaevskii et approche de Bogoliubov « champ classique »  
obtenues à partir d'une approximation de type « champ moyen » (ansatz de Hartree)

$$\Phi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = \phi(\mathbf{r}_1) \dots \phi(\mathbf{r}_N)$$

Evolution non linéaire de la fonction d'onde à une particule  $\phi(\mathbf{r})$

$$i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \phi + Ng |\phi|^2 \phi$$

- Sans potentiel de piégeage
- Interaction :  $g \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$

Etude de la stabilité des solutions en onde plane, et des modes propres  
autour de ces solutions :

$$\phi_{\mathbf{K}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{L^{3/2}} e^{i(\mathbf{K} \cdot \mathbf{r} - \mu t / \hbar)}$$

Critère de Landau : stabilité si  $V = \frac{\hbar K}{m} < c_s$        $mc_s^2 = g\rho$        $\rho = \frac{N}{L^3}$

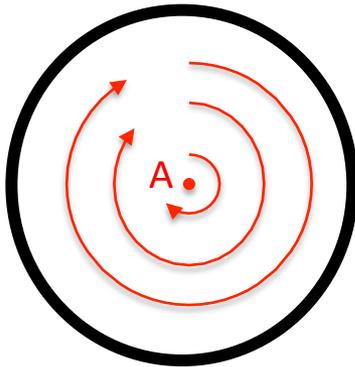
# Au delà du critère de Landau : les vortex

Nous avons considéré jusqu'ici des perturbations du type

$$e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}} \longrightarrow e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}} + \epsilon e^{i(\mathbf{K}\pm\mathbf{q})\cdot\mathbf{r}}$$

On peut également s'intéresser à des perturbations localisées : vortex

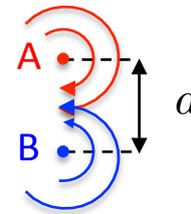
Un vortex isolé :  
cœur de taille  $\xi$   
champ de vitesse en  $1/r$



Pas vraiment localisé :  
énergie cinétique divergente

$$\int_{\xi}^R v^2 2\pi r dr \sim \ln(R/\xi)$$

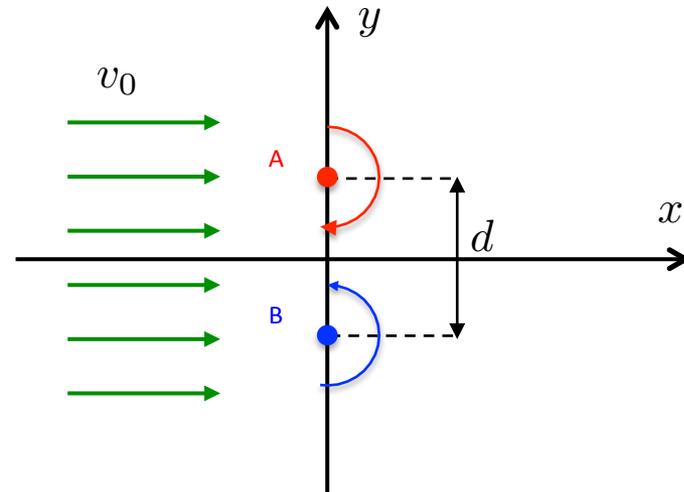
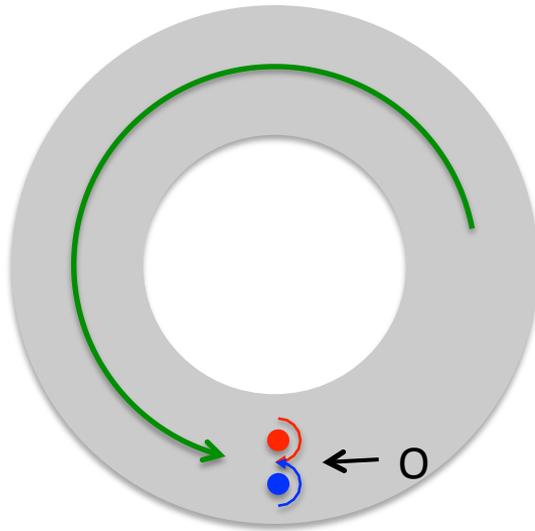
Une paire de vortex  
de signes opposés :  
champ de vitesse en  $1/r^2$   
à longue distance



Energie cinétique convergente :

$$\sim \ln(d/\xi)$$

# Perte de circulation par nucléation d'une paire de vortex

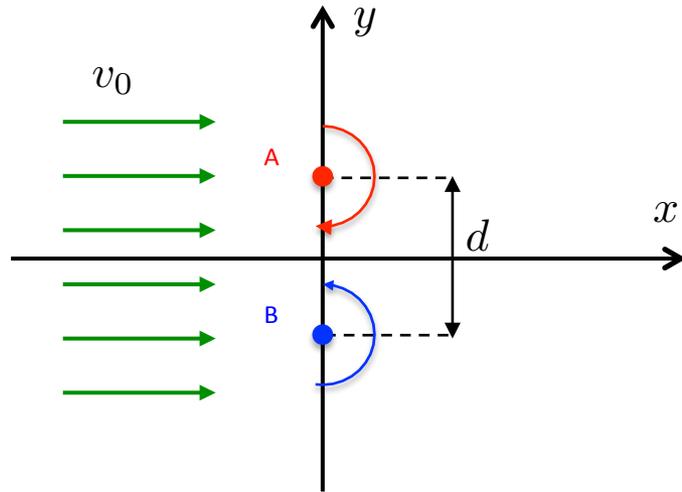


On part de l'état à un quantum de circulation  $\psi_1(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\varphi}$

Une paire de vortex est nucléée au point O et se sépare, le vortex « rouge » partant vers l'intérieur de l'anneau et le bleu vers l'extérieur

On termine alors avec l'état  $\psi_0(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

# Barrière énergétique pour la paire de vortex (2D)



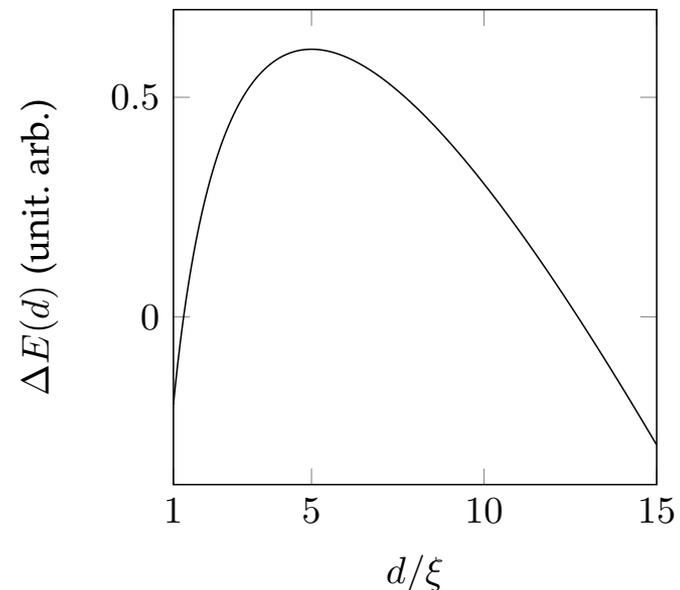
On évalue le coût en énergie cinétique de la configuration avec une paire de vortex

$$\Delta E(d) = \frac{1}{2} m \rho \int (\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_B)^2 d^2 r \cdot - \frac{1}{2} m \rho \int \mathbf{v}_0^2 d^2 r$$

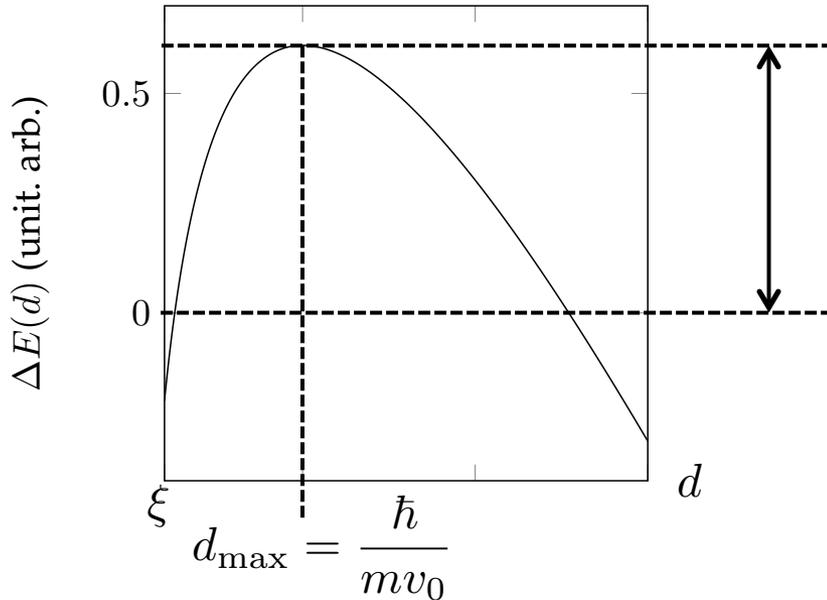
Après un calcul assez long... :

$$\Delta E(d) \approx 2\pi \hbar \rho \left[ \frac{\hbar}{m} \log \left( \frac{d}{\xi} \right) - v_0 d \right]$$

Résultat un peu plus compliqué pour un anneau  
(LPL 2012, Cambridge 2012, NIST 2014)



# Barrière énergétique pour la paire de vortex (2D)



Il faut comparer cette hauteur de barrière à  $k_B T$

$$\frac{\Delta E_{\max}}{k_B T} \approx \rho \lambda_T^2 \log \frac{c_s}{v_0}$$

$$\lambda_T^2 = \frac{2\pi \hbar^2}{mk_B T}$$

Pour un gaz dégénéré :  $\rho \lambda_T^2 \gg 1$

Défaut ponctuel : barrière grande devant l'énergie d'activation thermique sauf si

$$v_0 \approx c_s$$

Si on se donne un défaut de taille  $d \gg \xi$ , la barrière disparaît pour la vitesse critique

$$v_{\text{crit}} \sim \frac{\hbar}{md} \ll c_s \sim \frac{\hbar}{m\xi}$$

# La version quantique de l'approche de Bogoliubov

On a vu ici la version « champ classique » de l'approche de Bogoliubov

Une fois obtenue la relation de dispersion  $\omega_q = \left[ c_s^2 q^2 + \left( \frac{\hbar q^2}{2m} \right)^2 \right]^{1/2}$

on peut quantifier « à la main » ces modes et obtenir ainsi un gaz quantique de quasi-particules :

$$\hat{H}_{\text{quasi-particules}} = \sum_{\mathbf{q}} \hbar \omega_{\mathbf{q}} \hat{b}_{\mathbf{q}}^{\dagger} \hat{b}_{\mathbf{q}}$$

## Autre démarche possible pour le gaz de Bose en interaction assez faible :

Partir de l'hamiltonien quantique faisant intervenir les opérateurs création et annihilation des atomes  $\hat{a}_{\mathbf{p}}^{\dagger}$ ,  $\hat{a}_{\mathbf{p}}$  dans un état d'impulsion donné + approximation quadratique

Considérer les mêmes transformations linéaires (mêmes coefficients  $u, v$ ) que pour la version classique

On obtient alors directement :  $\hat{H} = E_0 + \sum_{\mathbf{q}} \hbar \omega_{\mathbf{q}} \hat{b}_{\mathbf{q}}^{\dagger} \hat{b}_{\mathbf{q}}$

# Quasi-particules à l'équilibre thermique

A l'approximation de Bogoliubov, l'ensemble des excitations décrites par

$$\hat{H} = E_0 + \sum_{\mathbf{q}} \hbar\omega_{\mathbf{q}} \hat{b}_{\mathbf{q}}^{\dagger} \hat{b}_{\mathbf{q}} \quad \omega_{\mathbf{q}} = \left[ c_s^2 q^2 + \left( \frac{\hbar q^2}{2m} \right)^2 \right]^{1/2}$$

forme un gaz parfait de potentiel chimique nul, comme les photons émis par un corps noir

Population à l'équilibre thermique :  $\mathcal{N}(\mathbf{q}) = \frac{1}{e^{\hbar\omega_{\mathbf{q}}/k_B T} - 1}$

*Permet de calculer toutes les moyennes thermiques à cette approximation : densité normale et superfluide, fluctuations de densité et de phase, ...*

*Cohérence et superfluidité dans les gaz atomiques*

## Chapitre 4

# Condensation et superfluidité dans un réseau

Jean Dalibard

Chaire *Atomes et rayonnement*

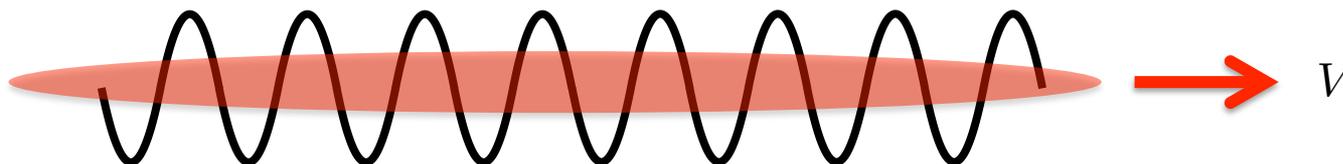
Année 2015-16



COLLÈGE  
DE FRANCE  
— 1530 —

# Le but de ce cours

Transposer l'étude du comportement superfluide à un gaz dans un potentiel périodique : système modèle pour l'étude de la conduction électrique



*Etude détaillée faite dans le cours 2012-13 pour une particule unique.*

***Comment les interactions entre particules modifient-elles le problème ?***

## **Cours d'aujourd'hui + cours 5 :**

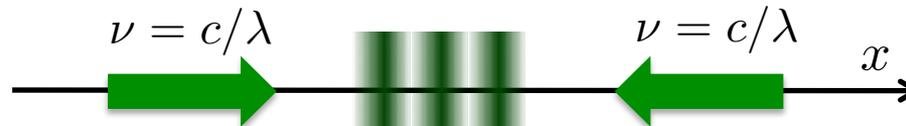
- Instabilité dynamique qui apparaît pour des interactions relativement faibles
- Perte complète de superfluidité possible si les interactions sont assez fortes
- Etude de la transition de phase associée et des modes propres au voisinage du point critique (mode de Goldstone, mode de Higgs)

# Plan du cours

1. Rappels sur la physique des réseaux optiques
2. La vitesse critique dans un réseau
3. La transition superfluide isolant dans un réseau : un premier aperçu

# Le théorème de Bloch

On considère un réseau optique formé par une onde lumineuse stationnaire



Mouvement d'un atome dans le potentiel dipolaire périodique

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}) \quad V(x) = V(x + a) \quad a = \lambda/2$$

On peut chercher les états propres sous la forme de fonctions de Bloch :

$$\psi_q(x) = e^{iqx} u_q(x)$$

où la fonction  $u_q$  est périodique :  $u_q(x) = u_q(x + a)$

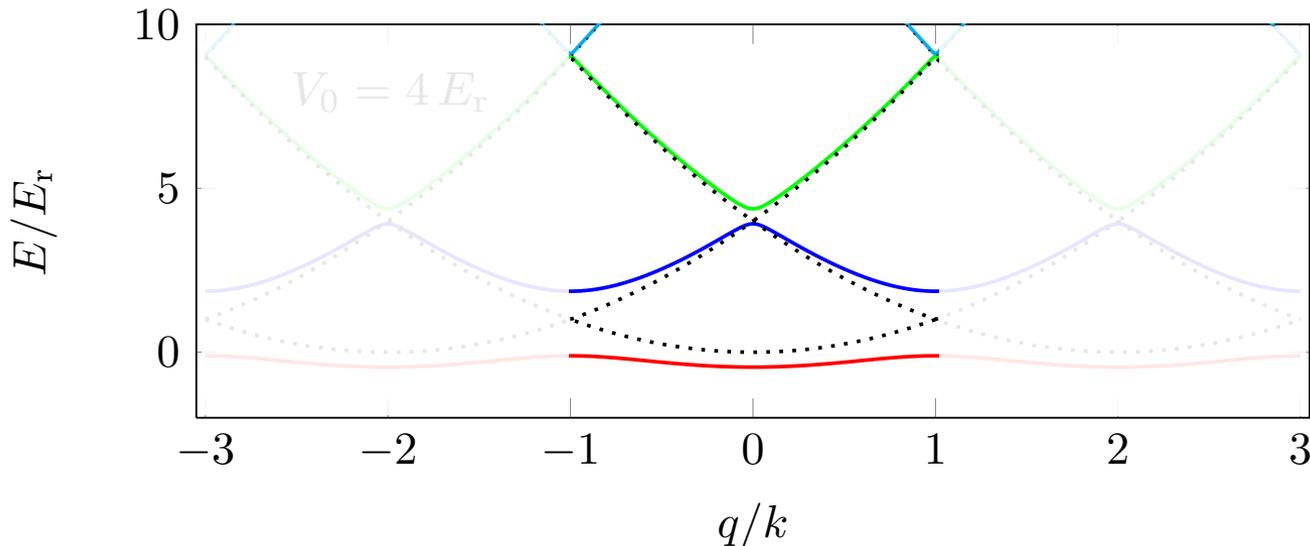
# La structure en bandes d'énergie

Pour un quasi-moment  $q$  donné, les énergies propres sont quantifiées

$$\psi_{n,q}(x) = e^{iqx} u_{n,q}(x) \quad E_n(q) \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Exemple pour un potentiel sinusoïdal  $V(x) = V_0 \sin^2(kx)$  de période  $a = \pi/k$

Echelle d'énergie caractéristique :  $E_r = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$  énergie de recul



Première zone de Brillouin :  
 $-k < q \leq k$

Attention au comptage multiple :  $q$  et  $q + 2k$  représentent le même état !

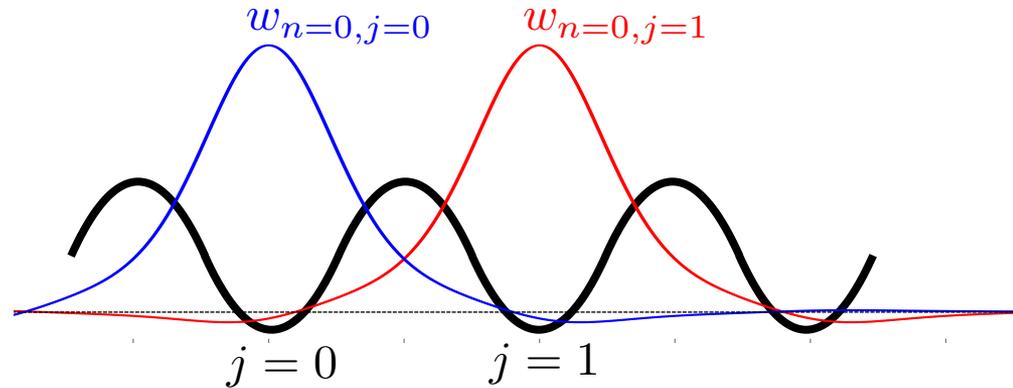
# La limite des liaisons fortes

On introduit les fonctions de Wannier qui (pour un bon choix de phase) sont localisées sur les différents minima du potentiel  $V(x)$

$$w_{n,j}(x) = \left(\frac{a}{2\pi}\right)^{1/2} \int_{-\pi/a}^{+\pi/a} \psi_{n,q}(x) e^{-i j a q} dq$$

Pour la bande fondamentale  $n = 0$  :

$$V_0 = 4 E_r$$

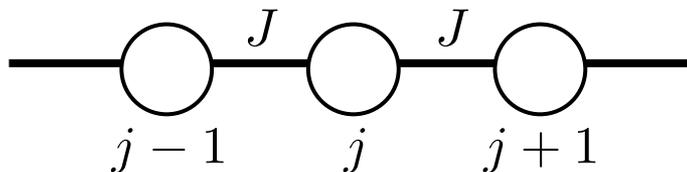


Dans la limite des liaisons fortes ( $V_0 \gg E_r$ ) :

- On ne s'intéresse qu'à la bande fondamentale  $n = 0$  :  $w_j(x) \equiv w_{n,j}(x)$
- On ne considère que les sauts entre proches voisins :  $w_j \rightarrow w_{j\pm 1}$

# L'hamiltonien de Hubbard

Version 1D version (2 voisins):

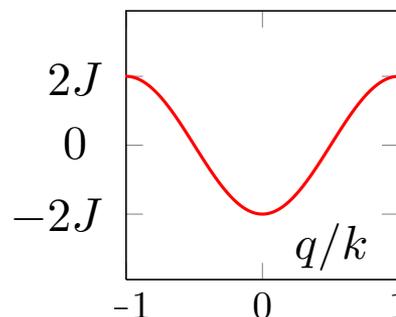


Hamiltonien  $\hat{H} = -J \sum_j |w_{j+1}\rangle \langle w_j| + \text{h.c.}$

ou encore en écriture « seconde quantification » :  $\hat{H} = -J \sum_j \hat{b}_{j+1}^\dagger \hat{b}_j + \text{h.c.}$

Fonctions de Bloch :  $|\psi_q\rangle = \sum_j e^{ijaq} |w_j\rangle$

$$E(q) = -2J \cos(aq)$$



Pour un potentiel sinusoidal  $V(x) = V_0 \sin^2(kx)$ , l'élément de matrice tunnel est :

$$\frac{J}{E_r} \approx \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{V_0}{E_r} \right)^{3/4} \exp \left[ -2 \left( \frac{V_0}{E_r} \right)^{1/2} \right] \quad \text{pour } V_0 \gg E_r \equiv \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

# Interactions dans le réseau

$$g = \frac{4\pi\hbar^2 a_s}{m}$$

$V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = g\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$  + limite des liaisons fortes : interactions sur site uniquement



Coût en énergie pour mettre deux atomes sur le même site dans la fonction  $w_0(\mathbf{r})$

$$\begin{aligned}\langle 1 : w_0 | \otimes \langle 2 : w_0 | \hat{V} | 1 : w_0 \rangle \otimes | 2 : w_0 \rangle &= \int |w_0(\mathbf{r}_1)|^2 |w_0(\mathbf{r}_2)|^2 V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) d^3r_1 d^3r_2 \\ &= g \int |w_0(\mathbf{r})|^4 d^3r \\ &\equiv U\end{aligned}$$

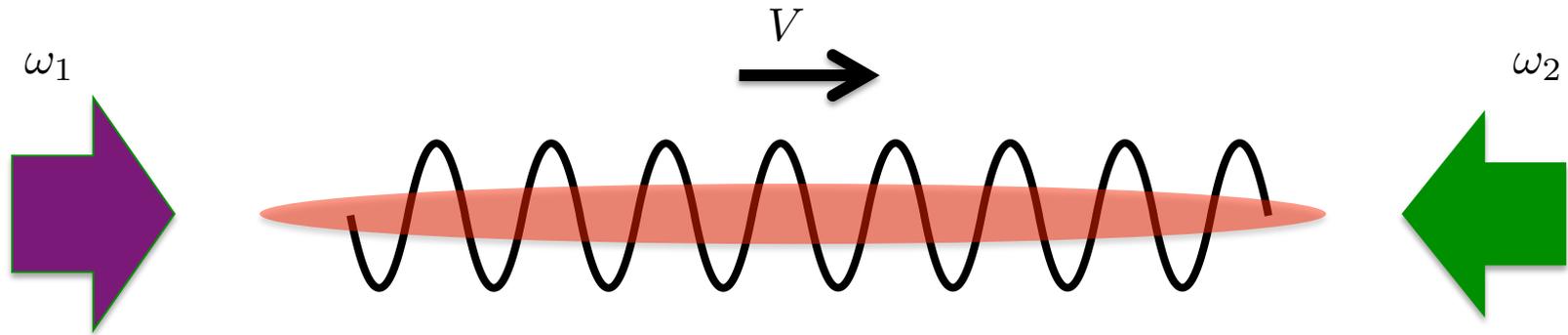
# Plan du cours

1. Rappels sur la physique des réseaux optiques

**2. La vitesse critique dans un réseau**

3. La transition superfluide isolant dans un réseau : un premier aperçu

# L'expérience de Florence (2004)



Condensat de rubidium, 300 000 atomes

On branche le réseau en mouvement adiabatiquement de manière à peupler seulement la bande fondamentale dans un état de quasi-moment  $q$  donné.

Le réseau en mouvement est créé en superposant deux ondes progressives contre-propageantes de fréquences différentes :  $2kV = \omega_1 - \omega_2$

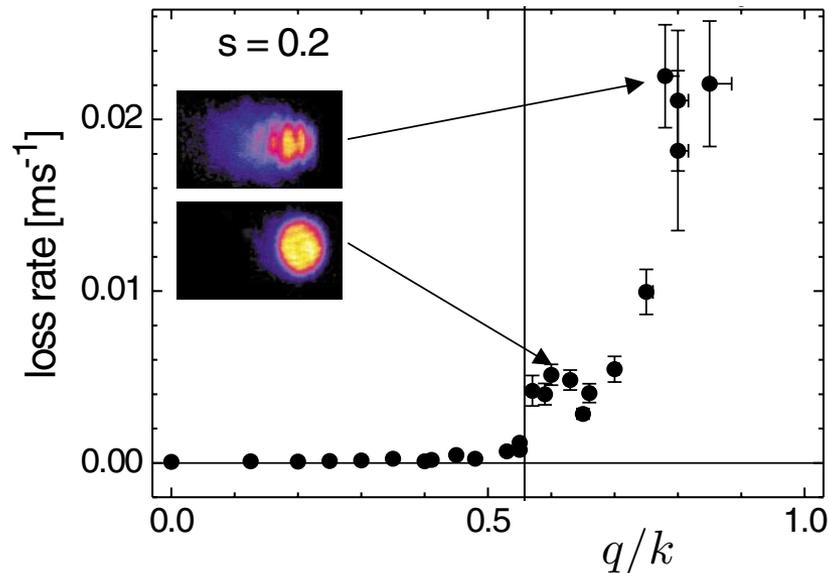
On laisse le système évoluer pendant un temps ajustable et on détecte l'état final du gaz par temps de vol

# L'expérience de Florence (suite)

L'évolution du nombre d'atomes dans le condensat est ajustée par une loi exponentielle :

$$N(t) = N_0 e^{-\gamma t} \quad t : \text{temps passé dans le réseau en mouvement}$$

Variation du taux de pertes  $\gamma$  en fonction du quasi-moment initial :



Réseau faible :

$$V_0 = 0.2 E_r$$

Première zone de Brillouin :

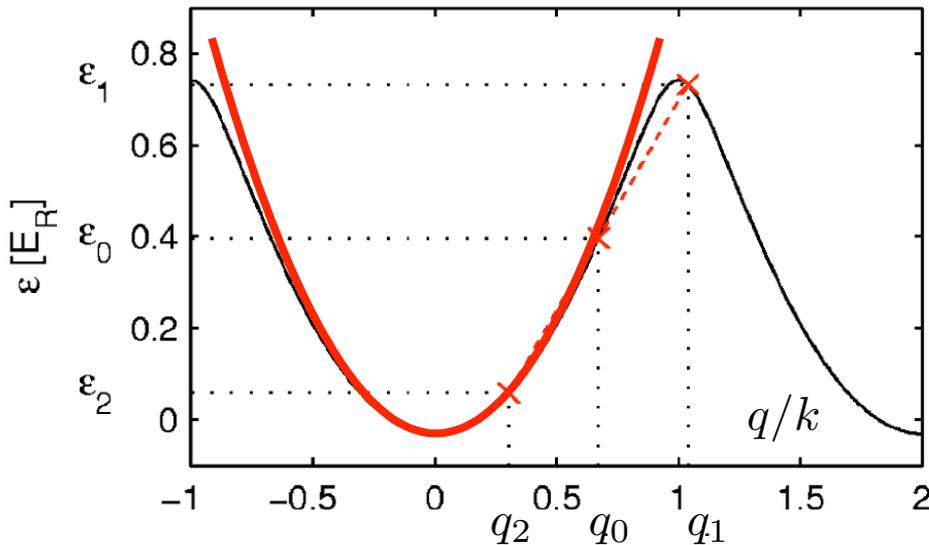
$$-k < q \leq k$$

Instabilité dynamique quand  $q \gtrsim k/2$

# Interprétation qualitative

Wu & Niu, Hilligsoe & Moelmer

Relation de dispersion dans un réseau : fonction non convexe (contrairement à l'espace libre)



On peut trouver des triplets  $q_0, q_1, q_2$   
tels que le processus

$$q_0 + q_0 \rightarrow q_1 + q_2$$

conserve l'énergie et l'impulsion  
(modulo  $2k$ )

$$2E(q_0) = E(q_1) + E(q_2)$$

$$2q_0 = q_1 + q_2$$

Equivalent du mélange à quatre ondes avec accord de phase en optique  
Permet de générer des paires d'atomes corrélés (cf. séminaire de A. Aspect)

# Description à la *Gross-Pitaevskii* en liaisons fortes

On choisit un ansatz de type champ moyen (fonction de Hartree)

$$\Phi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{N_a}) = \phi(\mathbf{r}_1) \dots \phi(\mathbf{r}_{N_a})$$

adapté au cas du réseau en liaisons fortes :

$$\phi(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{N_s} \phi_j w_j(\mathbf{r}) \quad \sum_{j=1}^{N_s} |\phi_j|^2 = 1 \quad \text{somme sur les } N_s \text{ sites du réseau}$$

On peut montrer (cf. appendice) que cet ansatz est pratiquement équivalent à

$$|\Psi\rangle = |\text{site 1} : \psi_1\rangle \otimes |\text{site 2} : \psi_2\rangle \otimes \dots \otimes |\text{site } N_s : \psi_{N_s}\rangle$$

où chaque  $|\psi_j\rangle$  représente un état cohérent de Glauber sur le site  $j$  avec l'amplitude  $\psi_j = \sqrt{N_a} \phi_j$  où  $N_a$  est le nombre d'atomes

$$\sum_{j=1}^{N_s} |\psi_j|^2 = N_a$$

# Solutions stationnaires et modes propres

Hamiltonien : 
$$\hat{H} = -J \sum_j \left( \hat{b}_{j+1}^\dagger \hat{b}_j + \text{h.c.} \right) + \frac{U}{2} \sum_j \hat{n}_j (\hat{n}_j - 1)$$

Equation de Gross-Pitaevskii en liaisons fortes

$$i\hbar \dot{\psi}_j = -J (\psi_{j+1} + \psi_{j-1}) + U |\psi_j|^2 \psi_j$$

Solutions en ondes planes :  $\psi_j(t) = \psi_0 e^{i[jaq - \omega(q)t]}$

avec 
$$\hbar\omega(q) = \underbrace{-2J \cos(aq)}_{\substack{\text{relation de dispersion} \\ \text{pour une particule} \\ \text{en liaisons fortes}}} + \underbrace{U\psi_0^2}_{\substack{\text{terme} \\ \text{d'interaction}}}$$

Recherche des modes sous la forme : 
$$\left[ \psi_0 + u(t) e^{ijaq'} + v^*(t) e^{-ijaq'} \right] e^{i[jaq - \omega(q)t]}$$

$$|u|, |v| \ll \psi_0$$

# L'instabilité dynamique

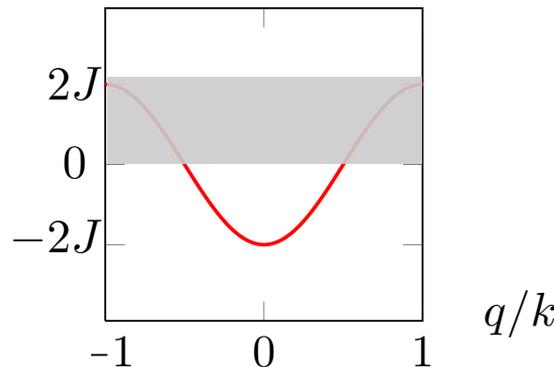
L'évolution des coefficients  $(u, v)$  de la perturbation s'écrit (Bogoliubov)

$$i\hbar \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \hat{\mathcal{L}} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad \hat{\mathcal{L}} : \text{matrice } 2 \times 2 \text{ fonction de } J, U \text{ et } q, q', \psi_0$$

Rappel :  $\hat{\mathcal{L}}$  n'est pas hermitien et peut avoir des valeurs propres complexes

$$\lambda_{\pm} = \lambda' \pm i\lambda'' \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} (t) \text{ diverge comme } e^{|\lambda''|t}$$

L'analyse détaillée des valeurs propres montre qu'il existe une perturbation  $q'$  dynamiquement instable dès que le quasi-moment  $|q|$  dépasse  $k/2$ .



$$E(q) = -2J \cos(aq)$$

# L'instabilité en fonction de la force des interactions

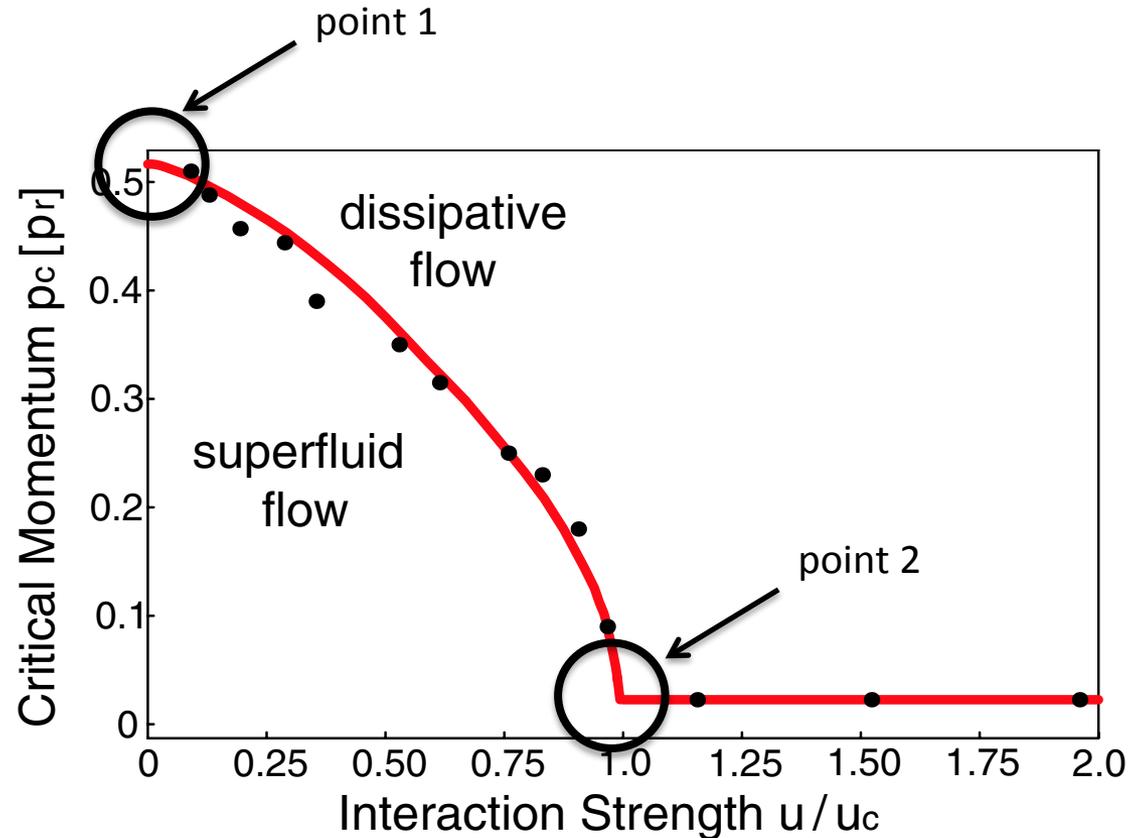
Expérience  
du MIT (2007)

Théorie par  
Altman et al (2005)

$$u = U/J$$

$$u_c = 34.2 \pm 2.0$$

$$N_{\text{atomes}} \approx N_{\text{sites}}$$



Nous allons maintenant considérer le point 2 : perte de superfluidité même s'il n'y a pas de mouvement relatif entre les atomes et le réseau

# Plan du cours

1. Rappels sur la physique des réseaux optiques

2. La vitesse critique dans un réseau

3. La transition superfluide isolant dans un réseau : un premier aperçu

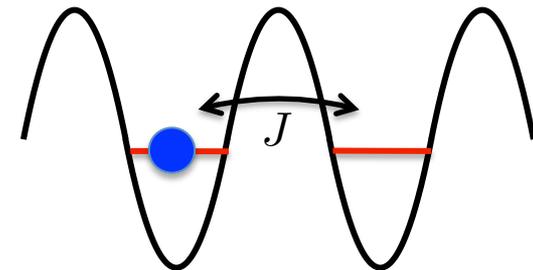
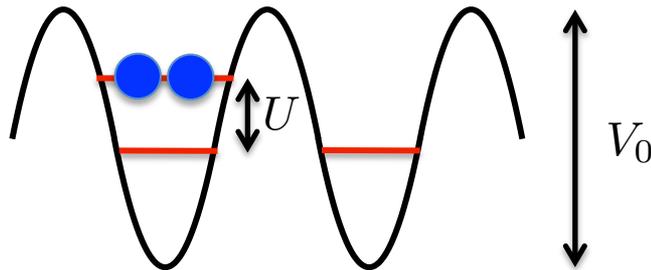
Fisher et al., 1989

Jaksch et al., 1998

# Interactions vs. effet tunnel

$$g = \frac{4\pi\hbar^2 a_s}{m}$$

Compétition entre l'effet tunnel qui tend à délocaliser les particules et les interactions répulsives qui tendent à éliminer les « doublons ».



$$U = g \int |w_0(\mathbf{r})|^4 d^3r$$

$$\frac{U}{E_r} \approx 4\sqrt{2\pi} \frac{a_s}{\lambda} \left( \frac{V_0}{E_r} \right)^{3/4}$$

$$\frac{J}{E_r} \approx \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{V_0}{E_r} \right)^{3/4} \exp \left[ -2 \left( \frac{V_0}{E_r} \right)^{1/2} \right]$$

$$E_r = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} : \text{entre quelques kHz et 100 kHz}$$

En variant  $V_0/E_r$  dans la plage de 10 à 25, on peut aller de  $J \gg U$  à  $J \ll U$

# Le cas limite sans effet tunnel

$$\hat{H} = \hat{H}_{\text{interaction}} = \frac{U}{2} \sum_j \hat{n}_j (\hat{n}_j - 1)$$

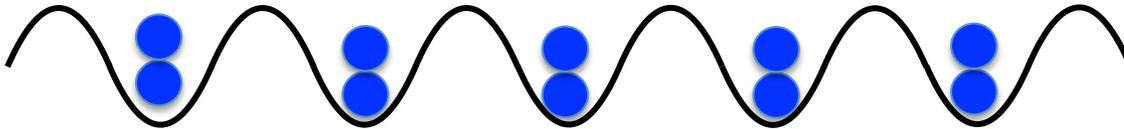
0 ou 1 particule :  $E_{\text{interaction}} = 0$

2 particules :  $E_{\text{interaction}} = U$

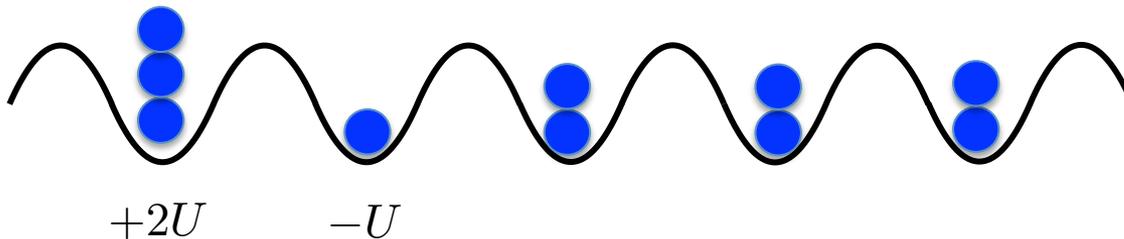
3 particules :  $E_{\text{interaction}} = 3U$

Avec par exemple  $N_{\text{atomes}} = 2N_{\text{sites}}$

L'état fondamental est  $|2, 2, \dots, 2\rangle \propto \prod_{j=1}^{N_{\text{sites}}} (\hat{b}_j^\dagger)^2 |0\rangle$



Un autre état tel que  $|3, 1, \dots, 2\rangle$  coûte l'énergie  $U$



**Les interactions répulsives favorisent les états à remplissage uniforme**

# Le cas limite sans interactions

Tous les atomes s'accumulent au bas de la bande formant le spectre à une particule

Pour une particule la fonction de Bloch  $q = 0$  est :

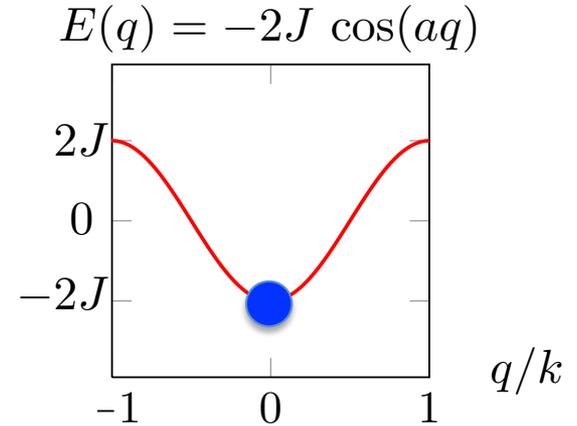
$$|\psi_{q=0}\rangle \propto \sum_{j=1}^{N_{\text{sites}}} |w_j\rangle \longrightarrow \sum_{j=1}^{N_{\text{sites}}} \hat{b}_j^\dagger |0\rangle$$

On met  $N_{\text{atomes}}$  dans cet état (condensat de Bose-Einstein) :  $|\Psi\rangle \propto \left( \sum_{j=1}^{N_{\text{sites}}} \hat{b}_j^\dagger \right)^{N_{\text{atomes}}} |0\rangle$

**Rappel :** cet état est très proche d'un état cohérent de Glauber sur chaque site

$$|\Psi\rangle = |\text{site 1} : \alpha\rangle \otimes |\text{site 2} : \alpha\rangle \otimes \dots \otimes |\text{site } N_s : \alpha\rangle$$

$$|\alpha|^2 = \frac{N_{\text{atomes}}}{N_{\text{sites}}} \quad : \text{facteur de remplissage}$$



# Interpolation entre les deux cas limites

Etat de Gutzwiller:  $|\Psi\rangle = |\text{site 1} : \psi\rangle \otimes |\text{site 2} : \psi\rangle \otimes \dots \otimes |\text{site } N_s : \psi\rangle$

**Approximation de champ moyen** : pas d'intrication entre les états en différents sites

Hypothèses minimales sur  $|\psi\rangle$  :  $|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n |n\rangle$

- Normalisée :  $\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n|^2 = 1$

- Fournit le bon nombre moyen d'atomes par site :  $\sum_{n=0}^{+\infty} n |c_n|^2 = \frac{N_{\text{atomes}}}{N_{\text{sites}}}$

Permet d'interpoler entre l'état nombre sur chaque site trouvé pour  $J = 0$  :  $c_n = \delta_{n,n_0}$

et l'état cohérent de Glauber pour  $U = 0$  :  $c_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-|\alpha|^2/2}$

# La recherche de l'état fondamental en champ moyen

Hamiltonien:  $\hat{H} = -J \sum_j \left( \hat{b}_{j+1}^\dagger \hat{b}_j + \text{H.c.} \right) + \frac{U}{2} \sum_j \hat{n}_j (\hat{n}_j - 1)$

On calcule  $\langle \Psi | \hat{H} | \Psi \rangle$  avec l'ansatz de Gutzwiller :  $|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n |n\rangle$

- Tunnel :  $-Jz \left| \sum_n \sqrt{n} c_{n-1}^* c_n \right|^2$   $z$  : nombre de proches voisins  
2 à 1D, 4 à 2D, 6 à 3D
- Interactions:  $\frac{U}{2} \sum_n n(n-1) |c_n|^2$

But : minimiser la somme des deux termes pour  $U/J$  donné, tout en gardant constants

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n|^2 = 1 \quad \text{et} \quad \bar{n} = \sum_{n=0}^{+\infty} n |c_n|^2 = \frac{N_{\text{atomes}}}{N_{\text{sites}}}$$

On va caractériser le minimiseur par l'écart-type de la distribution des nombres d'occupation

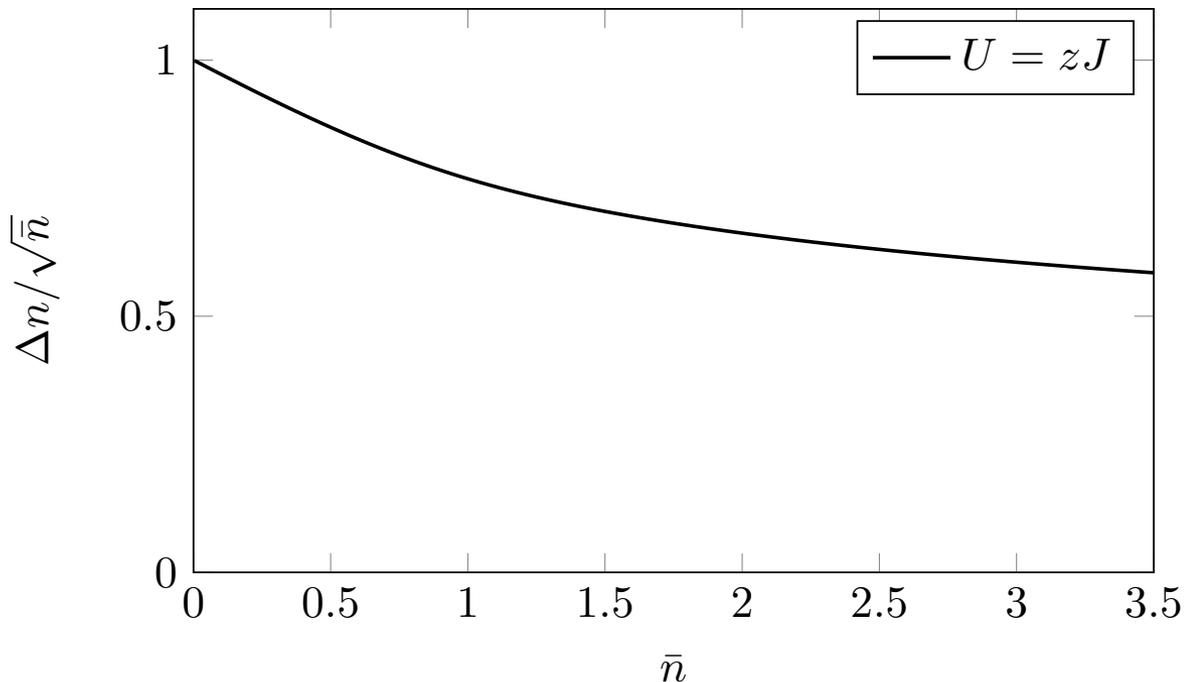
$$\Delta n^2 = \langle n^2 \rangle - \bar{n}^2 \quad \langle n^2 \rangle = \sum_n n^2 |c(n)|^2$$

# Fluctuations du nombre d'occupation par site

On se donne  $U/J$  et on varie le facteur de remplissage  $\bar{n} = \frac{N_{\text{atomes}}}{N_{\text{sites}}}$

On trace la dispersion relative des nombres d'occupation  $\Delta n / \sqrt{\bar{n}}$

Rappel : pour un état cohérent de Glauber, cette quantité vaut 1 (distribution de Poisson)



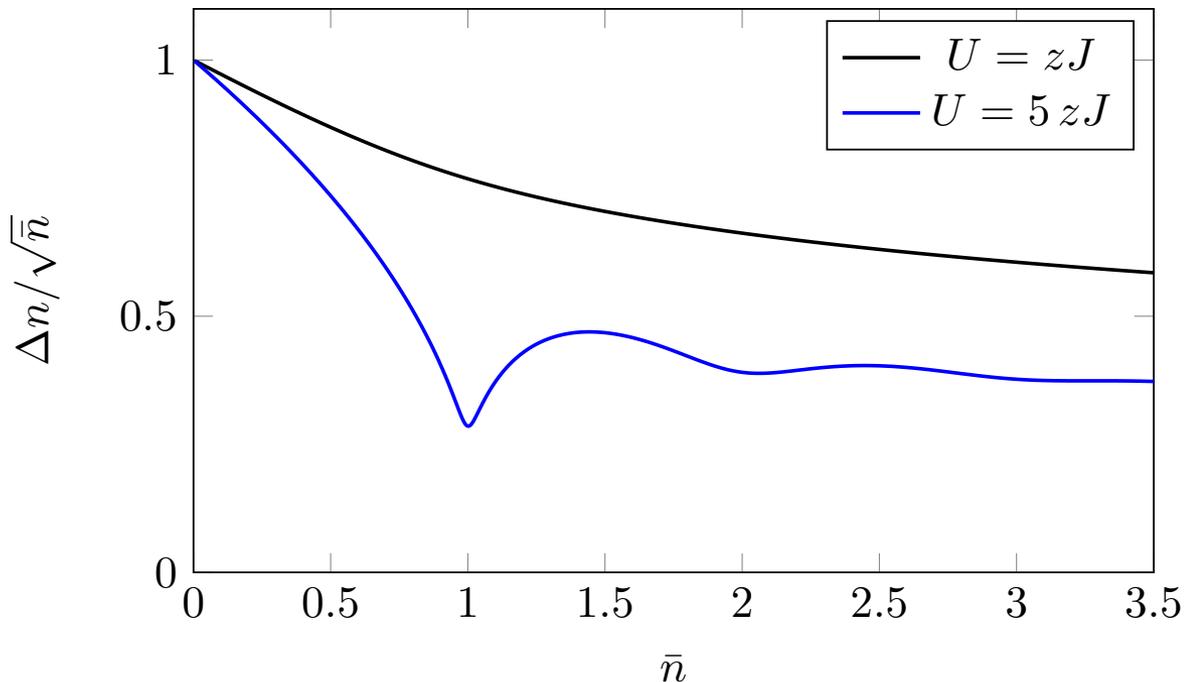
Les interactions répulsives tendent à produire des distributions sub-poissoniennes

# Fluctuations du nombre d'occupation par site

On se donne  $U/J$  et on varie le facteur de remplissage  $\bar{n} = \frac{N_{\text{atomes}}}{N_{\text{sites}}}$

On trace la dispersion relative des nombres d'occupation  $\Delta n / \sqrt{\bar{n}}$

Rappel : pour un état cohérent de Glauber, cette quantité vaut 1 (distribution de Poisson)



Les interactions répulsives tendent à produire des distributions sub-poissoniennes

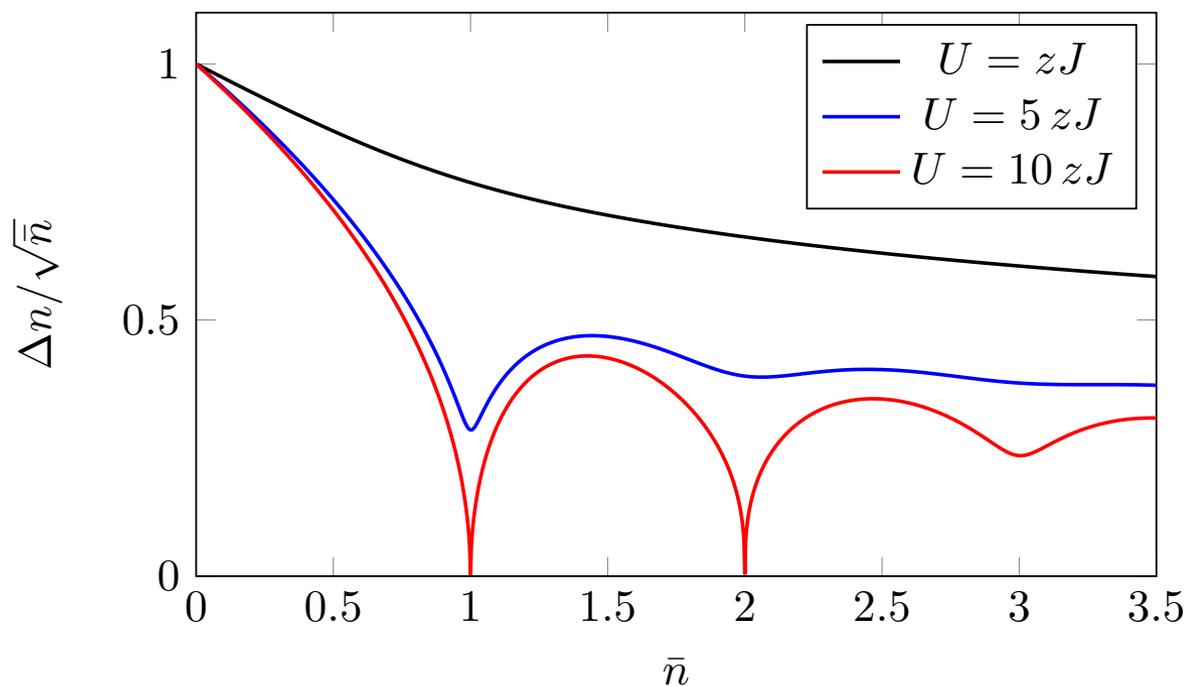
Quelque chose d'intéressant apparaît au remplissage entier...

# Fluctuations du nombre d'occupation par site

On se donne  $U/J$  et on varie le facteur de remplissage  $\bar{n} = \frac{N_{\text{atomes}}}{N_{\text{sites}}}$

On trace la dispersion relative des nombres d'occupation  $\Delta n / \sqrt{\bar{n}}$

Rappel : pour un état cohérent de Glauber, cette quantité vaut 1 (distribution de Poisson)

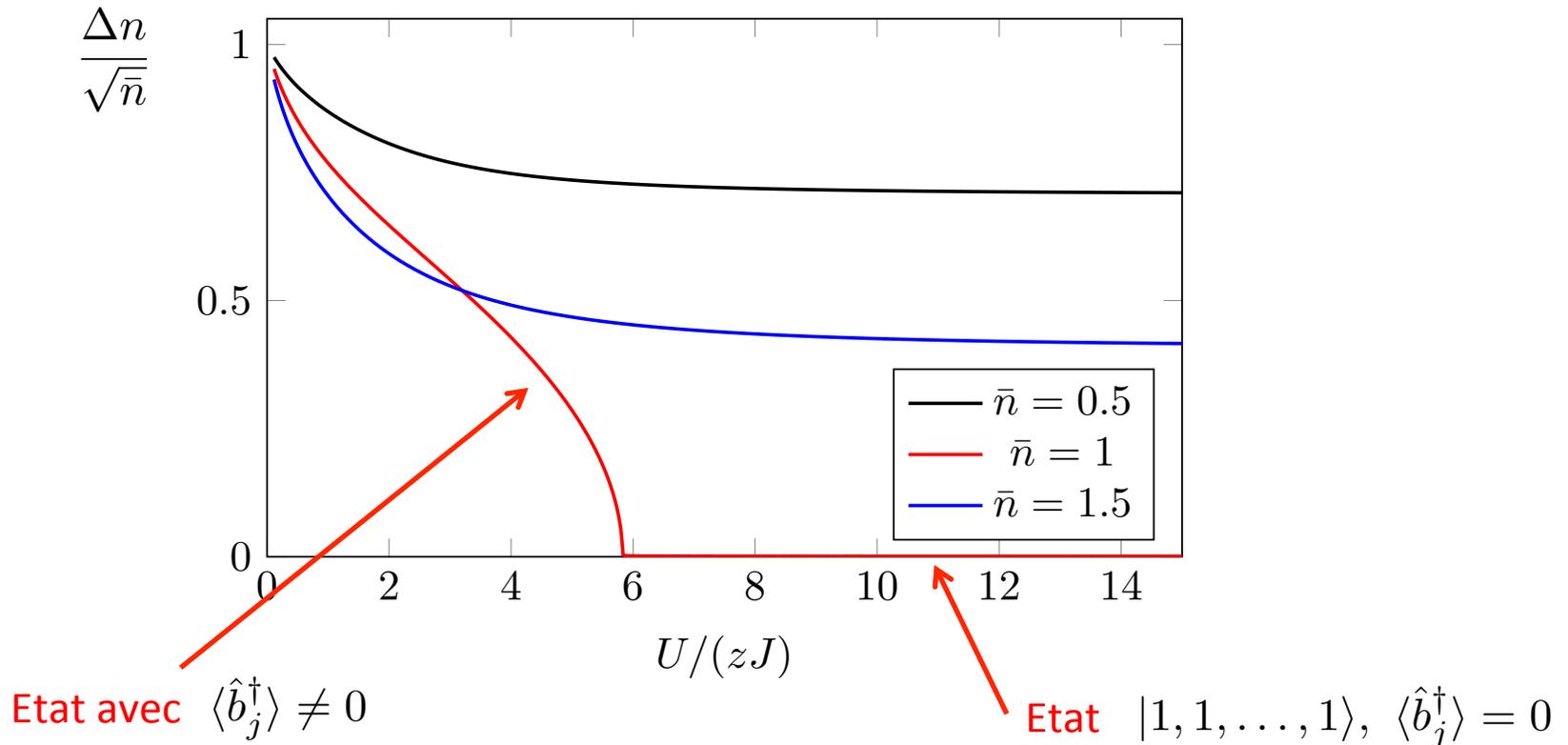


Les interactions répulsives tendent à produire des distributions sub-poissoniennes

Quelque chose d'intéressant apparaît au remplissage entier...

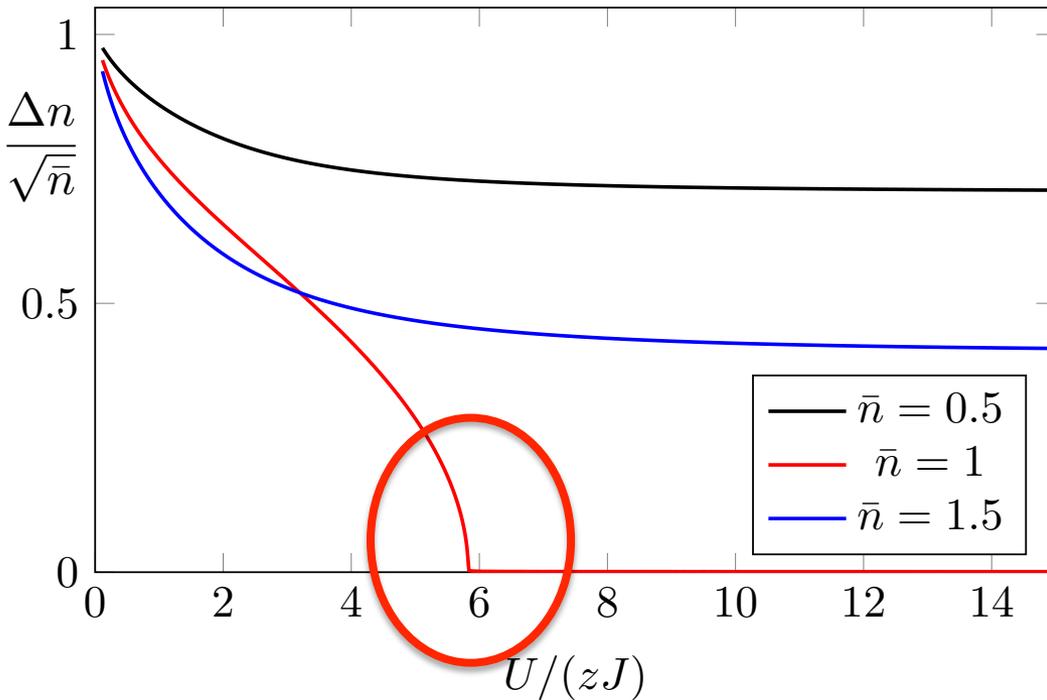
Des interactions assez fortes gèlent complètement la distribution pour des remplissages entiers !

# Même quantité en variant $U/zJ$ pour un remplissage donné



Dans le cadre du traitement *champ moyen* : pour un remplissage entier, transition de phase du 2<sup>ème</sup> ordre entre un état avec une cohérence étendue et un état sans la moindre cohérence

# Une approche analytique simple

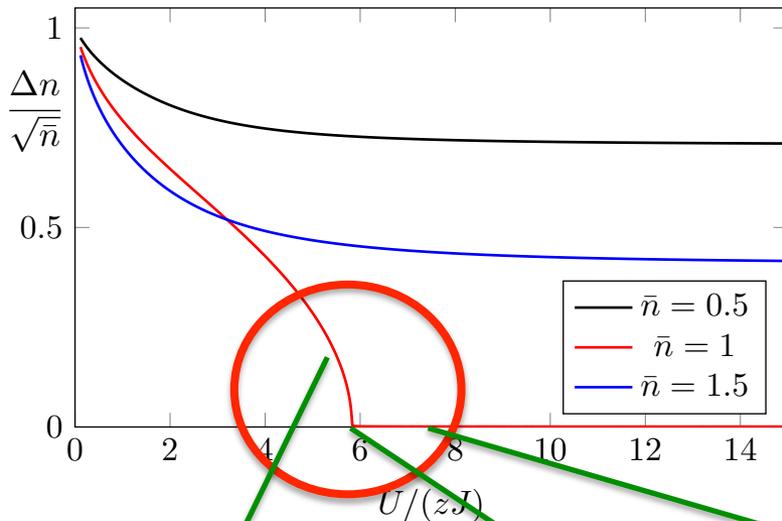


On se limite à trois coefficients pour décrire l'état sur un site

$$\begin{pmatrix} c(\bar{n} + 1) \\ c(\bar{n}) \\ c(\bar{n} - 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i(\eta+\varphi)} \sin \theta \cos \chi \\ \cos \theta \\ e^{i(\eta-\varphi)} \sin \theta \sin \chi \end{pmatrix}$$

- Même amplitude pour  $|c_0|$  et  $|c_2|$ , pour garantir que  $\bar{n} = 1$  :  $\cos \chi = \sin \chi = 1/\sqrt{2}$
- Energie minimale pour  $\eta = 0$
- Energie indépendante de  $\varphi$  : brisure spontanée de symétrie

# Une approche analytique simple



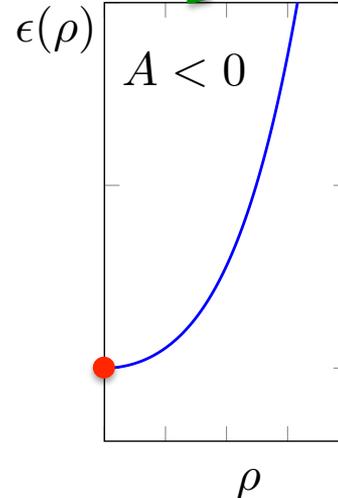
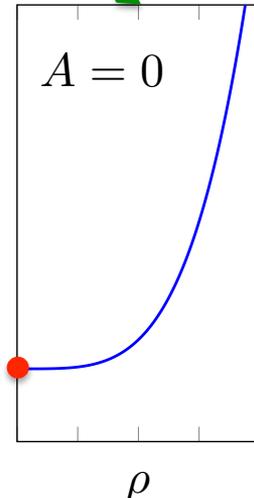
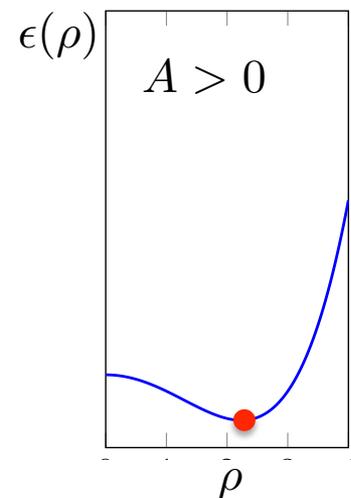
$$\begin{pmatrix} c(\bar{n} + 1) \\ c(\bar{n}) \\ c(\bar{n} - 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta \\ \cos \theta \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta \end{pmatrix}$$

On pose  $\rho = \frac{1}{2} \sin(2\theta)$  et on suppose  $\theta \ll 1$

Energie par site :  $\epsilon(\rho) \approx \frac{U}{2} \rho^4 - A\rho^2 + \epsilon_0$

$$A = -\frac{U}{2} + zJ \mathcal{F}(\bar{n})$$

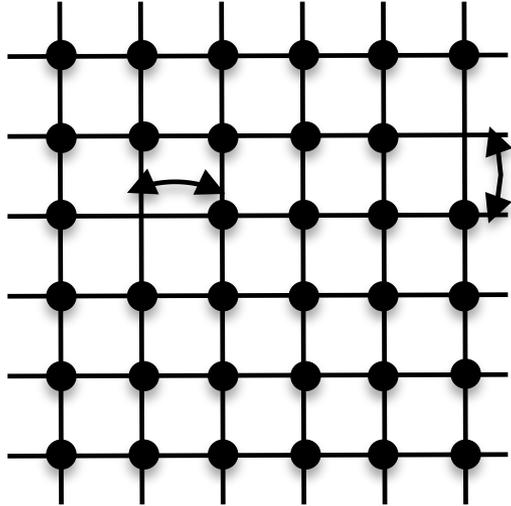
**Tout dépend du signe de  $A$  !**



Pour  $\bar{n} = 1$

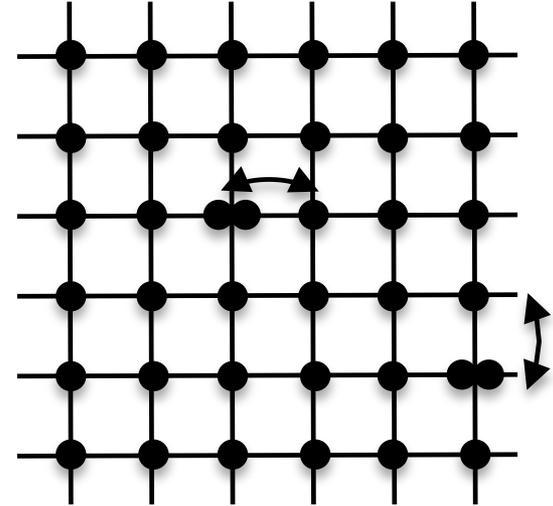
$$\left. \frac{U}{zJ} \right|_c = 2 \mathcal{F}(\bar{n}) \approx 5.8$$

# Etat pour un remplissage non entier



$$\bar{n} = 1 - \epsilon$$

Superfluidité de type trou



$$\bar{n} = 1 + \epsilon$$

Superfluidité de type particule