

# Le magnétisme artificiel pour les gaz d'atomes froids

Les phénomènes magnétiques jouent un rôle essentiel en physique quantique. Des notions ou des phénomènes aussi variés que l'invariance de jauge, l'effet Hall quantique, le couplage spin-orbite, l'effet Aharonov-Bohm, les isolants topologiques, trouvent leur origine dans l'interaction entre des charges en mouvement et un champ magnétique  $\mathbf{B}$ .

Pour une particule de masse  $M$ , de charge  $q$  et de vitesse  $\mathbf{v}$ , cette interaction se décrit en terme de force de Lorentz  $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  ou alors, de manière équivalente, par l'hamiltonien

$$\hat{H} = \frac{(\hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A}(\hat{\mathbf{r}}))^2}{2M},$$

où  $\mathbf{A}$  est le potentiel vecteur dont dérive le champ magnétique  $\mathbf{B}$ . L'étude du magnétisme avec des atomes froids constitue un volet important du programme général de simulation quantique basé sur ces nouveaux gaz. Mais la neutralité électrique des atomes ( $q = 0$ ) nécessite de recourir à des « artifices » - par exemple des faisceaux lumineux de fréquences et de directions bien choisies - pour atteindre des situations équivalentes à celles rencontrées pour les fluides d'électrons de la matière ordinaire.

Le cours et les séminaires de cette année feront le point sur cette recherche très active, tant sur le plan théorique qu'expérimental. Le déroulement du cours, composé de sept séances, sera le suivant :

- Le premier cours sera consacré aux bases de la description du mouvement d'une particule dans un champ magnétique. Partant de la force de Lorentz, nous en déduisons l'approche hamiltonienne à ce problème ainsi que la notion d'invariance de jauge, à la fois sur le plan de l'électrodynamique et sur celui de la mécanique quantique. Nous illustrerons ces concepts en discutant l'effet Aharonov-Bohm ainsi que les conséquences de l'existence possible de monopoles magnétiques.

- Le deuxième cours sera consacré à l'étude du mouvement quantique d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme. Nous discuterons en particulier la forme du spectre d'énergie, quantifié sous forme de niveaux de Landau. Nous en déduisons la notion d'états de bord, qui joue un rôle crucial pour interpréter l'effet Hall quantique.
- Le cours 3 sera consacré à la notion de phase de Berry et de potentiels de jauge géométriques. Nous partirons de l'approximation adiabatique pour montrer comment la phase de Berry apparaît, et nous ferons ensuite le lien avec la notion de transport parallèle. Nous terminerons par une approche à la Born-Oppenheimer pour une particule à plusieurs états internes, pour laquelle les potentiels de jauge géométriques, vectoriels et scalaires, apparaissent explicitement dans une équation de Schrödinger réduite à un seul de ces états internes.
- Les cours 4 et 5 décriront deux approches possibles à la simulation du magnétisme avec des gaz d'atomes froids : mise en rotation du gaz ou utilisation de phases géométriques induite par la lumière. Nous décrirons plusieurs expériences récentes sur ce domaine et nous discuterons les limites issues du chauffage par l'émission spontanée de photons quand le champ de jauge est induit par un faisceau lumineux. Nous aborderons également la réalisation d'un couplage spin-orbite, à la fois à une et deux dimensions.
- Le cours 6 sera consacré à la simulation du magnétisme sur réseau. Nous discuterons d'abord ses caractéristiques principales, comme la structure fractale du spectre connue sous le nom de papillon de Hofstadter. Nous passerons ensuite en revue différentes techniques, comme les réseaux « secoués » ou l'effet tunnel assisté par laser entre états internes différents, permettant de simuler ce magnétisme pour des atomes piégés dans un réseau optique.

– Pour finir, le cours 7 abordera l'effet simultané du magnétisme orbital et des interactions entre atomes. Nous nous intéresserons essentiellement aux systèmes décrits par une fonction d'onde macroscopique, dans lesquels des vortex peuvent être nucléés. Nous montrerons comment ces vortex s'arrangent en réseaux réguliers (*réseaux d'Abrikosov*) et nous terminerons par quelques éléments sur la physique susceptible d'apparaître à très grand champ, avec l'émergence d'états fortement corrélés rappelant ceux de l'effet Hall quantique.

# Chapitre 1

## Le magnétisme d'une particule ponctuelle

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Quelques éléments de magnétostatique . . . . .</b>	<b>4</b>
1-1	Équations de la magnétostatique . . . . .	4
1-2	Le potentiel vecteur . . . . .	4
1-3	Exemples . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Particule classique dans un champ magnétique . . . . .</b>	<b>7</b>
2-1	Force de Lorentz et mouvement cyclotron . . . . .	7
2-2	Equations de Euler–Lagrange . . . . .	7
2-3	Lagrangien dans un champ magnétique . . . . .	8
2-4	Le principe d'une théorie de jauge . . . . .	8
2-5	Hamiltonien dans un champ magnétique . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Particule quantique dans un champ magnétique . . . . .</b>	<b>9</b>
3-1	Quantification canonique . . . . .	9
3-2	Transformation de jauge pour la mécanique quantique . . . . .	10
3-3	Hamiltonien quantique . . . . .	10
3-4	Invariance de jauge quantique + électromagnétique . . . . .	10
<b>4</b>	<b>L'effet Aharonov–Bohm . . . . .</b>	<b>11</b>
4-1	L'argument de Aharonov et Bohm . . . . .	12
4-2	Argument fondé sur l'intégrale de chemin . . . . .	13
4-3	Mise en évidence expérimentale . . . . .	14
<b>5</b>	<b>Monopole magnétique et physique quantique . . . . .</b>	<b>14</b>

---

5-1	Quantification de la charge électrique . . . . .	15
5-2	Simulation d'un monopole dans un condensat . . . . .	16

---

Dans ce premier chapitre, nous allons d'abord rappeler les éléments clés du magnétisme, d'abord du point des champs magnétiques eux-mêmes via les équations de Maxwell, puis du point de vue du mouvement de particules chargées. Nous aborderons successivement le formalisme classique (dynamique newtonienne), puis le formalisme quantique. Dans ce dernier cas, nous insisterons sur la notion de changement de jauge, à la fois du point de vue du champ électromagnétique et du point de vue de la formulation quantique du mouvement des particules.

Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous présenterons deux illustrations de ce formalisme : nous analyserons l'effet Aharonov–Bohm, qui donne un nouvel éclairage sur la notion de potentiel vecteur et qui permet d'introduire le concept de phase géométrique, qui jouera un rôle essentiel dans la suite de ce cours. Nous discuterons également brièvement la notion de monopole magnétique, en reprenant un argument fameux de Dirac sur le lien entre l'éventuelle existence de ces monopoles et la quantification de la charge électrique (Dirac 1931; Dirac 1948). Nous terminerons par la présentation très brève d'une expérience récente simulant un tel monopole au sein d'un condensat de Bose–Einstein.

Nous n'allons pas aborder dans ce premier chapitre le problème important du mouvement quantique d'une particule chargée dans un champ magnétique, avec la structure en niveaux de Landau qui joue un rôle crucial dans les phénomènes liés au magnétisme orbital, comme l'effet Hall quantique. Ce développement fera l'objet du chapitre 2.

## 1 Quelques éléments de magnétostatique

Nous commencerons ce chapitre par des rappels de magnétostatique : partant des équations de base vérifiées par le champ magnétique  $\mathbf{B}$  dans le cas indépendant du temps, notre but est d'introduire la notion de potentiel vecteur  $\mathbf{A}$  et de discuter quelques exemples de géométries pertinentes pour la suite.

### 1-1 Équations de la magnétostatique

Nous nous intéressons ici au cas d'un champ magnétique  $\mathbf{B}$  indépendant du temps, mais dépendant de la position  $\mathbf{r}$ . Ce champ se calcule en fonction des courants imposés de l'extérieur à partir des deux équations de la magnétostatique. Ces équations peuvent être vues comme un cas particulier des équations de Maxwell pour un champ électromagnétique indépendant du temps.

La première équation de la magnétostatique s'écrit

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.1)$$

et traduit l'absence de charge (monopole) magnétique : le flux de  $\mathbf{B}$  à travers une surface fermée est toujours nul<sup>1</sup>.

La seconde équation relie le champ  $\mathbf{B}$  aux courants créant ce champ

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}, \quad (1.2)$$

1. Nous reviendrons sur les conséquences de l'existence éventuelle de monopoles magnétiques. Sur le plan formel, notons par ailleurs qu'une manière plus correcte de décrire les particules connues consiste à dire qu'elles ont toutes le même rapport *charge électrique/charge magnétique*. Une rotation dans les espaces abstraits  $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$  et  $\{\mathbf{D}, \mathbf{B}\}$  permet alors de se ramener à la formulation courante, que nous utilisons ici [Jackson (1998), Chap. 6, § 6.11]

où on a (éventuellement) inclus dans  $\mathbf{j}$  les « courants microscopiques » résultant du magnétisme des milieux matériels.

**Remarque :** Ces deux équations sont à mettre en regard de celles déterminant le champ électrique en électrostatique,

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_{\text{elec.}}(\mathbf{r})}{\epsilon_0}, \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad (1.3)$$

où  $\rho_{\text{elec.}}(\mathbf{r})$  est la densité de charge électrique au point  $\mathbf{r}$ .

### 1-2 Le potentiel vecteur

La première équation de la magnétostatique,  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ , vient mettre une contrainte forte sur la forme possible des champs de vecteurs  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  que l'on peut réaliser. Pour rendre compte de manière simple de cette contrainte, on peut montrer (lemme de Poincaré) que le champ  $\mathbf{B}$  peut toujours se mettre sous la forme

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}). \quad (1.4)$$

Il est clair que la relation (1.4) ne définit pas le potentiel vecteur  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  de manière unique. Plus précisément, deux potentiels vecteurs  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{A}'$  tels que  $\nabla \times (\mathbf{A}' - \mathbf{A}) = 0$  conduiront au même champ magnétique. Examinons les conséquences de cette équation dans un volume simplement connexe, l'espace entier par exemple ; l'équation  $\nabla \times \mathbf{X}(\mathbf{r}) = 0$  peut se résoudre en  $\mathbf{X}(\mathbf{r}) = \nabla \chi(\mathbf{r})$ , où  $\chi(\mathbf{r})$  est une fonction scalaire de  $\mathbf{r}$ . On en déduit que l'ensemble des potentiels vecteurs associés à un même champ magnétique  $\mathbf{B}$  forme une classe d'équivalence, dont les différents membres sont reliés par une relation du type

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \nabla \chi(\mathbf{r}). \quad (1.5)$$

Le passage de  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  à  $\mathbf{A}'(\mathbf{r})$  est appelé *changement de jauge* et la fonction  $\chi(\mathbf{r})$  est la *fonction de jauge* associée à ce changement.

### 1-3 Exemples

Nous présentons ci-dessous quelques exemples qui seront utiles pour la suite de ce cours. Nous prendrons la notation  $\{\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z\}$  pour désigner un trièdre orthonormé direct de l'espace, avec  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ . Nous utiliserons également les coordonnées cylindriques  $(\rho, \varphi, z)$  et les coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$  avec dans les deux cas le vecteur unitaire azimuthal  $\mathbf{u}_\varphi = \mathbf{u}_x \cos \varphi + \mathbf{u}_y \sin \varphi$ .

**Exemple 1 : champ  $B$  uniforme.** Considérons un champ magnétique  $B$  uniforme dans l'espace, orienté par convention selon l'axe  $z$ . Un choix possible de potentiel vecteur (jauge symétrique) est

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} -By/2 \\ +Bx/2 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

Ce potentiel vecteur peut également s'écrire sous forme vectorielle

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \mathbf{B} \times \mathbf{r}. \quad (1.7)$$

Ce choix de jauge fait jouer des rôles (presque) symétriques aux variables  $x$  et  $y$ , ce qui est satisfaisant compte tenu de la symétrie du problème. En revanche, il brise l'invariance par translation du problème en particulierisant un point de l'espace, l'origine  $O$ , où le potentiel vecteur s'annule.

On utilise souvent le changement de jauge associé à la fonction

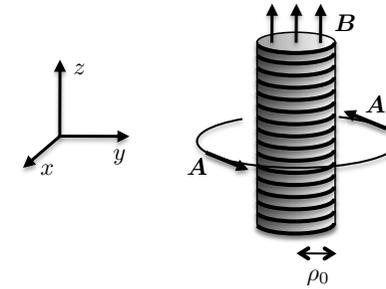
$$\chi(\mathbf{r}) = \frac{B}{2} xy, \quad \nabla \chi = \frac{B}{2} (y \mathbf{u}_x + x \mathbf{u}_y) \quad (1.8)$$

pour obtenir le potentiel vecteur en jauge de Landau<sup>2</sup>

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} 0 \\ +Bx \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

Cette forme brise la symétrie entre les axes  $x$  et  $y$ , mais elle est souvent commode pour les calculs en physique quantique, nous y reviendrons dans le prochain chapitre.

2. On peut également prendre la fonction de jauge  $\chi(\mathbf{r})$  qui conduit à  $\mathbf{A}''(\mathbf{r}) = -By \mathbf{u}_x$ .



**FIGURE 1.1.** Solénoïde infini d'axe  $z$ , conduisant à une champ uniforme à l'intérieur du solénoïde et nul à l'extérieur. Le courant dans ce solénoïde est supposé être orthoradial, parcourant une nappe uniforme de rayon  $r_0$ . Le choix de jauge (1.10) conduit au potentiel vecteur orthoradial indiqué sur la figure.

**Exemple 2 : solénoïde infini.** Considérons maintenant le solénoïde idéal et infini de rayon  $\rho_0$  et d'axe  $z$  représenté sur la figure 1.1. Les deux équations de la magnétostatique, associées à l'invariance par translation le long de l'axe  $z$  et à l'hypothèse que le champ est nul quand  $\rho \rightarrow \infty$  conduisent aux conclusions suivantes :

- À l'intérieur du solénoïde, le champ  $B$  est parallèle à l'axe  $z$  et uniforme (d'amplitude notée ci-dessous  $B_0$ ).
- Le champ  $B$  est nul à l'extérieur du solénoïde.

On peut vérifier que ce champ  $B(\mathbf{r})$  peut être obtenu à partir d'un potentiel vecteur orthoradial  $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = A(\rho) \mathbf{u}_\varphi$  avec, toujours en coordonnées cylindriques :

$$A(\rho) = B_0 \frac{\rho_0^2}{2\rho} \quad \text{si } \rho > \rho_0, \quad A(\rho) = B_0 \frac{\rho}{2} \quad \text{si } \rho < \rho_0. \quad (1.10)$$

On utilise souvent la limite d'un rayon  $\rho_0$  tendant vers 0, la valeur du champ  $B_0$  tendant vers l'infini de manière à garder constant le flux  $\Phi = \pi \rho_0^2 B_0$  du champ magnétique à travers un plan perpendiculaire à l'axe  $z$ . On parle alors d'une *ligne de flux*, correspondant à

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\Phi}{2\pi\rho} \mathbf{u}_\varphi, \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \Phi \delta(x)\delta(y) \mathbf{u}_z. \quad (1.11)$$

On vérifie immédiatement que la circulation de  $\mathbf{A}$  sur n'importe quel cercle centré sur l'axe  $z$  et parallèle au plan  $xy$  vaut  $\Phi$ , tout comme le flux de  $\mathbf{B}$  à travers le disque correspondant. On note également que le potentiel vecteur devient singulier sur l'axe  $z$  pour cette limite d'un solénoïde infiniment fin. Dans ce qui suit, il sera utile d'écrire ce même potentiel vecteur en coordonnées sphériques :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\Phi}{2\pi} \frac{1}{r \sin \theta} \mathbf{u}_\varphi. \quad (1.12)$$

**Exemple 3 : monopole magnétique!** Le potentiel vecteur a été introduit pour rendre compte de la contrainte  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ , traduisant l'absence de charges magnétiques. Si l'on accepte de travailler avec un potentiel vecteur présentant des singularités similaires à celle qui apparaît dans le cas du solénoïde infiniment étroit [eq. (1.12)], on peut malgré tout (presque) décrire un monopole magnétique isolé à l'aide de ce potentiel vecteur.

Considérons le potentiel vecteur en coordonnées sphériques

$$\mathbf{A}_m^{(1)}(\mathbf{r}) = \frac{q_m}{4\pi} \frac{1 - \cos \theta}{r \sin \theta} \mathbf{u}_\varphi. \quad (1.13)$$

Ce potentiel est défini en tout point de l'espace sauf sur la partie négative de l'axe  $z$ , pour laquelle  $\theta = \pi$ . Si on applique les formules standard de dérivation pour calculer  $\nabla \times \mathbf{A}_{m,1}$ , valables *a priori* en dehors de la singularité du demi-axe  $z < 0$ , on trouve

$$B_r = (\nabla \times \mathbf{A})_r = \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial(A_\varphi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) = \frac{q_m}{4\pi r^2} \quad (1.14)$$

$$B_\theta = (\nabla \times \mathbf{A})_\theta = \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \sin \theta \frac{\partial(r A_\varphi)}{\partial r} \right) = 0 \quad (1.15)$$

$$B_\varphi = (\nabla \times \mathbf{A})_\varphi = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (1.16)$$

Il semble donc que nous ayons réussi à générer le champ magnétique d'un monopole

$$\mathbf{B}_m = \frac{q_m}{4\pi r^2} \mathbf{u}_r \quad (1.17)$$

à partir de l'équation  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ , ce qui semble paradoxal! La solution de ce paradoxe apparaît quand on calcule la circulation de  $\mathbf{A}$  sur un petit

cercle d'axe  $z$ , de rayon  $r \sin \theta$ ; on trouve

$$\oint (\mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_\varphi) d\varphi = \frac{q_m}{2} (1 - \cos \theta). \quad (1.18)$$

Quand on fait tendre le rayon du cercle vers 0, on trouve une circulation nulle pour un cercle situé sur le demi-axe  $z > 0$  ( $\theta \rightarrow 0$ ) et une circulation égale à  $q_m$  pour un cercle situé sur le demi-axe  $z < 0$  ( $\theta \rightarrow \pi$ ). Ceci signifie qu'en plus du champ monopolaire (1.17), le potentiel vecteur (1.13) engendre un champ parallèle à l'axe  $z$  et localisé sur le demi-axe  $z < 0$ , comme celui du solénoïde considéré précédemment. Le champ magnétique total associé au potentiel vecteur (1.13) est donc

$$\mathbf{B}^{(1)}(\mathbf{r}) = \frac{q_m}{4\pi r^2} \mathbf{u}_r + q_m \Theta(-z) \delta(x) \delta(y) \mathbf{u}_z, \quad (1.19)$$

où  $\Theta(z)$  est la fonction de Heaviside<sup>3</sup>. On dit qu'au monopole de charge  $q_m$  est attachée une *corde de Dirac*, partant du point où se trouve le monopole ( $r = 0$ ) et s'étendant jusqu'en  $z = -\infty$ .

On peut également considérer le potentiel vecteur

$$\mathbf{A}_m^{(2)}(\mathbf{r}) = -\frac{q_m}{4\pi} \frac{1 + \cos \theta}{r \sin \theta} \mathbf{u}_\varphi. \quad (1.20)$$

qui présente une singularité sur le demi-axe  $z > 0$ . Le champ magnétique correspondant contient le même monopole que (1.19), mais la ligne de singularité est inversée :

$$\mathbf{B}^{(2)}(\mathbf{r}) = \frac{q_m}{4\pi r^2} \mathbf{u}_r - q_m \Theta(z) \delta(x) \delta(y) \mathbf{u}_z. \quad (1.21)$$

Notons que le potentiel vecteur (1.13) peut être obtenu en pratique en considérant une chaîne de dipôles magnétiques alignés le long du demi-axe  $z < 0$  (figure 1.1b) ou encore un solénoïde semi-infini et de rayon arbitrairement petit (figure 1.1c) (Jackson 1998). Pour (1.20), la chaîne de dipôle s'étend le long du demi-axe  $z > 0$ , depuis  $z = 0$  jusqu'à  $z = +\infty$ .

Remarquons également que la différence entre les deux potentiels vecteurs  $\mathbf{A}_m^{(1)}$  et  $\mathbf{A}_m^{(2)}$  est exactement égale au potentiel vecteur proposé en

3.  $\Theta(z) = 1$  si  $z > 0$ ,  $\Theta(z) = 0$  si  $z < 0$ ,  $\Theta(0) = 1/2$ .

(1.12) pour rendre compte d'un solénoïde infini, avec  $\Phi = q_m$ , ce qui est accord avec le fait que ces potentiels vecteurs correspondent chacun à un solénoïde semi-infini, l'un selon  $z > 0$ , l'autre selon  $z < 0$ , avec des courants tournant dans des sens opposés. Ceci montre que  $\mathbf{A}_m^{(1)}$  et  $\mathbf{A}_m^{(2)}$  ne sont pas reliés par une transformation de jauge, au moins sur tout l'espace  $R^3$ , puisque  $\mathbf{A}_m^{(1)} - \mathbf{A}_m^{(2)} \neq \nabla\chi$ . Nous verrons un peu plus loin comment Dirac a exploité ce point pour déduire la quantification de la charge électrique à partir de l'éventuelle existence d'un monopole magnétique.

## 2 Particule classique dans un champ magnétique

Nous passons maintenant à la description du mouvement d'une particule ponctuelle chargée, décrite par la mécanique classique, dans un champ magnétique  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ . Dans tout ce qui suit, nous nous limiterons au cas non relativiste, la vitesse des particules matérielles étant supposée très petite devant la vitesse de la lumière.

### 2-1 Force de Lorentz et mouvement cyclotron

Notons  $M$  la masse de la particule et  $q$  sa charge. Notre point de départ sera la force de Lorentz qui agit sur la particule de vitesse  $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$  :

$$\mathbf{F}_L = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (1.22)$$

conduisant à l'équation du mouvement

$$M\ddot{\mathbf{r}} = q \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}. \quad (1.23)$$

**Cas particulier.** Si le champ  $\mathbf{B}$  est uniforme, c'est-à-dire indépendant du point de l'espace considéré, le mouvement de la particule dans le plan perpendiculaire à  $\mathbf{B}$  est circulaire uniforme (mouvement cyclotron), de pulsation

$$\omega_c = qB/M. \quad (1.24)$$

Le mouvement est rectiligne uniforme le long de l'axe du champ  $\mathbf{B}$ .

Pour préparer le terrain pour la description quantique, nous allons maintenant exprimer la loi fondamentale de la dynamique (1.23) dans le cadre des formalismes lagrangien et hamiltonien.

### 2-2 Equations de Euler-Lagrange

Pour une particule ponctuelle, le formalisme lagrangien revient à se donner une fonction  $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$  pour décrire la dynamique de la particule. À partir de cette fonction de Lagrange (ou *lagrangien*), on calcule pour toute trajectoire continue dans l'espace  $(\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t))$  l'action

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L[\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t), t] dt. \quad (1.25)$$

On pose que la trajectoire effectivement suivie par la particule pour aller du point de départ  $\mathbf{r}(t_1)$  au point d'arrivée  $\mathbf{r}(t_2)$  est celle qui minimise l'action. Ce principe variationnel conduit aux équations d'Euler-Lagrange :

$$\frac{\partial L}{\partial r_i} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} \right), \quad r_i = x, y, z. \quad (1.26)$$

Une remarque importante pour ce qui va suivre est la constatation suivante : si on ajoute à un lagrangien donné une dérivée totale par rapport au temps

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) \longrightarrow L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) + \frac{d}{dt}\Omega(\mathbf{r}, t), \quad (1.27)$$

les équations de Euler-Lagrange correspondantes ne sont pas modifiées. En effet

$$\frac{d}{dt}\Omega(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \sum_{j=x,y,z} \dot{r}_j \frac{\partial \Omega}{\partial r_j} \quad (1.28)$$

ce qui conduit à ajouter la même quantité

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial t \partial r_i} + \sum_{j=x,y,z} \dot{r}_j \frac{\partial^2 \Omega}{\partial r_i \partial r_j} \quad (1.29)$$

aux deux membres de l'équation (1.26).

### 2-3 Lagrangien dans un champ magnétique

Pour une particule libre, en absence de champ magnétique, le mouvement est rectiligne uniforme et correspond au choix

$$L_{\text{libre}}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2}M\dot{\mathbf{r}}^2. \quad (1.30)$$

En présence d'un champ magnétique  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ , y a-t-il un lagrangien qui permet de retrouver l'équation du mouvement (1.23)? La réponse est (multiplement) positive : pour tout potentiel vecteur  $\mathbf{A}$  associé au champ magnétique  $\mathbf{B}$ , on peut considérer

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2}M\dot{\mathbf{r}}^2 + q\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad (1.31)$$

et vérifier que les équations de Euler-Lagrange sont bien identiques à (1.23).

Le fait de retrouver l'équation du mouvement (1.23) garantit que le choix (1.31), bien que faisant intervenir explicitement de la jauge, ne conduit pas à des prédictions qui dépendraient de ce choix de jauge. C'est bien sûr essentiel et on peut chercher à prouver ce résultat sans passer par l'écriture explicite des équations de Euler-Lagrange. Considérons un changement de jauge

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \longrightarrow \mathbf{A}'(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \nabla\chi(\mathbf{r}), \quad (1.32)$$

correspondant au changement de lagrangien

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) \longrightarrow L_{\chi}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) + q\dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla\chi(\mathbf{r}). \quad (1.33)$$

On constate immédiatement que les deux lagrangiens  $L$  et  $L_{\chi}$  diffèrent d'une dérivée totale par rapport au temps

$$L_{\chi}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) + \frac{d}{dt}\Omega(\mathbf{r}) \quad \text{avec} \quad \Omega(\mathbf{r}) = q\chi(\mathbf{r}), \quad (1.34)$$

et ils doivent conduire effectivement aux mêmes équations du mouvement.

### 2-4 Le principe d'une théorie de jauge

On peut inverser le fil du raisonnement précédent, en se mettant à la place d'un physicien n'ayant jamais entendu parler de force de Lorentz, mais très imaginaire. Partant du lagrangien d'une particule libre (1.30),  $L = M\dot{\mathbf{r}}^2/2$ , ce physicien peut tirer parti de l'invariance des équations du mouvement par ajout d'une dérivée totale par rapport au temps. Cette invariance lui garantit que tous les lagrangiens du type

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2}M\dot{\mathbf{r}}^2 + q\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad (1.35)$$

avec le champ de vecteurs  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  tel que

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \nabla\chi(\mathbf{r}), \quad (1.36)$$

décriront également le mouvement d'une particule libre. À ce stade, il s'est contenté de compliquer un peu gratuitement le formalisme dont il dispose, mais il peut alors se poser la question suivante : quel type de système physique obtiendra-t-il s'il généralise le problème en considérant des lagrangiens du type (1.35), mais en ignorant la contrainte (1.36)? La réponse est immédiate compte tenu de ce qui précède : il inventera/découvrira le magnétisme orbital, c'est-à-dire le mouvement d'une particule de charge  $q$  dans un champ magnétique, avec  $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})$ .

### 2-5 Hamiltonien dans un champ magnétique

Le passage du formalisme lagrangien au formalisme hamiltonien se fait en définissant d'abord les moments canoniques

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i}, \quad (1.37)$$

puis en considérant la transformation de Legendre

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{r}} - L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t), \quad (1.38)$$

où la vitesse  $\dot{\mathbf{r}}$  est supposée être exprimée en fonction du moment  $\mathbf{p}$  par inversion de (1.37). Le mouvement de la (ou les) particule(s) est alors déterminé par les équations de Hamilton

$$\dot{r}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial r_i}. \quad (1.39)$$

Pour le lagrangien d'une particule chargée dans un champ magnétique proposé en (1.31), le moment conjugué vaut

$$\mathbf{p} = \nabla_{\dot{\mathbf{r}}} L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = M\dot{\mathbf{r}} + q\mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad (1.40)$$

et l'hamiltonien s'écrit donc, après réarrangement des termes :

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{(\mathbf{p} - q\mathbf{A}(\mathbf{r}))^2}{2M}. \quad (1.41)$$

On pourra vérifier que les équations de Hamilton (1.39) redonnent alors bien l'équation fondamentale de la dynamique (1.23) dont nous sommes partis.

On constate immédiatement que le *moment canonique*  $\mathbf{p}$  donné en (1.40), encore appelé *impulsion* ou *impulsion généralisée*, n'est pas une quantité physique indépendante de la jauge. Ce moment est notamment différent de la *quantité de mouvement*

$$\boldsymbol{\pi} = M\dot{\mathbf{r}}, \quad (1.42)$$

puisque

$$\mathbf{p} = \boldsymbol{\pi} + q\mathbf{A}(\mathbf{r}). \quad (1.43)$$

Cette distinction est le prix à payer pour obtenir une force dépendant de la vitesse dans le formalisme hamiltonien.

### 3 Particule quantique dans un chp. magnétique

#### 3-1 Quantification canonique

L'intérêt du formalisme hamiltonien classique est qu'il se prête bien au passage à la mécanique quantique, par l'intermédiaire de la règle de quantification canonique dans laquelle la position  $\mathbf{r}$  et l'impulsion  $\mathbf{p}$  deviennent des opérateurs  $\hat{\mathbf{r}}$  et  $\hat{\mathbf{p}}$  obéissant à

$$[\hat{r}_j, \hat{r}_k] = 0, \quad [\hat{r}_j, \hat{p}_k] = i\hbar \delta_{j,k}, \quad [\hat{p}_j, \hat{p}_k] = 0. \quad (1.44)$$

Commençons par rappeler comment ces relations de quantification viennent imposer une forme bien particulière de l'action des opérateurs

position  $\hat{\mathbf{r}}$  et impulsion  $\hat{\mathbf{p}}$  sur les fonctions d'onde (Dirac 1958). À ce stade, nous ne supposons rien sur la présence ou l'absence d'un champ magnétique.

Considérons une particule ponctuelle dont l'état est décrit par une fonction d'onde complexe  $\psi(\mathbf{r})$ , donnant la densité de probabilité de présence  $\mathcal{P}(\mathbf{r})$  au point  $\mathbf{r}$  :

$$\mathcal{P}(\mathbf{r}) = |\psi(\mathbf{r})|^2. \quad (1.45)$$

Il s'agit de déterminer l'action des opérateurs  $\hat{\mathbf{r}}$  et  $\hat{\mathbf{p}}$  sur cette fonction d'onde, compte tenu des relations (1.44).

On pose par convention que l'action de l'opérateur position  $\hat{\mathbf{r}}$  sur  $\psi(\mathbf{r})$  est la multiplication par la variable  $\mathbf{r}$  elle-même :

$$\hat{\mathbf{r}}[\psi(\mathbf{r})] = \mathbf{r} \psi(\mathbf{r}), \quad (1.46)$$

ce qui satisfait bien sûr la première relation de commutation  $[\hat{r}_j, \hat{r}_k] = 0$  de (1.44). La deuxième relation de commutation, qui relie les composantes de  $\hat{\mathbf{r}}$  et  $\hat{\mathbf{p}}$ , entraîne alors que

$$\hat{r}_j \hat{p}_k [\psi(\mathbf{r})] = \hat{p}_k [r_j \psi(\mathbf{r})] + i\hbar \delta_{j,k} \psi(\mathbf{r}), \quad (1.47)$$

dont la solution est

$$\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar \nabla + \mathbf{X}(\mathbf{r}), \quad (1.48)$$

où  $\mathbf{X}(\mathbf{r})$  est à ce stade un champ de vecteur quelconque. Enfin la troisième relation de commutation  $[\hat{p}_j, \hat{p}_k] = 0$  vient imposer une contrainte sur le champ de vecteur  $\mathbf{X}$  avec

$$\frac{\partial X_j}{\partial x_k} = \frac{\partial X_k}{\partial x_j} \Rightarrow \nabla \times \mathbf{X} = 0 \Rightarrow \mathbf{X} = \nabla \Omega(\mathbf{r}), \quad (1.49)$$

où  $\Omega$  est une fonction scalaire quelconque de  $\mathbf{r}$ . La règle de quantification canonique revient donc à imposer l'action des opérateurs  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{p}$  sur une fonction d'onde :

$$\hat{\mathbf{r}}[\psi(\mathbf{r})] = \mathbf{r} \psi(\mathbf{r}), \quad (1.50)$$

$$\hat{\mathbf{p}}[\psi(\mathbf{r})] = -i\hbar \nabla \psi(\mathbf{r}) + (\nabla \Omega(\mathbf{r})) \psi(\mathbf{r}). \quad (1.51)$$

### 3-2 Transformation de jauge pour la mécanique quantique

Le choix de la fonction  $\Omega$  dans (1.51) est arbitraire, mais sans conséquence physique (Dirac 1958). En effet, pour un choix donné de  $\Omega$ , on peut introduire la transformation unitaire, appelée *transformation de jauge* (et non reliée à ce stade à un changement de jauge électromagnétique)

$$\psi(\mathbf{r}) \longrightarrow \hat{T}\psi(\mathbf{r}), \quad \text{avec} \quad \hat{T} = \exp[i\Omega(\hat{\mathbf{r}})/\hbar], \quad (1.52)$$

qui ne modifie pas la densité de probabilité  $\mathcal{P}(\mathbf{r})$ . Dans cette transformation, les opérateurs  $\hat{\mathbf{r}}$  et  $\hat{\mathbf{p}}$  deviennent

$$\hat{\mathbf{r}} \longrightarrow \hat{\mathbf{r}} = \hat{T}\hat{\mathbf{r}}\hat{T}^\dagger = \hat{\mathbf{r}}, \quad (1.53)$$

$$\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla + \nabla\Omega(\mathbf{r}) \longrightarrow \hat{\hat{\mathbf{p}}} = \hat{T}\hat{\mathbf{p}}\hat{T}^\dagger = -i\hbar\nabla, \quad (1.54)$$

ce qui élimine la fonction  $\Omega$ . Dans toute la suite (qu'un champ magnétique soit présent ou non), on supposera cette transformation effectuée et on prendra donc la convention habituelle

$$\hat{\mathbf{r}}[\psi(\mathbf{r})] = \mathbf{r}\psi(\mathbf{r}), \quad \hat{\mathbf{p}}[\psi(\mathbf{r})] = -i\hbar\nabla\psi(\mathbf{r}). \quad (1.55)$$

### 3-3 Hamiltonien quantique

Une fois construits les opérateurs  $\hat{\mathbf{r}}$  et  $\hat{\mathbf{p}}$ , on peut en déduire l'opérateur associé à toute quantité physique dépendant de la position et de l'impulsion, en particulier l'hamiltonien d'une particule de charge électrique  $q$  en présence d'un champ magnétique statique

$$\hat{H} = \frac{(\hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A}(\hat{\mathbf{r}}))^2}{2M} = \frac{(-i\hbar\nabla - q\mathbf{A}(\mathbf{r}))^2}{2M}. \quad (1.56)$$

C'est la forme que nous utiliserons dans tout ce cours et que nous allons en particulier chercher à simuler pour des particules non chargées électriquement.

Comme son équivalent classique, cette écriture dépend explicitement de la jauge choisie pour déterminer le potentiel vecteur. Considérons une fonction d'onde  $\psi(\mathbf{r}, t)$  solution de l'équation de Schrödinger

$$i\hbar\frac{\partial\psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \frac{(-i\hbar\nabla - q\mathbf{A}(\mathbf{r}))^2}{2M}\psi(\mathbf{r}, t). \quad (1.57)$$

Un changement de jauge électromagnétique

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \longrightarrow \mathbf{A}'(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \nabla\chi(\mathbf{r}), \quad (1.58)$$

va modifier l'hamiltonien et  $\psi(\mathbf{r}, t)$  ne sera plus solution de l'équation de Schrödinger écrite avec le potentiel vecteur  $\mathbf{A}'$ . En revanche, si on accompagne ce changement de jauge électromagnétique de la transformation de jauge quantique similaire à (1.52)

$$\psi(\mathbf{r}, t) \longrightarrow \psi'(\mathbf{r}, t) = \hat{T}\psi(\mathbf{r}, t), \quad \text{avec} \quad \hat{T} = \exp[iq\chi(\hat{\mathbf{r}})/\hbar], \quad (1.59)$$

alors la fonction d'onde  $\psi'(\mathbf{r}, t)$  que l'on obtient est bien solution de l'équation de Schrödinger pour le potentiel vecteur  $\mathbf{A}'$  :

$$i\hbar\frac{\partial\psi'}{\partial t} = \frac{(-i\hbar\nabla - q\mathbf{A}'(\mathbf{r}))^2}{2M}\psi'(\mathbf{r}, t). \quad (1.60)$$

Ceci montre le lien profond entre la symétrie de jauge de l'équation de Schrödinger, exprimée par la transformation unitaire (1.52), et l'invariance de jauge des équations de Maxwell considérées ici sur le plan de la magnétostatique (Cohen-Tannoudji et al. (1973), chapitre 3, complément H<sub>III</sub>).

### 3-4 Invariance de jauge quantique + électromagnétique

On peut inverser la démarche précédente pour arriver à une formulation de la mécanique quantique dans laquelle le magnétisme (ou l'électromagnétisme) apparaît naturellement via l'ajout d'une condition de symétrie de jauge locale. Nous avons déjà esquissé ce raisonnement dans le cadre classique (§ 2-4) et nous le transposons ici au cadre quantique.

Considérons une particule libre, de masse  $M$ , de charge  $q$  et de fonction d'onde  $\psi(\mathbf{r}, t)$  solution de l'équation de Schrödinger

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{H}\psi \quad (1.61)$$

sans donner la forme de  $\hat{H}$  à ce stade. Imposons uniquement la condition supplémentaire suivante, correspondant à la symétrie de jauge locale<sup>4</sup> :

4. Nous ne faisons pas ici de transformation équivalente sur les observables, sinon l'unitarité de la mécanique quantique rendrait cette transformation triviale.

La physique doit rester la même si on fait la transformation de jauge

$$\psi \rightarrow \tilde{\psi} = \hat{T}\psi \quad \text{avec} \quad \hat{T} = \exp[iq\chi(\hat{\mathbf{r}})/\hbar]. \quad (1.62)$$

Clairement, le choix

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\hat{\mathbf{r}}) \quad (1.63)$$

ne convient car l'équation satisfaite par  $\tilde{\psi}$  ne fera pas intervenir un hamiltonien gardant la même structure. En revanche, il est clair d'après ce qui précède que le choix générique

$$\hat{H} = \frac{(-i\hbar\nabla - q\mathbf{A}(\mathbf{r}))^2}{2m} + V(\mathbf{r}) \quad (1.64)$$

associé à la modification de  $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \nabla\chi(\mathbf{r}) \quad (1.65)$$

convient.

Pour assurer cette symétrie de jauge locale, il est suffisant de se limiter à des potentiels vecteurs  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  égaux au gradient d'une fonction scalaire  $\Omega(\mathbf{r})$ . Mais le physicien imaginatif évoqué plus haut peut s'interroger sur ce qui se produit si on étend ce choix d'hamiltonien « généralisé » à un potentiel vecteur  $\mathbf{A}$  quelconque (pas nécessairement de rotationnel nul). La réponse est là encore simple : notre physicien découvrira le magnétisme orbital quantique !

## 4 L'effet Aharonov–Bohm

Dans leur célèbre article de 1959, intitulé *Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory*<sup>5</sup>, Aharonov et Bohm ont proposé une ex-

5. Le point qui nous intéresse ici est le fait que les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  sont tous deux nuls dans la région accessible aux particules, révélant ainsi l'importance des potentiels de jauge. Des variantes de cet effet relâchent une partie de ces contraintes, comme l'effet Aharonov-Casher où la présence d'un champ électrostatique modifie par une phase géométrique la fonction d'onde d'un dipôle magnétique (Aharonov & Casher 1984).

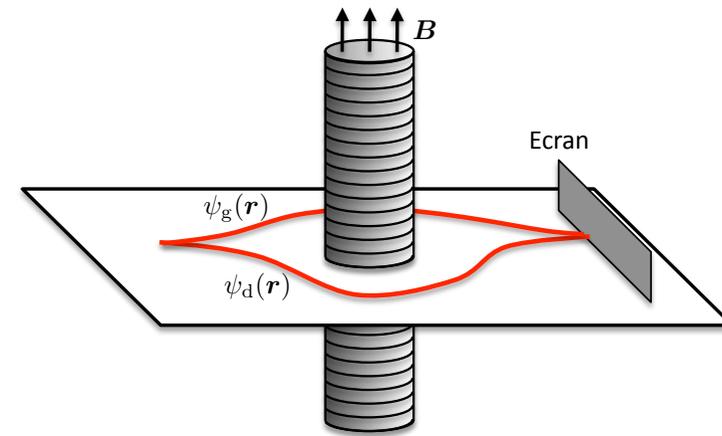


FIGURE 1.2. Géométrie envisagée par Aharonov et Bohm.

périence de pensée qui met en évidence un fait remarquable<sup>6</sup> : on peut détecter la présence d'un champ magnétique par des mesures faites sur des particules quantiques, même si ces particules ne sont jamais trouvées dans des régions où  $\mathbf{B}(\mathbf{r}) \neq 0$  (Aharonov & Bohm 1959).

La géométrie proposée par Aharonov et Bohm utilise le solénoïde infini déjà considéré en (1-3), que l'on place au milieu d'un interféromètre à deux voies situé dans le plan  $xy$ . Le solénoïde lui-même est entouré d'une barrière de potentiel de sorte que les particules n'y pénètrent pas ; l'interférence observée sur l'écran de détection résulte donc de la superposition des deux ondes  $\psi_g(\mathbf{r})$  et  $\psi_d(\mathbf{r})$ , passées respectivement à gauche et à droite du solénoïde. Le résultat crucial est que la figure d'interférence n'est pas la même selon qu'un courant circule ou non dans le solénoïde, bien que le champ magnétique dans la région accessible aux particules (l'extérieur du solénoïde) soit nul dans les deux cas.

6. Nous prenons ici la terminologie standard d'« effet Aharonov–Bohm », bien qu'Ehrenberg et Siday, dans un article de 1949, aient proposé une expérience de pensée similaire et aient abouti à la même conclusion : *The irremovable anisotropy of the field-free region as a whole emphasizes the fact that the electron-optical refractive index contains the vector potential and not the magnetic field strength.* (Ehrenberg & Siday 1949)

#### 4-1 L'argument de Aharonov et Bohm

Notons  $\psi_g^{(0)}(\mathbf{r})$  et  $\psi_d^{(0)}(\mathbf{r})$  les deux ondes de matière en absence de courant dans le solénoïde, correspondant au choix de jauge  $\mathbf{A} = 0$  dans tout l'espace. Quand un courant circule dans le solénoïde, le potentiel vecteur  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  n'est plus nul à l'extérieur du solénoïde, mais le champ magnétique  $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})$  reste nul sur la région accessible aux particules. On a donc dans cette région

$$\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0. \quad (1.66)$$

Comment intégrer cette équation différentielle ? Dans une région « sans trou » (simplement connexe), la solution est simple. Il existe une fonction scalaire  $\chi(\mathbf{r})$  telle que

$$\mathbf{A}(\vec{r}) = \nabla \chi(\mathbf{r}). \quad (1.67)$$

En effet, dans une région sans trou, on a pour tout circuit  $\mathcal{C}$  fermé

$$\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0, \quad (1.68)$$

ce qui permet de poser de manière non ambiguë

$$\chi(\mathbf{r}) = \chi(\mathbf{0}) + \int_0^{\mathbf{r}} \mathbf{A}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}', \quad (1.69)$$

où on s'est donné une origine notée  $\mathbf{0}$  et où on a fixé la valeur  $\chi(\mathbf{0})$  de  $\chi$  en ce point.

En revanche, ce raisonnement n'est pas valable pour la géométrie de Aharonov–Bohm car la zone accessible aux particules n'est pas simplement connexe ; on a en effet ôté du plan  $xy$  la région occupée par le solénoïde. Toutefois, on peut considérer deux régions de l'espace notées I et II sur la figure 1.3, correspondant aux « trajectoires » passant à gauche et à droite du solénoïde. Pour chacune de ces régions, on peut résoudre (1.66) sous la forme (1.67) et écrire :

$$\text{zone I : } \mathbf{A}_I(\vec{r}) = \nabla \chi_I(\mathbf{r}), \quad \text{zone II : } \mathbf{A}_{II}(\vec{r}) = \nabla \chi_{II}(\mathbf{r}). \quad (1.70)$$

Considérons alors l'onde  $\psi_g$  qui se propage uniquement dans la région I. Pour cette onde, le branchement du courant dans le solénoïde revient à

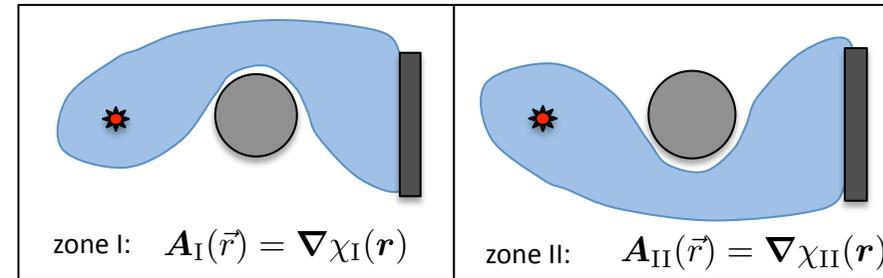


FIGURE 1.3. Deux zones (patch) sur lesquelles le potentiel vecteur en présence de courant peut s'écrire comme  $\mathbf{A}(\vec{r}) = \nabla \chi(\mathbf{r})$ . Attention, la fonction  $\chi$  n'est pas la même pour les deux zones !

faire le changement

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0 \longrightarrow \mathbf{A}_I(\mathbf{r}) = \nabla \chi_I(\mathbf{r}), \quad (1.71)$$

ce qui correspond à un simple changement de jauge. Ce dernier doit s'accompagner d'une modification de la fonction d'onde [c.f. Eq. (1.65)]

$$\psi_g^{(0)}(\mathbf{r}) \longrightarrow \psi_g(\mathbf{r}) = \exp[iq\chi_I(\mathbf{r})/\hbar] \psi_g^{(0)}(\mathbf{r}). \quad (1.72)$$

De la même façon, le branchement du courant dans le solénoïde revient à changer l'onde  $\psi_d$  de la manière suivante :

$$\psi_d^{(0)}(\mathbf{r}) \longrightarrow \psi_d(\mathbf{r}) = \exp[iq\chi_{II}(\mathbf{r})/\hbar] \psi_d^{(0)}(\mathbf{r}). \quad (1.73)$$

Prenons la convention  $\chi_I(\mathbf{0}) = \chi_{II}(\mathbf{0}) = 0$ . L'interférence des ondes de matière en un point de l'écran  $\mathbf{r}$  fait intervenir

$$\psi_d^*(\mathbf{r}) \psi_g(\mathbf{r}) = \exp([iq(\chi_I(\mathbf{r}) - \chi_{II}(\mathbf{r}))/\hbar]) \psi_d^{(0)*}(\mathbf{r}) \psi_g^{(0)}(\mathbf{r}), \quad (1.74)$$

et l'argument du préfacteur peut se réécrire

$$\Phi = \chi_I(\mathbf{r}) - \chi_{II}(\mathbf{r}) = \int_{0, \mathcal{C}_I}^{\mathbf{r}} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} - \int_{0, \mathcal{C}_{II}}^{\mathbf{r}} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}, \quad (1.75)$$

où  $\mathcal{C}_I$  et  $\mathcal{C}_{II}$  sont deux chemins quelconques allant de 0 à  $\mathbf{r}$  et respectivement situés à l'intérieur des régions I et II. Introduisons un chemin fermé  $\mathcal{C}$  allant

de 0 à  $\mathbf{r}$  par la région I et revenant de  $\mathbf{r}$  à 0 par la région II ; ce chemin fait donc un tour du solénoïde et on a

$$\Phi = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \iint \mathbf{u}_z \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}') d^2r' \quad (1.76)$$

ce qui montre que  $\Phi$  n'est autre que le flux de  $\mathbf{B}$  à travers le solénoïde. La phase relative des deux ondes de matière arrivant sur l'écran fait donc intervenir ce flux, alors même que les particules ne pénètrent pas dans la région où règne le champ ! Notons que la phase  $q\Phi/\hbar$  peut être qualifiée de *topologique* car elle reste la même quand on déforme continûment le contour  $\mathcal{C}$ , pourvu que celui-ci ne traverse pas le solénoïde.

## 4-2 Argument fondé sur l'intégrale de chemin

Dans ce paragraphe, nous allons retrouver le résultat de Aharonov et Bohm par une méthode légèrement différente, ne faisant pas appel aux deux potentiels vecteurs  $\mathbf{A}_I$  et  $\mathbf{A}_{II}$ , mais utilisant le lagrangien d'interaction entre la particule chargée et le champ via le formalisme de l'intégrale de chemin (Feynman & Hibbs 1965).

Dans ce formalisme, on calcule le propagateur donnant l'amplitude de probabilité pour qu'une particule issue de  $\mathbf{0}$  à l'instant  $t_1$  atteigne le point  $\mathbf{r}$  de l'écran à l'instant  $t_2$ . Ce propagateur est donné par la somme des  $e^{iS_{\Gamma}/\hbar}$ , où  $S_{\Gamma}$  est l'action associée à un chemin donné reliant de  $(\mathbf{0}, t_1)$  à  $(\mathbf{r}, t_2)$

$$K(\mathbf{0}, t_1; \mathbf{r}, t_2) \propto \sum_{\text{chemins } \Gamma} \exp(iS_{\Gamma}/\hbar), \quad S_{\Gamma} = \int_{t_1}^{t_2} L[\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t), t] dt. \quad (1.77)$$

Les lagrangiens en absence et en présence de champ magnétique sont respectivement

$$L^{(0)}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) \quad \text{et} \quad L^{(0)}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) + q\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}), \quad (1.78)$$

où l'on a inclus dans  $L^{(0)}$  le potentiel  $V(\mathbf{r})$  servant à guider la particule de part et d'autre du solénoïde. On remarque alors que le terme additionnel dans l'action d'un chemin donné

$$q \int_{t_1}^{t_2} \dot{\mathbf{r}}(t) \cdot \mathbf{A}[\mathbf{r}(t)] dt = q \int_{\mathbf{0}, \Gamma}^{\mathbf{r}} \mathbf{A}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' \quad (1.79)$$

prend la même valeur  $\delta S_I(\mathbf{r})$  pour tous les chemins  $\text{ff}_{\text{I}}$  restreints à la zone I, et une autre valeur  $\delta S_{II}(\mathbf{r})$  pour tous les chemins  $\text{ff}_{\text{II}}$  restreints à la zone II [c.f. (1.68) et (1.69)].

Ce résultat remarquable permet d'évaluer la modification du signal d'interférence lié au branchement du courant dans le solénoïde, même s'il est *a priori* très difficile de calculer le propagateur  $K$  en absence de courant. Pour cela, négligeons la contribution des chemins « exotiques » faisant un ou plusieurs tours complets du solénoïde en allant de la source à l'écran. En absence de courant, on peut alors écrire le propagateur de  $(\mathbf{0}, t_1)$  à  $(\mathbf{r}, t_2)$  comme la somme  $K(\mathbf{r}) \approx K_I(\mathbf{r}) + K_{II}(\mathbf{r})$  des contributions passant à gauche ou à droite du solénoïde. En présence du courant, ce propagateur est modifié et devient

$$K(\mathbf{r}) \approx K_I(\mathbf{r}) + K_{II}(\mathbf{r}) \quad \longrightarrow \quad K_I(\mathbf{r}) e^{i\delta S_I(\mathbf{r})/\hbar} + K_{II}(\mathbf{r}) e^{i\delta S_{II}(\mathbf{r})/\hbar} \quad (1.80)$$

La modification de la phase relative entre  $K_I$  et  $K_{II}$  due au courant est donc

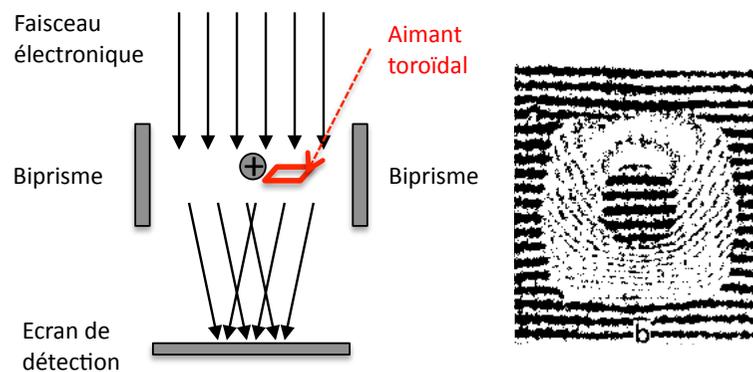
$$\begin{aligned} \frac{1}{\hbar} (\delta S_I(\mathbf{r}) - \delta S_{II}(\mathbf{r})) &= \frac{q}{\hbar} \left( \int_{\mathbf{0}, I}^{\mathbf{r}} \mathbf{A}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' - \int_{\mathbf{0}, II}^{\mathbf{r}} \mathbf{A}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' \right) \\ &= \frac{q}{\hbar} \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{A}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' = q\Phi/\hbar, \end{aligned} \quad (1.81)$$

où  $\mathcal{C}$  est un circuit fermé encerclant le solénoïde. On retrouve bien le résultat du paragraphe précédent.

Nous avons donc développé deux lignes de raisonnement pour trouver le déphasage dans une expérience de type Aharonov-Bohm :

1. On peut considérer des domaines de l'espace (*patches*) sur lesquels on définit des potentiels vecteurs  $A_I(\mathbf{r})$ ,  $A_{II}(\mathbf{r})$ , ..., et on recolle ces morceaux (i) au point  $\mathbf{0}$  en posant  $\chi_I(\mathbf{0}) = \chi_{II}(\mathbf{0}) = 0$  et (ii) au point  $\mathbf{r}$ , le déphasage recherché apparaissant lors de ce deuxième recollement.
2. On peut tirer parti du fait que l'on connaît pour cette géométrie le potentiel vecteur dans tout l'espace et on utilise alors le lagrangien d'interaction particule-champ pour calculer le déphasage.

Nous verrons un peu plus loin, dans le paragraphe consacré aux monopoles magnétiques, que l'on n'a pas toujours le choix entre ces deux possibilités et que la première méthode, celle du recollement entre deux ou plusieurs zones, est parfois incontournable.



**FIGURE 1.4.** Gauche : expérience de biprisme (électrostatique) de Fresnel menée avec un faisceau d'électrons. Un aimant torique est placé dans une des voies de l'interféromètre. Droite : figure d'interférence obtenue avec l'aimant torique. Le déplacement des franges entre les particules passées à l'intérieur du tore et celles passées à l'extérieur est la signature de l'effet Aharonov-Bohm (figure tirée de Tonomura et al. 1982).

### 4-3 Mise en évidence expérimentale

Dès la publication de l'article de Aharonov et Bohm, des vérifications expérimentales de cet effet ont été mises en œuvre [voir par exemple Chambers (1960)]. Les résultats de ces expériences ont fait l'objet de débats, issus de la difficulté d'estimer quantitativement les effets de bords : il faut s'assurer que la force de Lorentz due aux champs magnétiques de fuite joue effectivement un rôle négligeable. Dans une série d'expériences menées dans les laboratoires d'Hitachi entre 1982 et 1986, A. Tonomura et son équipe ont adopté une géométrie permettant de bien maîtriser ces effets de bords (Tonomura et al. 1982; Tonomura et al. 1986). Leur solénoïde n'est pas rectiligne comme dans l'expérience de pensée de Aharonov et Bohm, mais toroïdal, ce qui permet de minimiser les champs de fuite.

Les expériences de Tonomura utilisent un faisceau collimaté d'électrons, qui est dirigé sur un écran de détection après être passé à travers un bi-prisme de Fresnel (Tonomura 1987). Une version très schématisée est représentée sur la figure 1.4. En absence de perturbation, ceci conduit à des

franges d'interférences rectilignes. Dans l'expérience de 1982, Tonomura *et al.* ont disposé sur un des deux chemins un aimant toroïdal de Permalloy, de forme carrée, avec des côtés extérieurs de 3 microns et intérieurs de 1 micron. Compte tenu des propriétés magnétiques du Permalloy, le déphasage attendu entre une trajectoire passant à l'extérieur du tore et une autre passant à l'intérieur correspond à une différence de chemin de  $6\lambda$ , où la longueur d'onde  $\lambda$  des électrons vaut  $\lambda = 0.03$  Angströms pour une tension d'accélération des électrons de 150 kV. L'expérience confirme quantitativement ce déphasage, avec une différence de phase mesurée de  $5.5\lambda$  (figure 1.4).

Cette expérience a été raffinée en 1985, en déposant un autre matériau (niobium) à la surface du tore en Permalloy. Quand on abaisse suffisamment la température, le niobium devient supraconducteur, ce qui a pour effet d'écranter le champ magnétique du permalloy. La quantification du flux dans une boucle de supraconducteur entraîne que le déphasage entre trajectoires intérieures ou extérieures au tore ne peut plus prendre que les valeurs 0 ou  $\pi$  (modulo  $2\pi$ ). Cet effet de quantification du flux magnétique a bien été mis en évidence dans les interférogrammes produits par ce biprisme de Fresnel (Tonomura et al. 1986).

## 5 Monopole magnétique et physique quantique

Nous terminons ce chapitre avec une question soulevée par Dirac, portant sur la conséquence de l'existence éventuelle de monopoles magnétiques. Rappelons qu'à ce jour, aucun monopole n'a été observé; toutefois, Dirac a remarqué qu'il suffirait qu'un seul monopole existe pour que, dans le formalisme quantique, la charge électrique soit quantifiée (ce qui semble être le cas expérimentalement) (Dirac 1931; Dirac 1948). Dans ce qui suit, nous allons esquisser brièvement le raisonnement de Dirac, en suivant d'assez près le traitement de Sakurai & Napolitano (2011). Nous terminerons par la description d'une expérience récente, simulant la création d'un monopole magnétique dans un condensat de Bose-Einstein spinoriel.

### 5-1 Quantification de la charge électrique

Supposons qu'un monopole magnétique de charge magnétique  $q_m$  soit présent et positionné à l'origine des coordonnées, créant le champ

$$\mathbf{B}_m = \frac{q_m}{4\pi r^2} \mathbf{u}_r. \quad (1.82)$$

On va s'intéresser à la fonction d'onde d'une autre particule de charge électrique  $q_e$  en mouvement autour du monopole, un électron par exemple.

Remarquons pour commencer qu'il n'y a pas de potentiel vecteur  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  défini sur tout l'espace sauf au point du monopole, qui permettrait de retrouver  $\mathbf{B}_m$  via  $\mathbf{B}_m = \nabla \times \mathbf{A}$ . En effet, on trouve pour une sphère  $S$  centrée sur l'origine

$$\iint_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} \, d^2r = q_m, \quad (1.83)$$

alors que le flux d'un rotationnel à travers une surface fermée est nul.

On pourrait légitimement craindre que notre formalisme lagrangien ou hamiltonien, fondé sur l'existence du potentiel vecteur, devienne inopérant. Toutefois, on peut « sauver » ce formalisme en tirant parti du fait que l'on n'a pas vraiment besoin de disposer d'une version unique du potentiel vecteur sur l'ensemble de l'espace. On pourra continuer à utiliser ce formalisme si on arrive (i) à paver l'espace de zones où un type de potentiel vecteur est bien défini et (ii) à recoller ces zones entre elles. C'est en fait une technique que nous avons déjà présentée pour étudier l'effet Aharonov-Bohm. Ici, nous allons découper l'espace en deux zones notées I et II, et définir un potentiel vecteur  $A_I(\mathbf{r})$  et  $A_{II}(\mathbf{r})$  sur chaque zone. C'est du recollage des fonctions d'onde associées à  $A_I(\mathbf{r})$  et  $A_{II}(\mathbf{r})$  que viendra la condition de quantification de la charge  $q_e$ .

Un choix possible pour les potentiels vecteurs  $A_I(\mathbf{r})$  et  $A_{II}(\mathbf{r})$  a déjà été donné plus haut. Rappelons-le ici :

$$\mathbf{A}_I(\mathbf{r}) = \frac{q_m}{4\pi} \frac{1 - \cos \theta}{r \sin \theta} \mathbf{u}_\varphi, \quad \mathbf{A}_{II}(\mathbf{r}) = -\frac{q_m}{4\pi} \frac{1 + \cos \theta}{r \sin \theta} \mathbf{u}_\varphi. \quad (1.84)$$

On sait que  $A_I$  ne doit pas être utilisé au voisinage du demi-axe  $z < 0$ , car il donne naissance à cet endroit à une corde de Dirac allant de  $z = 0$  à  $z = -\infty$ . De même  $A_{II}$  ne doit pas être utilisé au voisinage du demi-axe

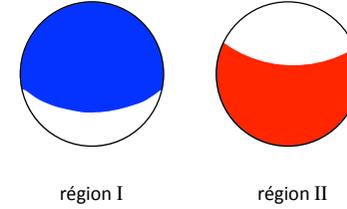


FIGURE 1.5. Représentation graphique des régions I et II, définies ici par leurs angles polaires en coordonnées sphériques.

$z > 0$ , pour la même raison (corde s'étendant de  $z = 0$  à  $z = +\infty$ ). Pour fixer les idées, prenons donc les régions suivantes (voir figure 1.5)

- La région I est définie comme l'ensemble des points  $\mathbf{r}$  de l'espace, de coordonnées sphériques  $0 \leq \theta < 3\pi/4$  et  $r \neq 0$ .
- La région II est définie comme l'ensemble des points  $\mathbf{r}$  de l'espace, de coordonnées sphériques  $\pi/4 < \theta \leq \pi$  et  $r \neq 0$ .

Dans la zone de recouvrement  $I \cap II$ , c'est-à-dire la zone autour de l'équateur correspondant à  $\pi/4 < \theta < 3\pi/4$ , les deux potentiels vecteurs décrivent le même champ magnétique et sont donc reliés par une transformation de jauge<sup>7</sup>. En l'occurrence, la transformation de jauge faisant passer de  $A_I(\mathbf{r})$  à  $A_{II}(\mathbf{r})$  est simple :

$$\mathbf{A}_{II}(\mathbf{r}) - \mathbf{A}_I(\mathbf{r}) = -\frac{q_m}{2\pi} \frac{1}{r \sin \theta} \mathbf{u}_\varphi = \nabla \chi(\mathbf{r}) \quad (1.85)$$

$$\text{avec } \chi(\mathbf{r}) = \chi_0 - \frac{q_m}{2\pi} \varphi, \quad \mathbf{r} \in I \cap II, \quad (1.86)$$

Considérons maintenant une particule quantique et notons respectivement  $\psi_I$  et  $\psi_{II}$  les fonctions d'ondes correspondant au choix de jauge  $A_I(\mathbf{r})$  et  $A_{II}(\mathbf{r})$ . Dans la zone  $I \cap II$ , où l'on passe d'une jauge à l'autre par l'intermédiaire de (1.86), les deux fonctions d'onde  $\psi_I$  et  $\psi_{II}$  doivent elles aussi être reliées par cette transformation de jauge

$$\psi_{II}(\mathbf{r}) = e^{iq_e \chi(\mathbf{r})/\hbar} \psi_I(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in I \cap II, \quad (1.87)$$

7. Ce n'est pas vrai pour l'espace entier, car  $A_I(\mathbf{r})$  et  $A_{II}(\mathbf{r})$  correspondent à des champs différents sur l'axe  $z$ .

Il est alors simple de conclure : il faut d'après les postulats de la mécanique quantique que les fonctions d'onde  $\psi_I(\mathbf{r})$  et  $\psi_{II}(\mathbf{r})$  soient monovaluées<sup>8</sup>. Ceci impose en particulier qu'elles ne changent pas de valeur quand on fait le changement de coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi) \rightarrow (r, \theta, \varphi + 2\pi)$  :

$$\psi_{I,II}(r, \theta, \varphi + 2\pi) = \psi_{I,II}(r, \theta, \varphi) \quad (1.88)$$

Ceci impose que  $e^{iq_e\chi(\mathbf{r})/\hbar}$  ne change pas non plus quand  $\varphi \rightarrow \varphi + 2\pi$ , soit

$$\exp\left(i\frac{q_e q_m}{\hbar}\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad q_e q_m = n\hbar, \quad (1.89)$$

où  $n$  est un entier quelconque et  $\hbar = 2\pi\hbar$ . C'est la quantification annoncée<sup>9</sup> !

On pourra trouver dans le livre *Classical Electrodynamics* de Jackson une approche différente du problème<sup>10</sup>, où on calcule d'abord le moment cinétique du champ électromagnétique créé par la superposition de la charge électrique  $q_e$  et de la charge magnétique  $q_m$ , puis on pose que ce moment cinétique doit être quantifié en multiples de  $\hbar/2$ .

## 5-2 Simulation d'un monopole dans un condensat

Au cours de ces dernières années, on a mis en évidence dans plusieurs systèmes de matière condensée des structures du paramètre d'ordre qui rappellent celle d'un monopole magnétique. Il ne s'agit bien sûr que d'une analogie : ces monopoles ne génèrent pas de champ magnétique réel et n'impliquent en rien la quantification de la charge électrique pressentie par Dirac. Néanmoins, leur étude est intéressante car elle révèle la topologie caractéristique des monopoles, avec la corde de Dirac qui leur est attachée. Les premières de ces expériences ont été menées dans des matériaux de type *glace de spin* (*spin ice*) (Castelnovo et al. 2008; Morris et al. 2009; Fennell et al. 2009). Nous allons décrire ici une expérience très récente menée aux USA (Amherst College) par D. S. Hall et son équipe sur

8. Rappelons que c'est ce postulat qui permet de prouver que les moments cinétiques orbitaux sont entiers, et pas demi-entiers comme la théorie générale du moment cinétique aurait pu le laisser supposer.

9. Il est intéressant d'étudier l'effet Aharonov-Bohm pour les demi-solénoïdes susceptibles de créer les potentiels vecteur  $\mathbf{A}_I$  et  $\mathbf{A}_{II}$ , si la quantification (1.89) est vérifiée.

10. Nos notations se raccordent à celles de Jackson en posant  $q_m = 4\pi g$ ,  $q_e = e/c$ .

des atomes froids. Ces chercheurs ont mis en évidence une « texture de spin » dans un condensat de Bose-Einstein, qui conduit pour la fonction d'onde de ce condensat à une équation d'évolution de type Schrödinger en présence d'un monopole (Ray et al. 2014).

Nous n'allons pas développer ici tout le formalisme nécessaire pour analyser quantitativement l'expérience de Ray et al. (2014), mais nous en indiquons les quelques éléments indispensables pour comprendre comment un champ magnétique artificiel monopolaire peut émerger dans le contexte d'un condensat spineur. Ces éléments sont d'ailleurs voisins des développements que nous rencontrerons plus tard dans ce cours, quand nous étudierons la génération de champs artificiels à partir de la phase de Berry.

Pour présenter le contexte théorique, nous allons nous inspirer d'un article pionnier de Ho & Shenoy (1996), qui ont montré comment le spin non nul des atomes alcalins utilisés dans les expériences de condensats gazeux permettait d'envisager une physique plus riche que celle d'un condensat scalaire, comme l'hélium superfluide. Considérons un condensat atomique formé d'atomes de spin 1. Nous supposons que tous les atomes sont dans le même état qui s'écrit sous forme d'une fonction d'onde macroscopique

$$\Psi(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r}) \begin{pmatrix} \zeta_{+1}(\mathbf{r}) \\ \zeta_0(\mathbf{r}) \\ \zeta_{-1}(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \sum_{m=-1}^{+1} |\zeta_m(\mathbf{r})|^2 = 1. \quad (1.90)$$

La fonction d'onde scalaire  $\psi(\mathbf{r})$  représente l'amplitude de probabilité pour trouver un atome au point  $\mathbf{r}$ , indépendamment de son état de spin ; le spin normalisé<sup>11</sup>  $|\zeta\rangle$  donne la répartition de la population entre les trois états de spin. Notons que l'écriture (1.90) n'est pas unique, car on peut multiplier  $\psi$  par  $e^{+i\chi(\mathbf{r})}$  et  $|\zeta\rangle$  par  $e^{-i\chi(\mathbf{r})}$ , l'état total  $\Psi$  restant inchangé.

Considérons l'équation d'évolution de  $\Psi(\mathbf{r}, t)$ , en nous limitant à l'énergie cinétique, qui est le terme pertinent pour faire émerger le champ de jauge requis. Partons de

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2M} \Delta \Psi + \dots \quad (1.91)$$

11. On note ici avec un ket les vecteur de l'espace de Hilbert du spin et en caractère gras les vecteurs de l'espace euclidien  $R^3$ .

La dérivée par rapport au temps du membre de gauche de (1.91) et le laplacien du membre de droite donnent respectivement

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} &= i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} |\zeta\rangle + i\hbar \psi \frac{\partial |\zeta\rangle}{\partial t} \\ \Delta \Psi &= \Delta(\psi |\zeta\rangle) = (\Delta \psi) |\zeta\rangle + 2(\nabla \psi) \cdot (\nabla |\zeta\rangle) + \psi (\Delta |\zeta\rangle). \end{aligned}$$

Multiplions maintenant (1.91) par le bra (vecteur ligne)

$$\langle \zeta | = (\zeta_{+1}^*(\mathbf{r}), \zeta_0^*(\mathbf{r}), \zeta_{-1}^*(\mathbf{r})). \quad (1.92)$$

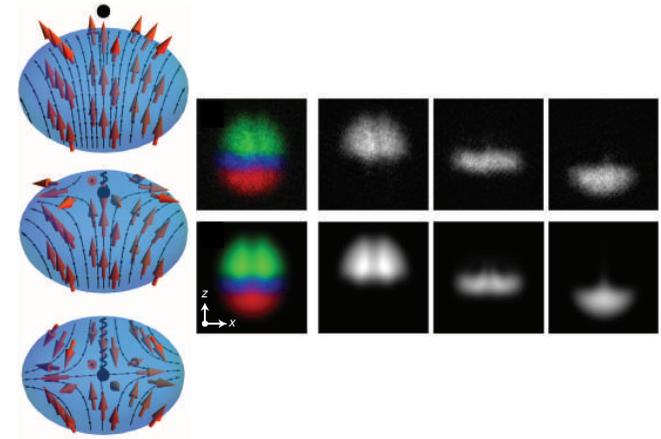
En utilisant  $\langle \zeta | \zeta \rangle = 1$  [cf. (1.90)], on arrive à une équation d'évolution pour  $\psi$  qui se met sous la forme

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2M} \Delta \psi + i\frac{\hbar}{M} \nabla \psi \cdot \mathcal{A} + \dots \quad \text{avec} \quad \mathcal{A}(\mathbf{r}) = i\hbar \langle \zeta | (\nabla |\zeta\rangle), \quad (1.93)$$

où on a omis les termes proportionnels à  $\psi$  elle-même. On voit donc apparaître dans l'équation d'évolution de  $\psi$  un terme en  $\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathcal{A}$ , caractéristique d'un potentiel vecteur : c'est exactement ce type de terme qu'il s'agit de créer si on veut générer un champ de jauge artificiel. Ce terme s'accompagne d'autres contributions que nous n'avons pas écrites, plus standards, correspondant à un potentiel scalaire agissant sur les particules. Nous reviendrons sur ces contributions dans les prochains cours via un formalisme plus général.

À ce stade, l'écriture d'une équation du mouvement pour  $\psi$  peut apparaître comme quelque peu artificielle, puisqu'elle ne représente qu'une partie de l'évolution des degrés de liberté de l'état  $\Psi$ . Il faut donc en principe la compléter par une équation d'évolution pour  $|\zeta\rangle$  et la dynamique est alors complexe à analyser. Il existe toutefois une classe de problèmes où cette deuxième étape n'est pas nécessaire : il suffit pour cela de « geler » le degré de liberté de spin, en préparant le système dans un état de spin donné et en s'assurant que les atomes vont suivre adiabatiquement cet état si on varie le champ magnétique extérieur appliqué au système.

C'est ce qui a été fait dans l'expérience de Ray et al. (2014). Les auteurs sont partis d'un condensat initialement dans l'état  $|F=1, m_z=+1\rangle$  dans un champ magnétique homogène et parallèle à l'axe  $z$ . Ils ont ensuite ajouté une composante non homogène à ce champ, correspondant à un champ

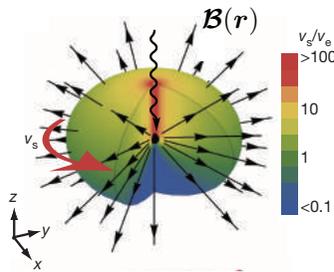


**FIGURE 1.6.** À gauche : entrée du zéro de champ magnétique (le point noir) dans un condensat, obtenu en variant le champ  $B_0$  dans l'équation (1.94). À droite : texture de spin mesurée (haut) et calculée (bas) quand le zéro du champ est amené jusqu'au centre du condensat. Vert :  $m_z = -1$ , bleu :  $m_z = 0$ , rouge :  $m_z = +1$ . On distingue le sillon créé par le passage du zéro du champ dans les composantes  $m_z = -1$  et  $m_z = 0$  (Ray et al. 2014).

quadrupolaire, pour obtenir un champ total de la forme

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} b'x \\ b'y \\ -2b'z + B_0(t) \end{pmatrix}. \quad (1.94)$$

Ce champ s'annule au point  $x = y = 0, z = B_0/2b'$ . En diminuant lentement  $B_0(t)$ , les auteurs ont fait bouger ce zéro du champ magnétique le long d'une ligne verticale, arrivant par le dessus du condensat pour l'amener jusqu'en son centre (figure 1.6, à gauche). Ceci provoque un basculement adiabatique des spins dans la partie supérieure du condensat, où les atomes se retrouvent finalement dans l'état  $|F=1, m_z=-1\rangle$ . Dans la partie centrale, les atomes sont majoritairement dans l'état  $|F=1, m_z=0\rangle$  et ils sont restés essentiellement dans l'état  $|F=1, m_z=+1\rangle$  dans la partie inférieure. Nous avons reproduit sur la droite de la figure 1.6 quelques résultats de Ray et al. (2014), montrant cette répartition spatiale des compo-



**FIGURE 1.7.** Structure du champ magnétique artificiel  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ , où le potentiel vecteur artificiel  $\mathbf{A}$  se déduit de la texture de spin par l'intermédiaire de (1.93) (Ray et al. 2014).

santes de spin dans le condensat une fois le zéro du champ placé au centre du condensat. On y voit notamment le sillon créé par le passage du zéro du champ dans la partie supérieure du condensat, au sein des composantes de spin  $m_z = -1$  et  $m_z = 0$ .

Une fois le zéro du champ arrivé au centre du condensat, on peut montrer que la texture de spin  $|\zeta\rangle$  du condensat conduit à un potentiel vecteur artificiel  $i\hbar \langle \zeta | (\nabla | \zeta \rangle)$  identique<sup>12</sup> à celui envisagé pour créer un monopole :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \propto \frac{1 + \cos \theta}{r \sin \theta} \mathbf{u}_\varphi. \quad (1.95)$$

On trouve donc une structure de champ monopolaire pour  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  (figure 1.7). Physiquement, ces champs de vecteurs  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  et  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  sont reliés au champ de vitesse superfluide et à sa vorticité (Ho & Shenoy 1996). L'évolution de la fonction scalaire  $\psi$  est en principe la même que celle d'une charge électrique quantique placée dans le champ d'un monopole magnétique. En pratique, la dynamique à long terme est compliquée par le fait que le spin des atomes risque de ne pas suivre adiabatement le mouvement de leur centre de masse dans les régions de très faible champ.

12. après homothétie sur la coordonnée  $z$ .

## Références

- Aharonov, Y. & D. Bohm (1959), « Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory », in *Phys. Rev.* 115.3, pp. 485–491.
- Aharonov, Y. & A. Casher (1984), « Topological Quantum Effects for Neutral Particles », in *Phys. Rev. Lett.* 53.4, pp. 319–321.
- Castelnovo, C., R. Moessner & S. L. Sondhi (2008), « Magnetic monopoles in spin ice », in *Nature* 451, p. 42.
- Chambers, R. G. (1960), « Shift of an Electron Interference Pattern by Enclosed Magnetic Flux », in *Phys. Rev. Lett.* 5 (1), pp. 3–5.
- Cohen-Tannoudji, C., B. Diu & F. Lalo  (1973), *Mécanique Quantique*, Hermann.
- Dirac, P. A. M. (1931), « Quantised singularities in the electromagnetic field. », in *Proc. Roy. Soc. London* A133, p. 60.
- (1948), « The Theory of Magnetic Poles », in *Physical Review* 74.817.
- (1958), *The Principles of Quantum Mechanics*, Oxford University Press.
- Ehrenberg, W. & R. E. Siday (1949), « The Refractive Index in Electron Optics and the Principles of Dynamics », in *Proceedings of the Physical Society Series B* 62, pp. 8–21.
- Fennell, T., P. P. Deen, A. R. Wildes, K. Schmalzl, D. Prabhakaran, A. T. Boothroyd, R. J. Aldus, D. F. McMorrow & S. T. Bramwell (2009), « Magnetic Coulomb Phase in the Spin Ice  $\text{Ho}_2\text{Ti}_2\text{O}_7$  », in *Science* 326, p. 415.
- Feynman, R.P. & A.R. Hibbs (1965), *Quantum Mechanics and Path Integrals*, McGraw Hill.
- Ho, T. L. & V. B. Shenoy (1996), « Local Spin-Gauge Symmetry of the Bose-Einstein Condensates in Atomic Gases », in *Phys. Rev. Lett.* 77, p. 2595.
- Jackson, J. D. (1998), *Classical Electrodynamics*, New York: John Wiley.
- Morris, D. J. P., D. A. Tennant, et al. (2009), « Dirac Strings and Magnetic Monopoles in the Spin Ice  $\text{Dy}_2\text{Ti}_2\text{O}_7$  », in *Science* 326, p. 411.
- Ray, M. W., E. Ruokokoski, S. Kandel, M. M tt nen & D. S. Hall (2014), « Observation of Dirac monopoles in a synthetic magnetic field », in *Nature* 505, p. 657.
- Sakurai, J. J. & J. Napolitano (2011), *Modern Quantum Mechanics, Second Edition*, Addison-Wesley.
- Tonomura, Akira (1987), « Applications of electron holography », in *Rev. Mod. Phys.* 59 (3), pp. 639–669.
- Tonomura, Akira, Tsuyoshi Matsuda, Ryo Suzuki, Akira Fukuhara, Nobuyuki Osakabe, Hiroshi Umezaki, Junji Endo, Kohsei Shinagawa, Yu-

taka Sugita & Hideo Fujiwara (1982), « Observation of Aharonov-Bohm Effect by Electron Holography », in *Phys. Rev. Lett.* 48.21, pp. 1443–1446.  
Tonomura, Akira, Nobuyuki Osakabe, Tsuyoshi Matsuda, Takeshi Kawasaki, Junji Endo, Shinichiro Yano & Hiroji Yamada (1986), « Evidence for Aharonov-Bohm effect with magnetic field completely shielded from electron wave », in *Phys. Rev. Lett.* 56 (8), pp. 792–795.

# Chapitre 2

## Mouvement d'une particule dans un champ magnétique uniforme : les niveaux de Landau

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Le mouvement cyclotron classique . . . . .</b>	<b>2</b>
1-1	Mouvement circulaire uniforme . . . . .	2
1-2	Le courant de Hall . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Le spectre d'énergie en physique quantique . . . . .</b>	<b>3</b>
2-1	Le spectre obtenu par la méthode algébrique . . . . .	3
2-2	États et énergies propres en jauge symétrique . . . . .	4
2-3	Le niveau de Landau fondamental (LLL) . . . . .	6
2-4	Dégénérescence du LLL. . . . .	8
<b>3</b>	<b>Jauge de Landau et courant de probabilité . . . . .</b>	<b>8</b>
3-1	Séparation de l'hamiltonien en jauge de Landau . . . . .	8
3-2	Le spectre de Landau retrouvé . . . . .	9
3-3	Courant de probabilité dans un état de Landau . . . . .	10
3-4	L'originalité de la structure en niveaux de Landau . . . . .	10
<b>4</b>	<b>États de bord et applications . . . . .</b>	<b>11</b>
4-1	Modélisation d'un échantillon de taille finie . . . . .	11
4-2	Les états de bord . . . . .	12
4-3	Le courant de bord pour des fermions à $T = 0$ . . . . .	13
4-4	Circuiterie à effet Hall . . . . .	15
4-5	Un interféromètre de Mach-Zender électronique . . . . .	16

4-6	États de bords avec des atomes froids? . . . . .	17
<b>5</b>	<b>Références . . . . .</b>	<b>18</b>

---

Ce chapitre est consacré à un problème essentiel dans l'étude du magnétisme, le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme. Après avoir rappelé brièvement les résultats obtenus en physique classique (dynamique newtonienne), nous passerons au cas quantique, que nous traiterons de plusieurs manières correspondant à différents choix de jauge. Nous dégagerons en particulier la notion de niveaux de Landau pour les sous-espaces propres de l'hamiltonien ; nous verrons que ces niveaux ont une dégénérescence macroscopique, qui croît linéairement avec l'aire de l'échantillon. Nous nous intéresserons tout particulièrement au niveau de Landau fondamental (LLL pour *Lowest Landau Level*), pour lequel nous donnerons deux expressions explicites pour une base d'états propres.

La dernière partie du chapitre sera consacrée à quelques effets physiques particulièrement importants qui apparaîtront comme une conséquence directe de cette quantification en niveaux de Landau. Nous dégagerons en particulier la notion d'état de bord, qui joue un rôle central dans la physique de l'effet Hall quantique. Nous illustrerons cette notion en décrivant une expérience d'interférométrie entre deux circuits électroniques

menée par Ji et al. (2003). Enfin, nous présenterons une proposition d'expérience permettant de mettre en évidence ces états de bord pour des atomes froids confinés dans un réseau optique (Goldman et al. 2013).

## 1 Le mouvement cyclotron classique

### 1-1 Mouvement circulaire uniforme

Quand une particule de masse  $M$  et de charge  $q$ , décrite par la physique newtonienne, est plongée dans un champ magnétique, son mouvement s'analyse en résolvant l'équation fondamentale de la dynamique  $M\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_L$  où  $\mathbf{F}_L$  est la force de Lorentz [voir par exemple Jackson (1998), chapitre 12] :

$$\mathbf{F}_L = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (2.1)$$

Prenons le champ  $\mathbf{B}$  aligné avec l'axe  $z$ ,  $\mathbf{B} = B\mathbf{u}_z$ . Le mouvement selon l'axe  $z$  est alors un mouvement de translation uniforme  $\ddot{z} = 0$  et nous pouvons restreindre notre analyse au mouvement projeté dans le plan  $xy$ . Dans ce plan, l'équation du mouvement s'écrit :

$$M\dot{\mathbf{v}} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} : \quad \ddot{x} = \omega_c \dot{y}, \quad \ddot{y} = -\omega_c \dot{x}, \quad (2.2)$$

où on a introduit la *pulsation cyclotron*

$$\omega_c = \frac{qB}{M}. \quad (2.3)$$

Le système différentiel à deux équations (2.2) se résout simplement en

$$x(t) = X_0 + \frac{v_0}{\omega_c} \cos(\omega_c t), \quad y(t) = Y_0 + \frac{v_0}{\omega_c} \sin(\omega_c t), \quad (2.4)$$

ce qui correspond à un mouvement circulaire uniforme de pulsation  $\omega_c$ , parcouru dans le sens des aiguilles d'une montre si  $\omega_c > 0$ . Dans (2.4), l'origine des temps a été choisie à un instant où le vecteur vitesse est parallèle à l'axe  $y$ . Le centre  $(X_0, Y_0)$  de ce cercle est quelconque, et son rayon vaut

$$r_0 = v_0/\omega_c. \quad (2.5)$$

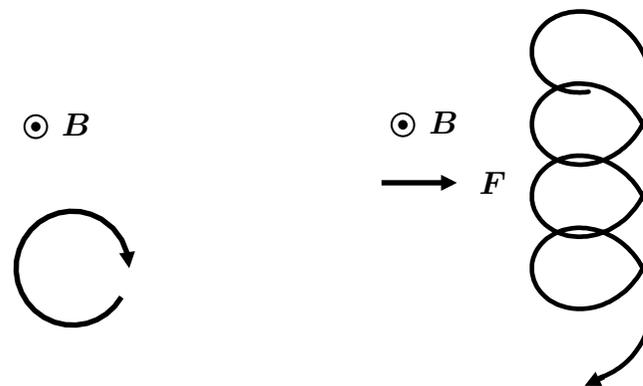


FIGURE 2.1. Gauche : orbite cyclotron dans un champ magnétique uniforme. Droite : mouvement de dérive le long de  $y$  en présence d'une force extérieure  $\mathbf{F}$  parallèle à l'axe  $x$ .

Cette relation se retrouve en égalant force de Lorentz et force centrifuge :  $qv_0B = Mv_0^2/r_0$ .

L'invariance par translation du problème est manifeste sur le résultat général (2.4) : pour une vitesse initiale donnée, les paramètres de la trajectoire circulaire (rayon et pulsation) seront les mêmes quelle que soit la position initiale dans le plan. On peut donc considérer que le fait d'appliquer un champ magnétique sur la particule revient à la localiser dans l'espace des phases associé au mouvement dans le plan  $xy$ , sa position et sa vitesse étant confinées dans une région centrée en  $(X_0, Y_0)$  et d'extension

$$[\Delta r \times \Delta p]^2 \sim [r_0 \times (Mv_0)]^2 \quad \text{avec} \quad r_0 = v_0/\omega_c. \quad (2.6)$$

Pour une vitesse initiale  $v_0$  donnée, cette région est d'autant plus faible que le champ magnétique  $B$  est grand. La mécanique quantique, avec sa contrainte liée à l'inégalité de Heisenberg  $\Delta r_i \Delta p_i \geq \hbar/2$  ( $i = x, y$ ), va venir modifier ce résultat simple.

## 1-2 Le courant de Hall

Supposons maintenant qu'une force uniforme  $\mathbf{F}$ , indépendante de la position et de la vitesse, vient s'ajouter à la force de Lorentz  $\mathbf{F}_L$ . Cette force peut par exemple être créée par un champ électrique uniforme. Pour simplifier les notations, prenons cette force parallèle à l'axe  $x$  :  $\mathbf{F} = F \mathbf{u}_x$ . Cette force ne change pas le caractère uniforme du mouvement selon  $z$  et l'équation du mouvement projetée sur le plan  $xy$  devient

$$M\ddot{x} = qB\dot{y} + F, \quad M\ddot{y} = -qB\dot{x}. \quad (2.7)$$

En absence de champ magnétique, l'effet de la force est bien sûr d'accélérer la particule le long de l'axe  $x$ . En présence de champ magnétique, la nature du mouvement change radicalement. La solution générale de l'équation du mouvement (2.7) est

$$x(t) = X_0 + \frac{v_0}{\omega_c} \cos(\omega_c t), \quad y(t) = Y_0 + \frac{v_0}{\omega_c} \sin(\omega_c t) + \frac{F}{qB} t. \quad (2.8)$$

Cette solution représentée en figure 2.1 correspond à la composition

- du mouvement circulaire uniforme correspondant au mouvement cyclotron trouvé en l'absence de force  $\mathbf{F}$ ,
- du mouvement de translation uniforme (mouvement de dérive) à vitesse  $\Leftrightarrow F/(qB)$ , dans la direction  $y$  *perpendiculaire* à la force  $\mathbf{F}$ .

Quand la force  $F$  est due à un champ électrique extérieur ( $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ ), ce mouvement de dérive est appelé *courant de Hall*.

## 2 Le spectre d'énergie en physique quantique

Avant de passer à la description quantitative du mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique, on peut utiliser les résultats classiques précédents en les associant à l'inégalité de Heisenberg pour prévoir les échelles de position et de vitesse du problème. Partons de la relation entre position et vitesse indiquée en (2.5),  $\omega_c r_0 = v_0$ ; en utilisant le fait que dans un état fondamental du mouvement quantique, on a en général

$$M \Delta x \Delta v \sim \hbar, \quad (2.9)$$

on en déduit les échelles de longueur et de vitesse pertinentes pour une orbite cyclotron en physique quantique :

$$\ell = \sqrt{\frac{\hbar}{M\omega_c}} = \sqrt{\frac{\hbar}{qB}}, \quad v_m = \sqrt{\frac{\hbar\omega_c}{M}}. \quad (2.10)$$

La longueur  $\ell$  est appelée *longueur magnétique*. Pour un électron libre<sup>1</sup> dans un champ magnétique de 1 Tesla, on trouve  $\omega_c/2\pi = 28$  GHz,  $\ell \approx 26$  nm et  $v_m \approx 4000$  m/s.

Il existe de multiples chemins pour passer au stade quantitatif et trouver les énergies et les états propres de l'hamiltonien d'une particule dans un champ  $\mathbf{B}$  uniforme :

$$\hat{H} = \frac{(\hat{\mathbf{p}} \Leftrightarrow q\mathbf{A}(\hat{\mathbf{r}}))^2}{2M}, \quad \text{avec } \nabla \times \mathbf{A} = B\mathbf{u}_z. \quad (2.11)$$

Une des raisons de cette grande variété de techniques réside dans l'invariance de jauge : des potentiels vecteurs  $\mathbf{A}$  *a priori* très différents (jauge de Landau ou jauge symétrique par exemple) peuvent donner lieu à des calculs eux aussi éloignés, même si ils conduisent au final au même spectre d'énergie et aux mêmes sous-espaces propres. Dans la mesure où nous aurons besoin de ces techniques pour décrire des situations plus complexes dans la suite du cours (en présence d'un potentiel extérieur par exemple), nous allons maintenant les passer en revue.

### 2-1 Le spectre obtenu par la méthode algébrique

Cette méthode permet de trouver le spectre de l'hamiltonien sans faire de choix de jauge particulier. Considérons pour commencer l'opérateur hermitien *quantité de mouvement* :

$$\hat{\Pi}_j = \hat{p}_j \Leftrightarrow qA_j(\hat{\mathbf{r}}), \quad j = x, y, \quad \hat{\mathbf{p}} = \Leftrightarrow \hbar \nabla, \quad (2.12)$$

avec lequel on peut réécrire l'hamiltonien

$$\hat{H} = \frac{1}{2M} \left( \hat{\Pi}_x^2 + \hat{\Pi}_y^2 \right) \quad (2.13)$$

1. Pour un électron dans la bande de conduction de GaAs, la masse  $M$  et donc la pulsation cyclotron  $\omega_c$  sont considérablement modifiées :  $M_b \approx 0.07 M$ . Pour une discussion détaillée, incluant les effets magnétiques de spin, voir par exemple Eisenstein (2005).

Contrairement à ce qui se passe pour les deux composantes  $x, y$  de l'opérateur position  $\hat{\mathbf{r}}$  ou de l'impulsion  $\hat{\mathbf{p}}$ , les deux composantes de l'opérateur  $\hat{\Pi}$  ne commutent pas :

$$[\hat{\Pi}_x, \hat{\Pi}_y] = i \hbar q B. \quad (2.14)$$

La recherche des états propres de  $(\hat{\Pi}_x^2 + \hat{\Pi}_y^2)/2M$ , sachant que le commutateur de ces deux opérateurs hermitiens est une constante, est un problème très similaire à celui de la diagonalisation de l'hamiltonien d'un oscillateur harmonique  $(\hat{P}^2 + \hat{X}^2)/2$  avec  $[\hat{X}, \hat{P}] = i$ . Nous allons donc utiliser une méthode similaire à celle développée par Dirac pour résoudre le problème de l'oscillateur harmonique.

Introduisons les deux opérateurs annihilation et création

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar q B}} (\hat{\Pi}_x + i \hat{\Pi}_y), \quad \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar q B}} (\hat{\Pi}_x - i \hat{\Pi}_y). \quad (2.15)$$

La relation de commutation

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 \quad (2.16)$$

et l'expression de l'hamiltonien

$$\hat{H} = \hbar \omega_c \left( \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) \quad (2.17)$$

sont identiques à celles obtenues pour les opérateurs d'un oscillateur harmonique de pulsation  $\omega_c$ . On en déduit que les valeurs propres de  $\hat{H}$  sont nécessairement de la forme

$$E_n = \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_c, \quad \text{avec } n \text{ entier positif ou nul.} \quad (2.18)$$

Ces niveaux d'énergie, régulièrement espacés de la quantité  $\hbar \omega_c$ , sont appelés *niveaux de Landau*.

Pour rechercher la forme des états propres, il faut choisir une jauge pour exprimer le potentiel vecteur, ce que nous ferons dans les paragraphes suivants. Notons d'ores et déjà que puisque nous étudions ici un problème bi-dimensionnel et qu'on trouve que les énergies sont repérées par un seul nombre quantique  $n$ , on peut s'attendre à ce que les niveaux d'énergies

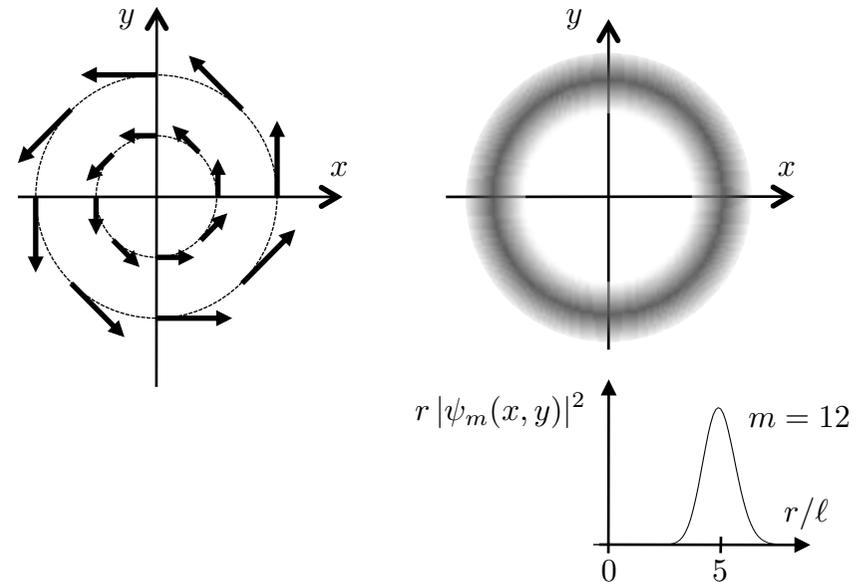


FIGURE 2.2. Gauche : représentation du potentiel vecteur en jauge symétrique. Droite : densité de probabilité pour une fonction propre de l'hamiltonien en jauge symétrique appartenant au LLL. La densité de probabilité  $r|\psi_m(x, y)|^2$  est maximale pour  $r_m = \sqrt{2m+1}\ell$ ; on a tracé ici cette densité de probabilité pour  $m = 12$ .

soient dégénérés. Nous verrons que c'est effectivement le cas, la dégénérescence étant en fait macroscopique pour chaque niveau  $E_n$  : le nombre d'états propres croît proportionnellement à la surface accessible à la particule dans le plan  $xy$ .

## 2-2 États et énergies propres en jauge symétrique

Nous prenons dans ce paragraphe la jauge symétrique (cf. figure 2.2)

$$A_x(\mathbf{r}) = \Leftrightarrow By/2, \quad A_y(\mathbf{r}) = Bx/2, \quad A_z(\mathbf{r}) = 0. \quad (2.19)$$

Notons que ce choix de jauge brise l'invariance par translation du problème, mais respecte l'invariance par rotation autour du centre. L'hamiltonien  $\hat{H}$  se développe alors pour donner :

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2}{2M} + \frac{1}{8}M\omega_c^2(\hat{x}^2 + \hat{y}^2) \Leftrightarrow \frac{\omega_c}{2}(\hat{x}\hat{p}_y \Leftrightarrow \hat{y}\hat{p}_x). \quad (2.20)$$

ce qui peut encore se mettre sous la forme

$$\hat{H} = \hat{H}_0 \Leftrightarrow \frac{\omega_c}{2} \hat{L}_z, \quad \text{avec} \quad \hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2M} + \frac{1}{8}M\omega_c^2 r^2, \quad \hat{L}_z = \hat{x}\hat{p}_y \Leftrightarrow \hat{y}\hat{p}_x. \quad (2.21)$$

Discutons d'abord séparément les deux composante de  $\hat{H}$ , c'est-à-dire  $\hat{H}_0$  et  $\hat{L}_z$ . L'hamiltonien  $\hat{H}_0$  décrit un oscillateur harmonique isotrope à deux dimensions, de pulsation  $\omega_c/2$ . On peut chercher une base d'états propres de  $\hat{H}_0$  en écrivant  $\hat{H}_0 = \hat{H}_{0,x} + \hat{H}_{0,y}$ , où  $\hat{H}_{0,j}$  est l'hamiltonien d'un oscillateur à une dimension selon la direction  $j = x, y$ . Une base d'états propres est alors obtenue en considérant les états  $|n_x, n_y\rangle$ , où on a déposé  $n_j$  quanta d'excitation selon la direction  $j$ , l'énergie associée étant :

$$\left(n_x + \frac{1}{2}\right) \frac{\hbar\omega_c}{2} + \left(n_y + \frac{1}{2}\right) \frac{\hbar\omega_c}{2} = (n_0 + 1) \frac{\hbar\omega_c}{2}, \quad n_0 = n_x + n_y. \quad (2.22)$$

En particulier :

- l'état fondamental  $|0, 0\rangle$  d'énergie  $\hbar\omega_c/2$  est non dégénéré ;
- le premier niveau excité d'énergie  $3\hbar\omega_c/2$  est de dégénérescence 2 et engendré par les deux états  $|1, 0\rangle$  et  $|0, 1\rangle$  ;
- le deuxième niveau excité d'énergie  $5\hbar\omega_c/2$  est de dégénérescence 3 et engendré par les trois états  $|2, 0\rangle$ ,  $|1, 1\rangle$  et  $|0, 2\rangle$ , etc.

Plus généralement, la dégénérescence du niveau  $n_0$  est  $n_0 + 1$  (voir figure 2.3, cadre du haut). La fonction d'onde associée à un état  $|n_x, n_y\rangle$  est  $P_{n_x}(x)e^{\in x^2/4\ell^2} P_{n_y}(y)e^{\in y^2/4\ell^2}$ , où les  $P_n$  sont les polynômes de Hermite (de degré  $n$ ).

L'opérateur  $\hat{L}_z$  est la composante selon  $z$  du moment cinétique orbital. Son expression en coordonnées polaires est simple

$$\hat{L}_z = \Leftrightarrow \hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (2.23)$$

et ses fonctions propres sont donc du type  $F(r) e^{im\varphi}$  où  $m$  est un entier relatif et  $F$  une fonction quelconque de la variable radiale. Notons que l'état fondamental de  $\hat{H}_0$ , de fonction d'onde  $e^{\in r^2/4\ell^2}$  est bien de cette forme avec  $m = 0$ .

Cherchons maintenant une base propre commune à  $\hat{H}_0$  et  $\hat{L}_z$ , qui constituera donc également une base propre de  $\hat{H}$ . On peut travailler par sous-espace propre de  $\hat{H}_0$  :

- Nous venons de noter que l'état fondamental  $e^{\in r^2/4\ell^2}$  est un état propre commun à  $\hat{H}_0$  et  $\hat{L}_z$ .
- Dans le premier niveau excité de  $\hat{H}_0$ , les états  $|n_x = 1, n_y = 0\rangle$  et  $|n_x = 0, n_y = 1\rangle$  ont pour fonctions d'onde respectives  $x e^{\in r^2/4\ell^2}$  et  $y e^{\in r^2/4\ell^2}$  ; ils ne sont donc pas séparément des états propres de  $\hat{L}_z$ , mais il est facile de trouver deux combinaisons linéaires qui conviennent :

$$(x \Leftrightarrow iy) e^{\in r^2/4\ell^2} = r e^{\in i\varphi} e^{\in r^2/4\ell^2} \quad \text{et} \quad (x + iy) e^{\in r^2/4\ell^2} = r e^{+i\varphi} e^{\in r^2/4\ell^2}, \quad (2.24)$$

associées respectivement à  $m = \Leftrightarrow 1$  et  $m = +1$ .

- Plus généralement, dans un sous-espace propre donné de  $\hat{H}_0$  associé au nombre quantique  $n_0 = n_x + n_y$ , on peut identifier  $n_0 + 1$  états propres indépendants de  $\hat{L}_z$  associés aux nombres quantique azimutaux

$$m = \Leftrightarrow n_0, \Leftrightarrow n_0 + 2, \dots, n_0 \Leftrightarrow 2, n_0. \quad (2.25)$$

L'écriture générale de ces états est assez compliquée, sauf pour les deux états extrêmes  $m = \pm n_0$  qui ont pour fonctions d'onde :

$$m = \pm n_0 : \quad (x \pm iy)^m e^{\in r^2/4\ell^2} = r^m e^{\pm im\varphi} e^{\in r^2/4\ell^2} \quad (2.26)$$

Maintenant que nous disposons d'une base commune à  $\hat{H}_0$  et  $\hat{L}_z$ , le problème de la diagonalisation de  $\hat{H}$  est résolu. Un état propre commun à  $\hat{H}_0$  et  $\hat{L}_z$ , de valeur propres  $(n_0 + 1)\hbar\omega_c/2$  et  $m\hbar$ , sera également état propre de  $\hat{H}$  avec la valeur propre

$$E_{n_0, m} = (n_0 + 1) \frac{\hbar\omega_c}{2} \Leftrightarrow m \frac{\hbar\omega_c}{2}, \quad \text{avec} \quad m = \Leftrightarrow n_0, \Leftrightarrow n_0 + 2, \dots, n_0 \Leftrightarrow 2, n_0. \quad (2.27)$$

ce qui s'écrit encore

$$E_n = \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega_c, \quad \text{avec } n = \frac{n_0 \leftrightarrow m}{2} \text{ entier positif ou nul.} \quad (2.28)$$

On retrouve donc la structure de l'hamiltonien en niveaux de Landau régulièrement espacés (voir aussi la figure 2.3, cadre du bas). On note de plus que chaque niveau de Landau est *infiniment dégénéré*, au moins si la particule peut explorer tout le plan  $xy$ . Il existe en effet une infinité de façon d'atteindre tout entier  $n$  à partir de couples  $(n_0, m)$  si on ne restreint pas les valeurs de  $n_0$  et  $m$  réalisables.

### 2-3 Le niveau de Landau fondamental (LLL)

Cette procédure fournit un moyen systématique pour trouver une base d'états propres de  $\hat{H}$ . Intéressons nous ici au niveau de Landau fondamental  $n = 0$  (*Lowest Landau Level, LLL* en anglais), obtenu en prenant systématiquement  $n_0 = m$  dans (2.28). Nous avons donné en (2.26) la forme des fonctions d'onde correspondantes, que nous reproduisons ici :

$$\psi_{n_0=m, m}(x, y) \propto (x + iy)^m e^{\frac{r^2}{4\ell^2}} = r^m e^{im\varphi} e^{\frac{r^2}{4\ell^2}}. \quad (2.29)$$

Nous avons tracé sur la figure 2.2 la densité de probabilité radiale  $r|\psi_m|^2$ , associée à un état  $\psi_m$  du LLL (oublions l'indice  $n_0$  puisqu'il est de toute façon égal à  $m$  pour le LLL). Cette densité de probabilité est invariante par rotation autour de l'axe  $z$  et elle est maximale sur un cercle de rayon

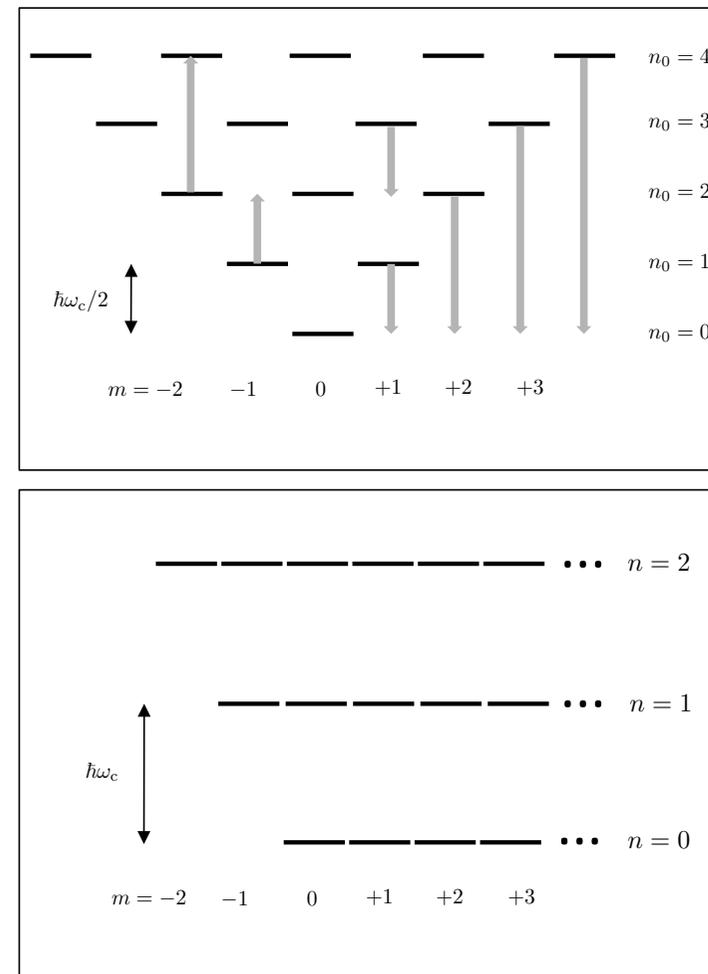
$$r_m = \sqrt{2m + 1} \ell. \quad (2.30)$$

Sa largeur à mi-hauteur est indépendante de  $m$  et d'ordre

$$\Delta r \sim \ell. \quad (2.31)$$

Une particule préparée dans un état  $\psi_m$  donné est donc localisée sur un anneau étroit, la réunion de tous ces anneaux recouvrant le plan. On trouve par ailleurs

$$\langle \psi_m | r^2 | \psi_m \rangle = (2m + 2)\ell^2. \quad (2.32)$$



**FIGURE 2.3.** Haut : structure des niveaux d'énergie de l'hamiltonien  $\hat{H}_0$  décrivant un oscillateur harmonique 2D, avec des niveaux  $(n_0 + 1)\hbar\omega_c/2$ ,  $n_0$  entier positif ou nul. La dégénérescence d'un niveau est  $n_0 + 1$ , et les états propres peuvent être repérés par les deux nombres quantiques,  $n_0$  et  $m$ , où  $m\hbar$  est la valeur de la composante selon  $z$  du moment cinétique  $\hat{L}_z$ . Les flèches grises indiquent l'action de  $\leftrightarrow\omega_c\hat{L}_z/2$  sur certains niveaux. Bas : structure des niveaux d'énergie de l'hamiltonien  $\hat{H}$  décrivant une particule dans un champ magnétique uniforme. Cette structure se déduit de celle du haut en déplaçant un niveau  $(n_0, m)$  de l'énergie  $\leftrightarrow\hbar\omega_c m/2$ .

L'orthogonalité<sup>2</sup> des différents  $\psi_m$  est assurée par leur dépendance différente vis à vis de l'angle polaire  $\varphi$  :

$$\int \psi_m^*(\mathbf{r})\psi_{m'}(\mathbf{r}) d^2r \propto \int e^{im\varphi} e^{im'\varphi} d\varphi = 2\pi\delta_{m,m'}. \quad (2.33)$$

Introduisons maintenant la variable

$$u = x + iy. \quad (2.34)$$

On déduit de (2.29) que l'on peut écrire un état quelconque du niveau de Landau fondamental sous la forme

$$\psi(x, y) = \sum_m C_m \psi_m(x, y) = F(u) e^{\epsilon r^2/4\ell^2} \quad (2.35)$$

où

$$F(u) = \sum_m C_m u^m \quad (2.36)$$

est un polynôme (ou une fonction analytique) quelconque de la variable  $u$ . La restriction au niveau de Landau fondamental correspond donc à un passage effectif d'un espace à deux dimensions vers un espace à une seule dimension. Avant restriction au LLL, les états possibles sont des fonctions d'onde des deux variables indépendantes  $x$  et  $y$ , ou de manière équivalente, des fonctions des deux variables complexe  $u = x + iy$  et  $\bar{u} = x - iy$ . Après restriction au LLL, les états sont décrits par des fonctions de la seule variable  $u = x + iy$  et ne dépendent plus de  $\bar{u}$  (sauf en ce qui concerne la gaussienne  $e^{\epsilon r^2/4\ell^2} = e^{\epsilon u\bar{u}/4\ell^2}$ ).

**Quel moment cinétique orbital pour un état du LLL ?** Le fait que les états de base (2.29) soient états propres du moment cinétique canonique  $\hat{L}_z$  avec des valeurs propres  $m\hbar$  toutes différentes pourrait laisser supposer qu'ils n'ont pas tous le même moment cinétique « physique » moyen. Ce n'est pas le cas ; tout comme l'impulsion  $\hat{\mathbf{p}}$  n'est pas égale à la *quantité de mouvement*  $M\hat{\mathbf{v}}$ , l'opérateur  $\hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{p}}$  ne décrit pas la *quantité physique moment cinétique orbital*<sup>3</sup>  $M\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{\Pi}}$ .

2. Les  $\psi_m$  normalisés ont pour expression  $\psi_m(\mathbf{r}) = N_m r^m e^{im\varphi} e^{-r^2/4\ell^2}$  avec  $N_m = [n! \pi (2\ell)^{n+1}]^{1/2}$ .

3. En anglais, on appelle  $\mathbf{L}$  *canonical angular momentum* et  $\mathbf{r} \times \mathbf{\Pi}$  *kinetic angular momentum*.

Calculons la valeur moyenne de la composante selon  $z$  de cette quantité physique. Partant de

$$\mathbf{r} \times \mathbf{\Pi} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \Leftrightarrow q\mathbf{r} \times \mathbf{A} = \mathbf{L} \Leftrightarrow \frac{q}{2}(x^2 + y^2)\mathbf{B} \quad (2.37)$$

et en utilisant (2.32), on trouve

$$\langle \psi_m | (\mathbf{r} \times \mathbf{\Pi})_z | \psi_m \rangle = m\hbar \Leftrightarrow (m+1)\hbar \Leftrightarrow \hbar, \quad (2.38)$$

ce qui donne un moment cinétique orbital moyen égal à  $\hbar$  pour tous les états du LLL.

**Retour sur la méthode algébrique.** La forme  $\hat{H} = (\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1/2)\hbar\omega_c$  de l'hamiltonien obtenu par la méthode algébrique (cf. (2.17)) permet de retrouver simplement la structure des états du LLL. Pour le choix de jauge symétrique, le niveau fondamental correspond aux états  $|\psi\rangle$  tels que

$$\hat{a}|\psi\rangle = 0, \quad \text{avec} \quad \hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar qB}} \left( \hat{p}_x + i\hat{p}_y + \frac{qB}{2}(\hat{y} \Leftrightarrow i\hat{x}) \right). \quad (2.39)$$

Ré-exprimons cet opérateur en termes des variables  $u$  et  $\bar{u}$ , considérées comme indépendantes, et de leur dérivées :

$$u = x + iy, \quad \bar{u} = x - iy \quad \Rightarrow \quad \partial_u = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y), \quad \partial_{\bar{u}} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y). \quad (2.40)$$

On a

$$\hat{a} = \Leftrightarrow \sqrt{\frac{2\hbar}{qB}} \left( \partial_{\bar{u}} + \frac{u}{4\ell^2} \right) \quad (2.41)$$

et les fonctions  $\psi(x, y) \equiv \psi(u, \bar{u})$  solutions de (2.39) sont telles que

$$\hat{a}\psi(u, \bar{u}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi(u, \bar{u}) = F(u) e^{\epsilon u\bar{u}/4\ell^2} \quad (2.42)$$

ce qui redonne bien (2.35).

Notons pour terminer qu'il est alors possible de construire les états du premier niveau de Landau excité (puis les autres niveaux de Landau) en faisant agir l'opérateur  $\hat{a}^\dagger$  sur les états du LLL que nous venons de trouver.

## 2-4 Dégénérescence du LLL.

Supposons que le mouvement dans le plan  $xy$  de la particule soit restreint à un domaine de surface  $S$ . On supposera bien sûr que  $S \gg \ell^2$  pour qu'on puisse y placer plusieurs orbites cyclotrons. La question liée à la dégénérescence est donc : combien d'orbites indépendantes peut-on y loger, ou encore quelle est la dégénérescence du LLL en fonction de  $S$ ? La réponse rigoureuse à cette question n'est pas simple. Il faut passer du plan vers une sphère ou un tore et prendre les conditions aux limites appropriées [voir par exemple Cooper (2008)].

Nous nous contenterons ici d'un raisonnement approché en prenant un domaine en forme de disque de rayon  $R$ , avec  $S = \pi R^2$ . Nous utilisons comme précédemment la jauge symétrique, en prenant pour origine  $\mathbf{r} = 0$  le centre du disque. La densité de probabilité radiale  $r|\psi(x, y)|^2$  pour une fonction de base (2.29) est maximale au rayon  $r = \sqrt{2m + 1} \ell$  et décroît rapidement (sur une distance  $\sim \ell$ ) de part et d'autre de ce rayon. Pour que cette fonction de base intervienne de manière significative dans le développement d'un état physique de la particule, il faut que la région où elle prend une valeur significative soit à l'intérieur du disque, ce qui impose :

$$n < \frac{R^2}{2\ell^2}. \quad (2.43)$$

La dégénérescence  $\mathcal{D}$  du LLL est donc donnée par ce nombre

$$\mathcal{D} \approx \frac{R^2}{2\ell^2} = \frac{S}{2\pi\ell^2} = \frac{S}{2\pi\hbar/qB} = \frac{\Phi}{\Phi_0}, \quad (2.44)$$

où  $\Phi = BS$  est le flux du champ à travers la surface  $S$  et  $\Phi_0$  le *quantum de flux* :

$$\Phi_0 = \frac{h}{q}. \quad (2.45)$$

En d'autres termes, on peut considérer que la surface occupée par une orbite cyclotron est  $2\pi\ell^2 = h/qB$  et que  $\mathcal{D}$  représente le nombre d'orbites indépendantes logeables dans la surface  $S$ .

Nous avons donné plus haut la valeur  $\ell = 26 \text{ nm}$  pour un électron dans un champ magnétique de 1 T. Pour un échantillon typique de  $100 \mu\text{m}^2$ , ceci correspond à une dégénérescence  $\mathcal{D} = 24\,000$ .

## 3 Jauge de Landau et courant de probabilité

### 3-1 Séparation de l'hamiltonien en jauge de Landau

Pour la suite de ce cours, il sera utile de considérer le problème aux valeurs propres de l'hamiltonien pour une autre jauge couramment utilisée, la *jauge de Landau*, définie par (voir la figure 2.4)

$$\mathbf{A} = Bx \mathbf{u}_y. \quad (2.46)$$

L'hamiltonien de la particule plongée dans le champ magnétique  $\mathbf{B}$  s'écrit alors

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2}{2M} + \frac{(\hat{p}_y \Leftrightarrow qBx)^2}{2M}. \quad (2.47)$$

**Mouvement selon l'axe  $y$ .** Puisque l'hamiltonien (2.47) ne dépend pas de l'opérateur position  $\hat{y}$ , mais seulement de l'opérateur impulsion  $\hat{p}_y$ , nous pouvons chercher ses états propres sous forme d'ondes planes  $e^{iky}$ , multipliées par une fonction  $\psi_k$  à ce stade inconnue de la variable  $x$  :

$$\hat{H}\Psi_k = E\Psi_k \quad \text{avec} \quad \Psi_k(\mathbf{r}) = \psi_k(x) e^{iky}. \quad (2.48)$$

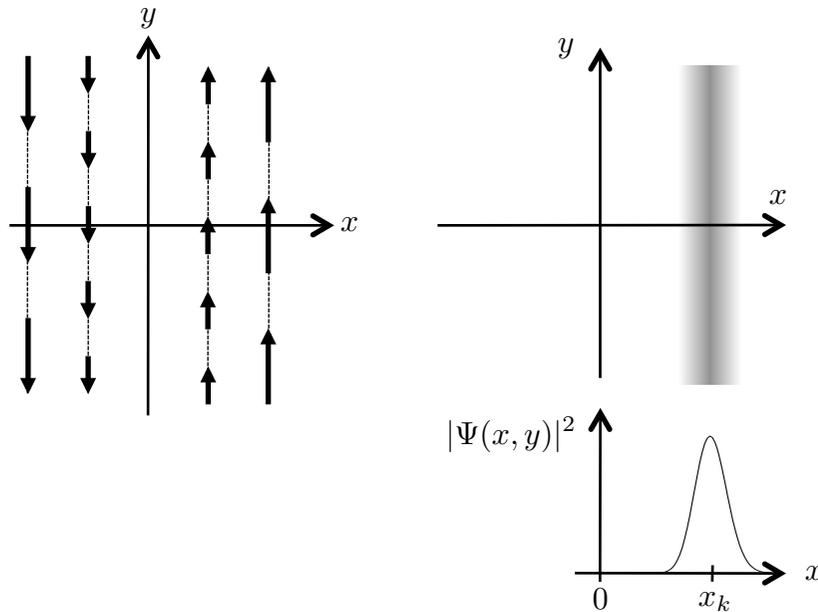
Il est commode de supposer que l'échantillon a une taille finie  $L_y$  le long de l'axe  $y$  et de prendre des conditions aux limites périodiques le long de cet axe<sup>4</sup>. Dans ce cas, le nombre d'onde  $k$  décrivant le mouvement selon  $y$  est quantifié

$$k = \frac{2\pi}{L_y} n_y, \quad \text{avec} \quad n_y \in \mathbb{Z}. \quad (2.49)$$

**Mouvement selon l'axe  $x$ .** La fonction  $\psi_k(x)$  introduite en (2.48) décrivant le mouvement selon l'axe  $x$  est solution de

$$\Leftrightarrow \frac{\hbar^2}{2M} \psi_k''(x) + \frac{(\hbar k \Leftrightarrow qBx)^2}{2M} \psi_k(x) = E \psi_k(x) \quad (2.50)$$

4. Ceci revient formellement à considérer une surface cylindrique percée par un champ magnétique radial plutôt qu'une surface plane.



**FIGURE 2.4.** Gauche : représentation du potentiel vecteur en jauge de Landau. Droite : densité de probabilité pour une fonction propre de l'hamiltonien en jauge de Landau appartenant au LLL,  $\Psi(\mathbf{t}) = \psi_k(x) e^{iky}$ , où  $\psi(x)$  est une gaussienne de largeur  $\ell$  et centrée en  $x_k = \hbar k / (qB) = k\ell^2$ .

ce qui peut se mettre sous une forme plus parlante :

$$\Leftrightarrow \frac{\hbar^2}{2M} \psi_k''(x) + \frac{1}{2} M \omega_c^2 (x \Leftrightarrow x_k)^2 \psi_k(x) = E \psi_k(x) \quad (2.51)$$

avec

$$x_k = \frac{\hbar k}{qB} = k\ell^2. \quad (2.52)$$

On reconnaît l'équation aux valeurs propres d'un oscillateur harmonique, de pulsation  $\omega_c$  et centré au point  $x_k$ .

### 3-2 Le spectre de Landau retrouvé

Puisqu'on a ramené l'hamiltonien à celui d'un oscillateur harmonique à une dimension, on connaît bien sûr son spectre :

$$E_{k,n} = \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_c. \quad (2.53)$$

On retrouve bien le résultat obtenu par la méthode algébrique (cf. (2.18)). Plusieurs remarques sont à faire sur ce résultat :

- Bien que le nombre d'onde  $k$  associé au mouvement selon  $y$  soit généralement non nul, il n'y a pas d'énergie cinétique  $\hbar^2 k^2 / 2M$  associée à ce nombre d'onde ! La présence du champ magnétique fait que la « seule » influence de ce nombre d'onde est de décentrer l'oscillateur selon la direction  $x$ . Nous allons revenir sur ce point plus loin, en évaluant la vitesse moyenne selon  $y$  pour une particule dans l'état  $\Psi_k$ .
- Le LLL est obtenu en prenant les fonctions d'onde des différents oscillateurs associés aux nombres d'onde  $k$  dans leur état fondamental ; chacune de ces fonctions d'onde est une gaussienne centrée en  $x_k$  et de largeur  $\ell$ . La base de fonctions du LLL que l'on obtient ainsi est donc de la forme

$$\Psi_k(\mathbf{r}) \propto e^{\frac{(x-x_k)^2}{2\ell^2}} e^{iky}. \quad (2.54)$$

- L'orthogonalité des différentes fonctions  $\Psi_k$  ainsi trouvées provient de leur dépendance différente vis à vis de la variable  $y$  :

$$\int \Psi_k^*(\mathbf{r}) \Psi_{k'}(\mathbf{r}) d^2r \propto \int e^{ik'y} e^{ik'y} dy = L_y \delta_{n_y, n'_y}, \quad (2.55)$$

où  $n_y$  et  $n'_y$  sont les deux entiers caractérisant la quantification des nombres d'onde  $k$  et  $k'$ , selon la loi donnée en (2.49).

- Deux valeurs consécutives de  $k$ , séparées de  $2\pi/L_y$ , conduisent à des centres d'oscillateurs très voisins :

$$x_k \Leftrightarrow x_{k'} = 2\pi \frac{\ell^2}{L_y} \quad \text{si} \quad k \Leftrightarrow k' = \frac{2\pi}{L_y}, \quad (2.56)$$

ce qui est très petit devant  $\ell$  si la taille  $L_y$  de l'échantillon est elle-même grande devant  $\ell$ .

**Dégénérescence des valeurs propres.** On peut finalement retrouver la dégénérescence d'un niveau de Landau donné, par exemple le LLL. Plaçons la particule dans une boîte rectangulaire de taille  $L_x \times L_y$ . Pour que la fonction  $\Psi(x, y)$  soit pertinente, il faut que le centre  $x_k$  de l'oscillateur soit situé à l'intérieur de cette boîte, ce qui impose une contrainte entre le nombre d'onde  $k$  et la taille  $L_x$

$$0 \leq x_k \leq L_x \quad \Rightarrow \quad 0 \leq k \leq \frac{L_x}{\ell^2}. \quad (2.57)$$

Par ailleurs, nous avons vu que la valeur finie de la taille  $L_y$  impose que  $k$  ne peut prendre que des valeurs discrètes, espacées de  $2\pi/L_y$  [cf. (2.49)]. Ceci donne un nombre total de valeurs possibles compte-tenu de (2.57) :

$$\mathcal{D} \approx \frac{L_x}{\ell^2} \frac{L_y}{2\pi} = \frac{S}{2\pi\ell^2} \quad (2.58)$$

où  $S = L_x L_y$  représente l'aire du rectangle. À chacune de ces valeurs de  $k$  est associé un oscillateur harmonique pertinent, dont l'état fondamental fait partir du LLL. On retrouve ainsi la dégénérescence obtenue pour la jauge symétrique en (2.44).

### 3-3 Courant de probabilité dans un état de Landau

Pour comprendre pourquoi il n'y a pas de terme d'énergie cinétique  $\hbar^2 k^2 / (2M)$  qui apparaît dans l'énergie totale d'un état  $\Psi_k$ , nous allons évaluer la quantité de mouvement moyenne d'une particule préparée dans cet état. Rappelons que l'opérateur décrivant la quantité physique « quantité de mouvement », c'est-à-dire  $Mv$ , s'écrit

$$\hat{\Pi} = \hat{p} \Leftrightarrow qA(\hat{r}) \quad \text{avec} \quad \hat{p} = \Leftrightarrow \hbar \nabla. \quad (2.59)$$

Considérons un état donné du LLL de la forme donnée en (2.54) :

$$\Psi_k(\mathbf{r}) = \psi_k(x) e^{iky} \propto e^{\in (x-x_k)^2 / 2\ell^2} e^{iky} \quad (2.60)$$

et intéressons-nous à la quantité de mouvement moyenne

$$M\langle \hat{v} \rangle = \int \Psi_k^*(\mathbf{r}) (\Leftrightarrow \hbar \nabla \Leftrightarrow qA(\mathbf{r})) \Psi_k(\mathbf{r}) d^2r. \quad (2.61)$$

La composante selon  $x$  de cette quantité de mouvement est nulle. En effet  $A_x = 0$  et la valeur moyenne de l'impulsion  $p_x$  dans l'état fondamental de l'hamiltonien réduit selon  $x$ , donné en (2.50), est également nulle.

Le raisonnement selon l'axe  $y$  est plus subtil. L'action de  $\hat{p}_y$  sur  $\Psi_k(\mathbf{r})$  fait apparaître  $\hbar k$  de sorte que

$$Mv_y(k) = \int \Psi_k^*(\mathbf{r}) (\hbar k \Leftrightarrow qA_y) \Psi_k(\mathbf{r}) d^2r. \quad (2.62)$$

Cette quantité peut se calculer explicitement pour donner après intégration selon  $y$

$$v_y(k) = \Leftrightarrow \omega_c \int |\psi_k(x)|^2 (x \Leftrightarrow x_k) dx. \quad (2.63)$$

Pour l'état fondamental  $\psi_k(x)$  de l'oscillateur harmonique centré en  $x_k$ , cette intégrale est nulle, car l'état fondamental est symétrique par rapport au point  $x_k$ . On constate donc que malgré la présence du terme en  $e^{iky}$  dans l'expression de l'état propre, la vitesse moyenne – ou la quantité de mouvement moyenne – associée à cet état est nulle : la contribution de l'opérateur impulsion est exactement compensée par celle du potentiel vecteur.

### 3-4 L'originalité de la structure en niveaux de Landau

Nous avons donc à ce stade complètement caractérisé le spectre d'une particule quantique chargée, en mouvement dans un plan  $xy$  perpendiculaire à un champ magnétique. Nous avons trouvé un spectre en énergie composé de niveaux discrets, équidistants, avec une séparation  $\hbar\omega_c$ . Chaque niveau est macroscopiquement dégénéré. Plus précisément, le nombre d'états indépendants composant chaque niveau, c'est-à-dire la dimension du sous-espace propre, croît linéairement avec la surface de l'échantillon.

Ce résultat est à première vue très similaire à celui obtenu pour une particule placée dans un réseau périodique, dans la limite des liaisons fortes (figure 2.5). Assimilons chaque site du réseau à un puits harmonique de pulsation  $\omega$  ; en l'absence d'effet tunnel, le spectre en énergie de la particule est composé d'états discrets séparés par l'énergie  $\hbar\omega$ . La juxtaposition de tous ces spectres pour les différents sites du réseau donne un résultat formellement identique à celui du spectre en niveaux de Landau, avec une

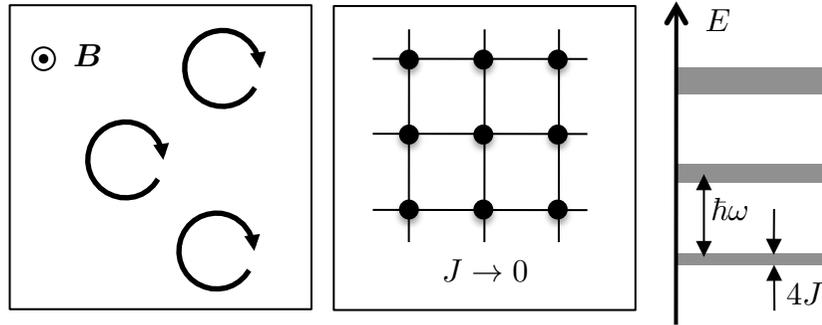


FIGURE 2.5. Deux systèmes physiques conduisant au même spectre. À gauche, une particule dans un champ magnétique uniforme. À droite, une particule dans un réseau périodique dans la limite d'un couplage tunnel  $J$  entre sites voisins qui tend vers 0. Le spectre est alors formé de bandes étroites séparées de  $\hbar\omega$ , où  $\omega$  est la pulsation de l'oscillation en chaque site du réseau.

dégénérescence de chaque énergie qui croît linéairement avec l'aire (ou le nombre de sites) du système. En présence d'effet tunnel, les bandes d'énergie du réseau acquièrent une certaine largeur, mais celle-ci reste faible tant que l'élément de matrice tunnel est petit devant  $\hbar\omega$ .

Nous arrivons donc à la question importante suivante :

*Y a-t-il une différence entre le problème d'une particule mobile dans un plan orthogonal à  $\mathbf{B}$  et celui d'une particule évoluant dans un réseau 2D de grande profondeur ?*

La réponse est positive : les propriétés d'un système ne se résument pas au spectre de son hamiltonien, et la structure des sous-espace propres joue un rôle essentiel. Même si on se restreint au cas d'une particule individuelle, les niveaux de Landau ne sont pas des bandes ordinaires. Elles ont une propriété topologique non triviale, caractérisée par un nombre de Chern non nul. La manifestation la plus simple de cette propriété est obtenue pour un système de taille finie, dans lequel des états de bord, de chiralité déterminée, sont nécessairement présents. Nous allons illustrer ce point dans le paragraphe qui suit.

## 4 États de bord et applications

Notre but dans ce paragraphe est de montrer une caractéristique essentielle du magnétisme orbital quantique, la présence d'états de bord susceptibles de transporter un courant dans un échantillon. Une conséquence très importante de l'existence de ces états est la présence de plateaux dans l'effet Hall quantique entier, que nous allons très brièvement évoquer. Nous allons suivre ici une approche inspirée de Girvin (2000), Yoshioka (2002) et Goerbig (2009).

### 4-1 Modélisation d'un échantillon de taille finie

Nous allons considérer un échantillon de taille finie, en forme de rectangle. Nous allons utiliser la jauge de Landau introduite au paragraphe précédent :

$$\mathbf{A} = Bx \mathbf{u}_y, \quad (2.64)$$

qui fait jouer des rôles différents aux directions  $x$  et  $y$ . Selon l'axe  $y$ , le domaine accessible a une longueur  $y$  et nous prendrons comme précédemment des conditions aux limites périodiques selon cet axe. Selon l'axe  $x$ , nous supposons que les particules sont soumises à un potentiel  $V(x)$ , confinant la particule dans la zone comprise entre  $\Leftrightarrow L_x/2$  et  $L_x/2$ . La forme exacte du potentiel n'a pas beaucoup d'importance et la seule condition que nous mettrons est que la distance sur laquelle  $V(x)$  remonte est petite devant  $L_x$  (voir figure 2.6).

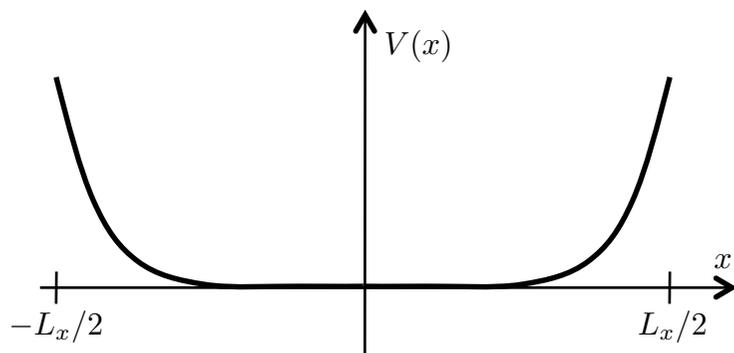
Le traitement que nous avons développé précédemment pour trouver le spectre de l'hamiltonien et une base d'états propres reste valable. On peut toujours chercher les états propres sous la forme

$$\Psi_k(\mathbf{r}) = \psi_k(x) e^{ik_y y}, \quad k = \frac{2\pi}{L_y} n_y, \quad n_y \in \mathbb{Z}, \quad (2.65)$$

où la fonction d'onde  $\psi_k(x)$  est désormais solution de

$$\Leftrightarrow \frac{\hbar^2}{2M} \psi_k''(x) + \left[ \frac{1}{2} M \omega_c^2 (x \Leftrightarrow x_k)^2 + V(x) \right] \psi_k(x) = E \psi_k(x) \quad (2.66)$$

avec  $x_k = k\ell^2$ .


 FIGURE 2.6. Potentiel  $V(x)$  confinant les particules selon la direction  $x$ .

## 4-2 Les états de bord

Pour simplifier notre traitement mathématique, nous supposons<sup>5</sup> ici que le potentiel  $V(x)$  varie doucement sur l'échelle de longueur  $\ell$  qui caractérise l'extension de l'état fondamental du potentiel harmonique  $M\omega_c^2 x^2/2$ . On peut alors, à  $k$  fixé, linéariser le potentiel  $V(x)$  au voisinage de  $x_k$  :

$$V(x) \approx V(x_k) + (x \leftrightarrow x_k)V'(x_k) \quad (2.67)$$

ce qui permet de réécrire l'équation aux valeurs propres (2.66) sous la forme

$$\leftrightarrow \frac{\hbar^2}{2M} \psi_k''(x) + \left[ \frac{1}{2} M \omega_c^2 (x \leftrightarrow x_k \leftrightarrow \delta x_k)^2 + \epsilon_k \right] \psi_k(x) = E \psi_k(x) \quad (2.68)$$

où on a introduit le décalage du centre de l'oscillateur harmonique induit par la force dérivant du potentiel  $V(x)$

$$\delta x_k = \leftrightarrow \frac{V'(x_k)}{M\omega_c^2} \quad (2.69)$$

et le déplacement en énergie

$$\epsilon_k = V(x_k) \leftrightarrow \frac{1}{2} M \omega_c^2 (\delta x_k)^2 \approx V(x_k). \quad (2.70)$$

5. Cette hypothèse n'est pas essentielle, comme expliqué par exemple dans Yoshioka (2002).

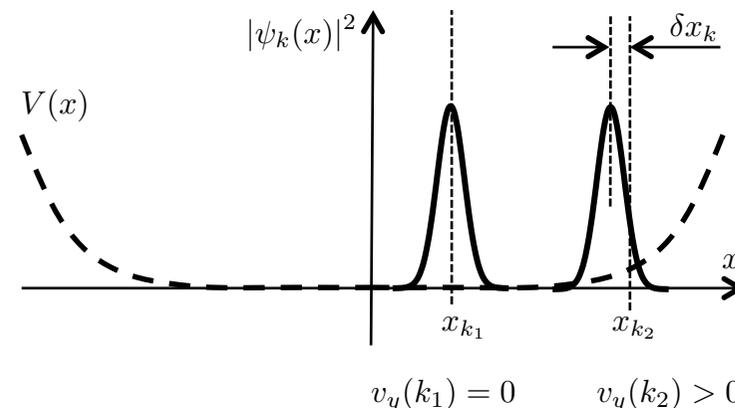


FIGURE 2.7. Densité de probabilité des fonctions propres en jauge de Landau, en présence d'un potentiel  $V(x)$ . Les centres des fonctions d'onde sont déplacés de  $\delta x_k$  [cf. (2.69)] dans les régions où le potentiel varie ( $V'(x) \neq 0$ ). À ce déplacement du centre est associée une vitesse moyenne non nulle le long de la direction  $y$ .

La dernière approximation est valable si on se limite à des potentiels à bords suffisamment mous pour que  $\delta x_k \ll \ell$ .

Intéressons-nous maintenant à la vitesse moyenne associée aux états propres  $\psi_k$ , compte tenu de la présence du potentiel  $V(x)$ . Si le potentiel  $V(x)$  est choisi à fond plat, la force  $\leftrightarrow V'(x)$  est nulle sur toute l'étendue de ce fond et il en va de même pour le décalage  $\delta x_k$ .

- Pour les états dont le centre  $x_k$  est situé dans cette partie plate du potentiel, l'argument développé au paragraphe précédent reste valable : la vitesse moyenne, donnée par

$$v_y(k) = \leftrightarrow \omega_c \int |\psi_k(x)|^2 (x \leftrightarrow x_k) dx. \quad (2.71)$$

est nulle car la densité de probabilité de  $|\psi_k(x)|^2$  est symétrique par rapport à  $x_k$ .

- En revanche, pour les états dont le centre  $x_k$  est situé sur les bords de

l'échantillon,

$$x_k \approx \pm L_x/2, \quad (2.72)$$

la force  $\Leftrightarrow V'(x_k)$  et donc le décalage  $\delta x_k$  sont non nuls. Plus précisément, l'intégrale (2.71) donne en utilisant le fait que  $\psi_k$  est normée :

$$v_y(k) = \Leftrightarrow \omega_c \langle \langle x \rangle \Leftrightarrow x_k \rangle = \Leftrightarrow \omega_c \delta x_k = \frac{V'(x_k)}{M\omega_c}. \quad (2.73)$$

Il y a donc une vitesse  $v_y$  non nulle associée aux états situés sur les bords de l'échantillon. Pour  $\omega_c = qB/M > 0$ , cette vitesse est négative pour les états au voisinage du bord  $x = -L_x/2$  et positive sur l'autre bord  $x = L_x/2$ . Ceci correspond donc à une rotation de la particule sur les bords de l'échantillon dans le sens direct (inverse des aiguilles d'une montre), alors que le mouvement cyclotron se fait pour les mêmes conditions dans le sens horaire. L'existence de ces états de bords chiraux, dont la vitesse a un signe déterminé par l'orientation du champ magnétique, constitue une différence essentielle entre la dynamique sur un réseau « usuel » et celle obtenue pour les niveaux de Landau. Elle s'interprète classiquement en terme « d'orbites sautantes », ou en « festons » (*skipping orbits* en anglais). Il s'agit de trajectoires cyclotrons interrompues par un choc sur le bord de l'échantillon (figure 2.8).

On notera que la direction et la valeur de cette vitesse des états de bord sont en relation directe avec l'analyse que nous avons faite pour le courant de Hall dans le cas classique. Le potentiel de confinement crée une force  $F = \Leftrightarrow V'$  selon la direction  $x$  et les particules acquièrent une vitesse de dérive  $\Leftrightarrow F/(M\omega_c) = \Leftrightarrow F/(qB)$  dans la direction  $y$  [cf. (2.8)].

Indiquons un autre moyen pour retrouver la vitesse associée à un état de bord. L'énergie de l'état  $\psi_k$  solution de l'équation différentielle (2.68) vaut

$$E(k) = (n + 1/2)\hbar\omega_c + \epsilon_k \approx (n + 1/2)\hbar\omega_c + V(x_k). \quad (2.74)$$

Cette relation peut être vue comme une relation de dispersion : la vitesse de groupe qui lui est associée est dirigée selon  $y$  et vaut

$$v_{g,y}(k) = \frac{1}{\hbar} \frac{dE}{dk} \approx \frac{1}{\hbar} \frac{dV(x_k)}{dk} = \frac{1}{\hbar} \left( \frac{dV}{dx} \right)_{x=x_k} \frac{dx_k}{dk} \quad (2.75)$$

soit

$$v_{g,y}(k) = \frac{1}{qB} \left( \frac{dV}{dx} \right)_{x=x_k} \quad (2.76)$$

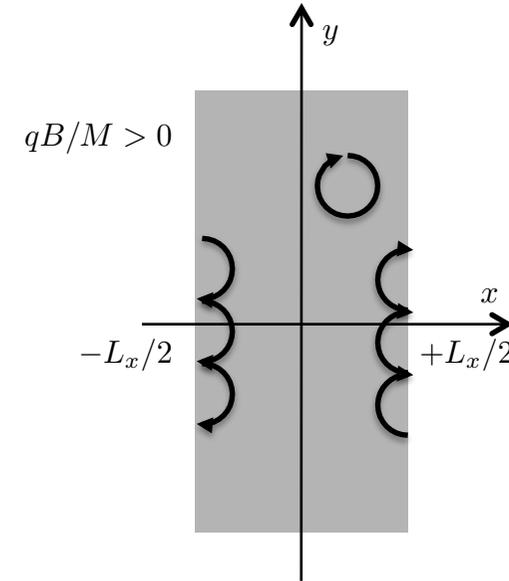


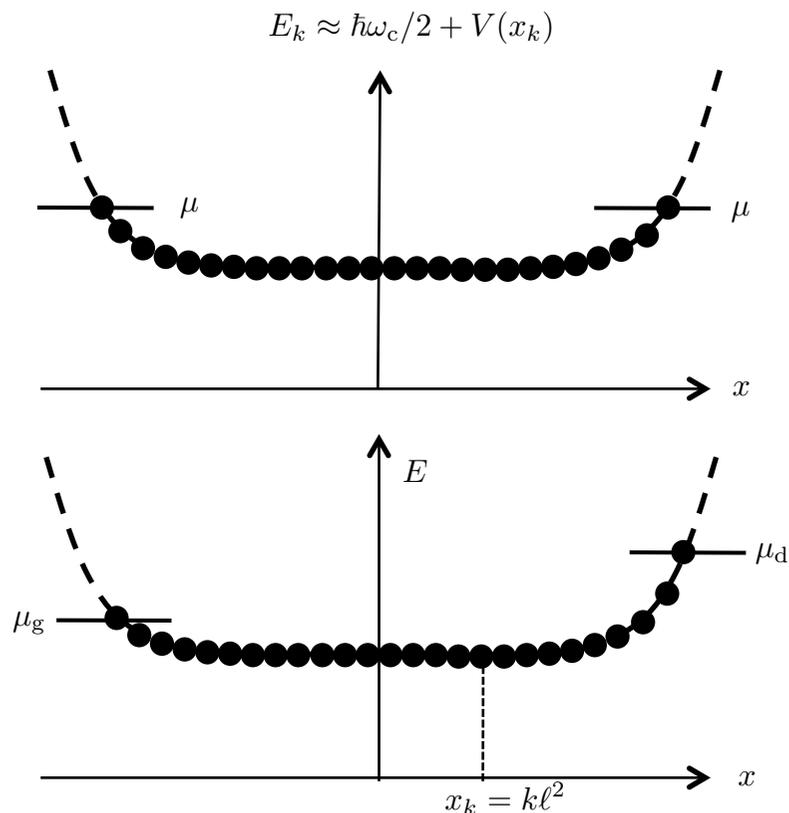
FIGURE 2.8. Orbites classiques correspondant aux états de bords quantiques.

ce qui est bien identique à (2.73) puisque  $\omega_c = qB/M$ .

### 4-3 Le courant de bord pour des fermions à $T = 0$

Supposons maintenant que l'on dispose d'un gaz de fermions sans interaction et sans spin, et que ce gaz soit à température nulle (état fondamental). Cet état fondamental est obtenu en remplissant tous les niveaux à une particule jusqu'à l'énergie de Fermi correspondant au potentiel chimique  $\mu$ . Intéressons nous au cas où l'énergie de Fermi est située entre deux niveaux de Landau, par exemple entre le LLL, d'énergie  $\hbar\omega_c/2$ , et le premier niveau de Landau excité, d'énergie  $3\hbar\omega_c/2$ .

On va donc remplir sur les deux bords de l'échantillon des états de bords dont l'énergie varie entre  $\hbar\omega_c/2$  et  $\mu$ . Cherchons à évaluer le courant total circulant sur le bord de l'échantillon. Chaque état occupé  $\Psi_k$  contribue



**FIGURE 2.9.** Remplissage à température nulle des états du LLL en absence (haut) et en présence (bas) d'une différence de potentiel chimique entre la gauche et la droite de l'échantillon. Chaque point représente un état peuplé  $\Psi_k$ , repéré ici par son centre  $x_k$ . On a supposé  $\mu < 3\hbar\omega_c/2$  pour pouvoir négliger les autres niveaux de Landau.

au courant de particules<sup>6</sup> par la quantité  $v_y(k)/L_y$ , puisque la particule est délocalisée tout le long de l'axe  $y$ . Le courant est obtenu en sommant la contribution de tous les états de bord concernés, par exemple pour le bord de droite autour de  $x = L_x/2$  :

$$J_{y,d} = \frac{1}{L_y} \sum_k v_y(k), \quad (2.77)$$

où la somme porte sur tous les états  $k$  dont le centre  $x_k$  est situé dans la région montante de  $V(x)$ . On peut remplacer la somme discrète sur  $k$  par une intégrale

$$\sum_k [\dots] \Leftrightarrow \frac{L_y}{2\pi} \int [\dots] dk \quad (2.78)$$

ce qui conduit à

$$J_{y,d} = \frac{1}{L_y} \frac{L_y}{2\pi} \frac{1}{M\omega_c} \int V'(x_k) dk = \frac{1}{h} \int V'(x) dx \quad (2.79)$$

soit finalement

$$J_{y,d} = \Delta E/h, \quad (2.80)$$

où  $\Delta E = \mu \Leftrightarrow \hbar\omega_c/2$  représente la différence d'énergie entre l'énergie de Fermi et l'énergie du LLL dans la partie plate du potentiel. On trouve la même valeur du courant, avec un signe opposé, pour l'autre bord de l'échantillon, en  $x = \Leftrightarrow L_x/2$ . Les deux courants se compensent donc exactement, cette compensation se produisant même si la forme ou la raideur des bords n'est pas la même à gauche ou à droite.

Ce résultat remarquable indique que le bord de l'échantillon se comporte comme un conducteur calibré, parcouru par un courant indépendant de sa taille et de la valeur du champ magnétique, pourvu que  $B$  soit assez grand pour la longueur  $\ell$  soit microscopique et que la notion d'états de bords qui conditionne le traitement précédent soit valable<sup>7</sup>. Nous nous sommes restreints ici à un échantillon rectangulaire, avec des conditions aux limites particulières, mais on peut généraliser ce résultat à un échantillon de forme quelconque, la valeur (2.80) étant universelle.

6. Nous parlons ici de courant de particules, et pas de courant électrique. Ce dernier se déduit de  $J_y$  en le multipliant par la charge (négative) de l'électron.

7. Merci à M.-O. Goerbig pour une discussion éclairante sur ce sujet !

## 4-4 Circuiterie à effet Hall

Conservons la géométrie précédente et supposons que l'on insère le gaz électronique bidimensionnel entre deux électrodes composées d'un métal tri-dimensionnel conventionnel, situées en haut et en bas du rectangle. On injecte un courant de particules  $J_y$  dans l'électrode inférieure (1) et on récupère ce courant dans l'électrode supérieure (2). Les niveaux de Fermi dans les électrodes sont donc différents, avec  $\mu_1 > \mu_2$ . En supposant les contacts électrode-gaz d'électrons parfaits<sup>8</sup>, les états de bord situés à droite de l'échantillon vont se remplir jusqu'au niveau  $\mu_d = \mu_1$ , et ceux sur la gauche de l'échantillon vont se remplir jusqu'à  $\mu_g = \mu_2$ .

Pour simplifier l'analyse, nous supposons toujours que seul le LLL joue un rôle dans ce qui suit. Le calcul du paragraphe précédent continue à s'appliquer avec désormais des courants de bords différents à gauche et à droite de l'échantillon, ce qui correspond à l'apparition d'un courant résultant non nul :

$$\begin{aligned} J_y &= J_{y,d} \Leftrightarrow J_{y,g} \\ &= \frac{1}{h} (\mu_d \Leftrightarrow \hbar\omega_c/2) \Leftrightarrow \frac{1}{h} (\mu_g \Leftrightarrow \hbar\omega_c/2) \\ &= (\mu_d \Leftrightarrow \mu_g)/h. \end{aligned} \quad (2.81)$$

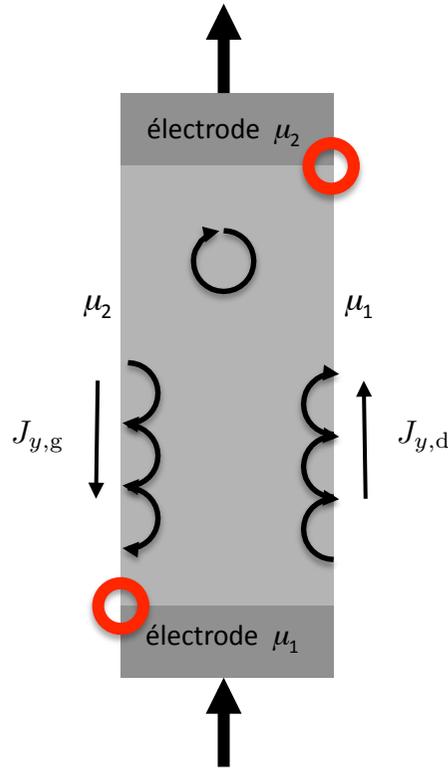
Si l'on revient au courant électrique  $I_y = qJ_y$  et la différence de potentiel  $V_x = (\mu_d \Leftrightarrow \mu_g)/q$ , on obtient la relation

$$I_y = \sigma_{xy} V_x \quad \text{avec} \quad \sigma_{xy} = q^2/h. \quad (2.82)$$

correspondant à une *résistance de Hall*

$$R_H = h/q^2 = 25\,812.807557(18) \, \Omega. \quad (2.83)$$

8. La double hypothèse sous-jacente est (i) que des électrons jusqu'à l'énergie  $\mu_1$  sont fournis au bord droit autant qu'il est nécessaire par l'électrode 1, et (ii) que tout électron d'énergie supérieure à  $\mu_2$  sur le bord gauche est immédiatement transporté jusqu'à l'électrode 1 qui l'absorbe. L'irréversibilité associée à cette double hypothèse se traduit par une dissipation d'énergie aux deux zones marquées par un cercle rouge : en bas à gauche où des électrons d'énergie  $\sim \mu_1$  entrent dans des états de bords qui ne contiennent que des électrons d'énergie  $\leq \mu_2$ , et en haut à droite où des électrons d'énergie allant jusqu'à  $\mu_1$  rentrent dans l'électrode au potentiel chimique  $\mu_2$ . Pour une étude allant au delà de ce modèle « d'électrodes parfaites », voir par exemple Yoshioka (2002).



**FIGURE 2.10.** Schéma idéal d'une expérience de mesure de conductivité de Hall. Deux électrodes « idéales » imposent des potentiels chimiques différents sur les bords gauche et droit de l'échantillon. Ceci vient rompre l'équilibre entre les courants de bords correspondants ( $J_{y,d} \neq J_{y,g}$ ) et un courant  $J_y$  arrive et repart des électrodes. Les zones encadrées sont celles où un processus dissipatif se produit pour maintenir le système dans un régime d'équilibre.

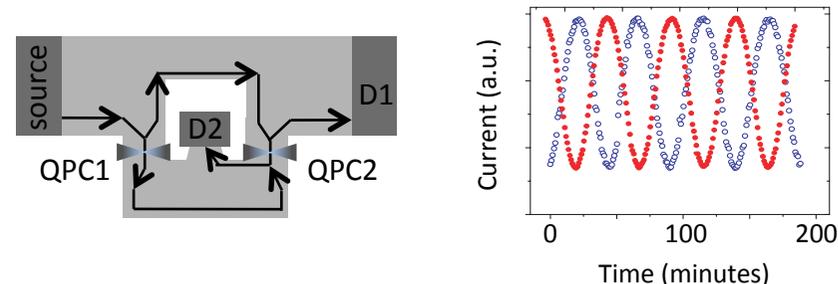
Cette formule se généralise simplement au cas où plusieurs niveaux de Landau sont remplis et participent à la conduction : on trouve que la conductivité  $\sigma_{xy}$  est simplement multipliée par le nombre de niveaux de Landau en jeu. Cette valeur du « quantum de conductivité » égale à  $e^2/h$  est identique au résultat prédit pour un conducteur uni-dimensionnel reliant deux électrodes tri-dimensionnelles (formule de Landauer–Büttiker, voir par exemple Akkermans & Montambaux (2004) et Imry (1997)). On peut donc considérer le bord d'un gaz bidimensionnel d'électrons dans le LLL comme un conducteur uni-dimensionnel.

**Remarque.** Ce résultat reste valable si on modifie légèrement le champ magnétique autour de la valeur correspondant à la figure 2.9. Supposons par exemple que l'on augmente légèrement  $B$ . La distance entre deux centres adjacents  $x_k$  va diminuer, et le nombre d'états  $\mathcal{N}$  disponibles dans la surface  $L_x \times L_y$  va donc augmenter

$$\mathcal{N} = \frac{qL_xL_y}{h} B \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{N} + \delta\mathcal{N} = \frac{qL_xL_y}{h} B + \frac{qL_xL_y}{h} \delta B \quad (2.84)$$

Si ce changement  $\delta\mathcal{N}$  est inférieur au nombre d'états situés dans la zone de transition où le potentiel  $V(x)$  varie, la figure 2.9 reste valable et le résultat (2.83) également. On s'attend donc à trouver un plateau où la résistance de Hall garde cette valeur quand  $B$  varie.

En pratique, la largeur du plateau que l'on déduit à partir de ce raisonnement est beaucoup plus faible que les plateaux effectivement observés. La raison en est que ces derniers sont considérablement élargis par le désordre présent dans les échantillons. La présence de désordre dans le potentiel ressenti par les particules au cœur du matériau permet de produire une densité relativement importante d'états localisés dans le gap entre deux niveaux de Landau, par exemple  $[\hbar\omega_c/2, 3\hbar\omega_c/2]$ . Ce désordre ne détruit pas la relation de quantification (2.82) tant qu'il reste suffisamment faible pour ne pas créer de connexion entre les deux bords de l'échantillon (voir par exemple la discussion détaillée de Girvin (2000)).



**FIGURE 2.11.** Gauche : Interféromètre de Mach–Zender électronique de Ji et al. (2003). L'échantillon est plongé dans un champ magnétique de 5.5 T perpendiculaire au plan de la figure. Droite : en bleu, signal observé en fonction du temps lié à la variation de la phase Aharonov–Bohm quand le champ magnétique appliqué décroît (variation relative sur 3 heures :  $7 \cdot 10^{-5}$ ). Le signal en rouge est obtenu en modifiant les trajectoires des états de bord grâce à des électrodes auxiliaires. L'aire de l'interféromètre est environ  $60 \mu\text{m}^2$ .

#### 4-5 Un interféromètre de Mach–Zender électronique

Une belle application de ce conducteur monocanal fourni par les états de bord d'un gaz 2D d'électrons sous champ magnétique a été démontrée par Ji et al. (2003). Il s'agit d'un interféromètre à deux voies de type Mach-Zender pour les électrons émis par une électrode source (figure 2.11). Après leur parcours dans l'échantillon, ces électrons sont détectés sur une des deux électrodes  $D1$  et  $D2$ . Pour aller de la source vers les détecteurs, deux chemins sont possibles pour les électrons, avec des séparateurs de faisceaux formés par des contacts ponctuels quantiques (*Quantum Point Contact* en anglais, QPC) qui peuvent transmettre ou réfléchir les électrons de manière cohérente avec une probabilité ajustable.

Du fait de la présence du champ magnétique perpendiculaire à l'échantillon ( $B = 5.5 \text{ T}$ ), il y a une différence de phase entre les deux chemins liée à l'effet Aharonov–Bohm vu au cours précédent. Cette différence de phase est proportionnelle au flux du champ à travers le circuit dessiné par les états de bord, et est de l'ordre de  $60\,000 \times 2\pi$ .

La figure 2.11 (droite) montre un exemple de signal d'interférence ; on a tracé le courant dans le détecteur  $D1$  en fonction du temps. La modulation du signal avec le temps provient du fait que le champ magnétique auquel est soumis l'échantillon décroît lentement (0.12 mT par heure). Il s'agit d'un changement très faible en valeur relative sur la durée de l'expérience ( $7 \cdot 10^5$  environ), mais qui change la phase entre les deux bras de

$$7 \cdot 10^5 \times 60\,000 \times (2\pi) \approx 4 \times (2\pi), \quad (2.85)$$

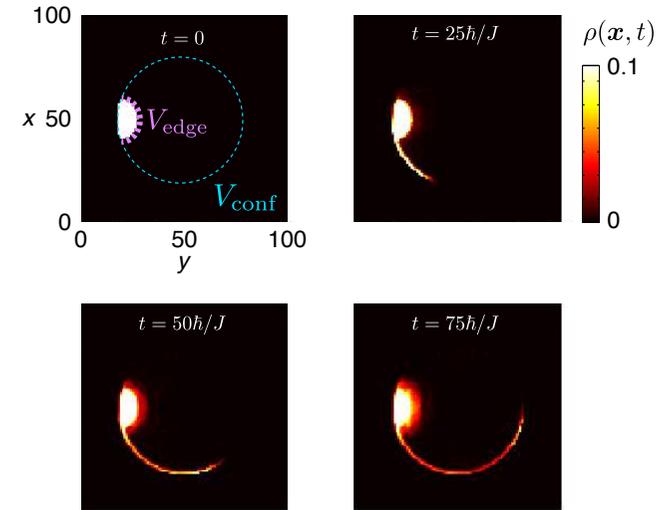
ce qui correspond à 4 oscillations complètes du signal. On trouvera dans l'article de Ji et al. (2003) une description détaillée des mécanismes possibles de décohérence dans ce type d'interféromètre.

#### 4-6 États de bords avec des atomes froids ?

Nous terminons ce chapitre par une brève discussion des possibilités offertes par les expériences d'atomes froids pour mettre en évidence de manière directe ces états de bord. Nous allons supposer possible la réalisation d'un hamiltonien de type  $(\hat{p} \leftrightarrow q\mathbf{A}(\hat{r}))^2/2M$  pour des atomes neutres, où  $\mathbf{A}$  correspond à un champ magnétique uniforme (cette réalisation sera décrite dans les chapitres suivants). On peut alors mettre en évidence les états de bord en changeant brutalement le confinement du gaz et en regardant la trajectoire ultérieure des atomes.

Un exemple tiré de l'article de Goldman et al. (2013) est montré sur la figure 2.12. On part d'atomes fermioniques qui remplissent les états du LLL dans une certaine zone de l'espace, en l'occurrence un petit disque situé sur la gauche de l'échantillon. À l'instant  $t = 0$ , on relâche brutalement une partie du confinement et les atomes sont alors libres d'occuper un deuxième disque beaucoup plus grand que le premier, ces deux disques étant tangents. On résout l'équation de Schrödinger pour déterminer la densité de probabilité aux instants ultérieurs.

Les résultats de la figure 2.12 confirment l'intuition que l'on a des états de bord : les particules se propagent de manière chirale le long du bord du grand disque, alors que la migration directe vers le centre de ce grand disque est quasiment inexistante sur l'échelle de temps regardée. Cette non-migration est une conséquence du fait que le LLL est plat, et qu'il n'y



**FIGURE 2.12.** Proposition de mise en évidence d'états de bord dans une expérience d'atomes froids. Des atomes fermioniques sont initialement confinés dans un petit disque situé à gauche. Après suppression d'une partie du confinement, les atomes peuvent s'étendre librement et occuper un disque beaucoup plus grand. Ces calculs sont faits pour des atomes bougeant sur un réseau carré de pas  $a$  dans l'approximation des liaisons fortes, avec un flux de  $2\pi/5$  par cellule unité. Les atomes sont préparés dans la sous-bande fondamentale, qui est une bonne approximation du LLL (de largeur presque nulle comparée au coefficient tunnel  $J$ ). On a pris  $\mu \leftrightarrow 1.5 J$  et le rayon du grand disque est  $32 a$ .

a donc pas de mouvement quantique associé à une superposition impliquant seulement ces états. L'évolution montrée en figure 2.12 révèle donc simultanément deux caractéristiques essentielles du LLL : un spectre plat pour les états localisés dans le cœur de l'échantillon, et une vitesse chirale pour les états de bord.

## 5 Références

- Akkermans, E. & G. Montambaux (2004), *Physique mésoscopique des électrons et des photons*, CNRS Editions.
- Cooper, N. R. (2008), « Rapidly rotating atomic gases », in *Advances in Physics* 57.6, pp. 539–616.
- Eisenstein, J.P. (2005), « Novel phenomena in double layer two-dimensional electron systems », in *Nanophysics : coherence and transport*, ed. by H. Bouchiat, Y. Gefen, S. Guéron, G. Montambaux & J. Dalibard, vol. Ecole des Houches 2004, session LXXXI, Elsevier, , pp. 129–175.
- Girvin, Steven M. (2000), « The Quantum Hall Effect : Novel Excitations and Broken Symmetries », in *Topological Aspects of Low Dimensional Systems*, ed. by A. Comtet, T. Jolicoeur, S. Ouvry & F. David, vol. Les Houches, July 1998, Springer-Verlag.
- Goerbig, M. O. (2009), « Quantum Hall Effects », in *lecture notes for the Singapore session "Ultracold Gases and Quantum Information" of Les Houches Summer School*, vol. arXiv :0909.1998.
- Goldman, N., J. Dalibard, A. Dauphin, F. Gerbier, M. Lewenstein, P. Zoller & I. B. Spielman (2013), « Direct imaging of topological edge states in cold-atom systems », in *PNAS* 110.17, p. 6736.
- Imry, Yoseph (1997), *Introduction to Mesoscopic Physics*, Oxford University Press.
- Jackson, J. D. (1998), *Classical Electrodynamics*, New York: John Wiley.
- Ji, Yang, Yunchul Chung, D. Sprinzak, M. Heiblum, D. Mahalu & Hadas Shtrikman (2003), « An electronic Mach-Zehnder interferometer », in *Nature* 422, p. 415.
- Yoshioka, Daijiro (2002), *The Quantum Hall Effect*, Springer-Verlag.

# Chapitre 3

## Phase de Berry et potentiels de jauge géométriques

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>L'approximation adiabatique</b> . . . . .	<b>2</b>
1-1	Position du problème et notations . . . . .	2
1-2	Évolution du système . . . . .	2
1-3	Principe de l'approximation adiabatique . . . . .	3
1-4	Exemple . . . . .	4
<b>2</b>	<b>La phase de Berry</b> . . . . .	<b>5</b>
2-1	Phase dynamique et phase géométrique . . . . .	5
2-2	Le cas d'un circuit fermé . . . . .	6
2-3	Courbure de Berry et champ magnétique artificiel . . . . .	6
2-4	Influence d'un changement de jauge . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Exemples</b> . . . . .	<b>8</b>
3-1	Spin dans un champ magnétique extérieur . . . . .	8
3-2	Lien avec le transport parallèle . . . . .	9
3-3	Le pendule de Foucault . . . . .	10
3-4	Lumière dans une fibre optique . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Approche à la Born–Oppenheimer</b> . . . . .	<b>12</b>
4-1	Traitement quantique des « variables lentes » . . . . .	13
4-2	Équation de Schrödinger effective . . . . .	14
4-3	Interprétation physique du potentiel scalaire . . . . .	14
<b>5</b>	<b>Références</b> . . . . .	<b>16</b>

---

Il est fréquent d'avoir recours en physique, classique ou quantique, à la notion d'évolution adiabatique pour un système dont l'état dépend de paramètres extérieurs, volume d'une boîte confinant un fluide, champs extérieurs appliqués au système, etc.. Considérons ce type d'évolution et intéressons-nous plus particulièrement à une « trajectoire fermée » des paramètres extérieurs. On entend par là une évolution telle que ces paramètres extérieurs, représentés de manière générique par un vecteur  $\lambda$ , évoluent lentement de l'instant 0 à l'instant  $T$  pour reprendre à l'instant  $T$  la valeur qu'ils avaient à l'instant 0 :

$$\lambda(0) \Leftrightarrow \lambda(t) \Leftrightarrow \lambda(T) = \lambda(0). \quad (3.1)$$

Il est alors naturel de penser que le système étudié est à l'instant  $T$  dans le même état qu'à l'instant 0. Toutefois, le résultat est parfois un peu plus complexe que cette simple identité. Un exemple bien connu est le pendule de Foucault. Supposons que le pendule oscille linéairement à l'instant initial en un point de latitude donnée. À l'instant  $T = 24$  heures, correspondant à une rotation complète de la Terre sur son axe, le plan d'oscillation du pendule ne sera pas le même. Il aura tourné d'une quantité qui dépend de la latitude du lieu où l'expérience est faite.

Le but de ce chapitre est de tirer partie de cette « anholonomie », c'est-à-dire cette possibilité qu'ont certaines variables de ne pas revenir à leur valeur initiale alors que d'autres variables, qui pilotent le mouvement des premières, parcourent un cycle fermé. Nous nous intéresserons principalement au cas quantique, qui nous permettra de dégager la notion de

phase de Berry et de générer de cette manière l'équivalent d'une phase de Aharonov–Bohm même si la particule ne possède pas de charge électrique.

## 1 L'approximation adiabatique

### 1-1 Position du problème et notations

On considère dans cette partie un système quantique décrit par un hamiltonien  $\hat{H}(\lambda)$  dépendant d'un paramètre *continu*  $\lambda$ . On suppose pour l'instant que ce paramètre est contrôlé par un opérateur extérieur au système. Ce peut être un nombre réel ou un ensemble de nombres réels représentés par un vecteur, d'où la notation générique  $\lambda$ .

Pour chaque valeur de  $\lambda$ , on suppose connus les états propres  $|\psi_n(\lambda)\rangle$  de  $\hat{H}(\lambda)$  et leurs énergies associées  $E_n(\lambda)$  :

$$\hat{H}(\lambda)|\psi_n(\lambda)\rangle = E_n(\lambda)|\psi_n(\lambda)\rangle. \quad (3.2)$$

On supposera dans la suite que les  $|\psi_n(\lambda)\rangle$  forment une base orthonormée de l'espace de Hilbert pour toute valeur de  $\lambda$ . On va chercher à déterminer l'évolution dans le temps du vecteur d'état  $|\psi(t)\rangle$  du système quand le paramètre  $\lambda$  dépend lui-même du temps. On va s'intéresser en particulier aux évolutions lentes de  $\lambda(t)$  (en un sens que nous allons préciser).

**Exemple 1.** Considérons une particule dont le moment magnétique est décrit par l'opérateur  $\hat{\mu}$ . On suppose la particule immobile et localisée en un point, de sorte que son seul degré de liberté est ce moment magnétique. Le champ magnétique  $\mathbf{B}$  à l'emplacement de la particule joue ici le rôle du paramètre  $\lambda$ . L'hamiltonien est donc :

$$\lambda \equiv \mathbf{B}, \quad \hat{H}(\lambda) \equiv \hat{H}(\mathbf{B}) = \hat{\mu} \cdot \mathbf{B}, \quad (3.3)$$

le champ magnétique  $\mathbf{B}$  pouvant dépendre du temps, comme dans une expérience de RMN.

**Exemple 2.** Quand on décrit l'interaction d'un atome avec le rayonnement, on a souvent recours à l'*approximation semi-classique*, qui consiste à

décrire quantiquement les degrés de liberté internes de l'atome, et classiquement ses degrés de liberté externes (position  $\mathbf{r}$  et impulsion  $\mathbf{p}$  du centre de masse de l'atome). Considérons le cas simple d'un atome « à deux niveaux internes », un niveau fondamental  $|g\rangle$  et un niveau excité  $|e\rangle$ , séparés par l'énergie  $\hbar\omega_0$ . Supposons que le champ lumineux est monochromatique, de pulsation  $\omega$  et quasi-résonnant avec l'atome

$$|\Delta| \ll \omega_0 \quad \text{avec le désaccord } \Delta = \omega - \omega_0. \quad (3.4)$$

Limitons-nous pour simplifier à un atome au repos<sup>1</sup> au point  $\mathbf{r}$ . On peut utiliser l'approximation du champ tournant et mettre l'hamiltonien décrivant le couplage atome-champ sous forme matricielle dans la base  $\{|g\rangle, |e\rangle\}$  :

$$\hat{H}(\mathbf{r}) = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \Delta & \kappa^*(\mathbf{r}) \\ \kappa(\mathbf{r}) & \leftrightarrow\Delta \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

où  $\kappa(\mathbf{r})$  est la fréquence de Rabi<sup>2</sup> caractérisant le couplage de l'atome avec le champ lumineux au point  $\mathbf{r}$ , proportionnelle au champ électrique en ce point pour un couplage dipolaire-électrique. Le rôle du paramètre  $\lambda$  est alors joué par la position  $\mathbf{r}$  du centre de masse de l'atome.

### 1-2 Évolution du système

Considérons le cas où le paramètre  $\lambda$  dépend du temps. À chaque instant  $t$ , on décompose le vecteur d'état  $|\psi(t)\rangle$  sur la base des états propres instantanés de l'hamiltonien  $\hat{H}[\lambda(t)]$  :

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t) |\psi_n[\lambda(t)]\rangle. \quad (3.6)$$

Reportons cette expression dans l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{d|\psi\rangle}{dt} = \hat{H}[\lambda(t)] |\psi(t)\rangle. \quad (3.7)$$

1. ou alors bougeant suffisamment lentement pour que l'effet Doppler joue un rôle négligeable.

2. Notons que l'approximation du champ tournant nécessite l'inégalité  $|\kappa| \ll \omega_0$ , qui est en pratique très bien vérifiée dans toutes les expériences menées avec des atomes froids.

La dérivée du membre de gauche de cette équation fait intervenir :

$$\frac{d}{dt} [c_n |\psi_n(\boldsymbol{\lambda})\rangle] = \dot{c}_n |\psi_n(\boldsymbol{\lambda})\rangle + c_n \frac{d|\psi_n(\boldsymbol{\lambda})\rangle}{dt} \quad \text{avec} \quad \frac{d|\psi_n(\boldsymbol{\lambda})\rangle}{dt} = \dot{\boldsymbol{\lambda}} \cdot |\nabla \psi_n(\boldsymbol{\lambda})\rangle \quad (3.8)$$

où on a utilisé la notation compacte pour le gradient d'un état propre par rapport aux composantes du vecteur  $\boldsymbol{\lambda}$  :

$$|\nabla \psi_\ell(\boldsymbol{\lambda})\rangle \equiv \nabla_{\boldsymbol{\lambda}} [|\psi_\ell(\boldsymbol{\lambda})\rangle]. \quad (3.9)$$

On aboutit au système différentiel vérifié par les  $c_n(t)$  :

$$i\hbar \dot{c}_n = E_n(t) c_n(t) \Leftrightarrow \hbar \sum_{\ell} \alpha_{n,\ell}(t) c_\ell(t), \quad (3.10)$$

où on a posé

$$\hbar \alpha_{n,\ell}(t) = i\hbar \langle \psi_n | \left( \frac{d}{dt} |\psi_\ell\rangle \right) = i\hbar \dot{\boldsymbol{\lambda}} \cdot \langle \psi_n(\boldsymbol{\lambda}) | \nabla \psi_\ell(\boldsymbol{\lambda}) \rangle. \quad (3.11)$$

La quantité  $\alpha_{n,\ell}(t)$  caractérise la vitesse à laquelle « tournent » les vecteurs propres de  $\hat{H}(\boldsymbol{\lambda})$ . Elle peut s'exprimer à l'aide de la dérivée par rapport au temps de l'hamiltonien lui-même. En effet, l'équation aux valeurs propres (3.2) conduit à :

$$\frac{d\hat{H}}{dt} |\psi_\ell\rangle + \hat{H} \left( \frac{d}{dt} |\psi_\ell\rangle \right) = \frac{dE_\ell}{dt} |\psi_\ell\rangle + E_\ell \left( \frac{d}{dt} |\psi_\ell\rangle \right) \quad (3.12)$$

soit en multipliant par  $\langle \psi_n |$  pour  $n \neq \ell$  :

$$\langle \psi_n | \frac{d\hat{H}}{dt} |\psi_\ell\rangle = (E_\ell \Leftrightarrow E_n) \langle \psi_n | \left( \frac{d}{dt} |\psi_\ell\rangle \right) = i\hbar \omega_{n,\ell} \alpha_{n,\ell}. \quad (3.13)$$

où on a introduit la pulsation de Bohr instantanée entre les états  $n$  et  $\ell$

$$\hbar \omega_{n,\ell}(t) = E_n[\boldsymbol{\lambda}(t)] \Leftrightarrow E_\ell[\boldsymbol{\lambda}(t)]. \quad (3.14)$$

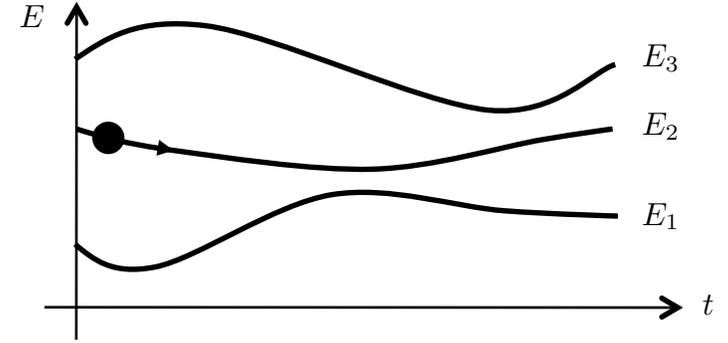


FIGURE 3.1. Variation dans le temps des énergies  $E_n$  associées aux états propres  $|\psi_n\rangle$  de l'hamiltonien  $\hat{H}[\boldsymbol{\lambda}]$ .

### 1-3 Principe de l'approximation adiabatique

Dans ce paragraphe, nous reprenons l'approche du livre de Messiah (2003). Pour simplifier l'analyse, commençons par prendre en compte directement l'évolution liée au terme d'énergie dans le système différentiel (3.10). Pour cela, nous introduisons les coefficients  $\tilde{c}_n(t)$

$$\tilde{c}_n(t) = e^{i \int_0^t E_n(t') dt' / \hbar} c_n(t), \quad (3.15)$$

de sorte que le système différentiel (3.10) peut se réécrire

$$i \dot{\tilde{c}}_n = \Leftrightarrow \sum_{\ell} e^{i \int_0^t \omega_{n,\ell}(t') dt'} \alpha_{n,\ell}(t) \tilde{c}_\ell(t). \quad (3.16)$$

Supposons que l'état initial du système  $|\psi(0)\rangle$  soit un des états propres  $|\psi_\ell\rangle$  de l'hamiltonien (cf. figure 3.1)

$$c_\ell(0) = 1, \quad c_n(0) = 0 \quad \text{si } n \neq \ell. \quad (3.17)$$

Si le paramètre  $\boldsymbol{\lambda}$  est constant, les coefficients  $\alpha_{n,\ell}$  sont nuls et la solution du système (3.16) est immédiate :

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{c}_n(t) = \delta_{n,\ell}. \quad (3.18)$$

Si  $\lambda$  évolue lentement dans le temps, on peut envisager une solution du système différentiel en puissances de  $\lambda$ , avec à l'ordre le plus bas pour les coefficients  $n \neq \ell$  :

$$i \dot{\tilde{c}}_n = \Leftrightarrow e^{i \int_0^t \omega_{n,\ell}(t') dt'} \alpha_{n,\ell}(t), \quad \tilde{c}_n(0) = 0. \quad (3.19)$$

Pour estimer l'évolution des amplitudes de probabilité  $c_n$  pour les états  $\psi_n$  tels que  $n \neq \ell$ , considérons d'abord le cas simple où ni la pulsation de Bohr  $\omega_{n,\ell}$ , ni « la vitesse de rotation »  $\alpha_{n,\ell}$  ne dépendent du temps. Dans ce cas, la solution de (3.19) est très simple :

$$\tilde{c}_n(t) = \frac{1}{\omega_{n,\ell}} (e^{i\omega_{n,\ell}t} \Leftrightarrow 1) \alpha_{n,\ell}. \quad (3.20)$$

En particulier, si le paramètre  $\lambda$  évolue « lentement », le coefficient  $\alpha_{n,\ell}$  est petit et l'amplitude  $c_n$  va rester faible à tout instant :

$$n \neq \ell : \quad \frac{|\alpha_{n,\ell}|}{|\omega_{n,\ell}|} \ll 1 \quad \Rightarrow \quad |c_n(t)| \ll 1 \quad \forall t. \quad (3.21)$$

Dans le cas général, les quantités  $\omega_{n,\ell}$  et  $\alpha_{n,\ell}$  varient dans le temps, mais on peut imposer la condition suffisante suivante pour que la population de chaque état  $\psi_n$ , avec  $n \neq \ell$ , reste petite :

$$\left| \frac{\alpha_{\ell}^{\max}}{\omega_{\ell}^{\min}} \right| = \frac{\text{vitesse angulaire maximum de } \psi_{\ell}}{\text{pulsation de Bohr minimum associée à } \psi_{\ell}} \ll 1. \quad (3.22)$$

Notons que cette condition exclut le cas où l'état initialement occupé  $\psi_{\ell}$  devient momentanément dégénéré avec un autre état  $\psi_n$ .

Quand la condition (3.22) est remplie, on peut donc supposer en bonne approximation<sup>3</sup> que le système suit adiabatiquement l'état  $\psi_{\ell}$ , c'est-à-dire qu'il reste avec une probabilité voisine de 1 dans cet état  $\psi_{\ell}$  :

$$|c_{\ell}(t)| \approx 1 \quad \forall t. \quad (3.23)$$

La question qui reste à étudier est celle de la phase du coefficient  $c_{\ell}(t)$ , et elle fera l'objet de la section suivante.

3. Il y a bien sûr une certaine dose d'optimisme dans cette affirmation. Si la dimension de l'espace de Hilbert est élevée, voire infinie, on peut très bien imaginer des situations où la population de chaque état individuel  $\psi_n$  reste faible, mais la population de l'état de départ  $\psi_{\ell}$  tombe notablement en dessous de 1.

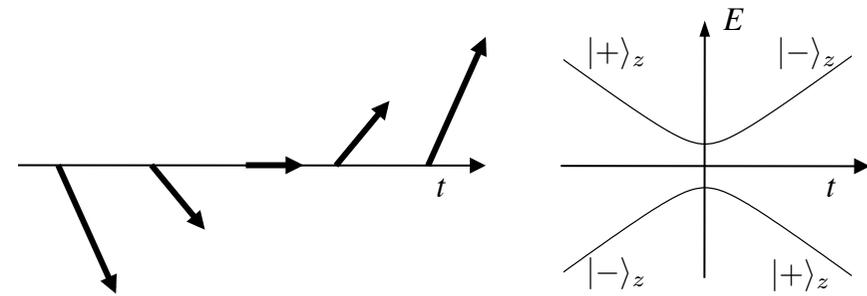


FIGURE 3.2. Gauche : basculement d'un champ magnétique selon la loi (3.24). Droite : énergies des états propres de  $\hat{H}(t)$  donné en (3.25) pour  $\mu B_0 > 0$ . Ces énergies forment les deux branches d'une hyperbole (cf. 3.26).

#### 1-4 Exemple

La condition de validité (3.22) prend une forme remarquablement simple si on considère l'exemple déjà mentionné plus haut d'un moment magnétique  $\mu$  plongé dans un champ magnétique dépendant du temps. Considérons un champ  $\mathbf{B}(t)$  variant selon (cf. figure 3.2) :

$$\mathbf{B}(t) = B_0 (\mathbf{u}_x + (t/\tau) \mathbf{u}_z). \quad (3.24)$$

Ce champ pointe donc dans les directions  $\pm \mathbf{u}_z$  à  $t = \pm \infty$  et bascule en un temps  $\sim 2\tau$  entre ces deux directions, avec une direction parallèle à  $\mathbf{u}_x$  au temps intermédiaire  $t = 0$ . Supposons que le moment magnétique  $\mu$  est associé à un spin 1/2 de sorte que l'hamiltonien s'écrit dans la base  $\{|+\rangle_z, |-\rangle_z\}$  :

$$\hat{H}(t) = \Leftrightarrow \hat{\boldsymbol{\mu}} \cdot \mathbf{B}(t) = \Leftrightarrow \mu B_0 \begin{pmatrix} t/\tau & 1 \\ 1 & \Leftrightarrow t/\tau \end{pmatrix}, \quad \mu > 0. \quad (3.25)$$

Les deux énergies propres varient dans le temps en formant les deux branches d'une hyperbole (figure 3.2) :

$$E_{\pm}(t) = \pm \mu B_0 (1 + t^2/\tau^2)^{1/2} \quad (3.26)$$

Considérons le cas où le spin est préparé dans l'état  $|-\rangle_z$  à  $t = \Leftrightarrow \infty$  (branche d'hyperbole inférieure). Cherchons la probabilité pour que ce

moment magnétique reste sur l'état correspondant à cette branche d'hyperbole au cours du temps, pour finir par conséquent dans l'état  $|+\rangle_z$  à  $t = +\infty$ . Il est simple d'évaluer le critère (3.22) dans ce cas. La pulsation de Bohr (ici pulsation de Larmor) minimale est obtenue à l'instant  $t = 0$  et elle vaut  $\omega_0 = 2\mu B_0/\hbar$ . La vitesse de rotation des axes propres de  $\hat{H}$  est maximale au même point et vaut  $1/(2\tau)$  d'après (3.13). Le critère (3.22) s'écrit donc à un facteur multiplicatif près

$$\omega_0\tau \gg 1. \tag{3.27}$$

Pour que l'approximation adiabatique soit valable, il faut que le moment magnétique effectue de nombreuses rotations pendant la durée  $\tau$ , caractéristique du temps de basculement du champ magnétique.

## 2 La phase de Berry

Nous allons suivre dans ce paragraphe une démarche très proche de celle présentée par Michael Berry dans son article fondateur (Berry 1984). Indiquons toutefois que des précurseurs de cette phase géométrique étaient apparus avant le travail de Berry dans différentes branches de la physique :

- En optique avec les travaux de Pancharatnam (1956). Ce dernier s'était intéressé au changement de phase d'une lumière polarisée de vecteur d'onde donné, quand le faisceau lumineux traverse une série de polariseurs, la polarisation revenant à son état initial en sortie du système optique.
- En physique moléculaire, avec l'analyse par Mead & Truhlar (1979) de certaines subtilités dans l'approximation de Born–Oppenheimer. Mead avait notamment introduit la notion d'*effet Aharonov–Bohm moléculaire* en 1980.

L'histoire de l'élaboration de ces différents concepts est retracée dans les articles de Berry (1989) et de Mead (1992), avec de nombreuses références aux articles « présentant » l'existence de la phase géométrique.

### 2-1 Phase dynamique et phase géométrique

Nous considérons ici un système quantique équivalent à celui de la section précédente, et nous supposons que l'approximation adiabatique est valable. Le système est préparé à l'instant initial  $t = 0$  dans un état propre  $\psi_\ell$  de l'hamiltonien  $\hat{H}[\lambda(0)]$  et on suppose qu'il reste dans cet état à chaque instant

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t) |\psi_n[\lambda(t)]\rangle \approx c_\ell(t) |\psi_\ell[\lambda(t)]\rangle. \tag{3.28}$$

Le coefficient  $c_\ell$  est solution de l'équation déduite de (3.10)

$$\begin{aligned} i\hbar \dot{c}_\ell &= \left[ E_\ell(t) \Leftrightarrow i\hbar \dot{\lambda} \cdot \langle \psi_\ell | \nabla \psi_\ell \rangle \right] c_\ell, \\ &= \left[ E_\ell(t) \Leftrightarrow \dot{\lambda} \cdot \mathcal{A}_\ell(\lambda) \right] c_\ell, \end{aligned} \tag{3.29}$$

où l'on a introduit le vecteur réel<sup>4</sup> appelé *connexion de Berry*

$$\mathcal{A}_\ell(\lambda) = i\hbar \langle \psi_\ell | \nabla \psi_\ell \rangle, \tag{3.31}$$

Cette connexion de Berry va jouer le rôle de potentiel vecteur dans ce qui va suivre.

L'équation d'évolution (3.29) pour l'amplitude  $c_\ell$  s'intègre simplement pour donner :

$$c_\ell(t) = e^{i\Phi^{\text{dyn.}}(t)} e^{i\Phi^{\text{geom.}}(t)} c_\ell(0) \tag{3.32}$$

où on a introduit la *phase dynamique*

$$\Phi^{\text{dyn.}}(t) = \Leftrightarrow \frac{1}{\hbar} \int_0^t E_\ell(t') dt' \tag{3.33}$$

et la *phase géométrique*

$$\Phi^{\text{geom.}}(t) = \frac{1}{\hbar} \int_0^t \dot{\lambda}(t') \cdot \mathcal{A}_\ell[\lambda(t')] dt' = \frac{1}{\hbar} \int_{\lambda(0)}^{\lambda(t)} \mathcal{A}_\ell(\lambda) \cdot d\lambda. \tag{3.34}$$

La dernière intégrale est prise le long de ligne  $\lambda(t')$ , pour  $t'$  allant de 0 à  $t$ .

Cette distinction entre les deux phases est assez naturelle :

4. Pour montrer que  $\mathcal{A}_\ell$  est réel, utilisons le fait que le vecteur  $|\psi_\ell(\lambda)\rangle$  est normé :

$$\langle \psi_\ell | \psi_\ell \rangle = 1 \Rightarrow \langle \nabla \psi_\ell | \psi_\ell \rangle + \langle \psi_\ell | \nabla \psi_\ell \rangle = 0 \Rightarrow \langle \psi_\ell | \nabla \psi_\ell \rangle \text{ imaginaire.} \tag{3.30}$$

1. La phase dynamique est la phase habituelle qui apparaît même pour un système indépendant du temps ; c'est elle qui est responsable du « mouvement » en mécanique quantique, quand un système donné est préparé dans une superposition d'états propres d'énergies différentes.
2. La phase géométrique ne dépend que de la « trajectoire » suivie par le paramètre  $\lambda$  au cours de l'évolution. Elle ne dépend pas du temps mis pour aller de  $\lambda(0)$  à  $\lambda(t)$ , pourvu que ce temps soit suffisamment long pour assurer la validité de l'approximation adiabatique.

### 2-2 Le cas d'un circuit fermé

Un cas particulier important de l'analyse qui précède est celui d'une boucle fermée  $\mathcal{C}$  pour le paramètre  $\lambda$  :

$$\lambda(0) \Leftrightarrow \lambda(t) \Leftrightarrow \lambda(T) = \lambda(0). \quad (3.35)$$

La phase géométrique est donnée par alors l'intégrale de la connexion de Berry sur cette boucle

$$\Phi^{\text{geom.}}(\mathcal{C}) = \frac{1}{\hbar} \oint_{\mathcal{C}} \mathcal{A}_\ell(\lambda) \cdot d\lambda, \quad (3.36)$$

expression qu'il est évidemment tentant de rapprocher de la phase de Aharonov–Bohm rencontrée à un chapitre précédent. L'approfondissement de cette analogie va nous occuper dans le reste de ce cours.

Signalons tout de suite la propriété essentielle suivante : la phase géométrique  $\Phi^{\text{geom.}}(\mathcal{C})$  obtenue pour un circuit fermé est *indépendante* du choix de jauge utilisé pour la définition des états propres  $|\psi_n\rangle$ . Supposons que l'on fasse la transformation

$$|\psi_n(\lambda)\rangle \Leftrightarrow |\tilde{\psi}_n(\lambda)\rangle = e^{i\Omega(\lambda)/\hbar} |\psi_n(\lambda)\rangle. \quad (3.37)$$

La connexion de Berry est alors modifiée de la manière suivante :

$$\tilde{\mathcal{A}}_\ell(\lambda) = \mathcal{A}_\ell(\lambda) \Leftrightarrow \nabla\Omega(\lambda) \quad (3.38)$$

Dans une intégrale sur un circuit fermé, la contribution du terme additionnel

$$\Leftrightarrow \oint \nabla\Omega(\lambda) \cdot d\lambda \quad (3.39)$$

est nulle, ce qui assure l'invariance de jauge de  $\Phi^{\text{geom.}}(\mathcal{C})$ . Cette phase géométrique est donc une quantité physique intrinsèque du système et de son histoire, qui répond à la question

« Par où est passé le système lors de son voyage ? »

alors que la phase dynamique (elle aussi invariante de jauge puisqu'elle ne dépend que des valeurs propres, mais pas des états propres) fournit la réponse à l'autre question :

« Combien de temps a duré ce voyage ? »

### 2-3 Courbure de Berry et champ magnétique artificiel

Nous allons supposer à partir de maintenant que le paramètre  $\lambda$  évolue dans un espace à trois dimensions :

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3). \quad (3.40)$$

C'est notamment le cas quand ce paramètre représente la position du centre de masse d'un atome ou la quasi-impulsion d'une particule dans un potentiel périodique. On peut alors utiliser la formule de Kelvin–Stokes pour transformer l'intégrale curviligne (3.36) par une intégrale sur une surface  $\mathcal{S}$  s'appuyant sur le contour  $\mathcal{C}$  :

$$\Phi^{\text{geom.}}(\mathcal{C}) = \frac{1}{\hbar} \iint_{\mathcal{S}} \mathcal{B}_\ell \cdot d^2\mathcal{S} \quad (3.41)$$

où on a introduit la *courbure de Berry* :

$$\mathcal{B}_\ell = \nabla \times \mathcal{A}_\ell. \quad (3.42)$$

Le calcul du rotationnel se développe sans difficulté

$$\mathcal{B}_\ell = i\hbar \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \langle \psi_\ell | \partial_1 \psi_\ell \rangle \\ \langle \psi_\ell | \partial_2 \psi_\ell \rangle \\ \langle \psi_\ell | \partial_3 \psi_\ell \rangle \end{pmatrix} = i\hbar \begin{pmatrix} \langle \partial_2 \psi_\ell | \partial_3 \psi_\ell \rangle \Leftrightarrow \langle \partial_3 \psi_\ell | \partial_2 \psi_\ell \rangle \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

avec  $\partial_i = \frac{\partial}{\partial \lambda_i}$ , ce qui peut encore s'écrire sous forme compacte :

$$\mathcal{B}_\ell = i\hbar \langle \nabla \psi_\ell | \times | \nabla \psi_\ell \rangle, \quad (3.44)$$

où  $\mathcal{B}_\ell$  est une quantité réelle, dont on pressent l'analogie avec un champ magnétique. Pour approfondir ce point, nous allons regarder l'influence d'un changement de jauge quantique sur cette quantité.

## 2-4 Influence d'un changement de jauge

Nous avons déjà noté que dans la transformation

$$|\psi_n(\boldsymbol{\lambda})\rangle \Leftrightarrow |\tilde{\psi}_n(\boldsymbol{\lambda})\rangle = e^{i\Omega(\boldsymbol{\lambda})/\hbar} |\psi_n(\boldsymbol{\lambda})\rangle.$$

la connexion de Berry était modifiée de la manière suivante

$$\mathcal{A}_\ell(\boldsymbol{\lambda}) \Leftrightarrow \tilde{\mathcal{A}}_\ell(\boldsymbol{\lambda}) = \mathcal{A}_\ell(\boldsymbol{\lambda}) \Leftrightarrow \nabla\Omega.$$

En prenant le rotationnel de cette équation, il est alors immédiat d'en déduire

$$\mathcal{B}_\ell(\boldsymbol{\lambda}) \Leftrightarrow \tilde{\mathcal{B}}_\ell(\boldsymbol{\lambda}) = \mathcal{B}_\ell(\boldsymbol{\lambda}) \quad (3.45)$$

La courbure de Berry  $\mathcal{B}_\ell(\boldsymbol{\lambda})$  étant invariante de jauge, on peut considérer qu'il s'agit d'une quantité physique du système, tout comme la phase de Berry attachée à un circuit fermé  $\mathcal{C}$ . Toutefois, à la différence de la phase géométrique qui caractérise une trajectoire dans l'espace de  $\boldsymbol{\lambda}$ , la courbure de Berry est une quantité locale, tout comme le champ magnétique en électromagnétisme classique.

Les résultats trouvés pour  $\Phi^{\text{geom.}}$ ,  $\mathcal{A}_\ell$  et  $\mathcal{B}_\ell$  présentent donc une similitude profonde avec ceux obtenus pour une charge se déplaçant dans un champ magnétique. Dans le cas particulier où le paramètre  $\boldsymbol{\lambda}$  désigne la position  $\mathbf{r}$  de la particule, on a la correspondance directe

$$\boldsymbol{\lambda} \longleftrightarrow \mathbf{r}, \quad \mathcal{A}_\ell \longleftrightarrow q\mathbf{A}, \quad \mathcal{B}_\ell \longleftrightarrow q\mathbf{B}. \quad (3.46)$$

et la connexion de Berry  $\mathcal{A}_\ell$  a dans ce cas la dimension d'une impulsion.

Pour les calculs explicites, il peut être utile de disposer d'une expression de  $\mathcal{B}_\ell$  pour laquelle l'invariance de jauge est manifeste. Pour cela, repartons de l'expression (3.43) et introduisons une relation de fermeture dans les différents termes :

$$\langle \partial_2 \psi_\ell | \partial_3 \psi_\ell \rangle \Leftrightarrow \langle \partial_3 \psi_\ell | \partial_2 \psi_\ell \rangle = \sum_n \langle \partial_2 \psi_\ell | \psi_n \rangle \langle \psi_n | \partial_3 \psi_\ell \rangle \Leftrightarrow \langle \partial_3 \psi_\ell | \psi_n \rangle \langle \psi_n | \partial_2 \psi_\ell \rangle. \quad (3.47)$$

Remarquons que le terme  $n = \ell$  de la somme a une contribution nulle, en raison de la relation

$$\langle \psi_\ell | \psi_\ell \rangle = 1 \quad \Rightarrow \quad \langle \partial_j \psi_\ell | \psi_\ell \rangle + \langle \psi_\ell | \partial_j \psi_\ell \rangle = 0. \quad (3.48)$$

Par ailleurs, l'équation aux valeurs propres  $\hat{H}|\psi_\ell\rangle = E_\ell|\psi_\ell\rangle$  donne après différenciation :

$$(\partial_j \hat{H})|\psi_\ell\rangle + \hat{H}|\partial_j \psi_\ell\rangle = (\partial_j E_\ell)|\psi_\ell\rangle + E_\ell|\partial_j \psi_\ell\rangle \quad (3.49)$$

soit, pour  $n \neq \ell$  :

$$\langle \psi_n | \partial_j \hat{H} | \psi_\ell \rangle = (E_\ell \Leftrightarrow E_n) \langle \psi_n | \partial_j \psi_\ell \rangle. \quad (3.50)$$

En reportant cette expression dans (3.47), puis dans (3.43), on arrive à l'expression suivante pour la courbure de Berry :

$$\mathcal{B}_\ell(\boldsymbol{\lambda}) = i\hbar \sum_{n \neq \ell} \frac{\langle \psi_\ell | \nabla \hat{H} | \psi_n \rangle \times \langle \psi_n | \nabla \hat{H} | \psi_\ell \rangle}{(E_\ell \Leftrightarrow E_n)^2}. \quad (3.51)$$

Sous cette forme, l'invariance de jauge est manifeste puisque chaque terme de la somme est inchangé quand on modifie la phase d'un ou plusieurs états propres  $|\psi_n\rangle$ . Cette expression est bien appropriée aux calculs numériques, dans lesquels il n'est pas toujours facile d'imposer une phase régulière aux différents états propres issus de la diagonalisation de  $\hat{H}$ .

**Remarque 1.** On a supposé dans tout ce qui précède que l'approximation adiabatique était valable, ce qui nécessite que l'état  $\psi_\ell$  ne soit jamais de même énergie qu'un autre état  $\psi_n$ . On voit plus précisément sur (3.51) que si l'énergie de l'état  $\psi_\ell$  se rapproche de celle d'un état  $\psi_n$ , le terme correspondant de la somme va devenir très important, voire diverger s'il existe un point  $\boldsymbol{\lambda}$  où les deux énergies ont égales.

**Remarque 2.** Nous avons défini une courbure de Berry pour chaque état propre  $\psi_\ell$  de l'hamiltonien. Considérons maintenant la quantité

$$\sum_\ell \mathcal{B}_\ell(\boldsymbol{\lambda}). \quad (3.52)$$

Il est clair d'après (3.51) que cette quantité est toujours nulle. En effet chaque couple d'états propres  $(\psi_\ell, \psi_n)$  contribue deux fois à la somme, ces deux contributions étant opposées.

### 3 Exemples

#### 3-1 Spin dans un champ magnétique extérieur

Un des exemples les plus simples dans lesquels la phase de Berry apparaît porte sur le cas déjà évoqué plus haut d'un moment magnétique  $\hat{\mu}$  associé à un spin  $S = 1/2$  :

$$\hat{\mu} = \mu \hat{\sigma}, \quad (3.53)$$

où les  $\hat{\sigma}_i, i = x, y, z$  sont les trois matrices de Pauli :

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & \text{↯} \\ \text{↵} & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \text{↯} \end{pmatrix}. \quad (3.54)$$

Ce moment magnétique est plongé dans un champ magnétique extérieur  $\mathbf{B}$ . Nous avons déjà introduit l'hamiltonien de couplage

$$\hat{H} = \text{↯}\mathbf{B} \cdot \hat{\mu} = \frac{\hbar\omega}{2} \mathbf{n} \cdot \hat{\sigma} \quad (3.55)$$

où la pulsation de Larmor  $\omega$  est définie par

$$\frac{\hbar\omega}{2} = \text{↯}\mu B, \quad (3.56)$$

où  $\mathbf{n}$  est le vecteur unitaire repérant la direction du champ magnétique ( $\mathbf{n} = \mathbf{B}/B$ ). Les états propres de l'hamiltonien sont notés  $|\pm : \mathbf{n}\rangle$  et ont pour énergie  $\pm\hbar\omega/2$ . Dans ce problème, le champ extérieur joue le rôle du paramètre  $\lambda$  de sorte que

$$\lambda \equiv \mathbf{B}, \quad \nabla H = \text{↯}\hat{\mu}. \quad (3.57)$$

Le calcul de la courbure de Berry définie en (3.51) est alors simple puisqu'un seul terme figure dans la somme sur  $n \neq \ell$  :

$$\mathcal{B}_+ = i\hbar \frac{\langle + : \mathbf{n} | \hat{\mu} | \text{↯} : \mathbf{n} \rangle \times \langle \text{↯} : \mathbf{n} | \hat{\mu} | + : \mathbf{n} \rangle}{(\hbar\omega)^2}, \quad \mathcal{B}_\ominus = \text{↯}\mathcal{B}_+. \quad (3.58)$$

Le calcul du numérateur de cette expression est un peu technique, mais ne pose pas de difficulté de principe. Pour le simplifier, supposons que  $\mathbf{n}$  est parallèle à l'axe  $z$ . On a alors :

$$\langle + : \mathbf{u}_z | \hat{\mu} | \text{↯} : \mathbf{u}_z \rangle = \mu(\mathbf{u}_x + i\mathbf{u}_y), \quad (3.59)$$

de sorte que le numérateur est égal à  $\mu^2 (\mathbf{u}_x + i\mathbf{u}_y) \times (\mathbf{u}_x \text{↯} i\mathbf{u}_y) = \text{↯}2\mu^2 \mathbf{u}_z$ . En revenant à une orientation quelconque pour  $\mathbf{B}$ , on trouve :

$$\mathcal{B}_+ = +\hbar \frac{\mathbf{B}}{2B^3}, \quad \mathcal{B}_\ominus = \text{↯}\hbar \frac{\mathbf{B}}{2B^3}. \quad (3.60)$$

Cette formule permet d'évaluer directement la phase de Berry acquise par le moment magnétique quand le champ magnétique  $\mathbf{B}$  effectue lentement un contour fermé<sup>5</sup>

$$\mathcal{C} : \quad \mathbf{B}(0) \rightarrow \mathbf{B}(t) \rightarrow \mathbf{B}(T) = \mathbf{B}(0). \quad (3.61)$$

Le résultat général (3.41) s'écrit dans ce cas particulier

$$\Phi_{\pm}^{\text{geom.}}(\mathcal{C}) = \frac{1}{\hbar} \iint_S \mathcal{B}_{\pm} \cdot d^2\mathbf{S} = \pm \iint_S \frac{\mathbf{B}}{2B^3} \cdot d^2\mathbf{S} = \pm \frac{\Omega}{2}, \quad (3.62)$$

où la surface  $S$  s'appuie sur le contour  $\mathcal{C}$ , et où  $\Omega$  désigne l'angle solide sous-tendu par  $\mathcal{C}$  depuis l'origine  $\mathbf{B} = 0$ .

L'expérience a été menée peu de temps après la proposition de Berry sur un jet de neutrons par Bitter & Dubbers (1987). Les neutrons de vitesse  $v = 500$  m/s se propagent à l'intérieur d'un solénoïde long de 40 cm dans lequel règne un champ magnétique hélicoïdal, avec une composante uniforme selon  $z$  et tournant dans le plan  $xy$  (figure 3.3). L'enroulement est tel que le champ  $\mathbf{B}$  fait un tour complet sur la longueur du solénoïde : on a bien une trajectoire fermée dans l'espace des paramètres. L'état de polarisation des neutrons à l'entrée du solénoïde est ajustable et peut se décomposer sur les deux états propres locaux  $|\pm\rangle$ . La différence entre les phases accumulées par chaque composante se traduit par une rotation de la polarisation en sortie de solénoïde. L'expérience a donné des résultats en excellent accord avec la prédiction de Berry : la phase accumulée est proportionnelle à l'angle solide décrit par le champ magnétique  $\mathbf{B}$  le long de la trajectoire des neutrons. Cette expérience a ensuite été reprise avec des atomes neutres par Miniatura et al. (1992).

5. Rappelons encore une fois l'hypothèse suivante : il n'y a pas de dégénérescence entre les niveaux d'énergie de  $\hat{H}$ , ce qui signifie dans ce cas que le contour ne passe pas par le champ nul  $\mathbf{B} = 0$ . Si le contour passait par ce point, il ne serait pas possible d'utiliser l'approximation adiabatique et le résultat (3.60) perdrait son sens.

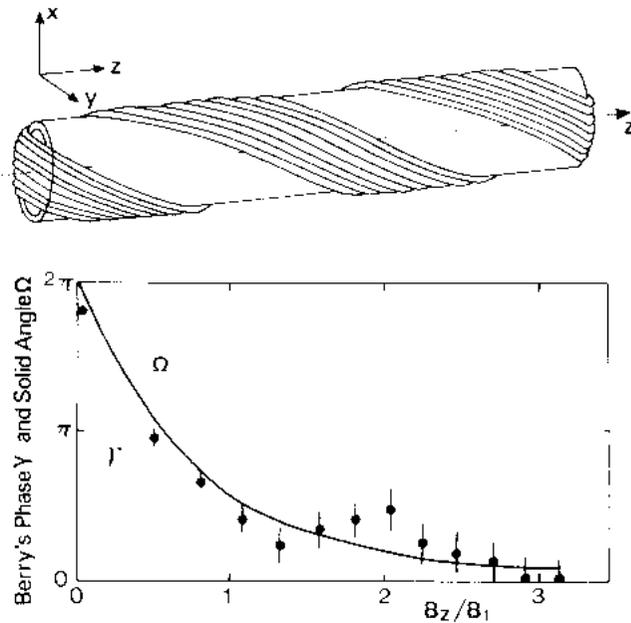


FIGURE 3.3. Haut : Solénoïde utilisé par Bitter & Dubbers (1987) pour mettre en évidence la phase de Berry sur le spin d'un jet de neutrons se propageant selon la direction  $z$ . Bas : comparaison de la phase de Berry accumulée par un neutron et l'angle solide décrit par le champ magnétique le long de la trajectoire.

### 3-2 Lien avec le transport parallèle

Nous avons obtenu l'expression de la phase de Berry en utilisant des concepts quantiques : équation de Schrödinger, phase d'un vecteur d'état, etc. Néanmoins, des notions équivalentes apparaissent en physique classique (Hannay 1985); nous allons en donner un exemple basé sur la notion de transport parallèle.

Considérons une sphère centrée en  $r = 0$ , par exemple la surface de la Terre, et donnons-nous un vecteur  $e_i$  en un point initial donné  $r_i$  de la sphère, repéré par sa latitude  $\theta_i$  et sa longitude  $\varphi_i$ . On définit la notion de transport parallèle de ce vecteur vers un autre point  $r$  de la sphère en

imposant :

- que le vecteur transporté reste tangent à la sphère, soit  $e \cdot r = 0$  à chaque instant,
- qu'on n'induisse pas de torsion normale à la surface de la sphère durant le transport. Étant donné le trièdre direct

$$\{e, e', r\} \quad \text{avec} \quad e' = r \times e, \quad (3.63)$$

le vecteur  $\Omega$  décrivant à chaque instant la rotation de ce trièdre par l'intermédiaire de

$$\dot{e} = \Omega \times e, \quad \dot{r} = \Omega \times r, \quad \dot{e}' = \Omega \times e', \quad (3.64)$$

doit vérifier

$$\Omega \cdot r = 0. \quad (3.65)$$

En d'autres termes, l'évolution des vecteurs  $e$  et  $e'$  doit vérifier

$$e \cdot \dot{e}' = 0, \quad \dot{e} \cdot e' = 0. \quad (3.66)$$

Supposons que l'on fasse un transport parallèle le long d'un circuit fermé  $C$  à la surface de la sphère. Partant d'un vecteur  $e_i$ , le calcul (non trivial) montre que le vecteur  $e_f$  auquel on aboutit après transport sur ce circuit a tourné autour de  $r$  d'un angle  $\alpha(C)$ , qui n'est autre que l'angle solide sous-tendu par  $C$  depuis le centre de la sphère. La même rotation<sup>6</sup> apparaît pour le vecteur  $e'_i$ , ce qui permet de mettre ce résultat du transport parallèle sous une forme très voisine de la phase géométrique de Berry :

$$\begin{aligned} C: \quad \Psi_i = e_i + ie'_i &\Leftrightarrow \Psi_f = e_f + ie'_f \\ &= (e_i \cos \alpha + e'_i \sin \alpha) + i(\Leftrightarrow e_i \sin \alpha + e'_i \cos \alpha) \\ &= e^{i\alpha} \Psi_i. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Nous n'allons pas prouver cette relation dans le cas général (voir par exemple Berry (1989)), mais vérifions-là sur un exemple (figure 3.4). Partons du point  $r$  situé sur l'équateur avec une longitude  $\varphi_i = 0$  et prenons  $e_i$  pointant vers le pôle et  $e'_i$  aligné avec l'équateur :

$$\text{Départ sur l'équateur, } \varphi = 0: \quad e_i = \mathbf{u}_z, \quad e'_i = \Leftrightarrow \mathbf{u}_y. \quad (3.68)$$

6. C'est forcément la même puisqu'on a imposé que le trièdre  $\{e, e', r\}$  reste orthogonal et direct lors du transport.

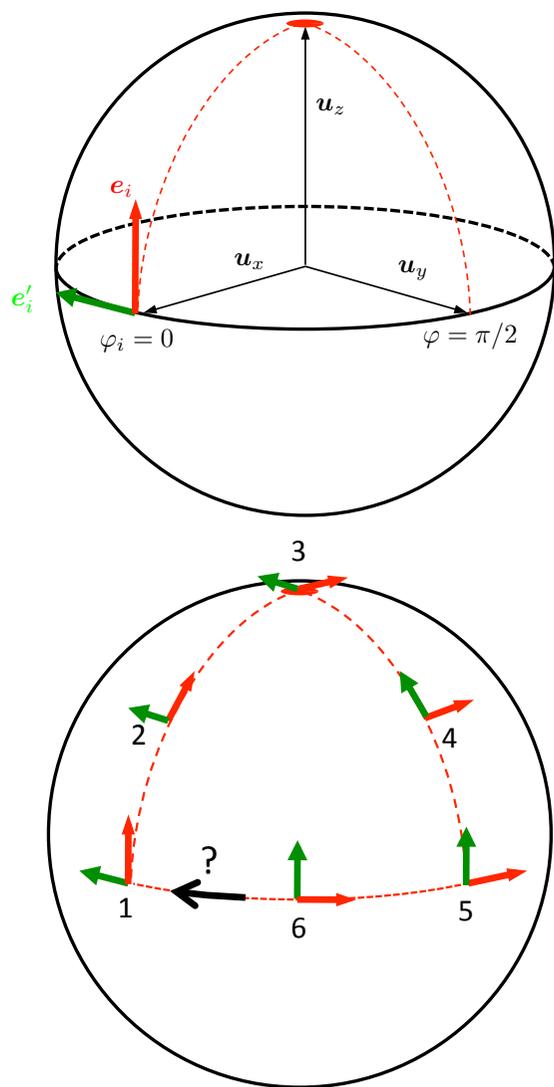


FIGURE 3.4. Transport parallèle : on a représenté en haut la situation de départ présentée à l'équation (3.68). Le dessin du bas représente 6 étapes du transport décrit dans le texte. Quand on complète la boucle après l'étape 6, la paire de vecteurs  $e, e'$  ne coïncide plus avec les vecteurs de départ  $e_i, e'_i$ .

Suivons le chemin qui monte le long du méridien depuis l'équateur jusqu'au pôle nord. On a alors :

$$\text{Pôle nord : } e = \Leftrightarrow u_x, \quad e' = \Leftrightarrow u_y. \tag{3.69}$$

Une fois au pôle, redescendons le long d'un autre méridien, plus précisément celui de longitude  $\varphi = \pi/2$ . On voit qu'une fois arrivés sur l'équateur, les vecteurs  $e, e'$  ont été transportés en

$$\text{Equateur, } \varphi = \pi/2 : \quad e = \Leftrightarrow u_x, \quad e' = +u_z. \tag{3.70}$$

Pour fermer le circuit, il reste à effectuer un quart de tour sur l'équateur, qui ne change pas  $e'$  et qui envoie  $e$  sur  $u_y$  :

$$\text{Fin sur l'équateur, } \varphi = 0 : \quad e_f = u_y, \quad e'_f = u_z. \tag{3.71}$$

Les deux vecteurs  $e$  et  $e'$  ont donc tourné d'un angle  $\pi/2$  lors de ce transport parallèle le long du contour  $\mathcal{C}$ . Ce résultat est en accord avec la formule générale (3.67), puisque ce contour fermé sous-tend un angle solide (négatif) de valeur absolue égale à  $1/8^{\text{ème}}$  de  $4\pi$ , donc  $\pi/2$  :

$$\Psi_i = u_z \Leftrightarrow iu_y \rightarrow \Psi_f = u_y + iu_z = e^{i\pi/2} \Psi_i. \tag{3.72}$$

### 3-3 Le pendule de Foucault

Un exemple célèbre de transport parallèle, et par conséquent de phase géométrique, est le pendule de Foucault. Rappelons que dans l'expérience de Foucault, on considère un pendule suspendu en un point lié au référentiel terrestre et on voit le plan d'oscillation du pendule tourner avec une vitesse angulaire

$$\Omega = \Omega_0 \sin \lambda \tag{3.73}$$

où  $\Omega$  est la vitesse angulaire de rotation sur elle-même [ $1/(24 \text{ heures})$ ] et  $\lambda$  la latitude du lieu. Sur l'équateur, il n'y a pas de précession du plan d'oscillation ; aux pôles, la précession se fait en 24 heures<sup>7</sup>. La précession se fait dans le sens horaire dans l'hémisphère nord et dans le sens anti-horaire dans l'hémisphère sud.

7. Le phénomène est alors trivial, puisque le point d'accroche du pendule ne bouge pas.

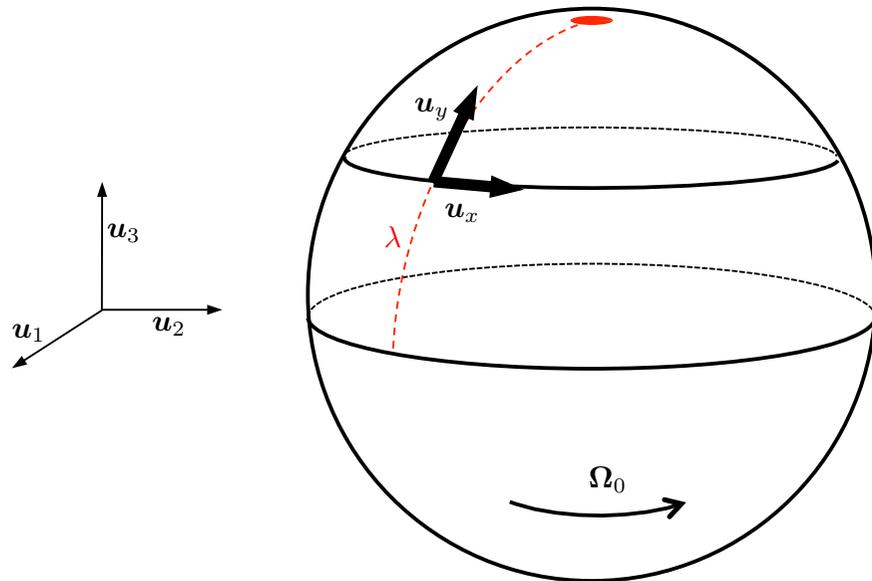


FIGURE 3.5. Repérage d'un point à la surface de la Terre pour l'analyse du mouvement du pendule de Foucault.

Rappelons le traitement mathématique de l'oscillation du pendule. On commence par se donner un référentiel fixe  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$  (cf. figure 3.5), puis un référentiel lié à la Terre,  $\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z$ , la verticale étant orientée selon  $\mathbf{u}_z$ . Dans le plan horizontal, on peut prendre par exemple  $\mathbf{u}_x$  pointant vers l'est et  $\mathbf{u}_y$  pointant vers le nord

$$\mathbf{u}_x = \Leftrightarrow \mathbf{u}_1 \sin(\Omega_0 t) + \mathbf{u}_2 \cos(\Omega_0 t), \tag{3.74}$$

$$\mathbf{u}_y = \Leftrightarrow [\mathbf{u}_1 \cos(\Omega_0 t) + \mathbf{u}_2 \sin(\Omega_0 t)] \sin \lambda + \mathbf{u}_3 \cos \lambda \tag{3.75}$$

L'oscillation du pendule a lieu quasiment dans le plan horizontal et l'équation du mouvement dans ce plan s'écrit en bonne approximation :

$$\ddot{x} = \Leftrightarrow \omega^2 x + 2\Omega \dot{y}, \quad \ddot{y} = \Leftrightarrow \omega^2 y - 2\Omega \dot{x}, \tag{3.76}$$

où  $\omega$  est la pulsation du pendule et où le terme proportionnel à  $\Omega$  est dû à la force de Coriolis. Dans le régime (réaliste) où  $\Omega \ll \omega$ , on résout ces

équations en introduisant la variable complexe  $u = x + iy$ , qui obéit à l'équation

$$\ddot{u} + 2i\Omega \dot{u} + \omega^2 u = 0 \tag{3.77}$$

et on cherche une solution approchée en  $u(t) = \tilde{u}(t) e^{i\omega t}$ , où  $\tilde{u}$  détermine l'orientation du plan d'oscillation du pendule et évolue lentement :  $\tilde{u}(t) \approx \tilde{u}(0) e^{i\Omega t}$ . Plus précisément, l'oscillation se fait le long de la droite de vecteur directeur

$$\mathbf{U} = \Re e(\tilde{u}) \mathbf{u}_x + \Im m(\tilde{u}) \mathbf{u}_y. \tag{3.78}$$

On peut alors vérifier que le vecteur  $\mathbf{U}$  déterminant le plan d'oscillation du pendule évolue en subissant un transport parallèle. Si on note  $\mathbf{V}$  le vecteur du plan horizontal orthogonal à  $\mathbf{U}$ , les expressions précédentes conduisent à

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} \cdot \mathbf{V} = 0, \quad \mathbf{U} \cdot \frac{d\mathbf{V}}{dt} = 0. \tag{3.79}$$

Après un tour complet de la Terre sur elle-même, le vecteur  $\mathbf{U}$  ne revient donc pas en son point de départ : il tourne d'une quantité égale à l'angle solide décrit par la verticale au niveau du pendule, c'est-à-dire  $2\pi(1 - \cos \lambda)$ . C'est précisément le résultat trouvé par Foucault.

### 3-4 Lumière dans une fibre optique

Un autre exemple dans lequel la phase géométrique se manifeste de manière très claire est la propagation d'une lumière polarisée dans une fibre monomode isotrope. Si la fibre est rectiligne, la polarisation ne tourne pas, tout est simple. Si la fibre est courbée, mais planaire, là encore la situation est facile à analyser. L'axe de polarisation perpendiculaire au plan est préservé, et par conséquent l'autre axe de polarisation, contenu dans le plan, tourne avec la fibre.

La situation est plus subtile quand la fibre subit une torsion et qu'elle n'est plus planaire. C'est le cas de la géométrie envisagée par Tomita et Chiao et reproduite en figure 3.6, où la fibre est enroulée de manière hélicoïdale sur un cylindre (Tomita & Chiao 1986). L'enroulement est tel que les vecteurs tangents à la fibre en entrée et en sortie sont égaux.

On envoie une polarisation linéaire en entrée de fibre et on détecte en sortie de fibre une polarisation elle aussi linéaire. Mais cette dernière a

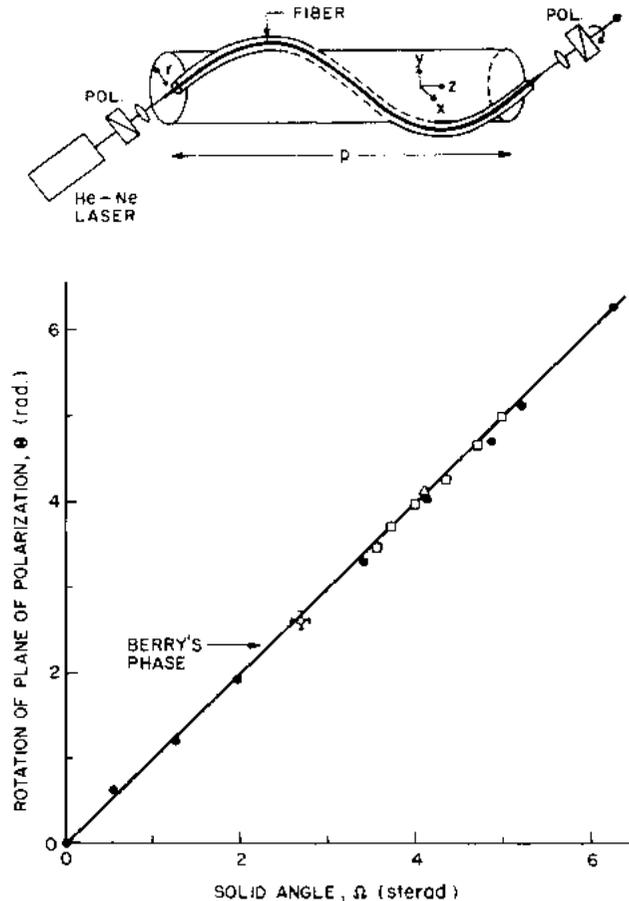


FIGURE 3.6. Expérience de Tomita & Chiao (1986): de la lumière linéairement polarisée est envoyée dans une fibre optique enroulée sur un cylindre. En sortie de fibre, la lumière est toujours polarisée linéairement, mais le vecteur polarisation a tourné. L'angle de rotation est directement relié à l'angle solide balayé par le vecteur tangent à la fibre, comme attendu compte tenu des équations du transport parallèle qui régissent la propagation dans la fibre. Les différents symboles correspondent à différents types d'enroulement.

tourné par rapport à la polarisation initiale, d'un angle directement relié à la phase de Berry, c'est-à-dire l'angle solide décrit par le vecteur tangent à la fibre le long de l'enroulement (figure 3.6). Tomita & Chiao (1986) ont vérifié que cette rotation de la polarisation dépendait de l'angle solide, mais pas de la régularité de l'enroulement sur le cylindre.

Tomita & Chiao (1986) ont initialement interprété leurs résultats en termes quantiques, fondés sur un traitement similaire à celui que nous avons présenté ci-dessus : la polarisation correspond au spin du photon et l'expérience – même si elle est menée avec un grand nombre de photons préparés dans un état cohérent – révèle cette phase quantique. Certains auteurs comme Haldane (1987) ont contesté cette interprétation quantique, en insistant sur le fait qu'il s'agissait d'un simple effet lié à la géométrie différentielle (voir également la réponse de Chiao & Tomita (1987)). Une synthèse instructive de ce débat a été faite par Berry (1990) qui souligne deux points :

- On peut montrer explicitement à partir des équations de Maxwell que la propagation de la lumière dans une fibre se fait en suivant les lois du transport parallèle pour la polarisation de la lumière (Berry 1987). Le lien avec la phase géométrique classique en découle naturellement.
- La question de savoir s'il s'agit d'un phénomène classique ou quantique est selon Berry un « pseudo-problème » et il appuie cette conclusion en citant Feynman : *The photon equation is just the same as Maxwell's equations*. En d'autres termes, pour les processus en jeu ici, les équations classiques et quantiques sont les mêmes et le débat n'a pas lieu d'être.

## 4 Approche à la Born–Oppenheimer

Nous avons jusqu'ici considéré deux types de variables pour paramétrer notre système. D'une part, nous avons décrit de manière quantique une partie de la dynamique de ce système, les variables associées étant par exemple l'opérateur moment magnétique  $\hat{\mu}$  dans (3.55). D'autre part, nous avons supposé l'existence de variables extérieures au système, traitées ici comme des paramètres classiques, et regroupées sous la dénomination générique  $\lambda$ .

Nous allons dans la suite de ce cours nous intéresser à des situations où ces variables  $\lambda$  sont elles-mêmes quantiques. L'exemple prototype est le suivant : considérons un atome susceptible de bouger dans un champ lumineux. On peut s'intéresser à un traitement classique du mouvement du centre de masse de l'atome, en lui assignant une position  $\mathbf{r}$  (*i.e.*  $\lambda \equiv \mathbf{r}$ ). L'évolution des variables internes de l'atome, c'est-à-dire la dynamique de son cortège électronique, est alors décrite par un hamiltonien  $\hat{H}_{\text{int}}(\mathbf{r})$  décrivant le couplage de l'atome au point  $\mathbf{r}$  avec le champ lumineux. Mais on peut également avoir besoin d'une description quantique du mouvement du centre de masse des atomes, par exemple lorsque ces derniers sont suffisamment froids pour que le caractère ondulatoire de leur mouvement joue un rôle important dans la dynamique considérée. La position  $\mathbf{r}$  devient alors un opérateur,  $\hat{r}$ , conjugué à l'opérateur position  $\hat{p}$ .

La question qu'il nous faut alors aborder est la suivante : comment les résultats précédents, comme l'existence d'une courbure de Berry, se transposent-ils au cas d'une description quantique ? Nous allons voir que cette transposition est en faite très directe, et que l'on aboutit à un hamiltonien en parfaite analogie avec celui d'une particule chargée en mouvement dans un champ magnétique (Berry 1989; Mead & Truhlar 1979; Moody et al. 1989): la phase de Berry fournit bien un moyen de générer un champ magnétique artificiel.

#### 4-1 Traitement quantique des « variables lentes »

Nous allons considérer dans ce qui suit une particule de masse  $M$ , d'opérateurs position et impulsion  $\hat{r}$  et  $\hat{p} = \leftrightarrow \hbar \nabla_{\mathbf{r}}$ , dotée d'une dynamique interne décrite par l'hamiltonien  $\hat{H}_{\text{int}}(\mathbf{r})$ . La dépendance en  $\mathbf{r}$  de cet hamiltonien interne est due au fait que la particule peut posséder un dipôle électrique ou magnétique (permanent ou induit), et que ce dipôle peut interagir avec des champs électromagnétiques imposés de l'extérieur. L'hamiltonien total décrivant le mouvement de cette particule est donc

$$\hat{H}_{\text{tot}} = \frac{\hat{p}^2}{2M} \otimes \hat{I}_{\text{int}} + \hat{H}_{\text{int}}(\hat{r}). \quad (3.80)$$

Le point de départ de notre traitement va être similaire à ce qui précède. Nous supposons qu'en tout point  $\mathbf{r}$  de l'espace, nous pouvons diagonaliser

l'hamiltonien interne  $\hat{H}_{\text{int}}$  :

$$\hat{H}_{\text{int}}(\mathbf{r})|\psi_n(\mathbf{r})\rangle = E_n(\mathbf{r})|\psi_n(\mathbf{r})\rangle. \quad (3.81)$$

En tout point  $\mathbf{r}$ , l'ensemble  $\{|\psi_n(\mathbf{r})\rangle\}$  forme une base orthonormée de l'espace de Hilbert associé aux degrés de liberté internes de la particule. En pratique, cet espace de Hilbert sera de dimension finie : dimension 2 dans le cas de la modélisation la plus simple d'un « atome à deux niveaux », dimension  $(2J_g + 1) + (2J_e + 1)$  dans le cas plus réaliste d'une transition entre un niveau fondamental de moment cinétique  $J_g$  couplé par un champ lumineux à un niveau excité de moment cinétique  $J_e$ . Notons que pour simplifier, nous supposons que l'hamiltonien interne  $\hat{H}_{\text{int}}$  est indépendant du temps. Les états propres  $|\psi_n(\mathbf{r})\rangle$  et les énergies associées sont donc également indépendants du temps.

L'état quantique *total* de la particule à un instant  $t$ , caractérisant à la fois ses degrés de liberté internes et externes peut s'écrire :

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \sum_n \phi_n(\mathbf{r}, t) |\psi_n(\mathbf{r})\rangle. \quad (3.82)$$

La caractérisation de la dynamique de l'atome se ramène alors à la détermination des amplitudes de probabilité  $\phi_n(\mathbf{r}, t)$  pour trouver la particule au point  $\mathbf{r}$  dans l'état interne  $|\psi_n(\mathbf{r})\rangle$ .

Commençons par injecter cette expression dans l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H}_{\text{tot}} \Psi(\mathbf{r}, t) = \left( \leftrightarrow \frac{\hbar^2}{2M} \Delta + \hat{H}_{\text{int}}(\mathbf{r}) \right) \Psi(\mathbf{r}, t) \quad (3.83)$$

et projetons cette équation sur un état interne donné en la multipliant par  $\langle \psi_n |$  :

$$i\hbar \frac{\partial \phi_n}{\partial t} = \leftrightarrow \frac{\hbar^2}{2M} \sum_{\ell} \langle \psi_n | [\Delta (\phi_{\ell} |\psi_{\ell}\rangle)] + E_n \phi_n \quad (3.84)$$

où nous avons omis les dépendances explicites en  $\mathbf{r}$  et  $t$  pour simplifier l'écriture. À ce stade, aucune approximation n'a été faite et la résolution du système d'équations aux dérivées partielles (3.84) permet en principe d'extraire la dynamique complète de la particule.

## 4-2 Équation de Schrödinger effective

Supposons maintenant que la particule est préparée initialement dans un des états internes  $\psi_\ell$  et que la dynamique de cette particule soit telle que l'on peut supposer en bonne approximation que seul ce état  $\psi_\ell$  reste appréciablement occupé au cours de temps :

$$\forall t : \int |\phi_n(\mathbf{r}, t)|^2 d^3r \ll 1 \quad \text{si } n \neq \ell. \quad (3.85)$$

Il s'agit de l'équivalent de l'approximation adiabatique utilisée plus haut. La validité de cette approximation dépend à la fois de l'état initial  $\phi_\ell(\mathbf{r}, t = 0)$  (les vitesses correspondantes sont-elles suffisamment basses ?) et de la structure de l'hamiltonien  $\hat{H}_{\text{int}}$  (le niveau  $\ell$  ne devient-il pas quasi dégénéré, les accélérations possibles ne sont-elles pas trop fortes ?). Si cette approximation est correcte, ce que nous allons supposer, nous pouvons conserver uniquement le terme  $n = \ell$  dans le système d'équations (3.84) :

$$i\hbar \frac{\partial \phi_\ell}{\partial t} = \Leftrightarrow \frac{\hbar^2}{2M} \langle \psi_\ell | [\Delta (\phi_\ell | \psi_\ell)] \rangle + E_\ell \phi_\ell \quad (3.86)$$

Il reste à expliciter l'action de l'opérateur laplacien :

$$\Delta (\phi_\ell | \psi_\ell) = (\Delta \phi_\ell) | \psi_\ell \rangle + 2 \nabla \phi_\ell \cdot | \nabla \psi_\ell \rangle + \phi_\ell (\Delta | \psi_\ell \rangle), \quad (3.87)$$

quantité qu'on multiplie par le bra  $\langle \psi_\ell |$ . Le premier terme du membre de droite donne simplement  $\Delta \phi_\ell$  et le deuxième terme fait apparaître la connexion de Berry :

$$\mathcal{A}_\ell(\mathbf{r}) = i\hbar \langle \psi_\ell | \nabla \psi_\ell \rangle. \quad (3.88)$$

En utilisant  $\hat{p} = \Leftrightarrow \hbar \nabla$ , le deuxième terme de (3.87) s'écrit

$$2 \nabla \phi_\ell \cdot \langle \psi_\ell | \nabla \psi_\ell \rangle = \frac{2}{\hbar^2} (\mathcal{A}_\ell \cdot \hat{p}) \phi_\ell. \quad (3.89)$$

Finalement, l'équation du mouvement pour l'amplitude de probabilité  $\phi_\ell(\mathbf{r}, t)$  peut se mettre sous la forme d'une équation de Schrödinger effective :

$$i\hbar \frac{\partial \phi_\ell}{\partial t} = \left[ \frac{(\hat{p} \Leftrightarrow \mathcal{A}_\ell(\mathbf{r}))^2}{2M} + E_\ell(\mathbf{r}) + \mathcal{V}_\ell(\mathbf{r}) \right] \phi_\ell(\mathbf{r}, t), \quad (3.90)$$

où on a introduit le *potentiel scalaire*  $\mathcal{V}_\ell$  qui regroupe tous les termes fonction de  $\mathbf{r}$  venant multiplier  $\phi_\ell(\mathbf{r}, t)$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_\ell(\mathbf{r}) &= \Leftrightarrow \frac{\hbar}{2M} \nabla \cdot \mathcal{A}_\ell \Leftrightarrow \frac{\mathcal{A}_\ell^2(\mathbf{r})}{2M} \Leftrightarrow \frac{\hbar^2}{2M} \langle \psi_\ell | (\Delta | \psi_\ell \rangle) \\ &= \frac{\hbar^2}{2M} (\langle \nabla \psi_\ell | \cdot | \nabla \psi_\ell \rangle \Leftrightarrow \langle \nabla \psi_\ell | \psi_\ell \rangle \cdot \langle \psi_\ell | \nabla \psi_\ell \rangle) \\ &= \frac{\hbar^2}{2M} \sum_{n \neq \ell} |\langle \nabla \psi_\ell | \psi_n \rangle|^2 \end{aligned} \quad (3.91)$$

La forme (3.90) pour l'équation du mouvement de  $\phi_\ell(\mathbf{r}, t)$  est très suggestive. Elle est identique à celle régissant le mouvement d'une particule chargée évoluant dans un champ magnétique  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  dérivant du potentiel vecteur  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ . Plus précisément, la connexion de Berry  $\mathcal{A}_\ell(\mathbf{r})$  joue le rôle du potentiel vecteur  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  si on donne par convention une charge  $q = 1$  à la particule. Ceci vient confirmer l'analogie déjà pressentie entre la phase  $\Phi^{\text{A} \in \text{B}}$  de Aharonov–Bohm et la phase géométrique de Berry

$$\Phi^{\text{A} \in \text{B}}(\mathcal{C}) = \frac{q}{\hbar} \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \quad \longleftrightarrow \quad \Phi_\ell^{\text{Berry}}(\mathcal{C}) = \frac{1}{\hbar} \oint_{\mathcal{C}} \mathcal{A}_\ell(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \quad (3.92)$$

En plus du magnétisme orbital artificiel qui apparaît dans (3.90), deux termes viennent contribuer à la dynamique de la particule. Le premier est simplement l'énergie  $E_\ell(\mathbf{r})$ , associée à l'état interne  $|\psi_\ell\rangle$  de la particule. L'origine de ce terme, qui était également à l'origine de la phase dynamique (3.33), est bien claire et nous ne la commenterons pas. L'origine du potentiel scalaire  $\mathcal{V}(\mathbf{r})$  est plus subtile et mérite d'être explorée, ce que nous allons faire dans le paragraphe qui suit.

## 4-3 Interprétation physique du potentiel scalaire

Pour comprendre l'origine du potentiel scalaire  $\mathcal{V}_\ell(\mathbf{r})$  apparaissant dans (3.90), nous allons revenir au formalisme semi-classique, qui consiste à traiter quantiquement les degrés de liberté internes de la particule, mais classiquement ses degrés de liberté externes (position  $\mathbf{r}$  et impulsion  $\mathbf{p}$  du centre de masse).

Commençons par définir l'opérateur force  $\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{r})$  déduit de l'hamiltonien initial :

$$\hat{\mathbf{F}} = \Leftrightarrow \nabla_{\mathbf{r}} \left( \hat{H}_{\text{tot}} \right) = \Leftrightarrow \nabla_{\mathbf{r}} \left( \hat{H}_{\text{int}}(\mathbf{r}) \right). \quad (3.93)$$

Nous remarquons qu'une particule préparée dans l'état interne  $\psi_\ell$  est dans un état propre de  $\hat{H}_{\text{int}}$ , mais pas dans un état propre de  $\hat{\mathbf{F}}$ . En d'autres termes :

$$\langle \hat{\mathbf{F}}^2 \rangle \neq \langle \hat{\mathbf{F}} \rangle^2, \quad (3.94)$$

ce qui signifie que la force agissant sur l'atome subit des fluctuations quantiques autour de sa valeur moyenne. Nous allons voir que ces fluctuations se produisent aux fréquences de Bohr  $\omega_{j\ell} = (E_j \Leftrightarrow E_\ell)/\hbar$  du mouvement quantique interne. L'approximation adiabatique tire parti du fait que ces fréquences sont beaucoup plus élevées que les fréquences caractéristiques du mouvement du centre de masse. Par conséquent, les fluctuations quantiques de la force créent un micro-mouvement de la particule, semblable à celui qui se produit pour des particules chargées dans un piège de Paul. L'énergie cinétique de ce micro-mouvement joue le rôle d'une énergie potentielle pour le mouvement du centre de masse, qui est à l'origine du potentiel scalaire  $\mathcal{V}(\mathbf{r})$  (Aharonov & Stern 1992; Cheneau et al. 2008).

**Opérateur force.** Partant de l'expression suivante pour  $\hat{H}_{\text{int}}(\mathbf{r})$

$$\hat{H}_{\text{int}}(\mathbf{r}) = \sum_n E_n(\mathbf{r}) \hat{P}_n(\mathbf{r}) \quad \text{avec} \quad \hat{P}_n(\mathbf{r}) = |\psi_n(\mathbf{r})\rangle \langle \psi_n(\mathbf{r})|, \quad (3.95)$$

on obtient l'expression de l'opérateur force :

$$\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) = \sum_n (\nabla E_n) \hat{P}_n + E_n \left( \nabla \hat{P}_n \right) \quad (3.96)$$

avec

$$\nabla \hat{P}_n = |\nabla \psi_n\rangle \langle \psi_n| + |\psi_n\rangle \langle \nabla \psi_n|. \quad (3.97)$$

**Force moyenne.** Il est simple de calculer la valeur moyenne de  $\hat{\mathbf{F}}$  quand la particule est dans l'état  $\psi_\ell$ . Le fait que

$$\langle \psi_\ell | \psi_\ell \rangle = 1 \quad \Rightarrow \quad \langle \nabla \psi_\ell | \psi_\ell \rangle + \langle \psi_\ell | \nabla \psi_\ell \rangle = 0 \quad (3.98)$$

entraîne que la contribution du terme en  $\nabla \hat{P}_n$  dans (3.96) s'annule et on obtient simplement

$$\langle \psi_\ell | \hat{\mathbf{F}} | \psi_\ell \rangle = \Leftrightarrow \nabla E_\ell. \quad (3.99)$$

Ce résultat est facilement interprétable : la particule se trouvant sur un niveau interne d'énergie  $E_\ell(\mathbf{r})$ , son centre de masse subit le champ de force dérivant de cette énergie. On retrouve d'ailleurs cette contribution sous forme d'énergie potentielle dans (3.90).

**Fluctuations de la force.** Les fluctuations de l'opérateur force quand la particule est préparée dans l'état interne  $\psi_\ell$  sont caractérisées par la fonction de corrélation

$$C(t, t') = \frac{1}{2} \langle \delta \hat{\mathbf{F}}(\mathbf{r}, t) \cdot \delta \hat{\mathbf{F}}(\mathbf{r}, t') + \delta \hat{\mathbf{F}}(\mathbf{r}, t') \cdot \delta \hat{\mathbf{F}}(\mathbf{r}, t) \rangle, \quad (3.100)$$

où on pose  $\delta \hat{\mathbf{F}} = \hat{\mathbf{F}} \Leftrightarrow \langle \hat{\mathbf{F}} \rangle$  et où les opérateurs dans (3.100) sont calculés en point de vue de Heisenberg. Rappelons ce point de vue ; les opérateurs tels que

$$\hat{Q}_{n,\ell}(\mathbf{r}) = |\psi_n(\mathbf{r})\rangle \langle \psi_\ell(\mathbf{r})| \quad (3.101)$$

dépendent du temps selon l'équation

$$i\hbar \dot{\hat{Q}} = [\hat{Q}, \hat{H}] \quad (3.102)$$

ce qui donne

$$\hat{Q}_{n,\ell}(\mathbf{r}, t) = \hat{Q}_{n,\ell}(\mathbf{r}, 0) e^{i\omega_{n\ell} t}. \quad (3.103)$$

Un calcul relativement long, mais sans difficulté conduit alors à :

$$C(\tau) = \sum_{n \neq \ell} C_n \cos(\omega_{n\ell} \tau), \quad (3.104)$$

où on a posé  $\tau = t \Leftrightarrow t'$  et

$$C_n = \hbar^2 \omega_{n\ell}^2 |\langle \psi_\ell | \nabla \psi_n \rangle|^2. \quad (3.105)$$

**Micro-mouvement.** Pour analyser les conséquences des fluctuations quantiques de la force, considérons le problème classique équivalent ; supposons qu'une particule classique est soumise à une force stochastique  $\mathbf{F}(t)$  telle que :

$$\overline{\mathbf{F}(t)} = 0, \quad \overline{\mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{F}(t')} = C(t \Leftrightarrow t'). \quad (3.106)$$

La transformée de Fourier  $\mathbf{f}(\omega)$  de  $\mathbf{F}(t)$  est telle que

$$\overline{\mathbf{f}(\omega)} = 0, \quad \overline{\mathbf{f}^*(\omega) \cdot \mathbf{f}(\omega')} = \delta(\omega \Leftrightarrow \omega') B(\omega) \quad (3.107)$$

où

$$B(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{n \neq \ell} C_n [\delta(\omega + \omega_{n\ell}) + \delta(\omega \Leftrightarrow \omega_{n\ell})] \quad (3.108)$$

est la transformée de Fourier  $C(\tau)$ . La solution de l'équation du mouvement  $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}$  est

$$\mathbf{p}(t) = \int \frac{\mathbf{f}(\omega)}{i\omega} e^{i\omega t} d\omega \quad (3.109)$$

ce qui correspond à une impulsion moyenne nulle. En revanche, l'énergie cinétique moyenne associée est strictement positive et égale à

$$\frac{\overline{\mathbf{p}^2}}{2M} = \int \frac{B(\omega)}{2M\omega^2} d\omega = \frac{1}{2M} \sum_{n \neq \ell} \frac{C_n}{\omega_{n\ell}^2} \quad (3.110)$$

$$= \frac{\hbar^2}{2M} \sum_{n \neq \ell} |\langle \psi_\ell | \nabla \psi_n \rangle|^2 = \mathcal{V}_\ell(\mathbf{r}). \quad (3.111)$$

Dans le calcul explicite de (3.111), la contribution du dénominateur en  $\omega^{\epsilon 2}$  se compense avec les termes  $\omega_{n\ell}$  qui apparaissent dans l'expression (3.105) de  $C_n$ . Finalement, on retrouve exactement le résultat (3.91) pour le potentiel scalaire, ce qui justifie l'interprétation de ce potentiel comme une énergie cinétique associée au micro-mouvement.

En conclusion, aussi bien le potentiel vecteur  $\mathcal{A}_\ell$  que le potentiel scalaire  $\mathcal{V}_\ell$  peuvent être compris comme des signatures de l'existence d'un espace de Hilbert interne associé à la particule. Quand on fait l'approximation adiabatique et que l'on considère que la particule suit le niveau  $\psi_\ell$ , on pourrait naïvement croire que la seule chose importante est le profil d'énergie  $E_\ell(\mathbf{r})$ . Ce n'est pas le cas : l'existence des autres états internes  $\psi_n$ ,

même s'ils ne sont pas peuplés, se manifeste au travers de ces deux potentiels, en venant donner une phase quantique non nulle sur une trajectoire fermée reliée au flux de la courbure de Berry  $\mathcal{B}_\ell$  (3.47) et en modifiant le profil énergétique par l'intermédiaire du potentiel scalaire  $\mathcal{V}_\ell$  (3.91).

## 5 Références

- Aharonov, Yakir & Ady Stern (1992), « Origin of the geometric forces accompanying Berry's geometric potentials », in *Phys. Rev. Lett.* 69.25, pp. 3593–3597.
- Berry, M. V. (1984), « Quantal phase factors accompanying adiabatic changes », in *Proc. Roy. Soc. London A* 392, pp. 45–57.
- (1987), « Interpreting the anholonomy of coiled light », in *Nature* 326, p. 277.
- (1989), « The Quantum Phase, Five Years After », in *Geometric Phases in Physics*, ed. by A. Shapere & F. Wilczek, Singapore: World Scientific, , pp. 7–28.
- (1990), « Quantum adiabatic anholonomy », in *Anomalies, phases, defects*, ed. by G. Marmo U. M. Bregola & G. Morandi, Bibliopolis, Naples, , pp. 125–181.
- Bitter, T. & D. Dubbers (1987), « Manifestation of Berry's topological phase in neutron spin rotation », in *Phys. Rev. Lett.* 59 (3), pp. 251–254.
- Cheneau, M., S. P. Rath, T. Yefsah, K. J. Gunter, G. Juzeliunas & J. Dalibard (2008), « Geometric potentials in quantum optics : A semi-classical interpretation », in *Europhys. Lett.* 83.6, p. 60001.
- Chiao, Raymond Y. & Akira Tomita (1987), « Tomita and Chiao reply », in *Phys. Rev. Lett.* 59 (15), pp. 1789–1789.
- Haldane, F. D. M. (1987), « Comment on "Observation of Berry's topological phase by use of an optical fiber" », in *Phys. Rev. Lett.* 59 (15), pp. 1788–1788.
- Hannay, J. H. (1985), « Angle variable Holonomy in the adiabatic excursion of an integrable Hamiltonian », in *Journal of Physics A* 18.2, pp. 221–230.
- Mead, C. Alden (1992), « The geometric phase in molecular systems », in *Rev. Mod. Phys.* 64 (1), pp. 51–85.
- Mead, C. Alden & Donald G. Truhlar (1979), « On the determination of Born–Oppenheimer nuclear motion wave functions including complica-

- tions due to conical intersections and identical nuclei », in *J. Chem. Phys.* 70.5, pp. 2284–2296.
- Messiah, A. (2003), *Mécanique Quantique*, Dunod.
- Miniatura, Ch., J. Robert, O. Gorceix, V. Lorent, S. Le Boiteux, J. Reinhardt & J. Baudon (1992), « Atomic interferences and the topological phase », in *Phys. Rev. Lett.* 69 (2), pp. 261–264.
- Moody, J., A. Shapere & F. Wilczek (1989), « Adiabatic Effective Lagrangians », in *Geometric Phases in Physics*, ed. by A. Shapere & F. Wilczek, Singapore: World Scientific, pp. 160–183.
- Pancharatnam, S. (1956), « Generalized Theory of Interference, and Its Applications. Part I. Coherent Pencils », in *Proc. Indian Acad. Sci. A* 44, pp. 247–262.
- Tomita, Akira & Raymond Y. Chiao (1986), « Observation of Berry's Topological Phase by Use of an Optical Fiber », in *Phys. Rev. Lett.* 57 (8), pp. 937–940.

# Chapitre 4

## Magnétisme artificiel pour un atome isolé (partie 1)

### Sommaire

<b>1</b>	<b>Physique dans un référentiel tournant . . . . .</b>	<b>2</b>
1-1	Mise en rotation d'un système quantique . . . . .	2
1-2	Transformation unitaire . . . . .	3
1-3	Interprétation physique . . . . .	4
1-4	Lien entre magnétisme orbital et rotation . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Gaz en rotation . . . . .</b>	<b>6</b>
2-1	Anisotropie tournante . . . . .	6
2-2	Peut-on atteindre la rotation critique $\Omega = \omega$ ? . . . . .	7
2-3	Systèmes invariants par rotation . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Le couplage d'un atome au rayonnement . . . . .</b>	<b>9</b>
3-1	Le modèle d'un atome à deux niveaux . . . . .	9
3-2	Le modèle d'une transition Raman . . . . .	11
3-3	Transitions Raman : alcalins vs. lanthanides . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Potentiel vecteur et scalaire pour un atome . . . . .</b>	<b>14</b>
4-1	Expressions générales . . . . .	15
4-2	Le résultat pour un atome à deux niveaux . . . . .	15
4-3	Le potentiel scalaire dans un réseau « gris » . . . . .	16
<b>5</b>	<b>Références . . . . .</b>	<b>18</b>

À l'issue des cours précédents, nous disposons désormais de pistes pour simuler et caractériser le magnétisme orbital d'une assemblée de particules neutres. Nous souhaitons arriver à un hamiltonien du type :

$$\hat{H} = \frac{(\hat{\mathbf{p}} - \mathbf{A}(\hat{\mathbf{r}}))^2}{2M} + \dots = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2M} - \frac{\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{A}(\hat{\mathbf{r}})}{M} + \dots \quad (4.1)$$

où le potentiel vecteur est « non trivial », c'est-à-dire que

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \neq 0. \quad (4.2)$$

En particulier, le cas très important en pratique d'un champ magnétique uniforme peut être réalisé à partir de potentiels vecteurs qui s'écrivent en jauge symétrique ou en jauge de Landau :

$$\mathbf{A}^{(\text{sym})}(\mathbf{r}) = \frac{B}{2} (-y \mathbf{u}_x + x \mathbf{u}_y), \quad \mathbf{A}^{(\text{Landau})}(\mathbf{r}) = B x \mathbf{u}_y. \quad (4.3)$$

Pour structurer la présentation des principales approches qui ont été explorées récemment dans ce champ de recherche, on peut commencer par cerner plusieurs questions :

- *Quel confinement pour les atomes ?* Nous envisagerons deux réponses possibles à cette question. On peut tout d'abord s'intéresser à des atomes libres ou confinés dans un piège harmonique de raideur assez faible, pour lesquels on va retrouver quasiment à l'identique la notion de niveaux de Landau que nous avons déjà rencontrée. On peut à l'inverse considérer une ou plusieurs particules confinées dans un réseau

optique à l'approximation des liaisons fortes ; cette « discrétisation de l'espace » change quelque peu la nature du problème, qui se ramène alors à l'étude des propriétés topologiques des bandes d'énergie pertinentes.

- *Souhaite-t-on tirer parti de la structure interne des atomes ?* À la différence des électrons dans les solides, nos atomes possèdent une série d'états internes que l'on peut coupler entre eux par l'intermédiaire de faisceaux lumineux. Ce degré de liberté permet en particulier d'envisager la notion de suivi adiabatique d'un niveau habillé, avec la phase de Berry et le champ de jauge géométrique qui vient avec.
- *L'hamiltonien dépend-il explicitement du temps ?* Cette possibilité de moduler temporellement le potentiel agissant sur les atomes est également un degré de liberté fort utile. Ce potentiel peut avoir une fréquence du même ordre que la fréquence cyclotron  $\omega_c$  que l'on cherche à faire apparaître, c'est ce que nous allons rencontrer avec la mise en rotation d'un système. Cette fréquence de modulation peut également être beaucoup grande que  $\omega_c$ , le champ de jauge apparaissant alors comme un terme séculaire résultant d'un micro-mouvement bien choisi. Nous en verrons des exemples pour des atomes confinés dans un réseau optique.

Il n'existe pas (à notre connaissance) de critère universel permettant de privilégier une approche plutôt que l'autre. L'utilisation de plusieurs états internes est par exemple un outil de grande flexibilité, mais ouvre la question de possibles collisions inélastiques entre atomes, qui ne sont pas un problème si les atomes sont tous confinés dans l'état interne d'énergie minimale. Nous allons donc comparer, au fur et à mesure de notre progression, les avantages et les inconvénients liés à chacune de ces méthodes. Dans ce chapitre, nous allons donc nous concentrer sur des atomes libres ou confinés dans un piège harmonique isotrope, de pulsation  $\omega$ . Nous allons passer en revue deux méthodes permettant d'aboutir à l'hamiltonien modèle (4.1), la première fondée sur la mise en rotation du système et la seconde sur l'utilisation explicite de plusieurs états internes atomiques. On pourra consulter l'article de revue récent de Goldman et al. (2013) pour approfondir les notions développées dans ce chapitre [voir aussi l'article de Dalibard et al. (2011) pour une revue plus succincte].

## 1 Physique dans un référentiel tournant

Partant d'un fluide composé de particules neutres de masse  $M$ , une des méthodes les plus simples sur le plan conceptuel pour simuler un magnétisme orbital consiste à le « faire tourner ». On considère une assemblée de particules neutres, et on s'arrange pour que leur environnement (le piège qui les confine) tourne autour de l'axe  $z$  avec une vitesse angulaire  $\Omega$  : l'hamiltonien décrivant les forces extérieures agissant sur les atomes est donc modulé dans le temps avec cette pulsation  $\Omega$ . On peut alors montrer que la dynamique des particules du fluide est équivalente à celle de particules de charge  $q$  plongées dans un champ magnétique tel que

$$q\mathbf{B} = 2M\boldsymbol{\Omega}, \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{\Omega} = \Omega\mathbf{u}_z. \quad (4.4)$$

Cette similarité entre magnétisme orbital et rotation se comprend aisément quand on compare la force de Lorentz responsable du magnétisme et la force de Coriolis qui apparaît dans un référentiel en rotation :

$$\mathbf{F}_{\text{Lorentz}} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad \mathbf{F}_{\text{Coriolis}} = 2M\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}. \quad (4.5)$$

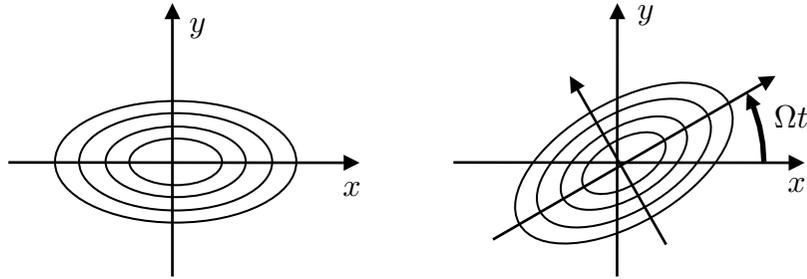
Le but de ce paragraphe est de formaliser cette similarité dans le cadre du formalisme hamiltonien de la physique quantique, et de dégager la signification physique des observables pertinentes.

### 1-1 Mise en rotation d'un système quantique

Considérons pour commencer une particule unique, de masse  $M$ , soumise dans un référentiel galiléen  $\mathcal{R}$  au potentiel indépendant du temps  $V(\mathbf{r})$ . Le mouvement quantique de la particule est décrit par l'équation de Schrödinger avec un hamiltonien indépendant du temps :

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H} \psi \quad \text{avec} \quad \hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2M} + V(\hat{\mathbf{r}}). \quad (4.6)$$

Le potentiel  $V(\hat{\mathbf{r}})$  décrit l'ensemble des facteurs extérieurs agissant sur la particule : potentiel de confinement dans le cas d'une expérience avec un gaz piégé, miroirs et séparateurs de faisceaux dans le cas d'une expérience d'interférométrie. En particulier, pour l'étude d'un gaz de particules et tant



**FIGURE 4.1.** Gauche : courbes équipotentielles pour  $V(\mathbf{r})$ . Droite : courbes équipotentielles à un instant donné pour  $W(\mathbf{r}, t)$ , correspondant à une rotation à vitesse angulaire  $\Omega$  du potentiel initial  $V(\mathbf{r})$ .

que l'hamiltonien est indépendant du temps, la procédure habituelle de la physique statistique s'applique : recherche des états propres, écriture d'un état d'équilibre thermique, calcul des différentes grandeurs à l'équilibre, etc.

Supposons maintenant que l'on fasse tourner le potentiel autour de l'axe  $z$  à vitesse angulaire constante  $\Omega$ . L'hamiltonien à une particule dans le référentiel  $\mathcal{R}$  dépend alors explicitement du temps :

$$\hat{H}(t) = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2M} + W(\hat{\mathbf{r}}, t) \quad (4.7)$$

avec (cf. figure 4.1) :

$$W(x, y, z, t) = V[x \cos(\Omega t) + y \sin(\Omega t), -x \sin(\Omega t) + y \cos(\Omega t), z]. \quad (4.8)$$

Dès lors que l'hamiltonien dépend explicitement du temps, il n'est plus possible d'appliquer la démarche habituelle pour construire un état d'équilibre thermique. Néanmoins, on peut dans ce cas se ramener à un problème indépendant du temps via une transformation unitaire : les méthodes usuelles de la thermodynamique quantique redeviendront alors utilisables.

**Remarque.** Nous supposons ici que le potentiel  $V(\mathbf{r})$  n'est pas invariant par rotation autour de l'axe  $z$ . Sinon, le potentiel  $W(\mathbf{r}, t)$  ne dépend effec-

tivement pas du temps et le référentiel  $\mathcal{R}$  est un référentiel légitime pour appliquer les concepts de la physique statistique.

## 1-2 Transformation unitaire

Rappelons tout d'abord les principes généraux d'une transformation unitaire<sup>1</sup>. Partons d'un système décrit par un hamiltonien  $H(t)$  dépendant du temps, et un état évoluant selon l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = \hat{H}(t)|\psi(t)\rangle. \quad (4.9)$$

On se donne un opérateur  $\hat{U}(t)$  et on construit les états transformés

$$|\tilde{\psi}(t)\rangle = \hat{U}(t)|\psi(t)\rangle. \quad (4.10)$$

L'équation d'évolution de  $|\tilde{\psi}(t)\rangle$  est donnée elle aussi par une équation de Schrödinger, avec l'hamiltonien  $\hat{\hat{H}}$  :

$$i\hbar \frac{\partial |\tilde{\psi}(t)\rangle}{\partial t} = \hat{\hat{H}}|\tilde{\psi}(t)\rangle, \quad \hat{\hat{H}} = \hat{U}\hat{H}\hat{U}^\dagger + i\hbar \frac{d\hat{U}}{dt}\hat{U}^\dagger. \quad (4.11)$$

Notre but dans ce qui suit est de proposer un opérateur  $\hat{U}$  tel que le transformé  $\hat{\hat{H}}$  de l'hamiltonien donné en (4.7-4.8) soit indépendant du temps.

Posons

$$\hat{U}(t) = \exp\left(i\Omega t \hat{L}_z / \hbar\right) \quad \text{avec} \quad \hat{L}_z = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad (4.12)$$

où la dernière expression fait référence aux coordonnées cylindriques  $(r, \varphi, z)$  avec  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ . L'action de  $\hat{U}$  sur une fonction

1. Nous adoptons dans tout ce paragraphe un point de vue quantique, bien adapté aux applications que nous envisagerons ensuite. Notons toutefois qu'un traitement classique à partir du formalisme lagrangien donne des résultats formellement identiques. Pour un tel traitement, on pourra consulter par exemple le livre de Landau & Lifshitz (1982), § 39, ainsi que le cours au Collège de France de C. Cohen-Tannoudji de l'année 2001-02 (diapos 80-85).

$\psi(r, \varphi, z)$  est

$$\begin{aligned}\hat{U}\psi(r, \varphi, z) &= \exp\left(\Omega t \frac{\partial}{\partial \varphi}\right) \psi(r, \varphi, z) \\ &= \psi(r, \varphi, z) + \Omega t \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} + \frac{1}{2}(\Omega t)^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \dots \\ &= \psi(r, \varphi + \Omega t, z).\end{aligned}\quad (4.13)$$

Examinons comment les différents opérateurs intervenant dans (4.7) se transforment sous l'action de  $\hat{U}$ . Commençons par  $\hat{x}$  et  $\hat{y}$  pour lesquels on trouve :

$$\hat{U}\hat{x}\hat{U}^\dagger = \hat{x} \cos(\Omega t) - \hat{y} \sin(\Omega t), \quad \hat{U}\hat{y}\hat{U}^\dagger = \hat{x} \sin(\Omega t) + \hat{y} \cos(\Omega t). \quad (4.14)$$

Pour démontrer ces identités, considérons par exemple l'action de  $\hat{U}\hat{x}\hat{U}^\dagger$  sur une fonction  $\psi(r, \varphi, z)$  :

$$\begin{aligned}(\hat{U}\hat{x}\hat{U}^\dagger) \psi(r, \varphi, z) &= (\hat{U}\hat{x}) \psi(r, \varphi - \Omega t, z) \\ &= \hat{U} [r \cos \varphi \psi(r, \varphi - \Omega t, z)] \\ &= r \cos(\varphi + \Omega t) \psi(r, \varphi, z) \\ &= (x \cos(\Omega t) - y \sin(\Omega t)) \psi(r, \varphi, z).\end{aligned}\quad (4.15)$$

Le résultat (4.14) peut être inversé pour donner

$$\hat{U} (\hat{x} \cos(\Omega t) + \hat{y} \sin(\Omega t)) \hat{U}^\dagger = \hat{x}, \quad \hat{U} (-\hat{x} \sin(\Omega t) + \hat{y} \cos(\Omega t)) \hat{U}^\dagger = \hat{y}, \quad (4.16)$$

et donc

$$\begin{aligned}\hat{U}W(\hat{r}, t)\hat{U}^\dagger &= \hat{U}V[\hat{x} \cos(\Omega t) + \hat{y} \sin(\Omega t)t, -\hat{x} \sin(\Omega t) + \hat{y} \cos(\Omega t), \hat{z}]\hat{U}^\dagger \\ &= V(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})\end{aligned}\quad (4.17)$$

qui est indépendant du temps.

Considérons maintenant le terme d'énergie cinétique  $\hat{p}^2/2m$  de (4.7). En utilisant l'opérateur laplacien en coordonnées cylindriques :

$$\frac{\hat{p}^2}{2M} = -\frac{\hbar^2}{2M}\Delta = -\frac{\hbar^2}{2M}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right), \quad (4.18)$$

on voit que cet opérateur commute avec  $\hat{L}_z = -i\hbar\partial_\varphi$ , ce qui est logique puisque ce terme d'énergie cinétique est invariant par rotation.

Le dernier terme à calculer pour obtenir l'expression de  $\hat{H}$  est

$$i\hbar\frac{d\hat{U}}{dt}\hat{U}^\dagger = i\hbar\left(\frac{i\Omega\hat{L}_z}{\hbar}\hat{U}\right)\hat{U}^\dagger = -\Omega\hat{L}_z, \quad (4.19)$$

lui aussi indépendant du temps.

Au final, on obtient pour  $\hat{H}$  l'expression suivante

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2M} + V(\hat{r}) - \Omega\hat{L}_z, \quad (4.20)$$

qui est bien indépendante du temps : on va pouvoir utiliser cet hamiltonien comme base d'une étude de thermodynamique à l'équilibre.

### 1-3 Interprétation physique

La transformation unitaire décrite au paragraphe précédent correspond au changement de repère bien connu, faisant passer du référentiel galiléen  $\mathcal{R}$  au référentiel tournant à la vitesse angulaire  $\Omega$  autour de l'axe  $z$ , noté  $\mathcal{R}'$ .

Pour montrer cette correspondance, partons d'une base  $\mathbf{u}_j$  ( $j = x, y, z$ ) liée au repère  $\mathcal{R}$ . Introduisons la base  $\mathbf{u}'_j$  liée à  $\mathcal{R}'$  (cf. figure 4.2) :

$$\mathbf{u}'_x = \cos(\Omega t)\mathbf{u}_x + \sin(\Omega t)\mathbf{u}_y, \quad \mathbf{u}'_y = -\sin(\Omega t)\mathbf{u}_x + \cos(\Omega t)\mathbf{u}_y, \quad \mathbf{u}'_z = \mathbf{u}_z. \quad (4.21)$$

Un point  $M$  de coordonnées  $(x, y, z)$  dans la base  $\mathbf{u}_j$  a pour coordonnées :

$$x' = \cos(\Omega t)x + \sin(\Omega t)y, \quad y' = -\sin(\Omega t)x + \cos(\Omega t)y, \quad z' = z \quad (4.22)$$

dans la base  $\mathbf{u}'_j$ , ce qui assure que

$$x\mathbf{u}_x + y\mathbf{u}_y + z\mathbf{u}_z = x'\mathbf{u}'_x + y'\mathbf{u}'_y + z'\mathbf{u}'_z. \quad (4.23)$$

La comparaison de (4.22) avec le résultat obtenu en (4.16)

$$\hat{U} (\hat{x} \cos(\Omega t) + \hat{y} \sin(\Omega t)) \hat{U}^\dagger = \hat{x}$$

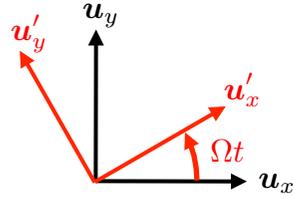


FIGURE 4.2. Base fixe  $(\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y)$  du référentiel galiléen  $\mathcal{R}$  et base tournante  $\mathbf{u}'_x, \mathbf{u}'_y$  liée au référentiel en rotation  $\mathcal{R}'$ .

conduit alors à l'interprétation suivante : l'opérateur  $\hat{x}$  dans la « nouvelle représentation », c'est-à-dire celle obtenue après transformation unitaire, correspond à l'opérateur  $\hat{x} \cos(\Omega t) + \hat{y} \sin(\Omega t)$  dans l'ancienne représentation. Or, d'après (4.22), cet opérateur n'est autre que l'opérateur position associé à la coordonnée  $x'$  dans la base  $\mathbf{u}'_j$  du référentiel tournant.

L'action de  $\hat{U}$  correspond donc bien à un changement de référentiel, les nouveaux opérateurs position correspondant à la quantité physique « position dans la base  $\mathbf{u}'_j$  liée au référentiel  $\mathcal{R}'$  ».

La présence du terme  $-\Omega \hat{L}_z$  vient, comme pour l'hamiltonien magnétique, modifier la relation usuelle entre vitesse et impulsion. On peut définir l'opérateur vitesse à partir de l'hamiltonien (4.20) en se plaçant en point de vue de Heisenberg :

$$\hat{v} = \frac{d\hat{r}}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{r}] \quad (4.24)$$

ce qui conduit à

$$\hat{v}_x = \frac{\hat{p}_x}{M} + \Omega \hat{y}, \quad \hat{v}_y = \frac{\hat{p}_y}{M} - \Omega \hat{x}, \quad \hat{v}_z = \frac{\hat{p}_z}{M}. \quad (4.25)$$

En d'autres termes, dans la nouvelle représentation, l'impulsion  $\hat{p}$  et la quantité de mouvement  $M\hat{v}$  sont reliées par la relation

$$\hat{p} = M\hat{v} + M\Omega \times \hat{r}. \quad (4.26)$$

Pour interpréter ce résultat, revenons un instant à la cinématique classique. Une particule de coordonnées  $(x, y, z)$  dans la base  $\mathbf{u}_j$  liée à  $\mathcal{R}$  a pour vitesse dans ce référentiel

$$\mathbf{v}_{\mathcal{R}} = \dot{x}\mathbf{u}_x + \dot{y}\mathbf{u}_y + \dot{z}\mathbf{u}_z. \quad (4.27)$$

Dans la base  $\mathbf{u}'_j$  liée au référentiel  $\mathcal{R}'$ , les coordonnées de la particule sont  $(x', y', z')$  et sa vitesse vaut :

$$\mathbf{v}_{\mathcal{R}'} = \dot{x}'\mathbf{u}'_x + \dot{y}'\mathbf{u}'_y + \dot{z}'\mathbf{u}'_z. \quad (4.28)$$

Le lien entre  $\mathbf{v}_{\mathcal{R}}$  et  $\mathbf{v}_{\mathcal{R}'}$  se fait en prenant en compte la rotation des  $\mathbf{u}'_j$  par rapport aux  $\mathbf{u}_j$  :

$$\frac{d\mathbf{u}'_j}{dt} = \Omega \times \mathbf{u}'_j \quad (4.29)$$

dont on déduit

$$x\mathbf{u}_x + y\mathbf{u}_y + z\mathbf{u}_z = x'\mathbf{u}'_x + y'\mathbf{u}'_y + z'\mathbf{u}'_z \Rightarrow \mathbf{v}_{\mathcal{R}} = \mathbf{v}_{\mathcal{R}'} + \Omega \times \mathbf{r}'. \quad (4.30)$$

Cette loi de composition des vitesses permet d'interpréter la relation (4.26). Dans (4.26), l'opérateur  $\hat{v}$  est associé à la quantité physique *vitesse dans le référentiel tournant* puisque c'est la dérivée de l'opérateur *position dans le référentiel tournant*. On déduit de (4.30) que l'opérateur impulsion  $\hat{p}$  dans la nouvelle représentation est associé à la quantité physique *masse  $\times$  vitesse dans le référentiel galiléen  $\mathcal{R}$* .

Pour terminer, examinons l'opérateur « composante du moment cinétique selon  $z$  ». Il est clair que  $\hat{L}_z$  commute avec  $\hat{U}$ , soit

$$\hat{U} \hat{L}_z \hat{U}^\dagger = \hat{L}_z. \quad (4.31)$$

L'opérateur  $\hat{L}_z$  correspond donc toujours au moment cinétique dans le référentiel galiléen  $\mathcal{R}$ .

#### 1-4 Lien entre magnétisme orbital et rotation

Nous disposons désormais de tous les éléments pour montrer l'équivalence entre magnétisme orbital et rotation. Considérons l'hamiltonien d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme  $\mathbf{B} = B\mathbf{u}_z$  et faisons le choix de la jauge symétrique :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{B}{2}(-y\mathbf{u}_x + x\mathbf{u}_y) \quad (4.32)$$

ce qui donne (cf. chapitre 2) :

$$\hat{H} = \frac{(\hat{p} - q\mathbf{A}(\hat{r}))^2}{2M} = \frac{\hat{p}^2}{2M} + \frac{1}{8}M\omega_c^2 r^2 - \frac{\omega_c}{2}\hat{L}_z. \quad (4.33)$$

avec  $\omega_c = qB/M$ . L'hamiltonien dans le référentiel tournant (4.20) possède une structure identique à cet hamiltonien magnétique pourvu que l'on prenne

$$\Omega = \omega_c/2 \quad (4.34)$$

et qu'on choisisse le potentiel extérieur  $V(r)$  tel que

$$V(r) = \frac{1}{8}M\omega_c^2 r^2 = \frac{1}{2}M\Omega^2 r^2. \quad (4.35)$$

Ce choix signifie que la force de rappel associée à  $V(r)$  compense exactement la force centrifuge.

Même si on ne prend pas le potentiel  $V(r)$  exactement opposé au potentiel centrifuge, on peut toujours écrire l'hamiltonien dans le référentiel tournant (4.20) comme

$$\hat{H} = \frac{(\hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A}(\hat{\mathbf{r}}))^2}{2M} + V(r) + V_{\text{centrif.}}(r) \quad (4.36)$$

avec

$$q\mathbf{A} = M\Omega(-y\mathbf{u}_x + x\mathbf{u}_y), \quad V_{\text{centrif.}}(r) = -\frac{1}{2}M\Omega^2 r^2 \quad (4.37)$$

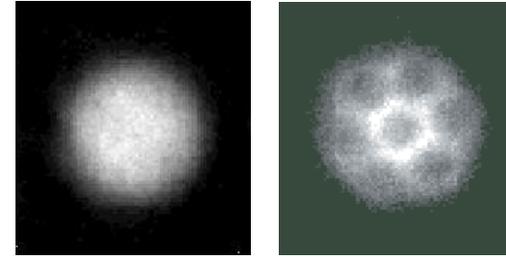
ce qui veut dire que l'on simule ainsi le mouvement d'une particule chargée plongée dans un champ magnétique uniforme associé à la fréquence cyclotron  $\omega_c = 2\Omega$ , et soumise en plus au potentiel total  $V + V_{\text{centrif.}}$ .

## 2 Gaz en rotation

### 2-1 Anisotropie tournante

Pour mettre un gaz d'atomes froids en rotation, une méthode simple consiste à partir d'un piège isotrope dans le plan  $xy$ , correspondant au potentiel statique

$$V_0(r) = \frac{1}{2}M\omega^2(x^2 + y^2) \quad (4.38)$$



**FIGURE 4.3.** Gauche : condensat de Bose-Einstein d'atomes de rubidium confinés dans un piège isotrope dans le plan  $xy$ . Droite : Réseau de vortex obtenu en ajoutant une anisotropie tournante (Eqs. 4.38-4.39) avec  $\epsilon \approx 0.1$ . Figure extraite de Madison et al. (2000).

et à ajouter une légère anisotropie tournant à la fréquence angulaire  $\Omega$  :

$$\begin{aligned} \delta V(x, y, t) &= \frac{\epsilon}{2}M\omega^2 [y'(t)^2 - x'(t)^2] \\ &= \frac{\epsilon}{2}M\omega^2 [(-\sin(\Omega t)x + \cos(\Omega t)y)^2 - (\cos(\Omega t)x + \sin(\Omega t)y)^2] \\ &= \frac{\epsilon}{2}M\omega^2 [\cos(2\Omega t)(y^2 - x^2) - 2\sin(2\Omega t)xy] \end{aligned} \quad (4.39)$$

où le paramètre  $\epsilon$  caractérise l'amplitude de l'anisotropie. Dans le référentiel tournant, on obtient un potentiel statique légèrement anisotrope :

$$V(x, y) = V_0(x, y) + \delta V(x, y) = \frac{1}{2}M\omega^2 ((1 - \epsilon)x^2 + (1 + \epsilon)y^2) \quad (4.40)$$

En pratique, ce potentiel tournant peut être créé par un faisceau laser elliptique ou par un gradient de champ magnétique dépendant du temps. Nous montrons en figure 4.3 un résultat obtenu avec un gaz de rubidium mis en rotation par un agitateur laser. La présence d'un réseau régulier de vortex est la signature incontestable de cette mise en rotation, comme nous aurons l'occasion de l'expliciter dans un prochain chapitre.

## 2-2 Peut-on atteindre la rotation critique $\Omega = \omega$ ?

Nous avons expliqué à la fin du paragraphe précédent que le cas idéal d'une particule libre plongée dans un champ magnétique uniforme était atteint quand le potentiel de confinement  $V(r)$  compensait exactement le potentiel centrifuge. C'est dans ce cas, et dans ce cas seulement, que le spectre à une particule de l'hamiltonien est constitué de niveaux de Landau dégénérés, cette dégénérescence étant un ingrédient important de l'obtention d'états fortement corrélés en présence d'interactions.

La présence de l'anisotrope  $\epsilon$  va venir empêcher d'atteindre ce régime. Plus précisément, on peut montrer que la zone de rotation

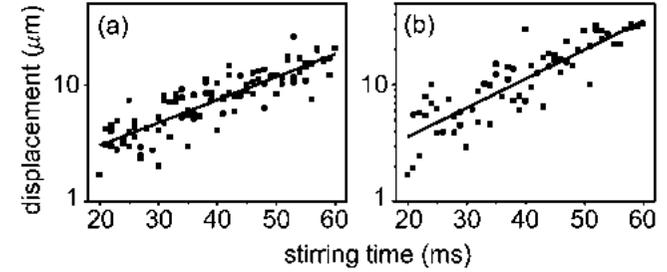
$$\Omega/\omega \in [1 - \epsilon, 1 + \epsilon] \quad (4.41)$$

correspond à une instabilité dynamique pour le mouvement des particules (Rosenbusch et al. 2002). Ce résultat s'obtient assez simplement en dynamique newtonienne en écrivant les équations du mouvement dans le référentiel tournant, en prenant en compte force de Coriolis et force centrifuge, ainsi que la force liée au potentiel  $V_0 + \delta V$  :

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\Omega\dot{y} + [\omega^2(1 - \epsilon) - \Omega^2]x &= 0, \\ \ddot{y} + 2\Omega\dot{x} + [\omega^2(1 + \epsilon) - \Omega^2]y &= 0. \end{aligned}$$

La recherche des valeurs propres de ce système conduit au résultat annoncé. Par exemple, si on choisit exactement  $\Omega = \omega$ , on trouve que la quantité  $x + y$  diverge comme  $\exp(\epsilon\omega t/2)$ . Un exemple de cette divergence est montrée sur la figure 4.4.

Cette instabilité vient donc empêcher de prendre la fréquence angulaire de rotation  $\Omega$  aussi prêt qu'on le souhaiterait de la pulsation  $\omega$  du piège : on est limité à  $\Omega \lesssim \omega(1 - \epsilon)$ . Cela ne serait pas bien grave si  $\epsilon$  pouvait être lui-même arbitrairement petit. Mais un piège réel n'est jamais parfaitement isotrope et il est donc caractérisé par une anisotropie statique non nulle  $\epsilon_{\text{stat.}}$ . Pour que le passage dans le référentiel tournant soit pertinent, il faut que l'anisotropie tournante  $\epsilon$  soit grande devant cette anisotropie statique, ce qui impose en pratique de prendre des paramètres  $\epsilon$  de quelques pour cents. Nous verrons dans un cours prochain que cette contrainte nous laisse relativement éloignés de la physique de l'effet Hall quantique.



**FIGURE 4.4.** Instabilité dynamique d'un nuage d'atomes froids (non condensé à gauche, condensat quasi-pur à droite) pour une fréquence de rotation égale à la fréquence de piégeage  $\Omega = \omega$ . On observe une croissance exponentielle de l'écart entre le centre du piège et le centre de gravité du nuage. Le paramètre d'anisotropie  $\epsilon$  vaut 0.09 pour cette expérience menée avec des atomes de rubidium  $^{87}\text{Rb}$  ( $\omega/(2\pi) = 180$  Hz). Figure extraite de l'article de Rosenbusch et al. (2002).

## 2-3 Systèmes invariants par rotation

Il existe une alternative intéressante au passage dans le référentiel tournant pour générer le terme en  $-\Omega\hat{L}_z$ , réinterprété ensuite comme un terme en  $-\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{A}(\hat{\mathbf{r}})$ . Cette alternative consiste à injecter un moment cinétique total moyen non nul  $\langle L_z \rangle$  dans un gaz confiné dans un piège approximativement invariant par rotation. On laisse ensuite le gaz atteindre un état thermodynamique stationnaire, compte tenu de ce moment cinétique qui est une quantité conservée.

L'approche standard pour la recherche de cet état stationnaire est la technique des multiplicateurs de Lagrange, décrite par exemple dans le livre de Diu et al. (1989), complément II.E (on pourra consulter aussi l'ouvrage de Landau & Lifchitz (1984), § 26 et § 34). Supposons que l'on s'intéresse à l'état à température nulle, c'est-à-dire l'état fondamental compte tenu de la contrainte sur le moment cinétique. On introduit un paramètre de Lagrange  $\Omega$  pour rendre compte de cette contrainte et on cherche l'état  $\Psi$  qui minimise la valeur moyenne de l'énergie

$$E(\Omega, \Psi) = \langle \Psi | \hat{H}_\Omega | \Psi \rangle \quad \text{avec} \quad \hat{H}_\Omega = \hat{H} - \Omega \hat{L}_z. \quad (4.42)$$

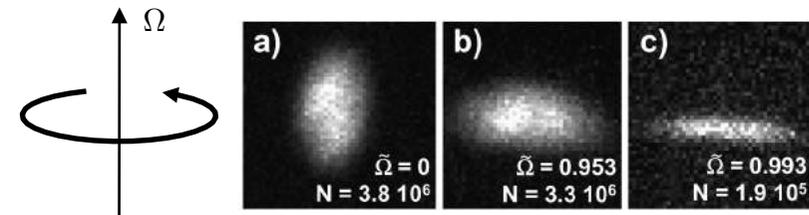
La valeur de  $\Omega$  est ensuite déterminée de manière à assurer que la moyenne

de  $\hat{L}_z$  soit bien celle qu'on a injectée. On est donc amené à travailler avec le même hamiltonien que celui obtenu par passage dans le référentiel tournant, même si l'interprétation physique de  $\Omega$  est différente : dans un cas, il s'agit de la fréquence angulaire de rotation imposée de l'extérieur ; dans l'autre, c'est un paramètre intrinsèque du système qui s'ajuste pour rendre compte du moment cinétique injecté initialement.

**Remarque.** Nous avons supposé ici que l'hamiltonien  $\hat{H}$  est invariant par rotation et commute avec  $\hat{L}_z$ . Si le système considéré est suffisamment petit pour qu'une diagonalisation exacte de  $\hat{H}$  soit possible, le passage via  $\hat{H}_\Omega$  n'est pas nécessaire : on peut simplement chercher une base propre commune à  $\hat{H}$  et  $\hat{L}_z$ , puis ne considérer que les états propres qui sont dans le secteur correspondant au moment cinétique injecté. En revanche, si on doit avoir recours à des approximations de type champ moyen, c'est bien à partir de la fonctionnelle  $E(\Omega, \Psi)$  qu'il faut travailler.

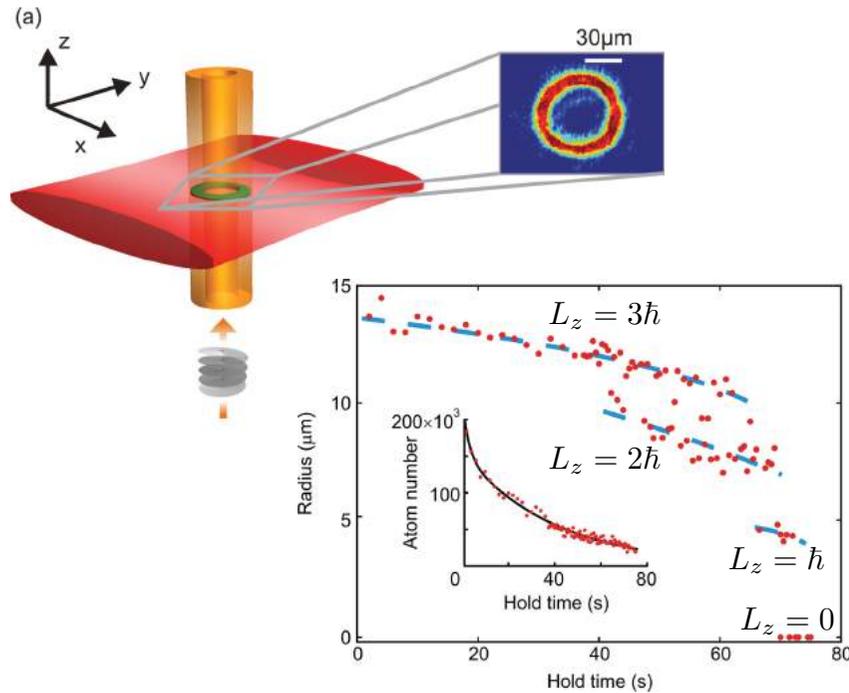
**Comment injecter du moment cinétique ?** Une fois identifiée cette approche alternative à la rotation forcée, cette question se pose naturellement. Parmi les méthodes qui ont été proposées, nous en présenterons ici deux.

- La première est la méthode d'évaporation sélective, mise en place par Eric Cornell et son groupe (Schweikhard et al. 2004). L'idée est de mettre dans un premier temps le nuage en rotation par la méthode « classique » avec un agitateur tournant. Ensuite, on débranche cet agitateur et le nuage se retrouve confiné dans un piège avec une très bonne symétrie de rotation autour de l'axe  $z$  : le groupe de Boulder estime que l'anisotropie résiduelle de leur piège est inférieure à 0.1%. On procède alors à une évaporation sélective, en enlevant des atomes qui se trouvent au voisinage de l'axe  $z$ , et qui portent donc moins de moment cinétique que la moyenne. Cette évaporation a pour effet d'augmenter le moment cinétique moyen par atome restant dans le piège (figure 4.5). Le paramètre de Lagrange  $\Omega$ , qui représente ici la fréquence de rotation effective, peut atteindre dans ces expériences  $0.993\omega$ , ce qui constitue un record pour un piège purement harmonique. La fonction d'onde macroscopique peuple de manière significative des états de moment cinétique allant jusqu'à  $120\hbar$ .



**FIGURE 4.5.** Mise en rotation d'un nuage par évaporation sélective. Les photos sont prises selon un axe perpendiculaire à l'axe de rotation  $z$ . En enlevant des atomes avec un moment cinétique inférieur à la moyenne, on augmente la vitesse de rotation du nuage restant dans le piège. La figure a correspond à un gaz au repos, la figure b à un gaz après évaporation radiofréquence, la figure c après une combinaison d'évaporation radiofréquence et lumineuse (un faisceau lumineux se propageant selon l'axe  $z$  éjecte les atomes situés au voisinage de cet axe). La quantité  $\Omega$  désigne  $\Omega/\omega$ . Pour la fréquence de rotation très rapide obtenue en (c), la force centrifuge déforme considérablement le nuage, qui est alors complètement aplati dans le plan  $xy$ . Cette figure est extraite de l'article de Schweikhard et al. (2004).

- La seconde méthode consiste à transférer du moment angulaire à partir de faisceaux lumineux. On utilise pour cela une transition Raman induite par des faisceaux lumineux de type Laguerre–Gauss. Dans l'expérience de Moulder et al. (2012), les atomes sont initialement confinés dans un piège annulaire dans un état interne  $|a\rangle$  (en l'occurrence l'état Zeeman  $|F = 1, m = 1\rangle$  du  $^{87}\text{Rb}$ ). Une transition *absorption – émission stimulée* fait passer les atomes de l'état  $|a\rangle$  vers un autre état interne  $|b\rangle$  (ici  $|F = 1, m = 0\rangle$ ). Un des faisceaux porte un moment cinétique angulaire pouvant aller jusqu'à  $10\hbar$  alors que l'autre est un faisceau gaussien de moment cinétique orbital nul. Lors de la transition Raman, chaque atome gagne donc un moment cinétique allant lui aussi jusqu'à  $10\hbar$ . On réalise ainsi un courant permanent en circulation dans un anneau (figure 4.6).



**FIGURE 4.6.** Courant permanent dans un piège annulaire, réalisé à partir de faisceaux laser dans un mode de Laguerre–Gauss. On transfère un moment cinétique déterminé aux atomes par une transition Raman stimulée, ce moment cinétique pouvait atteindre la dizaine de  $\hbar$  par atome. Une fois créé, ce courant permanent a une longue durée de vie. Le graphe montre qu'un moment cinétique initial de  $3\hbar$ /atome peut subsister pendant une minute environ. On mesure ce courant à partir de la taille du trou central dans le nuage dans une expérience de temps de vol. Ces figures sont extraites de Moulder et al. (2012) (groupe de Z. Hadzibabic à Cambridge). Des expériences similaires sont menées dans le groupe de G. Campbell au NIST.

### 3 Le couplage d'un atome au rayonnement

Nous avons vu lors du chapitre consacré à la phase de Berry comment l'utilisation d'une structure interne des particules, accompagnée d'un suivi adiabatique d'un état interne dépendant de l'espace, pouvait conduire à une phase géométrique et un champ de jauge non nuls. Nous avons déjà indiqué que le cas d'un atome éclairé par un faisceau lumineux cohérent permettait en principe de mettre cette stratégie en œuvre, en exploitant l'existence de plusieurs états internes atomiques couplés entre eux par le rayonnement et l'émergence d'états habillés dépendant de la position.

Pour bien comprendre les possibilités ouvertes par cette approche ainsi que ses limitations, nous allons commencer par passer en revue les principaux éléments qui permettent de décrire le couplage atome–lumière et la manière dont il peut être mis en œuvre pour différentes espèces atomiques. Nous examinerons ensuite, dans ce chapitre et dans celui qui suivra, la mise en pratique de ce suivi adiabatique.

#### 3-1 Le modèle d'un atome à deux niveaux

Nous considérons dans ce qui suit un atome éclairé par un faisceau lumineux monochromatique de pulsation  $\omega$ . Nous assimilons l'atome à un système à deux niveaux, notés  $|g\rangle$  et  $|e\rangle$ , séparés par l'énergie  $\hbar\omega_0$  (figure 4.7), dont l'hamiltonien en absence de lumière s'écrit :

$$\hat{H}_0 = \frac{\hbar\omega_0}{2} (|e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|). \quad (4.43)$$

Nous supposons que la fréquence du faisceau lumineux est choisie relativement proche de la résonance atomique :

$$|\Delta| \ll \omega_0, \omega \quad \text{avec} \quad \Delta = \omega - \omega_0. \quad (4.44)$$

L'hamiltonien décrivant la dynamique interne de l'atome est la somme de  $\hat{H}_0$  et du couplage atome-laser  $\hat{V}_{AL}(t)$  :

$$\hat{H}_{\text{interne}}(t) = \hat{H}_0 + \hat{V}_{AL}(t). \quad (4.45)$$

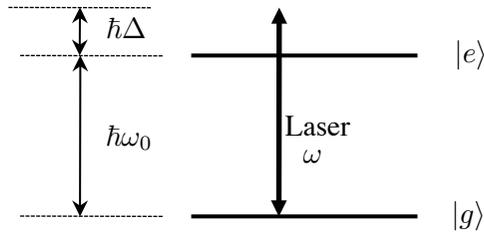


FIGURE 4.7. Modélisation d'un atome par un système à deux niveaux.

La forme de ce couplage peut être simplifiée grâce à l'approximation du champ tournant<sup>2</sup> pour s'écrire (Cohen-Tannoudji et al. 1989):

$$\hat{V}_{\text{AL}}(t) = \frac{\hbar\kappa}{2} e^{-i\omega t} |e\rangle\langle g| + \frac{\hbar\kappa^*}{2} e^{i\omega t} |g\rangle\langle e|. \quad (4.46)$$

où la *fréquence de Rabi* complexe  $\kappa$  caractérise la force du couplage atome-lumière, que nous supposons ici de nature dipolaire électrique. En particulier, le terme  $(\hbar\kappa/2) e^{-i\omega t} |e\rangle\langle g|$  décrit le passage de  $|g\rangle$  à  $|e\rangle$  par *absorption* d'un photon dans l'onde lumineuse incidente, et le terme  $(\hbar\kappa^*/2) e^{i\omega t} |g\rangle\langle e|$  décrit le passage de  $|e\rangle$  à  $|g\rangle$  par *émission stimulée* d'un photon dans cette onde.

Le passage *dans le référentiel tournant* vis à vis des variables internes permet de se ramener à l'hamiltonien indépendant du temps<sup>3</sup>:

$$\hat{H}_{\text{interne}} = \hat{H}_0 + \hat{V}_{\text{AL}} \quad (4.49)$$

avec

$$\hat{H}_0 = \frac{\hbar\Delta}{2} (|g\rangle\langle g| - |e\rangle\langle e|), \quad \hat{V}_{\text{AL}} = \frac{\hbar\kappa}{2} |e\rangle\langle g| + \frac{\hbar\kappa^*}{2} |g\rangle\langle e|. \quad (4.50)$$

2. Cette approximation consiste à négliger les termes qui auraient une contribution en  $e^{\pm i(\omega+\omega_0)t}$  pour ne garder que les termes en  $e^{\pm i(\omega-\omega_0)t}$  (cf. cours 2012-13).

3. Ce passage se fait via la transformation unitaire associée à l'opérateur

$$\hat{U}(t) = \exp[i(|e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|)\omega t/2] \quad (4.47)$$

et l'hamiltonien transformé (ici indépendant du temps) est obtenu via :

$$\hat{H} = \hat{U}(t)\hat{H}(t)\hat{U}^\dagger(t) + i\hbar\frac{d\hat{U}(t)}{dt}\hat{U}^\dagger(t). \quad (4.48)$$

soit, sous forme matricielle dans la base  $\{|g\rangle, |e\rangle\}$  :

$$\hat{H}_{\text{interne}} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \Delta & \kappa^* \\ \kappa & -\Delta \end{pmatrix}. \quad (4.51)$$

C'est cet hamiltonien  $\hat{H}_{\text{interne}}$  que nous utiliserons dans la suite, en omettant le signe  $\sim$  pour simplifier l'écriture quand il n'y aura pas d'ambiguïté. Les caractéristiques en intensité et en phase du faisceau lumineux sont contenues dans l'expression de la fréquence de Rabi complexe  $\kappa$ . En particulier, lorsqu'on étudiera le mouvement du centre de masse de l'atome,  $\kappa$  sera une fonction de la position de ce centre de masse et notée  $\kappa(\mathbf{r})$ . Par exemple, pour un atome éclairé par une onde plane progressive, on aura :

$$\text{Onde laser plane de vecteur d'onde } \mathbf{k} : \quad \kappa(\mathbf{r}) = \kappa_0 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad (4.52)$$

où l'amplitude  $\kappa_0$  sera proportionnelle au champ électrique de l'onde laser, donc à la racine carrée de son intensité.

Pour être utile dans le problème qui nous intéresse ici, à savoir la génération de champs de jauge artificiels, ce couplage entre état électronique fondamental et état électronique excité doit pouvoir se faire sans émission spontanée de photons. De tels processus d'émission spontanée sont en effet incohérents et constituent des sources de chauffage pour le gaz atomique que l'on cherche à manipuler. L'utilisation d'un état électronique excité n'est donc possible que pour des classes d'atomes pour lesquels il existe des états excités de très longue durée de vie, bien supérieure à la durée typique d'une expérience.

En pratique, les atomes adéquats sont des atomes à deux électrons externes comme Mg, Ca, Sr, Hg, Yb : leur état fondamental est un état singulet de spin et certains états excités peuvent alors être métastables, s'ils correspondent à un triplet de spin. L'atome d'Ytterbium par exemple a pour état fondamental un état  $6s6s \ ^1S_0$  et possède un état excité  $6s6p \ ^3P_0$  de durée de vie estimée à plus de 10 secondes, qui convient parfaitement pour ce type d'expérience, au moins à des densités suffisamment faibles pour que les collisions inélastiques impliquant des atomes dans l'état excité soient négligeables [pour une étude de ces collisions, voir par exemple Scazza et al. (2014)]. L'utilisation de réseaux optiques, dans lesquels on peut rendre très faible la probabilité d'avoir plus d'un atome par site, permet également de contourner cette difficulté liée aux collisions inélastiques.

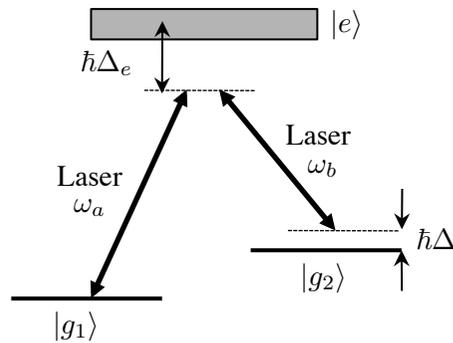


FIGURE 4.8. Excitation d'une transition Raman entre deux sous-niveaux fondamentaux  $|g_1\rangle$  et  $|g_2\rangle$ .

### 3-2 Le modèle d'une transition Raman

Nous avons considéré dans le paragraphe ci-dessus une transition entre l'état fondamental  $|g\rangle$  et un état excité  $|e\rangle$ , couplé à  $|g\rangle$  par une transition dipolaire électrique. Pour la plupart des espèces atomiques, notamment les atomes alcalins, les états  $|e\rangle$  de ce type ont une durée de vie par émission spontanée de l'ordre de quelques dizaines ou quelques centaines de nanosecondes. Cette durée de vie est beaucoup trop courte pour que la transition  $|g\rangle \leftrightarrow |e\rangle$  puisse être utilisée telle quelle pour générer un champ magnétique artificiel utilisable.

On peut contourner cette difficulté en tirant parti du fait que le niveau fondamental est lui-même composé de plusieurs sous-niveaux, et en utilisant des transitions Raman entre ces sous-niveaux (figure 4.8). Considérons deux sous-niveaux  $|g_1\rangle$  et  $|g_2\rangle$ , séparés par l'énergie  $E_2 - E_1$ , et supposons qu'on éclaire l'atome par deux ondes lumineuses de pulsations respectives  $\omega_a$  et  $\omega_b$  avec :

$$\hbar(\omega_a - \omega_b) \approx E_2 - E_1. \quad (4.53)$$

Les deux niveaux  $|g_1\rangle$  et  $|g_2\rangle$  peuvent être couplés de manière cohérente par l'intermédiaire d'une transition impliquant un (ou plusieurs) états excités électroniques. Dans le cas où un seul état  $|e\rangle$  est impliqué, le couplage peut

s'écrire (après passage dans le référentiel tournant) :

$$\hat{V}_{AL} = \frac{\hbar\kappa_a}{2} |e\rangle\langle g_1| + \frac{\hbar\kappa_b}{2} |e\rangle\langle g_2| + \text{h.c.} \quad (4.54)$$

On peut alors éliminer l'état excité pour se ramener à un hamiltonien effectif agissant dans le sous-espace engendré par les deux états  $|g_1\rangle$  et  $|g_2\rangle$ . Par exemple, le couplage permettant de passer de  $|g_1\rangle$  à  $|g_2\rangle$ , par absorption d'un photon dans l'onde  $a$ , puis émission stimulée d'un photon dans l'onde  $b$ , est donné à l'ordre le plus bas par la fréquence de Rabi effective :

$$\frac{\hbar\kappa_{\text{eff}}}{2} = \left( \frac{\hbar\kappa_a}{2} \right)_{g_1 \leftrightarrow e} \times \frac{1}{\hbar\Delta_e} \times \left( \frac{\hbar\kappa_b^*}{2} \right)_{e \leftrightarrow g_2} \quad (4.55)$$

L'hamiltonien décrivant la dynamique interne de l'atome dans le sous-espace  $\{|g_1\rangle, |g_2\rangle\}$  est une matrice  $2 \times 2$  de structure similaire à (4.51), où l'on remplace le désaccord  $\Delta = \omega - \omega_0$  par le désaccord Raman :

$$\Delta = \hbar(\omega_a - \omega_b) - (E_2 - E_1) \quad (4.56)$$

et  $\kappa$  par  $\kappa_{\text{eff}}$ . En particulier, si les ondes  $a$  et  $b$  sont des ondes planes de vecteurs d'onde  $\mathbf{k}_1$  et  $\mathbf{k}_2$ , cette fréquence de Rabi effective s'écrit

$$\text{Ondes planes } \mathbf{k}_a, \mathbf{k}_b : \quad \kappa_{\text{eff}}(\mathbf{r}) = \kappa_0 e^{i(\mathbf{k}_a - \mathbf{k}_b) \cdot \mathbf{r}}. \quad (4.57)$$

En modifiant l'angle entre les vecteurs d'onde  $\mathbf{k}_a$  et  $\mathbf{k}_b$ , on peut ajuster le transfert d'impulsion dans cette transition Raman depuis une valeur quasiment nulle (quand  $\mathbf{k}_a$  et  $\mathbf{k}_b$  sont colinéaires<sup>4</sup>) jusqu'à  $2k_0 = 2\omega_0/c$ , quand  $\mathbf{k}_a$  et  $\mathbf{k}_b$  sont opposés. Cette flexibilité dans le choix du transfert d'impulsion, à désaccord  $\Delta$  donné, est un élément très appréciable de ces transitions Raman.

**Les déplacements lumineux.** Quand on utilise une transition Raman, il faut compléter l'hamiltonien précédent (4.51) en ajoutant aux coefficients diagonaux les déplacements lumineux des états  $|g_1\rangle$  et  $|g_2\rangle$ . Ces déplacements correspondent aux processus *absorption-émission stimulée* partant de

4. On retrouve alors le résultat que l'on obtiendrait en induisant la transition  $g_1 \leftrightarrow g_2$  par une micro-onde.

et revenant sur  $|g_1\rangle$  (et idem pour  $|g_2\rangle$ ). Dans le modèle d'atome à trois niveaux adopté ici, ils valent  $|\kappa_j|^2/4\Delta_e$  ( $j = 1, 2$ ), de sorte que l'hamiltonien effectif dans le sous-espace  $\{|g_1\rangle, |g_2\rangle\}$  s'écrit :

$$\hat{H}_{\text{interne}} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \Delta + |\kappa_a|^2/2\Delta_e & \kappa_a^*\kappa_b/2\Delta_e \\ \kappa_a\kappa_b^*/2\Delta_e & -\Delta + |\kappa_b|^2/2\Delta_e \end{pmatrix}. \quad (4.58)$$

Quand les ondes  $a$  et  $b$  sont des ondes planes, ces déplacements lumineux sont uniformes dans l'espace et peuvent donc être réintégrés dans la définition des énergies  $E_1$  et  $E_2$  des sous-niveaux  $|g_1\rangle$  et  $|g_2\rangle$ .

Signalons un cas particulier remarquable pour un désaccord Raman  $\Delta$  nul. Dans ce cas, l'hamiltonien effectif

$$\hat{H}_{\text{interne}} = \frac{\hbar}{4\Delta_e} \begin{pmatrix} |\kappa_a|^2 & \kappa_a^*\kappa_b \\ \kappa_a\kappa_b^* & |\kappa_b|^2 \end{pmatrix}. \quad (4.59)$$

est facile à diagonaliser. En particulier, une de ses deux valeurs propres vaut 0 et le vecteur propre associé est l'état noir (Arimondo 1996):

$$|\psi_{\text{noir}}\rangle \propto \kappa_b|g_1\rangle - \kappa_a|g_2\rangle, \quad (4.60)$$

dont on peut vérifier immédiatement qu'il n'est pas couplé à l'état excité  $|e\rangle$  par le couplage (4.54).

### 3-3 Transitions Raman : alcalins vs. lanthanides

Comme nous l'avons indiqué, l'utilisation d'une transition Raman entre états issus du niveau fondamental est un moyen très efficace pour réduire le chauffage et la décohérence dus aux processus d'émission spontanée. Toutefois, cette réduction n'est pas forcément suffisante pour les atomes les plus « populaires » dans les expériences d'atomes froids, à savoir les atomes alcalins. Une classe d'atomes beaucoup plus favorable est tirée de la catégorie des lanthanides, erbium ou dysprosium par exemple. Les résultats de plusieurs expériences manipulant ces atomes ont récemment été publiés (Aikawa et al. 2012; Lu et al. 2012) et nous allons brièvement expliquer en quoi ces espèces atomiques sont très prometteuses par rapport aux alcalins. Nous allons pour cela nous intéresser au facteur de mérite

$$\mathcal{M} = \frac{\kappa_{\text{eff}}}{\gamma} \quad (4.61)$$

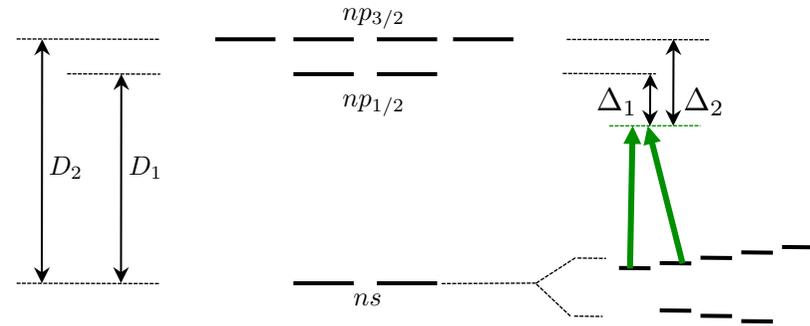


FIGURE 4.9. Transition de résonance d'un atome alcalin, avec la structure fine de l'état excité et la structure hyperfine du niveau fondamental, représentée ici pour un spin nucléaire  $I = 3/2$  (cas de  ${}^7\text{Li}$ ,  ${}^{23}\text{Na}$ ,  ${}^{39}\text{K}$ ,  ${}^{41}\text{K}$ ,  ${}^{87}\text{Rb}$ ). Le clivage des sous-niveaux Zeeman représenté sur la figure de droite est induit par un champ magnétique extérieur.

où  $\gamma$  est le taux d'émission spontanée lié aux faisceaux créant le couplage Raman. Notre discussion suivra d'assez près celles de Nascimbene (2013) et Cui et al. (2013).

**Les atomes alcalins.** Considérons un atome alcalin, de niveau fondamental électronique  $|g\rangle \equiv |ns\rangle$ , éclairé par un faisceau lumineux de fréquence relativement proche de la raie de résonance de l'atome  $ns \leftrightarrow np$ . On rappelle que le premier niveau excité est en fait clivé en deux sous-niveaux  $np_{1/2}$  et  $np_{3/2}$  du fait de l'interaction de structure fine, ce qui donne naissance à deux raies de résonance  $D_1$  et  $D_2$  (le fameux « doublet jaune » du sodium par exemple). Par ailleurs, le spin  $I$  du noyau étant non nul, le niveau fondamental  $ns$  et les niveaux excités  $np_{1/2}$  et  $np_{3/2}$  sont également clivés par l'interaction de structure hyperfine. En particulier, le niveau fondamental se décompose en deux sous-niveaux de moment angulaire  $F = I \pm 1/2$  (figure 4.9).

Supposons qu'un champ magnétique extérieur soit appliqué pour lever la dégénérescence entre les différents états Zeeman. Quand on éclaire l'atome par deux faisceaux lumineux de fréquence et de polarisations bien choisies, des transitions Raman résonantes peuvent se produire entre états

Zeeman adjacents (figure 4.9 à droite) :

$$|g, F, m_F\rangle \leftrightarrow |g, F, m_F \pm 1\rangle. \quad (4.62)$$

L'ordre de grandeur de l'élément de matrice correspondant est

$$\kappa_{\text{eff}} \sim \kappa^2 \left( \frac{1}{\Delta_2} - \frac{1}{\Delta_1} \right) \quad (4.63)$$

où  $\Delta_1 = \omega - \omega_1$  et  $\Delta_2 = \omega - \omega_2$  sont les désaccords du laser par rapport aux transitions de résonance  $D_1$  et  $D_2$ . Les contributions de ces deux transitions apparaissent avec des signes opposés dans (4.63), ce qui correspond à une interférence destructive entre les deux chemins allant de  $|g, F, m_F\rangle$  à  $|g, F, m_F \pm 1\rangle$ , en passant par  $np_{1/2}$  ou  $np_{3/2}$ .

Rappelons l'origine de ce phénomène, discuté plus en détail dans le cours de l'an dernier. Le couplage atome-lumière est de type dipolaire électrique, en  $q\mathbf{r} \cdot \mathcal{E}$ , où  $\mathbf{r}$  est la position de l'électron externe de l'atome et  $\mathcal{E}$  le champ électrique lumineux. Ce couplage porte donc uniquement sur les variables orbitales de l'électron et ne concerne pas son spin. Le fait que l'on puisse malgré tout basculer le spin de l'électron dans une transition Raman provient du couplage spin-orbite responsable de la levée de dégénérescence entre  $np_{1/2}$  et  $np_{3/2}$ . Or, quand on prend un désaccord lumineux grand devant la structure fine ( $\Delta_1 \approx \Delta_2$ ), l'effet de ce couplage spin-orbite devient négligeable et il est normal que le couplage Raman tende vite vers 0 (comme  $1/\Delta^2$ ), plus rapidement qu'on aurait pu le supposer naïvement à partir de (4.55).

Le taux d'émission spontanée pour un atome alcalin vaut quant à lui (à des facteurs numériques près)

$$\gamma \sim \Gamma \kappa^2 \left( \frac{1}{\Delta_1^2} + \frac{1}{\Delta_2^2} \right), \quad (4.64)$$

où  $\Gamma^{-1}$  désigne la durée de vie radiative des niveaux excités  $np_{1/2}$  et  $np_{3/2}$ . L'élément de matrice Raman et le taux d'émission spontanée sont donc tous deux proportionnels à l'intensité lumineuse ( $\kappa^2$ ), si bien que le facteur de mérite  $\mathcal{M}$  ne dépend pas de cette intensité, mais simplement du désaccord. Le facteur de mérite optimal est obtenu en prenant un faisceau laser tel que  $\Delta_1 \approx -\Delta_2$ , ce qui conduit à

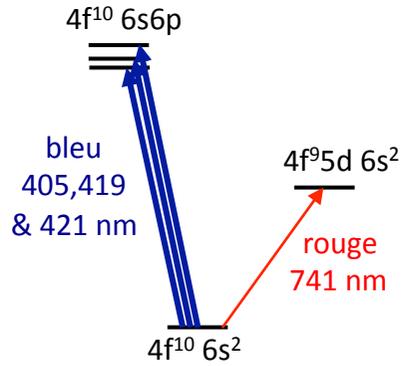
$$\mathcal{M} \sim \frac{\Delta_{\text{s.f.}}}{\Gamma}, \quad (4.65)$$

où  $\Delta_{\text{s.f.}} = \Delta_1 - \Delta_2$  représente l'écart de structure fine entre les niveaux  $np_{1/2}$  et  $np_{3/2}$ .

Pour l'atome de rubidium, une fois les facteurs numériques correctement pris en compte, ce facteur de mérite vaut environ  $1.5 \cdot 10^5$ , ce qui correspond à un chauffage d'une quinzaine de nanokelvins par seconde si on prend l'élément de matrice Raman égal à l'énergie de recul  $\hbar^2 k^2 / 2M$  (valeur minimale pour générer des champs de jauge dans l'approximation adiabatique). Si l'on souhaite travailler avec des atomes fermioniques, il faut se tourner vers le potassium 40 ; le facteur de mérite est alors beaucoup plus faible et le taux de chauffage pour  $\hbar\kappa_{\text{eff}} = E_r$  atteint 700 nK/s (Nascimbene 2013). Ces taux de chauffage sont notablement trop grands pour les recherches portant sur les états fortement corrélés ; nous verrons en effet que les énergies caractérisant ces états sont elles-mêmes de l'ordre de la dizaine de nanokelvins, et les temps nécessaires pour atteindre l'état d'équilibre thermodynamique peuvent dépasser la seconde.

**Lantanides : erbium, dysprosium.** Considérons maintenant des espèces atomiques comme l'erbium et le dysprosium. Les propriétés électroniques de ces atomes sont très différentes de celles des alcalins. On peut dans une certaine mesure considérer ces atomes comme ayant deux électrons externes (niveau  $6s^2$  pour Dy), mais leur état fondamental n'est pas de moment cinétique orbital nul en raison des électrons disposés sur la dernière couche interne incomplète ( $4f^{10}$  pour Dy, conduisant à un moment cinétique orbital  $L = 6$ ). Le bas du spectre d'énergie de ces atomes comporte donc des raies correspondant à l'excitation de l'un des deux électrons externes ou d'un électron de cette couche interne.

Nous avons reporté sur la figure 4.10 quelques niveaux pertinents du dysprosium [pour l'erbium, une étude détaillée est présentée par Lepers et al. (2013)]. On trouve tout d'abord une raie bleue intense, correspondant à la transition de résonance  $6s^2 \rightarrow 6s 6p$  de largeur naturelle  $\Gamma_b/2\pi = 30$  MHz. Cette raie est clivée par l'interaction de structure fine en trois composantes de longueurs d'onde 405, 419 et 421 nm. Si cette raie était seule présente, on rencontrerait le même problème que pour les atomes alcalins pour générer un élément de matrice Raman important : quand le désaccord du laser est grand devant l'écart entre ces raies, l'élément de matrice décroît comme le carré du désaccord et le facteur de mérite  $\mathcal{M}$  ne serait



**FIGURE 4.10.** Quelques niveaux pertinents du Dysprosium : la raie de résonance principale, clivée par la structure fine, est dans le bleu. Un couplage Raman efficace entre états Zeeman de l'état fondamental est obtenu en prenant un laser proche de la résonance avec une raie étroite située dans le rouge, par exemple la raie à 741 nm.

pas très bon. Mais il existe également de nombreuses raies étroites dans le spectre du dysprosium atomique, comme la raie rouge correspondant à l'excitation d'un électron de la couche interne  $4f^{10} \rightarrow 4f^9 5d$  à 741 nm (terme  $^5K^o$ ), de largeur  $\Gamma_r/2\pi \sim 2$  kHz (Cui et al. 2013).

L'idée est alors de prendre une transition Raman proche de la résonance avec ce niveau étroit, avec un désaccord optimisant le facteur de mérite. Plus précisément, le couplage Raman est d'ordre

$$\kappa_{\text{eff}} \sim \frac{(d_r \mathcal{E})^2}{\Delta_r} \quad (4.66)$$

(où l'indice  $r$  fait référence à la transition *rouge*) alors que le taux d'émission spontanée est obtenu en sommant les contributions des raies rouge et

bleue<sup>5</sup> :

$$\gamma \sim \Gamma_r \frac{(d_r \mathcal{E})^2}{\Delta_r^2} + \Gamma_b \frac{(d_b \mathcal{E})^2}{\Delta_b^2}. \quad (4.67)$$

Dans ces expressions, on a introduit les dipôles atomiques  $d_b$  et  $d_r$  associés aux transitions bleue et rouge, avec

$$\frac{\Gamma_r}{\Gamma_b} \sim \frac{d_r^2}{d_b^2}. \quad (4.68)$$

L'optimisation du facteur de mérite est alors simple et conduit à un désaccord tel que

$$|\Delta_r| \sim |\Delta_b| \frac{\Gamma_r}{\Gamma_b}. \quad (4.69)$$

Comme le rapport  $\Gamma_r/\Gamma_b$  est très petit devant 1 ( $\sim 10^{-4}$ ), cela revient à choisir un laser pour le couplage Raman désaccordé d'un dixième de nanomètre environ par rapport à la raie rouge. Le facteur de mérite est alors simplement

$$\mathcal{M} \sim \frac{\Delta_b}{\Gamma_b}, \quad (4.70)$$

ce qui est beaucoup plus grand que le résultat pour les alcalins car  $\Delta_b$  est de l'ordre d'une fréquence optique. Une fois tous les facteurs numériques pris en compte, on trouve un taux de chauffage inférieur au nanokelvin/seconde pour un couplage Raman égal à l'énergie de recul, aussi bien pour des isotopes bosoniques que fermioniques ; cela semble nettement plus prometteur que le cas des atomes alcalins (Nascimbene 2013).

## 4 Potentiels vecteur et scalaire pour un atome

La première transposition des concepts de potentiels de jauge géométriques au cas d'un atome en mouvement dans une onde laser est due à Dum & Olshanii (1996), qui s'intéressaient au mouvement d'un atome dans

5. Nous donnons ici des expressions de type « approximation de champ tournant », alors que pour les grands désaccords en jeu pour la transition bleue, les termes anti-résonnants peuvent avoir une contribution significative. Nous ne pouvons donc espérer obtenir ici que l'ordre de grandeur du facteur de mérite. Un calcul plus précis est bien sûr possible, au prix d'expressions mathématiques moins transparentes.

un réseau optique. Ils ont établi les expressions générales des potentiels de jauge, puis se sont concentrés sur le cas du potentiel scalaire : un point clé de leur approche est qu'un état « noir », combinaison linéaire d'états internes en principe non couplée à la lumière, ressent néanmoins une force non nulle due au gradient du potentiel scalaire géométrique.

Dans ce paragraphe, nous allons commencer par établir une expression générale pour ces potentiels, puis particulariser notre discussion à la situation la plus simple, le cas d'un atome à deux niveaux. Nous terminerons par une description de la première expérience ayant mis en évidence le potentiel géométrique scalaire sur un atome, faite par Dutta et al. (1999) dans le prolongement de la proposition de Dum & Olshanii (1996).

#### 4-1 Expressions générales

Au paragraphe précédent, nous avons mis l'expression de l'hamiltonien interne de l'atome couplé au rayonnement sous forme d'une matrice  $(2F + 1) \times (2F + 1)$ . Par exemple, pour une atome à deux niveaux, nous avons écrit cet hamiltonien dans la base  $\{|g\rangle, |e\rangle\}$  sous la forme

$$\hat{H}_{\text{interne}} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \Delta & \kappa^* \\ \kappa & -\Delta \end{pmatrix}. \quad (4.71)$$

Cette matrice peut dépendre *a priori* de la position du centre de masse de l'atome par l'intermédiaire de plusieurs paramètres :

- la phase du ou des faisceaux lasers incidents sur l'atome, qui apparaît dans la phase du coefficient  $\kappa$ ,
- l'intensité du faisceau laser, qui est proportionnelle à  $|\kappa|^2$ ,
- un gradient de polarisation du faisceau lumineux,
- une possible variation spatiale du désaccord  $\Delta$ , obtenue par exemple en plongeant l'atome dans un champ magnétique non homogène.

La procédure générale que nous avons suivie au chapitre précédent pour dégager la notion de connexion de Berry s'applique telle quelle dans ce cas. Pour toute position  $\mathbf{r}$  du centre de masse, on peut diagonaliser la matrice  $\hat{H}_{\text{interne}}$  et obtenir ses  $2F + 1$  états propres  $|\psi_n(\mathbf{r})\rangle$ , d'énergies notées  $E_n(\mathbf{r})$ , que nous appellerons *états habillés*. Supposons l'atome préparé

à l'instant initial  $t = 0$  dans un de ces états habillés :

$$\Psi(\mathbf{r}, 0) = \phi_\ell(\mathbf{r}, 0) |\psi_\ell(\mathbf{r})\rangle. \quad (4.72)$$

Si les conditions nécessaires à l'approximation adiabatique sont remplies et si on peut négliger les processus d'émission spontanée, l'atome suivra adiabatiquement cet état habillé et on aura à chaque instant :

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \phi_\ell(\mathbf{r}, t) |\psi_\ell(\mathbf{r})\rangle. \quad (4.73)$$

Nous avons vu au chapitre précédent que le mouvement externe de l'atome, décrit par l'évolution de la fonction d'onde  $\phi_\ell(\mathbf{r}, t)$  est donné par une équation de Schrödinger pour une particule scalaire (sans structure interne) soumise au potentiel vecteur (connexion de Berry) :

$$\mathcal{A}_\ell(\mathbf{r}) = i\hbar \langle \psi_\ell | \nabla \psi_\ell \rangle, \quad (4.74)$$

cette équation de Schrödinger effective s'écrivant ici

$$i\hbar \frac{\partial \phi_\ell}{\partial t} = \left[ \frac{(\hat{\mathbf{p}} - \mathcal{A}_\ell(\mathbf{r}))^2}{2M} + E_\ell(\mathbf{r}) + \mathcal{V}_\ell(\mathbf{r}) \right] \phi_\ell(\mathbf{r}, t), \quad (4.75)$$

où  $\mathcal{V}_\ell(\mathbf{r})$  est le potentiel scalaire additionnel, apparaissant lui aussi du fait de l'approximation adiabatique :

$$\mathcal{V}_\ell(\mathbf{r}) = \frac{\hbar^2}{2M} \sum_{n \neq \ell} \langle \psi_n | \nabla \psi_\ell \rangle^2. \quad (4.76)$$

#### 4-2 Le résultat pour un atome à deux niveaux

Nous pouvons expliciter les résultats (4.74) et (4.76) pour le cas de l'atome à deux niveaux en mettant la matrice  $2 \times 2$  donnée en (4.71) sous la forme

$$\hat{H}_{\text{interne}} = \frac{\hbar\Omega}{2} \begin{pmatrix} \cos \theta & e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}, \quad (4.77)$$

avec pour la fréquence de Rabi généralisée  $\Omega$ , l'angle de mélange  $\theta$  et l'angle de phase  $\phi$  :

$$\Omega = \sqrt{\Delta^2 + |\kappa|^2}, \quad \cos \theta = \frac{\Delta}{\Omega}, \quad \sin \theta = \frac{|\kappa|}{\Omega}, \quad \kappa = |\kappa| e^{i\phi}, \quad (4.78)$$

où  $\Omega$ ,  $\theta$  et  $\phi$  sont des fonction de  $\mathbf{r}$ , avec  $\theta \in [0, \pi]$ . Les deux états habillés sont alors

$$|\psi_+\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ e^{i\phi} \sin(\theta/2) \end{pmatrix}, \quad |\psi_-\rangle = \begin{pmatrix} \sin(\theta/2) \\ -e^{i\phi} \cos(\theta/2) \end{pmatrix}, \quad (4.79)$$

avec les énergies associées :

$$E_{\pm} = \pm \frac{\hbar\Omega}{2}. \quad (4.80)$$

La connexion de Berry pour chacun de ces états se calcule aisément et vaut

$$\mathcal{A}_{\pm}(\mathbf{r}) = \frac{\hbar}{2} (-1 \pm \cos \theta) \nabla \phi. \quad (4.81)$$

Il faut donc que l'onde lumineuse présente un gradient de phase pour donner naissance à un potentiel vecteur géométrique non nul. En particulier, une onde lumineuse stationnaire conduit toujours à  $\mathcal{A} = 0$ .

Le potentiel scalaire vaut quant à lui

$$\mathcal{V}_{\pm}(\mathbf{r}) = \frac{\hbar^2}{8M} \left[ (\nabla\theta)^2 + \sin^2 \theta (\nabla\phi)^2 \right], \quad (4.82)$$

et il crée une bosse de potentiel aux points où les états habillés varient vite avec la position  $\mathbf{r}$ .

**Remarque : changement de jauge.** La valeur de  $\mathcal{A}_{\pm}$  dépend du choix de jauge, c'est-à-dire de la phase locale qu'on choisit pour écrire les états  $|\psi_{\pm}\rangle$ . Dans (4.79), nous avons pris une convention qui permet un raccord facile (sans phase additionnelle) à l'état  $|g\rangle$ . Un autre choix « naturel » consiste à favoriser plutôt le raccord à  $|e\rangle$  et prendre ainsi

$$|\psi'_+\rangle = \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{pmatrix}, \quad |\psi'_-\rangle = \begin{pmatrix} e^{i\phi} \sin(\theta/2) \\ -\cos(\theta/2) \end{pmatrix} \quad (4.83)$$

ce qui conduit à

$$\mathcal{A}'_{\pm}(\mathbf{r}) = \frac{\hbar}{2} (1 \pm \cos \theta) \nabla \phi. \quad (4.84)$$

On peut également panacher et prendre (par exemple) la valeur (4.79) pour  $|\psi_+\rangle$  et la valeur (4.83) pour  $|\psi'_-\rangle$ ... En d'autres termes, l'invariance de jauge se manifeste ici par la possibilité d'ajouter ou retrancher à  $\mathcal{A}_{\pm}$  un terme proportionnel seulement à  $\nabla\phi$ . Le potentiel scalaire est quant à lui invariant de jauge.

### 4-3 Le potentiel scalaire dans un réseau « gris »

Pour mettre en évidence le potentiel scalaire  $\mathcal{V}$ , Dutta et al. (1999) ont utilisé un réseau optique à une dimension. Suivant l'idée initiale de Dum & Olshanii (1996), ils ont choisi une configuration où le niveau habillé  $E_1(\mathbf{r})$  était quasiment plat, pour que la force due au potentiel scalaire géométrique  $\mathcal{V}_1(\mathbf{r})$  constitue une modification importante de la dynamique des atomes.

Le réseau 1D est constitué de deux ondes lumineuses contre-propageantes le long de l'axe  $z$ . Ces deux ondes ont des polarisations linéaires croisées  $\epsilon_x$  et  $\epsilon_y$  (figure 4.11a). Quand on additionne de manière cohérente les champs électrique de ces deux ondes, on obtient une intensité constante, mais une polarisation résultante qui varie le long de l'axe  $z$ . En certains points, cette polarisation est linéaire et orientée à  $45^\circ$  par rapport aux axes  $x, y$ . À une distance  $\lambda/8$  de ces points, la polarisation est circulaire droite ou circulaire gauche. Entre ces points particuliers, la polarisation est généralement elliptique.

Le laser est choisi presque résonnant avec la transition de la raie  $D_1$  de l'atome de rubidium (isotope 87), plus précisément avec la transition reliant  $|g, F=2\rangle$  et  $|e, F=2\rangle$  (figure 4.11b). Si cette transition était la seule en jeu, on peut montrer qu'un des états habillés serait « noir » en tout point de l'espace, c'est-à-dire que l'énergie  $E_1(z)$  du niveau habillé  $|\psi_1(z)\rangle$  serait nulle. Ceci se comprend simplement pour quelques points particuliers de l'axe  $z$  :

- Là où la polarisation est circulaire  $\sigma_{\pm}$ , l'état  $|\psi_1(z)\rangle$  correspondant à  $E_1 = 0$  est l'état polarisé  $|g, F=2, m_z = \pm 2\rangle$ .
- Là où la polarisation est linéaire, on peut prendre l'axe  $\mathbf{u}$  de cette polarisation comme axe de quantification et l'état  $|\psi_1(z)\rangle$  correspond alors à  $|g, F=2, m_u = 0\rangle$ . En effet, pour  $F$  entier, le coefficient de Clebsch-Gordan reliant les deux états  $|g, F, m=0\rangle$  et  $|e, F, m=0\rangle$  est toujours nul.

Par conséquent, si cette transition  $|g, F=2\rangle$  et  $|e, F=2\rangle$  était la seule en jeu, on en déduirait que  $E_1(z) = 0$  pour tout  $z$ , ce qui veut dire que la dynamique serait uniquement due au potentiel scalaire  $\mathcal{V}(z)$  : son identification serait facile.

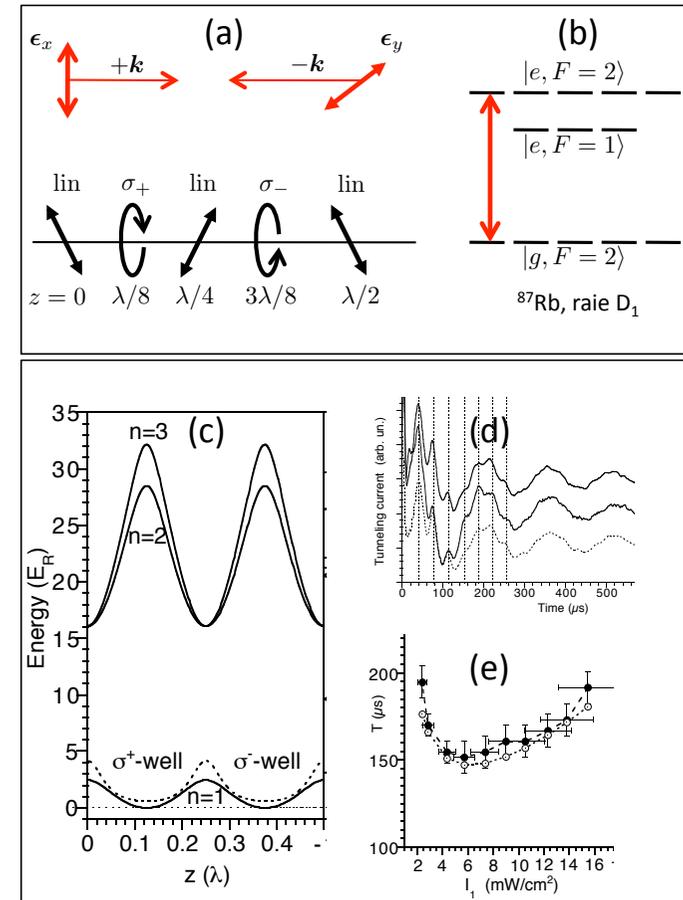
La proximité du niveau excité  $|e, F=1\rangle$  vient perturber un peu ce rai-

sonnement. Si les états  $|g, F = 2, m_z = \pm 2\rangle$  restent noirs là où la lumière est polarisée linéairement : l'état  $|g, F = 2, m_u = 0\rangle$  devient légèrement couplé à la lumière par l'intermédiaire du niveau  $|e, F = 1, m_u = 0\rangle$ . Il en résulte que l'énergie  $E_1(z)$  est légèrement modulée le long de l'axe  $z$ , comme représenté sur la figure 4.11c. Néanmoins, cette modulation résiduelle de l'énergie  $E_1(z)$  est suffisamment faible pour que le potentiel scalaire  $\mathcal{V}(z)$  joue un rôle très significatif pour le niveau habillé fondamental. Ces deux fonctions sont tracées à la même échelle sur la figure 4.11 et elles ont effectivement des amplitudes comparables.

Pour étudier la dynamique des atomes dans ce réseau, Dutta et al. (1999) ont préparé les atomes par pompage optique dans les puits correspondant à la polarisation  $\sigma_+$ , ces atomes étant en majorité dans le niveau habillé d'énergie le plus bas<sup>6</sup>. Ils ont ensuite étudié la dynamique du transfert des puits  $\sigma_+$  vers les puits  $\sigma_-$  du fait de l'effet tunnel à travers la barrière créée par la superposition  $E_1(z) + \mathcal{V}(z)$ . L'oscillation tunnel correspondante est montrée sur la figure 4.11d, avec une simulation numérique reproduisant remarquablement bien le résultat expérimental.

On déduit de cette oscillation une période caractéristique ; Dutta et al. (1999) ont mesuré cette période pour différentes puissances de l'onde stationnaire et leur résultat est reporté sur la figure 4.11e. Si le potentiel  $E_1(z)$  était le seul présent, on s'attendrait à ce que la période augmente avec l'intensité, puisque la hauteur de la barrière serait proportionnelle à cette intensité. Mais le potentiel scalaire géométrique  $\mathcal{V}(z)$  est pratiquement indépendant de l'intensité : c'est donc lui qui domine la dynamique tunnel à basse intensité, ce qui explique pourquoi le temps tunnel tracé en figure 4.11e ne change que très peu quand on varie l'intensité lumineuse par un facteur 5 environ. Même si cette démonstration reste qualitative et repose sur des comparaisons assez sophistiquées avec un modèle théorique pour être convaincante, elle a constitué un premier pas dans la mise en évidence de l'influence des potentiels géométriques sur le mouvement d'atomes.

6. Dutta et al. (1999) n'utilisaient pas de condensat, et comptaient uniquement sur le refroidissement lumineux pour assurer cette préparation, ce qui ne leur facilitait pas la tâche...



**FIGURE 4.11.** Mise en évidence du potentiel scalaire par Dutta et al. (1999). (a) Configuration laser 1D avec deux ondes laser contre-propageantes et des polarisations linéaires croisées. La polarisation résultante oscille le long de l'axe  $z$ , en passant de linéaire à circulaire avec une période  $\lambda/2$ . (b) Schéma de niveau utilisé : raie  $D_1$  de  $^{87}\text{Rb}$ , le laser étant quasi-résonnant avec la transition  $F_g = 2 \leftrightarrow F_e = 2$ . (c) Variations de la position des niveaux d'énergie habillés les plus bas en fonction de la position. Le potentiel scalaire est tracé en pointillé. (d) Taux de transition tunnel d'un puits de polarisation  $\sigma_+$  vers un puits de polarisation  $\sigma_-$  (théorie et expérience). (e) Variation du taux tunnel en fonction de l'intensité lumineuse.

## 5 Références

- Aikawa, K., A. Frisch, M. Mark, S. Baier, A. Rietzler, R. Grimm & F. Ferlaino (2012), « Bose-Einstein Condensation of Erbium », in *Phys. Rev. Lett.* 108 (21), p. 210401.
- Arimondo, E. (1996), « Coherent population trapping in laser spectroscopy », in *Progress in Optics*, vol. 35, ed. by E. Wolf, Elsevier, , p. 259.
- Cohen-Tannoudji, C., J. Dupont-Roc & G. Grynberg (1989), *Photons and Atoms—Introduction to Quantum Electrodynamics*, New-York: Wiley.
- Cui, Xiaoling, Biao Lian, Tin-Lun Ho, Benjamin L. Lev & Hui Zhai (2013), « Synthetic gauge field with highly magnetic lanthanide atoms », in *Phys. Rev. A* 88 (1), p. 011601.
- Dalibard, Jean, Fabrice Gerbier, Gediminas Juzeliūnas & Patrik Öhberg (2011), « Colloquium : Artificial gauge potentials for neutral atoms », in *Rev. Mod. Phys.* 83 (4), pp. 1523–1543.
- Diu, B., C. Guthmann, D. Lederer & B. Roulet (1989), *Physique Statistique*, Hermann.
- Dum, R. & M. Olshanii (1996), « Gauge Structures in Atom-Laser Interaction : Bloch Oscillations in a Dark Lattice », in *Phys. Rev. Lett.* 76.11, pp. 1788–1791.
- Dutta, S. K., B. K. Teo & G. Raithel (1999), « Tunneling Dynamics and Gauge Potentials in Optical Lattices », in *Phys. Rev. Lett.* 83.10, pp. 1934–1937.
- Goldman, N., G. Juzeliūnas, P. Ohberg & I. B. Spielman (2013), « Light-induced gauge fields for ultracold atoms », arXiv :1308.6533.
- Landau, L. D. & E. M. Lifchitz (1984), *Physique Statistique*, Editions Mir.
- Landau, L. D. & E. M. Lifshitz (1982), *Mécanique*, Editions Mir.
- Lepers, M., J.-F. Wyart & O. Dulieu (2013), « Anisotropic optical trapping of ultracold erbium atoms », arXiv :1310.6149.
- Lu, Mingwu, Nathaniel Q. Burdick & Benjamin L. Lev (2012), « Quantum Degenerate Dipolar Fermi Gas », in *Phys. Rev. Lett.* 108 (21), p. 215301.
- Madison, K. W., F. Chevy, W. Wohlleben & J. Dalibard (2000), « Vortices in a stirred Bose-Einstein condensate (JMO) », in *J. Mod. Opt.* 47, p. 2715.
- Moulder, Stuart, Scott Beattie, Robert P. Smith, Naaman Tammuz & Zoran Hadzibabic (2012), « Quantized supercurrent decay in an annular Bose-Einstein condensate », in *Phys. Rev. A* 86 (1), p. 013629.
- Nascimbene, Sylvain (2013), « Minimiser le chauffage associé à un couplage Raman : alcalins vs Dy », non publié.
- Rosenbusch, P., D.S. Petrov, S. Sinha, F. Chevy, V. Bretin, Y. Castin, G. Shlyapnikov & J. Dalibard (2002), « Critical rotation of a harmonically trapped Bose gas », in *Phys. Rev. Lett.* 88, p. 250403.
- Scazza, F., C. Hofrichter, M. Höfer, P. C. De Groot, I. Bloch, & S. Fölling (2014), « Observation of two-orbital spin-exchange interactions with ultracold SU(N)-symmetric fermions », arXiv :1403.4761.
- Schweikhard, V., I. Coddington, P. Engels, V. P. Mogendorff & E. A. Cornell (2004), « Rapidly Rotating Bose-Einstein Condensates in and near the Lowest Landau Level », in *Phys. Rev. Lett.* 92.4, p. 040404.

# Chapitre 5

## Magnétisme artificiel pour un atome isolé et couplage spin-orbite

### Sommaire

<b>1</b>	<b>Rappel des principales notions</b>	<b>2</b>
1-1	Hamiltonien atomique interne	2
1-2	Les états habillés	2
1-3	Les potentiels géométriques	3
<b>2</b>	<b>Le cas des ondes planes</b>	<b>3</b>
2-1	Que peut-on mesurer ?	4
2-2	Mise en évidence expérimentale	4
2-3	Traitement exact pour l'onde plane	6
<b>3</b>	<b>La courbure de Berry <math>B</math></b>	<b>7</b>
3-1	Le résultat général pour un atome à deux niveaux	7
3-2	Onde plane + gradient de désaccord	8
3-3	Mise en évidence expérimentale	10
<b>4</b>	<b>Champs de jauge non abéliens</b>	<b>11</b>
4-1	La force de Lorentz dans le cas non-abélien	11
4-2	Émergence de potentiels non abéliens	12
4-3	Le schéma de niveau multipode	13
<b>5</b>	<b>Le couplage spin-orbite</b>	<b>14</b>
5-1	Comment générer un couplage spin-orbite 2D	14
5-2	La physique du couplage spin-orbite	15
5-3	La version 1D du couplage spin-orbite	16

Nous continuons dans ce chapitre notre exploration de la physique des potentiels géométriques telle qu'elle peut être implémentée pour des atomes couplés au rayonnement. Nous allons montrer ici qu'il est véritablement possible de créer un potentiel vecteur non trivial sur un gaz atomique, correspondant à l'apparition d'un magnétisme orbital. La preuve de l'existence de ce magnétisme orbital sera, comme dans le cas d'une mise en rotation, l'observation de vortex quantifiés lorsque le gaz est dans un régime superfluide.

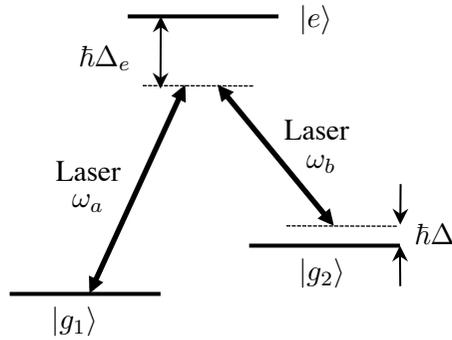
Nous aborderons ensuite un autre type de magnétisme, correspondant à un couplage spin-orbite. Il s'agira de remplacer le couplage magnétique envisagé jusqu'ici :

$$\hat{p} \cdot \mathcal{A}(\hat{r}) \quad (5.1)$$

où  $\mathcal{A}(\mathbf{r})$  est une fonction statique, par un terme du type

$$\hat{p} \cdot \hat{S} \quad (5.2)$$

où les  $\hat{S}_i$ ,  $i = x, y, z$  sont les opérateurs aux composantes de spin de l'atome. Ce couplage spin-orbite peut conduire à de nombreux phénomènes originaux, à la fois sur le plan fondamental avec la possibilité de simuler des nouvelles phases de la matière comme les isolants topologiques, et sur le plan appliqué avec des analogies fortes avec les dispositifs de spintronique.



**FIGURE 5.1.** Couplage de deux états  $|g_1\rangle$  et  $|g_2\rangle$  issus d'un niveau fondamental atomique, par une transition Raman. Si le désaccord à l'état excité  $|e\rangle$  est grand devant les fréquences de Rabi  $\kappa_a$  et  $\kappa_b$  caractérisant le couplage aux ondes lumineuses, on peut éliminer perturbativement  $|e\rangle$  et se ramener à un problème « à deux niveaux » dans le sous-espace  $\{|g_1\rangle, |g_2\rangle\}$ .

## 1 Rappel des principales notions

### 1-1 Hamiltonien atomique interne

Nous allons considérer dans ce qui suit un atome « à deux niveaux internes ». Ce système modélise par exemple la configuration représentée sur la figure 5.1, sur laquelle on a isolé deux états  $|g_1\rangle$  et  $|g_2\rangle$  du niveau fondamental, ces deux états étant couplés par une transition Raman impliquant l'absorption d'un photon d'un faisceau laser depuis  $|g_1\rangle$ , passage dans un état excité  $|e\rangle$  et émission stimulée dans un autre faisceau pour aller vers  $|g_2\rangle$ . Comme expliqué dans le chapitre précédent, nous supposons ici que les faisceaux lumineux ne sont pas résonnants avec les transitions  $|g_i\rangle \leftrightarrow |e\rangle$ , de sorte que l'état excité  $|e\rangle$  n'est jamais significativement peuplé dans ce processus. On peut alors restreindre la dynamique interne de l'atome au sous-espace de dimension 2 engendré par  $\{|g_1\rangle, |g_2\rangle\}$ .

Nous noterons  $\kappa$  la fréquence de Rabi effective associée à cette transition, qui fait intervenir les fréquences de Rabi associées à chaque faisceau ainsi que le désaccord par rapport au niveau excité  $|e\rangle$  (cf. chapitre précé-

dent) :

$$\kappa = \frac{\kappa_a \kappa_b^*}{2\Delta_e}. \quad (5.3)$$

Le couplage atome-laser s'écrit donc :

$$\hat{V}_{AL} = \frac{\hbar\kappa}{2} |g_2\rangle\langle g_1| + \frac{\hbar\kappa^*}{2} |g_1\rangle\langle g_2|. \quad (5.4)$$

Nous introduisons également le désaccord  $\hbar\Delta$  entre l'énergie de la transition atomique  $E_2 - E_1$  et l'énergie  $\hbar(\omega_a - \omega_b)$  fournie par la lumière dans une telle transition. Après élimination des termes dépendant explicitement du temps à la pulsation  $\omega_a - \omega_b$  (« passage dans le référentiel tournant »), l'hamiltonien interne atomique s'écrit dans la base  $\{|g_1\rangle, |g_2\rangle\}$  sous forme d'une matrice  $2 \times 2$  :

$$\hat{H}_{interne} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \Delta & \kappa^* \\ \kappa & -\Delta \end{pmatrix}. \quad (5.5)$$

Rappelons que cette matrice peut dépendre *a priori* de la position du centre de masse de l'atome par l'intermédiaire de plusieurs paramètres :

- les phases des faisceaux lasers incidents sur l'atome, qui apparaissent dans la phase du coefficient  $\kappa$ ,
- l'intensité lumineuse proportionnelle à  $|\kappa|^2$ ,
- une possible variation spatiale du désaccord  $\Delta$ , obtenue par exemple en plongeant l'atome dans un champ magnétique non homogène.

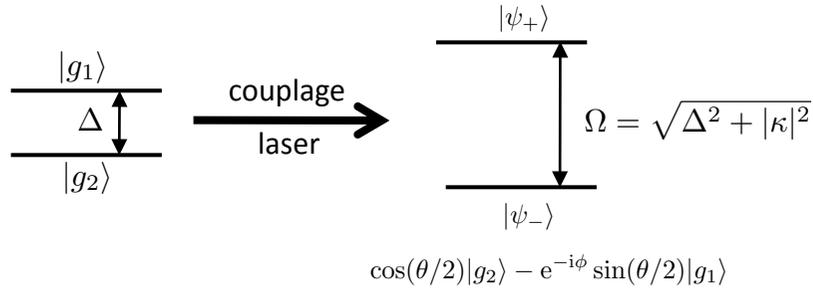
### 1-2 Les états habillés

Nous appelons états habillés les états propres de l'hamiltonien interne (5.5). Pour trouver ces états habillés, il est commode de mettre l'hamiltonien interne sous la forme

$$\hat{H}_{interne} = \frac{\hbar\Omega}{2} \begin{pmatrix} \cos\theta & e^{i\phi} \sin\theta \\ e^{i\phi} \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}, \quad (5.6)$$

avec pour la fréquence de Rabi généralisée  $\Omega$ , l'angle de mélange  $\theta$  et l'angle de phase  $\phi$  :

$$\Omega = (\Delta^2 + |\kappa|^2)^{1/2}, \quad \cos\theta = \frac{\Delta}{\Omega}, \quad \sin\theta = \frac{|\kappa|}{\Omega}, \quad \kappa = |\kappa| e^{i\phi}, \quad (5.7)$$



**FIGURE 5.2.** Couplage entre les deux états « nus » (après le « passage dans le référentiel tournant » à la pulsation  $\omega_a - \omega_b$ ), donnant naissance aux états habillés  $|\psi_{\pm}\rangle$ , combinaisons linéaires des états nus avec des amplitudes dépendant du point de l'espace considéré.

où  $\Omega$ ,  $\theta$  et  $\phi$  sont des fonction de  $\mathbf{r}$ , avec  $\theta \in [0, \pi]$ .

Les deux états habillés sont alors (à une phase près)

$$|\psi_{+}\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ e^{i\phi} \sin(\theta/2) \end{pmatrix}, \quad |\psi_{-}\rangle = \begin{pmatrix} -e^{i\phi} \sin(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

qui se raccordent respectivement à  $|g_1\rangle$  et  $|g_2\rangle$  quand la pulsation de Rabi  $\kappa$  tend vers 0, avec  $\Delta > 0$ . Les énergies associées sont (voir figure 5.2)

$$E_{\pm} = \pm \frac{\hbar\Omega}{2}. \quad (5.9)$$

### 1-3 Les potentiels géométriques

Nous prenons maintenant en compte le mouvement du centre de masse de l'atome, que nous décrivons quantiquement. Nous allons restreindre notre analyse au cas où l'atome est préparé à l'instant initial dans un de ces états habillés, par exemple  $|\psi_{\epsilon}\rangle$  :

$$\Psi(\mathbf{r}, 0) = \phi_{\epsilon}(\mathbf{r}, 0) |\psi_{\epsilon}(\mathbf{r})\rangle. \quad (5.10)$$

Nous supposons que les conditions de validité de l'approximation adiabatique sont remplies (nous y reviendrons) et l'atome suit donc adiabatiquement cet état habillé à chaque instant :

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \phi_{\epsilon}(\mathbf{r}, t) |\psi_{\epsilon}(\mathbf{r})\rangle. \quad (5.11)$$

L'évolution de la fonction d'onde  $\phi_{\epsilon}(\mathbf{r}, t)$  est donnée par l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{\partial \phi_{\epsilon}}{\partial t} = \left[ \frac{(\hat{\mathbf{p}} - \mathcal{A}_{\epsilon}(\mathbf{r}))^2}{2M} + E_{\epsilon}(\mathbf{r}) + \mathcal{V}_{\epsilon}(\mathbf{r}) \right] \phi_{\epsilon}(\mathbf{r}, t), \quad (5.12)$$

avec les potentiels géométriques vecteurs et scalaires

$$\mathcal{A}_{\epsilon}(\mathbf{r}) = i\hbar \langle \psi_{\epsilon} | \nabla \psi_{\epsilon} \rangle, \quad \mathcal{V}_{\epsilon}(\mathbf{r}) = \frac{\hbar^2}{2M} |\langle \psi_{+} | \nabla \psi_{\epsilon} \rangle|^2. \quad (5.13)$$

En utilisant l'expression explicite des états habillés donnée en (5.8), on arrive à

$$\mathcal{A}_{\epsilon}(\mathbf{r}) = \frac{\hbar}{2} \nabla \phi (1 - \cos \theta), \quad \mathcal{V}_{\epsilon}(\mathbf{r}) = \frac{\hbar^2}{8M} [(\nabla \theta)^2 + \sin^2 \theta (\nabla \phi)^2]. \quad (5.14)$$

## 2 Le cas des ondes planes

Nous allons considérer dans cette section le cas le plus simple d'atomes à deux niveaux plongés dans une onde laser plane progressive. D'une certaine mesure, ce cas est trivial car le potentiel vecteur que nous allons induire est uniforme dans l'espace. Il ne s'agit donc pas à proprement parler d'un hamiltonien magnétique. Néanmoins, l'étude de ce cas sera instructive car elle nous permettra de discuter les principales échelles d'impulsion et d'énergie du problème, de comparer notre approximation adiabatique à un traitement exact et d'en déduire son domaine de validité. L'approche que nous allons développer nous sera également très utile quand nous nous intéresserons au couplage spin-orbite.

Dans le cas d'un couplage par onde plane, l'hamiltonien interne de chaque atome est la matrice  $2 \times 2$  donnée en (5.5) avec  $\Delta$  indépendant de  $\mathbf{r}$  et

$$\kappa(\mathbf{r}) = \kappa_0 e^{2i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad \text{avec} \quad 2\mathbf{k} = \mathbf{k}_a - \mathbf{k}_b, \quad (5.15)$$

de sorte que  $2\hbar\mathbf{k}$  désigne l'impulsion transférée à l'atome par les faisceaux laser, quand il subit une transition de  $|g_1\rangle$  vers  $|g_2\rangle$ . La connexion de Berry donnée en (5.14) est alors indépendante du point  $\mathbf{r}$  et vaut

$$\mathcal{A}_\epsilon = \hbar\mathbf{k}(1 - \cos\theta) \quad \text{avec} \quad \cos\theta = \frac{\Delta}{\sqrt{\Delta^2 + \kappa_0^2}}. \quad (5.16)$$

Le potentiel scalaire  $\mathcal{V}_\epsilon$  donné en (5.14) est lui aussi uniforme dans l'espace et égal à  $E_r \sin^2\theta$ , avec  $E_r = \hbar^2 k^2 / 2M$ .

## 2-1 Que peut-on mesurer ?

La connexion de Berry (potentiel vecteur) dépendant de la jauge, il n'est pas question de la « mesurer » dans l'absolu. Néanmoins, pour un choix de jauge donné, il est possible<sup>1</sup> d'avoir une manifestation expérimentale de sa présence dans une expérience de temps de vol [voir aussi Möller & Cooper (2010)]. Un moyen pour cela est de s'intéresser à l'état fondamental de l'hamiltonien et de déterminer sa vitesse. Pour expliciter ce point, nous allons comparer cet état fondamental en absence et en présence de couplage laser.

Prenons par exemple un désaccord  $\Delta > 0$  pour le couplage Raman et considérons d'abord un nuage d'atomes préparés dans l'état interne  $|g_2\rangle$  en absence de laser. L'angle de mélange vaut  $\theta = 0$  et le potentiel vecteur (5.16) est nul. L'état fondamental externe correspond à l'impulsion nulle  $\mathbf{p} = 0$ , ce qui donne pour l'état global (externe+interne) :

$$\Psi_0(\mathbf{r}) = |g_2\rangle. \quad (5.17)$$

Quand on branche les faisceaux laser, l'état fondamental de l'hamiltonien interne correspond à l'état habillé  $|\psi_\epsilon\rangle$  donné en (5.8) :

$$|\psi_\epsilon(\mathbf{r})\rangle = \cos(\theta/2)|g_2\rangle - e^{i2\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \sin(\theta/2)|g_1\rangle \quad (5.18)$$

et le potentiel vecteur prend la valeur non nulle  $\mathcal{A}_\epsilon = \hbar\mathbf{k}(1 - \cos\theta)$  [cf. (5.16)]. L'hamiltonien externe décrivant l'évolution de l'amplitude associée  $\phi_\epsilon(\mathbf{r})$  est

$$\hat{H} = \frac{(\hat{\mathbf{p}} - \mathcal{A}_\epsilon)^2}{2m} - \frac{\hbar\Omega}{2} + \mathcal{V}_\epsilon. \quad (5.19)$$

1. On pourra vérifier que les expressions (5.21) et (5.22) sont inchangées si on change la phase des états habillés  $|\psi_\pm\rangle$ , ce qui correspond un changement de jauge dans notre problème.

L'état fondamental global (externe + interne) correspond donc à l'impulsion  $\mathbf{p} = \mathcal{A}_\epsilon$  et s'écrit

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{r}) &= e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar} |\psi_\epsilon(\mathbf{r})\rangle = e^{i\mathcal{A}_\epsilon\cdot\mathbf{r}/\hbar} |\psi_\epsilon(\mathbf{r})\rangle \\ &= e^{i\mathcal{A}_\epsilon\cdot\mathbf{r}/\hbar} (\cos(\theta/2)|g_2\rangle - e^{i2\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \sin(\theta/2)|g_1\rangle). \end{aligned} \quad (5.20)$$

Supposons que l'on coupe alors brutalement le laser et qu'on laisse les paquets d'ondes correspondant aux deux états internes  $|g_1\rangle$  et  $|g_2\rangle$  se propager. On va trouver deux classes de vitesses peuplées, séparées de la quantité  $2\hbar\mathbf{k}/M$  :

- Une classe de vitesses a pour poids  $\cos^2(\theta/2)$ , elle correspond à l'état  $|g_2\rangle$  et est centrée sur

$$\mathbf{v} = \frac{\mathcal{A}_\epsilon}{M} = \frac{\hbar\mathbf{k}}{M}(1 - \cos\theta). \quad (5.21)$$

- Une autre classe de vitesses a pour poids  $\sin^2(\theta/2)$ , elle correspondant à l'état  $|g_1\rangle$  et est centrée sur

$$\mathbf{v}' = \frac{\mathcal{A}_\epsilon - 2\hbar\mathbf{k}}{M} = -\frac{\hbar\mathbf{k}}{M}(1 + \cos\theta). \quad (5.22)$$

Chacune de ces vitesses permet donc de remonter à la valeur de  $\mathcal{A}_\epsilon$  en présence de laser. En particulier le décalage en vitesse des atomes dans l'état  $|g_2\rangle$  entre la situation sans laser  $v = 0$  et la situation avec laser  $v = v_r(1 - \cos\theta)$  (cf. 5.21) peut atteindre la vitesse recul  $v_r = \hbar k/M$ . Le décalage maximum est obtenu quand  $\theta$  approche  $\pi/2$ , c'est-à-dire quand la fréquence de Rabi  $\kappa_0$  devient grande devant le désaccord  $\Delta$ .

## 2-2 Mise en évidence expérimentale

La première expérience ayant pour but affiché de mettre en évidence un potentiel vecteur géométrique pour un atome dans une onde plane lumineuse a été effectuée au NIST par Lin et al. (2009a). Puisqu'un potentiel vecteur uniforme peut toujours être créé ou éliminé par une transformation de jauge, on peut bien sûr débattre de l'antériorité de certaines autres expériences. Disons que l'expérience de Lin et al. (2009a) a été la première à poser en termes de champ de jauge le gain d'impulsion d'un atome une

fois qu'on l'a « habillé » par un laser. Par ailleurs, le schéma utilisé par Lin et al. (2009a) se prête bien à une généralisation à un potentiel vecteur non uniforme, générant une courbure de Berry (champ magnétique) non nulle.

Lin et al. (2009a) ont utilisé des atomes de rubidium  $^{87}\text{Rb}$  préparés dans leur niveau hyperfin fondamental  $F = 1$ . Les atomes sont placés dans un champ magnétique statique parallèle à l'axe  $z$ , axe que nous choisirons comme direction de quantification. Les états propres de l'hamiltonien interne atomique en absence de laser sont donc les trois sous-niveaux Zeeman  $|m_z = -1\rangle$ ,  $|m_z = 0\rangle$  et  $|m_z = +1\rangle$  avec pour énergies  $-\hbar\omega_Z$ ,  $0$ ,  $+\hbar\omega_Z$  (nous négligerons ici l'effet Zeeman du deuxième ordre).

Un couplage par effet Raman stimulé entre ces trois sous-niveaux est produit par une paire de faisceaux (notés  $a$  et  $b$ ) contre-propageant le long de l'axe  $x$  (figure 5.3ab). Le faisceau  $a$ , de vecteur d'onde  $\mathbf{k} = k\mathbf{u}_x$ , est polarisé linéairement le long de l'axe  $z$ , ce qui donne une composante de moment cinétique nulle le long de cet axe (polarisation  $\pi$ ). Le faisceau  $b$ , de vecteur d'onde  $-\mathbf{k}$ , est polarisé linéairement le long de l'axe  $y$ , ce qui donne aux photons de ce faisceau une composante de moment cinétique  $\pm\hbar$  le long de l'axe de quantification  $z$  (polarisation  $\sigma$ ). On choisit les deux faisceaux avec des fréquences  $\omega_a$  et  $\omega_b$  telles que<sup>2</sup>

$$\Delta = (\omega_a - \omega_b) - \omega_Z, \quad |\Delta| \ll \omega_Z. \quad (5.25)$$

Bien qu'il s'agisse maintenant d'un système à 3 niveaux au lieu de 2, la méthode suivie précédemment s'applique. En passant dans le référentiel tournant associé à cette approximation résonnante, l'hamiltonien d'un atome en interaction avec le rayonnement peut s'écrire dans la base  $\{|m_z = -1\rangle, |m_z = 0\rangle, |m_z = +1\rangle\}$  :

$$H_{\text{interne}} = \hbar \begin{pmatrix} +\Delta & \kappa_0 e^{2ikx}/\sqrt{2} & 0 \\ \kappa_0 e^{+2ikx}/\sqrt{2} & 0 & \kappa_0 e^{2ikx}/\sqrt{2} \\ 0 & \kappa_0 e^{+2ikx}/\sqrt{2} & -\Delta \end{pmatrix}, \quad (5.26)$$

2. En pratique,  $\omega_Z/2\pi$  est de l'ordre de 3 MHz, alors que  $\Delta/2\pi$  est de l'ordre de la dizaine de kHz. De la sorte, seuls les processus

$$|m_z = -1, \mathbf{p} - 2\hbar k\mathbf{u}_x\rangle \leftrightarrow |m_z = 0, \mathbf{p}\rangle \leftrightarrow |m_z = +1, \mathbf{p} + 2\hbar k\mathbf{u}_x\rangle \quad (5.23)$$

sont quasi-résonnants ( $\Delta$  près), alors que les autres processus tels que

$$|m_z = -1, \mathbf{p} + 2\hbar k\mathbf{u}_x\rangle \leftrightarrow |m_z = 0, \mathbf{p}\rangle \leftrightarrow |m_z = +1, \mathbf{p} - 2\hbar k\mathbf{u}_x\rangle \quad (5.24)$$

sont non résonnants et peuvent être négligés.

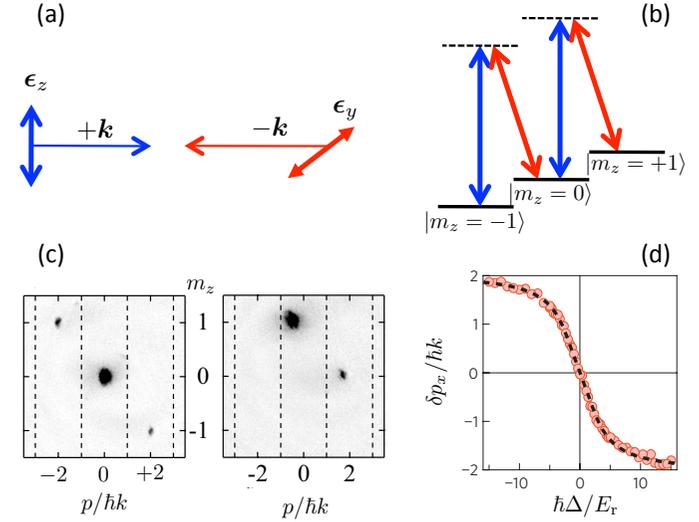


FIGURE 5.3. (a) Configuration laser utilisée par Lin et al. (2009a) (b) Schéma de niveaux avec les transitions laser quasi-résonnantes. (c) Résultats d'une expérience de temps de vol en présence d'un gradient de champ magnétique (Stern et Gerlach). (d) Décalage en impulsion  $\delta p_x$  de l'état fondamental révélant la présence d'un potentiel vecteur  $\mathcal{A}$  (figure extraite de Lin et al. (2011a)).

On détermine les trois états propres  $|\psi_{\in 1}\rangle$ ,  $|\psi_0\rangle$  et  $|\psi_{+1}\rangle$  associés aux trois énergies  $E_0 = 0$  et  $E_{\pm} = \pm\hbar(\Delta^2 + \kappa_0^2)^{1/2}$ . On trouve par exemple pour l'état habillé d'énergie la plus basse :

$$|\psi_{\in 1}\rangle = \frac{1}{2\sqrt{\Delta^2 + \kappa_0^2}} \begin{pmatrix} (\sqrt{\Delta^2 + \kappa_0^2} - \Delta) e^{4ikx} \\ -\sqrt{2} \kappa_0 e^{2ikx} \\ (\sqrt{\Delta^2 + \kappa_0^2} + \Delta) \end{pmatrix} \quad (5.27)$$

dont on déduit le potentiel vecteur

$$\mathcal{A}_{\in} = i\hbar\langle\psi_{\in 1}|\nabla|\psi_{\in 1}\rangle = 2\hbar\mathbf{k}(1 - \cos\theta) \quad \text{avec} \quad \cos\theta = \frac{\Delta}{\sqrt{\Delta^2 + \kappa_0^2}}. \quad (5.28)$$

Ce résultat est très proche de celui trouvé pour un atome à deux niveaux dans une onde plane, à un facteur 2 près [cf. eq.(5.16)]. Ce facteur 2 est dû

au fait qu'on est passé d'une situation où l'on considérait un spin effectif  $1/2$  (espace de Hilbert à deux dimensions) à une situation avec un spin 1.

L'expérience menée par Lin et al. (2009a) a consisté à préparer les atomes (en pratique un condensat de Bose-Einstein) dans l'état habillé  $|\psi_\epsilon\rangle$  pour un désaccord Raman  $\Delta = 0$ , puis à augmenter la valeur de ce désaccord jusqu'à une valeur donnée. Cette augmentation se fait lentement, de sorte que les atomes restent dans l'état fondamental de l'hamiltonien<sup>3</sup>

$$\hat{H} = \frac{(\hat{\mathbf{p}} - \mathcal{A}_\epsilon)^2}{2M} + \dots \quad (5.29)$$

Une mesure en temps de vol, dans laquelle on coupe brutalement les faisceaux Raman, révèle ensuite les composantes d'impulsion occupées par les atomes (figure 5.3c). Cette expansion balistique se fait en présence d'un gradient de champ magnétique, ce qui permet de mesurer simultanément la population des trois sous-niveaux Zeeman. On obtient en général trois populations non nulles, dont les poids sont obtenus à partir du développement (5.27) dans la base des sous-niveaux Zeeman. Chaque composante a une impulsion décalée d'une même quantité  $\delta p_x$  par rapport à la valeur trouvée pour  $\Delta = 0$ . Si les atomes sont dans l'état fondamental de (5.29), on s'attend à trouver  $\delta p_x = \mathcal{A}_\epsilon$ , ce qui est effectivement le cas expérimentalement (figure 5.3d).

### 2-3 Traitement exact pour l'onde plane

Dans le cas particulier d'une onde laser plane et progressive, on peut en fait mener un traitement quantique exact, ne nécessitant pas le recours à l'approximation adiabatique [voir aussi Lin et al. (2009a)]. Si on prend en compte de manière quantique le mouvement externe du centre de masse de l'atome, une base de l'espace de Hilbert total est donnée par  $\{|g_1, \mathbf{p}\rangle, |g_2, \mathbf{p}'\rangle\}$ . On peut regrouper cette infinité d'états sous forme de familles que l'interaction atome-laser laisse globalement invariante :

$$\mathcal{F}(\mathbf{p}) = \{|g_1, \mathbf{p} - \hbar\mathbf{k}\rangle, |g_2, \mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}\rangle\}. \quad (5.30)$$

3. Pour que cette hypothèse soit valable, il faut briser l'invariance par translation, ce qui se fait en pratique en confinant le nuage dans un piège harmonique. Sinon, pour un atome isolé, l'impulsion commute à chaque instant avec l'hamiltonien et est donc une constante du mouvement.

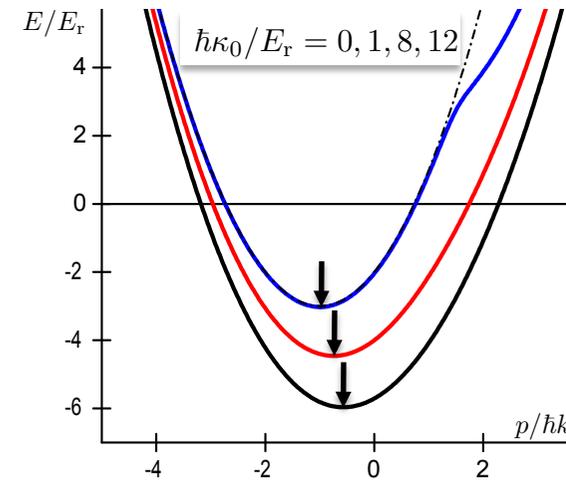


FIGURE 5.4. Niveau d'énergie fondamentale  $E_\epsilon(p)$  de l'hamiltonien  $\hat{H}(p)$  donné en (5.31) pour  $\hbar\Delta = 6 E_r$  et pour des valeurs croissantes de  $\kappa_0$ . La flèche signale le minimum de la courbe de dispersion, correspondant à l'impulsion  $p = \mathcal{A}_\epsilon$ , la connexion de Berry  $\mathcal{A}_\epsilon$  étant donnée en (5.35).

L'hamiltonien total (interne+centre de masse) restreint à la famille  $\mathcal{F}(\mathbf{p})$  prend la forme d'une matrice  $2 \times 2$  :

$$\hat{H}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} (\mathbf{p} - \hbar\mathbf{k})^2/2M + \hbar\Delta/2 & \hbar\kappa_0/2 \\ \hbar\kappa_0/2 & (\mathbf{p} + \hbar\mathbf{k})^2/2M - \hbar\Delta/2 \end{pmatrix} \quad (5.31)$$

que l'on peut diagonaliser pour toute valeur de  $\mathbf{p}$  (voir figure 5.4). Quand  $\kappa_0 = 0$ , les énergies propres  $E_\pm(p)$  sont les deux paraboles usuelles pour la relation de dispersion d'une particule libre. Quand  $\kappa_0$  est non nul, les deux valeurs propres de la matrice (5.31) deviennent :

$$E_\pm(\mathbf{p}) = \frac{p^2}{2M} + E_r \pm \frac{\hbar}{2} \left[ \kappa_0^2 + \left( \Delta - 2\frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}}{M} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (5.32)$$

où on a introduit l'énergie de recul  $E_r = \hbar^2 k^2/2M$ .

Considérons par exemple la branche d'énergie la plus basse  $E_\epsilon(p)$  comme dans le paragraphe § 2-1 (figure 5.4). Le résultat (5.32) redonne

bien le spectre de l'hamiltonien

$$\hat{H} = \frac{(\mathbf{p} - \mathcal{A}_\epsilon)^2}{2M} - \frac{\hbar\Omega}{2} + \dots \quad (5.33)$$

en prenant la limite  $kp/M \ll \Omega = (\kappa_0^2 + \Delta^2)^{1/2}$  et en utilisant  $\cos \theta = \Delta/\Omega$  :

$$\begin{aligned} E_\epsilon(p) &\approx \frac{p^2}{2M} + E_r - \frac{\hbar\Omega}{2} \left[ 1 - \frac{4\Delta \mathbf{k} \cdot \mathbf{p}}{M\Omega^2} \right]^{1/2} \\ &\approx \frac{p^2}{2M} + \frac{\hbar \mathbf{k} \cdot \mathbf{p}}{2M} \cos \theta - \frac{\hbar\Omega}{2} + \dots \\ &\approx \frac{p^2}{2M} - \frac{\mathbf{p} \cdot \mathcal{A}_\epsilon}{M} - \frac{\hbar\Omega}{2} + \dots \end{aligned} \quad (5.34)$$

On retrouve donc le résultat de l'approximation adiabatique à partir du traitement exact. Notons qu'on a pris ici le choix de jauge

$$\mathcal{A}_\epsilon = -\hbar \mathbf{k} \cos \theta, \quad (5.35)$$

qui diffère par le terme constant  $\hbar \mathbf{k}$  du résultat (5.16) obtenu avec l'écriture (5.18) de l'état habillé  $|\psi_\epsilon\rangle$ . Le choix de jauge fait ici est obtenu en écrivant l'état habillé  $|\psi_\epsilon\rangle$  sous la forme

$$|\psi_\epsilon\rangle = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \cos(\theta/2) |g_2\rangle - e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \sin(\theta/2) |g_1\rangle, \quad (5.36)$$

choix qui est en correspondance avec la définition de la famille  $\mathcal{F}(\mathbf{p})$  qui fait jouer des rôles symétriques à  $|g_1\rangle$  et  $|g_2\rangle$ .

Ce cas exactement soluble permet par ailleurs de tester la validité de l'approximation adiabatique ; rappelons que ce critère de validité est que la vitesse angulaire des états propres doit être petite devant les fréquences de Bohr du système. Dans le cas présent, cette fréquence de Bohr est donnée par la fréquence de Rabi généralisée  $\Omega$ . La vitesse angulaire des états propres s'obtient en étudiant comment le mouvement à vitesse  $v$  de l'atome modifie les états habillés. Or, ces états habillés varient à l'échelle de  $k^{\epsilon 1} = \lambda/(2\pi)$ , en raison du coefficient  $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$  qui entre dans leur expression. La vitesse angulaire recherchée, calculée dans un point de vue semi-classique, est donc

$$\left| \langle \psi_\epsilon | \dot{\psi}_\epsilon \rangle \right| \sim kv \cos^2(\theta/2) \lesssim kv, \quad (5.37)$$

ce qui donne comme critère suffisant pour que l'approximation adiabatique soit satisfaite

$$k \bar{v} \ll \Omega \quad \text{ou encore} \quad \frac{kp}{M\Omega} \ll 1 \quad (5.38)$$

ce qui justifie le développement (5.34). Comme une échelle minimale de vitesse pour ce problème est donnée par la vitesse de recul  $\hbar k/M$ , le critère ci-dessus implique en particulier

$$\frac{\hbar k^2}{M} \ll \Omega \quad \text{ou encore} \quad E_r \ll \hbar\Omega. \quad (5.39)$$

### 3 La courbure de Berry $B$

Nous abordons maintenant le cas vraiment intéressant où non seulement le potentiel vecteur (connexion de Berry), mais aussi le champ magnétique (courbure de Berry) est non nul. Le paragraphe précédent, dans lequel nous avons décrit comment générer un potentiel vecteur uniforme, va nous servir de guide. Nous avons vu que pour un transfert d'impulsion entre atome et lumière se produisant dans la direction  $x$ , nous obtenons un potentiel vecteur aligné avec l'axe  $x$ ,  $\mathcal{A} = \mathcal{A} \mathbf{u}_x$  [cf. 5.16], dont l'amplitude  $\mathcal{A}$  dépend du rapport entre fréquence de Rabi et désaccord. L'hamiltonien est alors

$$\hat{H} = \frac{(\hat{p}_x - \mathcal{A})^2}{2M} + \frac{\hat{p}_y^2}{2M} + \dots \quad (5.40)$$

Pour obtenir un véritable hamiltonien magnétique, il faut que  $\mathcal{A}$  dépende de la position. Par exemple, un potentiel vecteur  $\mathcal{A} \propto y$  nous permettra de réaliser un hamiltonien correspondant à un champ magnétique en jauge de Landau.

#### 3-1 Le résultat général pour un atome à deux niveaux

Partant de l'expression générale

$$\mathcal{A} = i\hbar \langle \psi | \nabla \psi \rangle, \quad (5.41)$$

où  $|\psi\rangle$  est l'état habillé suivi adiabatiquement par l'atome, on vérifie facilement que l'expression de la courbure de Berry peut se mettre sous la forme

$$\mathcal{B} \equiv \nabla \times \mathcal{A} = i\hbar \langle \nabla \psi | \times | \nabla \psi \rangle \quad (5.42)$$

Pour le cas de l'atome à deux niveaux abordé plus haut (§ 1-3), cette courbure de Berry s'écrit pour les deux niveaux habillés d'énergie  $\pm\hbar\Omega/2$

$$\mathcal{B}_{\pm} = \nabla \times \mathcal{A}_{\pm} = \pm \frac{\hbar}{2} \nabla(\cos \theta) \times \nabla \phi. \quad (5.43)$$

Pour avoir une courbure non nulle, il faut avoir à la fois :

- un gradient de la phase  $\phi$  du couplage laser (une onde purement stationnaire ne fera pas l'affaire),
- un gradient de l'angle de mélange  $\theta$  obtenu en prenant
  - soit une intensité laser qui varie dans l'espace,
  - soit un désaccord dépendant du point où se trouve l'atome, ce qui peut être obtenu par exemple en plaçant l'atome dans un champ magnétique extérieur.

Il est intéressant de remarquer que l'on retrouve ici deux ingrédients caractéristiques des forces que peut exercer un faisceau lumineux sur un atome « à deux niveaux ». Le gradient de phase de l'onde lumineuse est à l'origine de la force de pression de radiation, alors que le gradient d'intensité de l'onde lumineuse donne naissance à la force dipolaire. Pour avoir un champ magnétique artificiel non nul, il faut que ces deux ingrédients soient réunis, avec en plus la contrainte que les deux gradients ne soient pas colinéaires. Notons toutefois que le rapprochement avec les forces radiatives n'est pas complet. La force de pression de radiation n'existe qu'en présence un processus dissipatif additionnel, comme l'émission spontanée de photons. Au contraire, dans le cas du magnétisme artificiel qui nous intéresse ici, aucun processus dissipatif n'entre en jeu.

### 3-2 Onde plane + gradient de désaccord

Considérons un atome à deux niveaux  $|g_1\rangle$  et  $|g_2\rangle$ , avec un couplage Raman créé par deux ondes lumineuses planes induisant un transfert d'impulsion de  $2\hbar k$  le long de l'axe  $x$  :

$$\kappa(\mathbf{r}) = \kappa_0 e^{i2kx}, \quad (5.44)$$

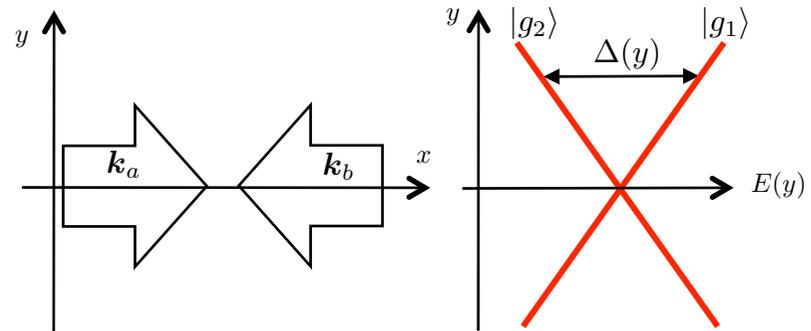


FIGURE 5.5. Configuration laser et spectre atomique conduisant à une courbure de Berry non nulle.

ce qui donne un gradient de phase  $\nabla \phi = 2k\mathbf{u}_x$ . Supposons que le désaccord entre l'atome et l'onde lumineuse varie linéairement avec la position le long de l'axe  $y$  :

$$\Delta(\mathbf{r}) = \Delta' y \quad (5.45)$$

où  $\Delta'$  est une constante (figure 5.5). Comme indiqué plus haut, une telle variation peut être obtenue en utilisant l'effet Zeeman dans un gradient de champ magnétique (bien réel, lui !) ou alors un déplacement lumineux du niveau  $|g_1\rangle$  ou  $|g_2\rangle$  produit par un faisceau laser auxiliaire. Introduisons la longueur caractéristique du problème

$$\ell = \kappa_0 / \Delta' \quad (5.46)$$

qui est la distance à l'axe  $y$  pour laquelle le désaccord devient (en valeur absolue) égal à la fréquence de Rabi  $\kappa_0$ . Un calcul simple donne alors pour la courbure de Berry

$$\mathcal{B}(\mathbf{r}) = B_0 \mathcal{L}^{3/2}(y) \mathbf{u}_z \quad (5.47)$$

avec

$$B_0 = \frac{\hbar k}{\ell}, \quad \mathcal{L}(y) = \frac{1}{1 + y^2/\ell^2}. \quad (5.48)$$

Le champ magnétique effectif est donc invariant par translation le long de l'axe  $x$  et maximal sur cet axe. Il décroît de part et d'autre de cet axe et tend vers 0 comme  $|y|^{-3}$  quand  $y \rightarrow \infty$ .

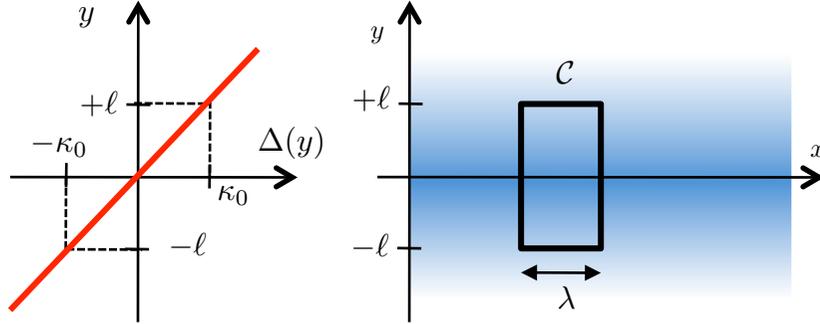


FIGURE 5.6. Représentation en fausses couleurs du module du champ magnétique généré par la configuration onde plane + gradient de désaccord. La phase de Aharonov–Bohm–Berry à travers le contour  $\mathcal{C}$  est d’ordre  $2\pi$ .

**Comment mesurer l’amplitude de ce champ magnétique ?** L’amplitude  $B_0$  donne l’ordre de grandeur du champ magnétique artificiel que nous pouvons créer par cette méthode. Elle est d’ordre  $\hbar$  (la constante de Planck) divisée par le carré d’une longueur, en l’occurrence  $\lambda\ell$ . Cette amplitude ne se mesure pas en Tesla ; en effet, il n’y a pas de charge électrique à mettre en face de  $B_0$ . La manière naturelle pour évaluer l’amplitude  $B_0$  est de se donner un circuit fermé  $\mathcal{C}$  et d’évaluer la taille que doit avoir ce circuit pour qu’une phase de type Aharonov–Bohm prenne une valeur significative ( $\sim \pi$ ). Nous savons que cette phase  $\gamma(\mathcal{C})$  est proportionnelle au flux de  $\mathcal{B}$  à travers une surface  $\mathcal{S}$  s’appuyant sur ce contour :

$$\frac{\gamma(\mathcal{C})}{2\pi} = \frac{1}{\hbar} \iint_{\mathcal{S}} \mathcal{B} \cdot \mathbf{u} \, d^2r, \quad (5.49)$$

et elle sera donc d’ordre  $2\pi$  pour le circuit d’aire  $2\lambda\ell$  représenté sur la figure 5.6. Nous verrons dans un chapitre ultérieur que le flux de  $\mathcal{B}$  exprimé en unité de  $\hbar$  donne également le nombre de vortex quantiques qui sont nucléés en régime stationnaire dans un superfluide en interaction, localisés à l’intérieur du circuit  $\mathcal{C}$ . Les grands champs magnétiques correspondront donc à des petites valeurs de  $\ell$ , c’est-à-dire des forts gradients de désaccord.

En règle générale, les valeurs maximales accessibles pour ces champs

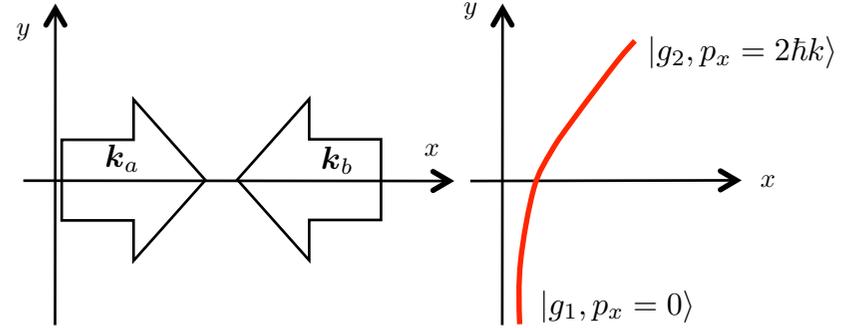


FIGURE 5.7. Déviation d’une trajectoire par la force de Lorentz due à la courbure de Berry.

artificiels correspondent au cas où  $\phi$  et  $\theta$  varient tous deux significativement à l’échelle de la longueur d’onde, ce qui conduit à un champ magnétique d’ordre  $\hbar k^2$ . Un autre critère pertinent est d’évaluer la pulsation cyclotron. Quand le champ magnétique artificiel  $B_0$  devient de l’ordre de  $\hbar k^2$ , on a

$$\hbar\omega_c = \frac{\hbar B_0}{M} \sim \frac{\hbar^2 k^2}{M} \sim E_r. \quad (5.50)$$

**Courbure de Berry et force de Lorentz.** Il est intéressant de retrouver sur cet exemple un concept classique du magnétisme orbital, la force de Lorentz. Prenons par exemple un atome se déplaçant le long de l’axe  $y$  à vitesse  $\mathbf{v} = v_0 \mathbf{u}_y$  (donc de trajectoire  $y(t) = v_0 t$ ) en absence de champ magnétique artificiel (figure 5.7). En présence de ce champ, qui est dirigé selon  $z$ , la force de Lorentz va dévier la trajectoire de la particule dans le plan  $xy$ . Plus précisément, l’atome va acquérir une impulsion le long de l’axe  $x$  donnée par

$$\Delta p_x = \int_{\epsilon}^{+\infty} F_x \, dt = \int_{\epsilon}^{+\infty} v_0 B_z(t) \, dt. \quad (5.51)$$

Cette intégrale se calcule analytiquement pour la forme de  $B$  trouvée en (5.47), si on suppose que la déviation de la trajectoire est faible :

$$\begin{aligned}\Delta p_x &= v_0 B_0 \int_{\epsilon}^+ \frac{1}{[1 + (y(t)/\ell)^2]^{3/2}} dt \\ &= B_0 \ell \int_{\epsilon}^+ \frac{1}{[1 + u^2]^{3/2}} du \\ &= 2B_0 \ell \\ &= 2\hbar k.\end{aligned}\tag{5.52}$$

L'explication de la déviation par la force de Lorentz est donc très simple dans ce cas : l'atome entre dans le faisceau laser préparé dans l'état habillé qui se raccorde à  $|g_1\rangle$  en  $y = -\infty$  ; il en ressort en étant passé adiabatiquement vers l'état  $|g_2\rangle$ , donc en ayant encaissé l'impulsion  $2\hbar k$  communiquée par la transition Raman.

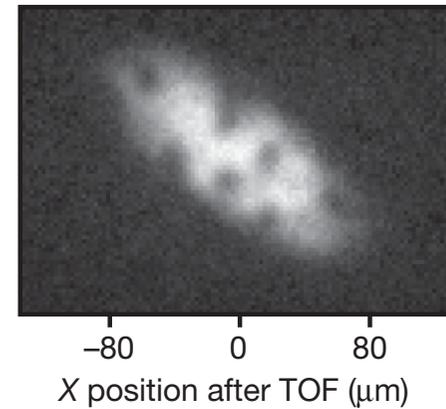
**Le (problématique) potentiel scalaire.** Le potentiel scalaire se calcule lui aussi simplement à partir des expressions générales données plus haut. En utilisant (5.14), on trouve :

$$\mathcal{V}(y) = \frac{E_r}{4} \left( \mathcal{L}(y) + \frac{1}{k^2 \ell^2} \mathcal{L}^2(y) \right).\tag{5.53}$$

Supposons que l'on cherche à atteindre des effets de type effet Hall quantique, avec les atomes accumulés dans le niveau de Landau fondamental. L'échelle d'énergie pertinente du problème est alors  $\hbar\omega_c$  qui, comme nous l'avons vu ci-dessus, est typiquement d'ordre  $E_r$ . Le potentiel scalaire a une amplitude du même ordre et son influence doit être prise en compte de manière précise. Un exemple d'étude détaillée est donné par Julia-Diaz et al. (2011); on y montre que les états fortement corrélés caractéristiques de l'effet Hall quantique peuvent être fortement affectés, voire détruits, par ce potentiel scalaire.

### 3-3 Mise en évidence expérimentale

Dans la lignée de leur première expérience ayant mis en évidence le potentiel vecteur associé à une transition Raman, le groupe du NIST a rendu



**FIGURE 5.8.** Observation de vortex par Lin et al. (2009b) dans une configuration impliquant une paire de faisceaux Raman qui transfèrent de l'impulsion selon une direction, et un gradient de la fréquence de résonance atomique selon une autre direction.

ce potentiel vecteur « non trivial », en ajoutant un gradient de champ magnétique comme indiqué ci-dessus. Ce gradient est de l'ordre de quelques gauss/cm, correspondant à  $\ell$  de quelques dizaines de longueur d'onde optique  $\lambda$  (Lin et al. 2009b). Ceci leur a permis d'observer la formation de vortex quantifiés qui sont, comme nous l'avons déjà indiqué dans le cas des rotations, la manifestation naturelle d'un magnétisme orbital pour un superfluide. Un exemple de résultat obtenu par Lin et al. (2009b) est donné en figure 5.8.

Les vortex observés par le groupe du NIST, s'ils constituent une preuve incontestable de la présence d'une courbure de Berry non nulle, ne présentent pas l'ordre spatial attendu pour un réseau d'Abrikosov. Lin et al. (2009b) attribuent cette absence d'ordre au chauffage lié aux processus d'émission spontanée. Rappelons que pour les atomes alcalins, ces processus sont difficiles à éviter : les transitions Raman nécessaires à l'apparition d'un champ de jauge n'ont une amplitude importante que si les lasers qui les induisent ne sont pas trop désaccordés par rapport à l'écart de structure fine de la raie de résonance, et ce faible désaccord entraîne une émission spontanée relativement importante.

## 4 Champs de jauge non abéliens

Nous abordons maintenant une extension de la notion de potentiel de jauge géométrique et cherchons dans quelles conditions on peut utiliser la notion de suivi adiabatique dans le couplage atome-lumière pour générer un hamiltonien à une particule du type

$$\hat{H} = \frac{(\hat{\mathbf{p}} - \mathcal{A}(\hat{\mathbf{r}}))^2}{2M} + \dots \quad (5.54)$$

où  $\mathcal{A}(\mathbf{r})$  n'est plus simplement un champ de vecteurs, mais un ensemble de trois matrices  $\mathcal{A} = (\hat{\mathcal{A}}_x, \hat{\mathcal{A}}_y, \hat{\mathcal{A}}_z)$  agissant également dans l'espace de Hilbert interne de l'atome :

$$\hat{\mathcal{A}}_x(\mathbf{r}) = [\mathcal{A}_x^{(m,n)}(\mathbf{r})], \quad \hat{\mathcal{A}}_y(\mathbf{r}) = [\mathcal{A}_y^{(m,n)}(\mathbf{r})], \quad \hat{\mathcal{A}}_z(\mathbf{r}) = [\mathcal{A}_z^{(m,n)}(\mathbf{r})], \quad (5.55)$$

où les indices  $m, n$  repèrent une base de l'espace de Hilbert interne.

Le caractère non-abélien est lié au fait qu'en un point  $\mathbf{r}$  donné, deux composantes de cette matrice ne commutent généralement pas :

$$[\hat{\mathcal{A}}_x(\mathbf{r}), \hat{\mathcal{A}}_y(\mathbf{r})] \neq 0. \quad (5.56)$$

On comprend intuitivement que ce caractère non-abélien peut enrichir les phénomènes susceptibles d'apparaître dans une expérience de type Aharonov-Bohm par exemple. Pour le cas abélien, la présence d'un champ magnétique entraîne que la particule acquiert une phase géométrique quand elle parcourt une trajectoire fermée  $\mathcal{C}$ . Dans le cas non abélien, cette phase est remplacée par une matrice agissant dans l'espace interne : l'atome, même s'il parcourt la boucle  $\mathcal{C}$  à vitesse arbitrairement lente, ne se retrouvera pas dans le même état interne à la fin de cette boucle.

L'idée de générer des potentiels non abéliens de manière géométrique remonte à l'article de Wilczek & Zee (1984). Dans ce travail, les auteurs s'intéressent à une généralisation du théorème adiabatique au cas où l'hamiltonien du système possède un groupe d'états propres qui restent, au cours de l'évolution, dégénérés (ou quasi-dégénérés) et bien séparés des autres états. Cette analyse a été suivie d'applications dans de nombreux domaines allant de la physique moléculaire à la matière condensée (Bohm et al. 2003; Xiao et al. 2010) [voir également Goldman et al. (2013)].

### 4-1 La force de Lorentz dans le cas non-abélien

Pour bien discerner la classe de champs de jauge non-abéliens qu'il est intéressant de générer, nous allons revenir sur la force de Lorentz qui agit sur une particule en mouvement lorsque l'hamiltonien de cette particule s'écrit

$$\hat{H} = \frac{(\hat{\mathbf{p}} - \mathcal{A}(\hat{\mathbf{r}}))^2}{2M}, \quad (5.57)$$

et  $\mathcal{A}$  est un opérateur agissant dans l'état interne de la particule. Nous nous plaçons pour cela en point de vue de Heisenberg et nous définissons l'opérateur *vitesse* comme la dérivée par rapport au temps de l'opérateur position :

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{\mathbf{r}}] = \frac{\hat{\mathbf{p}} - \hat{\mathcal{A}}(\hat{\mathbf{r}})}{M}. \quad (5.58)$$

L'hamiltonien (5.57) peut donc s'écrire dans le cas bi-dimensionnel qui nous intéresse ici :

$$\hat{H} = \frac{M}{2} (\hat{v}_x^2 + \hat{v}_y^2). \quad (5.59)$$

Notons que l'opérateur vitesse agit ici à la fois sur les degrés de liberté externes de la particule, via  $\hat{\mathbf{p}}$ , et sur ses degrés de libertés internes, via la matrice  $\hat{\mathcal{A}}$ .

Nous définissons ensuite l'opérateur *force* agissant sur la particule comme le produit de la masse par la dérivée de l'opérateur vitesse :

$$\hat{\mathbf{F}} = M \frac{d\hat{\mathbf{v}}}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, M\hat{\mathbf{v}}]. \quad (5.60)$$

Un calcul simple utilisant la forme (5.59) donne :

$$\hat{\mathbf{F}} = \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{v}} \times \mathbf{B} - \mathbf{B} \times \hat{\mathbf{v}}) \quad (5.61)$$

où l'opérateur champ magnétique est défini par

$$\mathbf{B} = \hat{\mathcal{B}}_z \mathbf{u}_z, \quad \hat{\mathcal{B}}_z = \frac{\partial \hat{\mathcal{A}}_x}{\partial y} - \frac{\partial \hat{\mathcal{A}}_y}{\partial x} - \frac{i}{\hbar} [\mathcal{A}_x, \mathcal{A}_y]. \quad (5.62)$$

Ce résultat est une généralisation de la force de Lorentz ; dans le cas abélien, les composantes  $\mathcal{A}_x$  et  $\mathcal{A}_y$  commutent et le champ magnétique intervenant dans la force de Lorentz (5.61) est simplement le rotationnel du potentiel vecteur. Dans le cas non-abélien, une contribution supplémentaire au champ magnétique apparaît, proportionnelle au commutateur  $[\mathcal{A}_x, \mathcal{A}_y]$ .

Ce commutateur permet de générer des effets magnétiques intéressants, liés à une force de Lorentz non nulle, même quand le potentiel vecteur est uniforme. C'est précisément ce qui se produit dans le couplage spin-orbite que nous allons rencontrer plus loin. Nous aurons alors :

$$\mathcal{A} = \eta \mathbf{S} \quad (5.63)$$

où  $\mathbf{S}$  est l'opérateur spin de la particule et  $\eta$  une constante. Le commutateur générique pour un opérateur moment cinétique  $[\hat{S}_x, \hat{S}_y] = i\hbar \hat{S}_z$  conduira à un opérateur champ magnétique uniforme

$$\mathcal{B} = \eta^2 \hat{S}_z \mathbf{u}_z. \quad (5.64)$$

La particule ressentira un champ magnétique non nul et aligné selon l'axe  $z$ , dont l'amplitude  $\eta^2 m \hbar$  dépend du nombre quantique  $m$  donnant la projection de son spin sur l'axe  $z$ .

## 4-2 Émergence de potentiels non abéliens

Pour montrer comment un hamiltonien du type (5.54) peut apparaître, nous allons prendre une nouvelle fois une situation caractéristique de l'optique quantique, avec un atome à  $N + 1$  niveaux internes couplés par un champ lumineux. En tout point  $\mathbf{r}$  de l'espace, on suppose que l'on peut écrire l'hamiltonien décrivant la dynamique interne de l'atome sous la forme d'une matrice  $H_{\text{interne}}(\mathbf{r})$  indépendante du temps, de taille  $(N + 1) \times (N + 1)$ . Pour une position  $\mathbf{r}$  donnée, on peut diagonaliser la matrice  $H_{\text{interne}}(\mathbf{r})$  et obtenir  $N + 1$  états habillés indépendants, que nous noterons  $|\psi_n(\mathbf{r})\rangle$ , avec leur énergie  $E_n(\mathbf{r})$  ( $n = 1, \dots, N + 1$ ). Notre hypothèse de départ sera que parmi ces  $N + 1$  états habillés, un nombre  $q$  d'entre eux (les  $q$  premiers par exemple) forme un sous-espace (presque) dégénéré  $\mathcal{E}_q$  et que ces niveaux sont bien séparés des autres (figure 5.9).

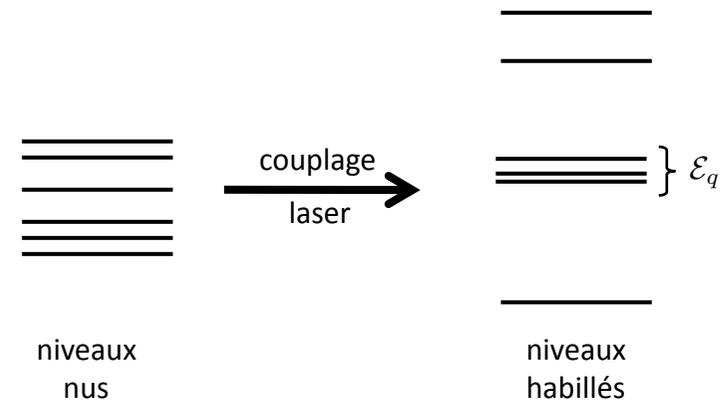


FIGURE 5.9. Quand un sous-espace  $\mathcal{E}_q$  dégénéré ou presque apparaît dans le spectre de l'atome habillé, la restriction de la dynamique à ce sous-espace peut générer des potentiels non abéliens.

L'état quantique de l'atome incluant à la fois les degrés de liberté internes et son centre de masse peut s'écrire

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{N+1} \phi_n(\mathbf{r}) |\psi_n(\mathbf{r})\rangle \quad (5.65)$$

où chaque  $\phi_n$  est la fonction d'onde décrivant le mouvement du centre de masse pour l'atome dans l'état interne  $|\psi_n\rangle$ . Nous nous intéressons à la dynamique de l'atome quand il est initialement préparé dans le sous-espace  $\mathcal{E}_q$ . En négligeant les transitions en dehors de ce sous-espace, nous pouvons projeter l'équation de Schrödinger complète sur  $\mathcal{E}_q$  et arriver pour le vecteur colonne

$$\Phi(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \phi_1(\mathbf{r}) \\ \vdots \\ \phi_q(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \quad (5.66)$$

à une équation fermée qui prend la structure d'une équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \left[ \frac{(\hat{\mathbf{p}} - \hat{\mathcal{A}}(\hat{\mathbf{r}}))^2}{2M} + \hat{E}(\hat{\mathbf{r}}) + \hat{\mathcal{V}}(\hat{\mathbf{r}}) \right] \Phi, \quad (5.67)$$

où  $\hat{E}(\mathbf{r})$  est la matrice diagonale  $q \times q$  formée à partir des énergies propres  $E_n(\mathbf{r})$  ( $n = 1, \dots, q$ ).

Cette équation rappelle fortement l'équation de Schrödinger trouvée dans le cas scalaire Eq. (5.12). Néanmoins, la connexion de Berry  $\hat{\mathcal{A}}$  et le potentiel additionnel  $\hat{\mathcal{V}}$  sont désormais des matrices  $q \times q$  qui ont pour éléments

$$\hat{\mathcal{A}}^{(n,m)} = i\hbar \langle \psi_n(\mathbf{r}) | \nabla \psi_m(\mathbf{r}) \rangle, \quad (5.68)$$

$$\hat{\mathcal{V}}^{(n,m)} = \frac{1}{2M} \sum_{l=q+1}^{N+1} \hat{\mathcal{A}}^{(n,l)} \cdot \hat{\mathcal{A}}^{(l,m)}, \quad (5.69)$$

avec  $n, m \in (1, \dots, q)$ . Dans le cas où on se limite à un sous-espace  $\mathcal{E}_q$  à une dimension, on vérifie que l'on retrouve le résultat obtenu pour le cas abélien.

La courbure de Berry associée à  $\mathcal{A}$  est également une matrice  $q \times q$  :

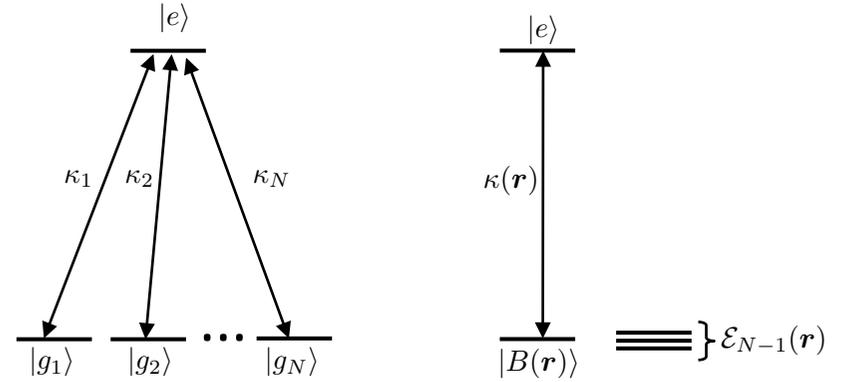
$$\mathcal{B}_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ikl} F_{kl}, \quad F_{kl} = \partial_k \mathcal{A}_l - \partial_l \mathcal{A}_k - \frac{i}{\hbar} [\mathcal{A}_k, \mathcal{A}_l]. \quad (5.70)$$

Comme mentionné plus haut, le champ magnétique artificiel  $\mathcal{B}$  peut être non nul même si le potentiel vecteur  $\mathcal{A}$  est uniforme dans l'espace.

### 4-3 Le schéma de niveau multipode

Une manière générique pour obtenir un sous-espace dégénéré dans une interaction atome-laser est de partir de la situation représentée sur la figure 5.10, où un unique état excité  $|e\rangle$  est couplé à  $N$  niveaux fondamentaux  $|g_j\rangle$  ( $j = 1, \dots, N$ ) [figure 5.10]. Chaque couplage  $|g_j\rangle \leftrightarrow |e\rangle$  est assuré par un faisceau laser de pulsation  $\omega_j$  et de fréquence de Rabi complexe  $\kappa_j$ . Ce schéma de niveau se produit par exemple quand on considère une transition atomique entre un niveau fondamental de moment cinétique  $J_g = 1$  et un niveau excité de moment cinétique  $J_e = 0$ , correspondant à  $N = 3$ . En considérant des transitions Raman entre états hyperfins, on peut également construire explicitement des schémas permettant de réaliser  $N = 4$  pour des atomes alcalins (Juzeliūnas et al. 2010).

Nous supposons ici que les couplages Raman entre les différents



**FIGURE 5.10.** Configuration multipode : un état atomique excité  $|e\rangle$  est couplé à  $N$  états atomiques différents  $|g_j\rangle$  ( $j = 1, \dots, N$ ) par  $N$  champs lasers résonnants. On peut réécrire ce couplage en introduisant un état brillant  $|B(\mathbf{r})\rangle$  et un sous-espace noir, de dimension  $N - 1$ .

sous-niveaux sont tous résonants, c'est-à-dire que

$$E_{g_j} + \hbar\omega_j = E_e + \hbar\Delta, \quad (5.71)$$

où  $\Delta$  est indépendant de  $j$ . L'hamiltonien décrivant la dynamique interne de l'atome s'écrit alors à l'approximation du champ tournant :

$$H_{\text{interne}} = -\hbar\Delta |e\rangle\langle e| + \sum_{j=1}^N \left( \frac{\hbar\kappa_j(\mathbf{r})}{2} |e\rangle\langle g_j| + \text{h.c.} \right). \quad (5.72)$$

Cet hamiltonien peut être réécrit :

$$H_{\text{interne}} = -\hbar\Delta |e\rangle\langle e| + \frac{\hbar\kappa(\mathbf{r})}{2} (|e\rangle\langle B(\mathbf{r})| + |B(\mathbf{r})\rangle\langle e|), \quad (5.73)$$

où on a introduit l'état brillant

$$|B(\mathbf{r})\rangle = \frac{1}{\kappa} \sum_{j=1}^N \kappa_j^* |g_j\rangle, \quad (5.74)$$

et défini la fréquence de Rabi totale  $\kappa$  (réelle positive) par

$$\kappa^2 = \sum_{j=1}^N |\kappa_j|^2. \quad (5.75)$$

La diagonalisation de  $H_{\text{interne}}(\mathbf{r})$  en un point  $\mathbf{r}$  donné permet de déterminer les états habillés  $|\psi_n\rangle$ . L'expression de ces états se calcule simplement :

- Le couplage entre l'état brillant et l'état excité donne naissance à deux états habillés, combinaisons linéaires de  $|e\rangle$  et  $|B\rangle$  avec des amplitudes qui sont fonctions de  $\Delta$  et  $\kappa$ , comme pour un atome à deux niveaux.
- Le sous-espace du niveau fondamental de dimension  $N - 1$  et orthogonal à  $|B(\mathbf{r})\rangle$  forme un sous-espace propre de  $H_{\text{interne}}$  pour la valeur propre 0.

On est donc bien dans la situation requise pour voir apparaître un champ de jauge non abélien. On a formé un sous-espace propre  $\mathcal{E}_q$  de dimension  $q = N - 1$ . Puisque l'état brillant dépend du point  $\mathbf{r}$ , le sous-espace orthogonal  $\mathcal{E}_q$  dépend lui aussi de la position du centre de masse de l'atome.

Nous n'allons pas développer ici le calcul général de la matrice  $\mathcal{A}$  donnant la connexion de Berry pour cette configuration multipode, mais nous allons l'illustrer sur un cas simple correspondant au couplage spin-orbite.

## 5 Le couplage spin-orbite

### 5-1 Comment générer un couplage spin-orbite 2D

Reprenons la configuration atomique de la section précédente et intéressons-nous plus particulièrement au cas d'un tripode, qui peut être réalisé expérimentalement en couplant un niveau fondamental de moment cinétique  $J_g = 1$  avec un état excité de moment cinétique  $J_e = 0$ . Supposons par ailleurs que les trois faisceaux lasers qui induisent les trois couplages  $|g_j\rangle \leftrightarrow |e\rangle$ ,  $j = 1, 2, 3$  sont des ondes planes<sup>4</sup> se propageant dans le plan  $xy$  en formant des angles de  $120^\circ$ , de vecteur d'onde :

$$\mathbf{k}_1 = k\mathbf{u}_x, \quad \mathbf{k}_2 = -\frac{k}{2}(\mathbf{u}_x - \sqrt{3}\mathbf{u}_y), \quad \mathbf{k}_3 = -\frac{k}{2}(\mathbf{u}_x + \sqrt{3}\mathbf{u}_y). \quad (5.76)$$

4. On choisit les trois polarisations linéaires et orthogonales entre elles, formant un trièdre  $X, Y, Z$ . Les états  $|g_j\rangle$  sont alors les sous-niveaux  $|m_X = 0\rangle, |m_Y = 0\rangle, |m_Z = 0\rangle$  du niveau  $|g, J_g = 1\rangle$ .

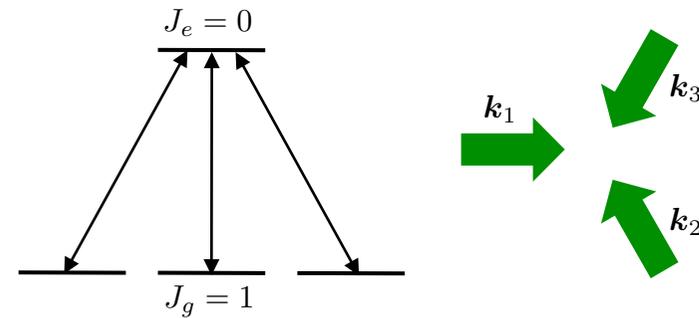


FIGURE 5.11. Couplage d'un état fondamental de moment cinétique 1 à un état excité de moment cinétique nul avec trois faisceaux lumineux (ondes planes) coplanaires. Ce couplage donne naissance à un effet spin-orbite à deux dimensions.

Les trois fréquences de Rabi complexes sont donc

$$\kappa_j = \frac{\kappa}{\sqrt{3}} e^{i\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{r}}. \quad (5.77)$$

L'état brillant s'écrit dans la base  $\{|g_1\rangle, |g_2\rangle, |g_3\rangle\}$  :

$$|B(\mathbf{r})\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}} \\ e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}} \\ e^{i\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{r}} \end{pmatrix} \quad (5.78)$$

et on peut écrire explicitement une base orthogonale  $\{|N_1\rangle, |N_2\rangle\}$  (parmi une infinité d'autres) du sous-espace « noir », orthogonal à l'état brillant :

$$|N_1\rangle = \begin{pmatrix} e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}} \\ e^{i(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} + 2\pi/3)} \\ e^{i(\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{r} + 4\pi/3)} \end{pmatrix}, \quad |N_2\rangle = \begin{pmatrix} e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}} \\ e^{i(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} + 2\pi/3)} \\ e^{i(\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{r} + 4\pi/3)} \end{pmatrix}. \quad (5.79)$$

On peut ensuite calculer la matrice donnant la connexion de Berry, compo-

sante par composante. On trouve ainsi

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}^{(1,1)} &= i\hbar\langle N_1 | \nabla N_1 \rangle \\
&= \frac{\hbar}{3} \left( e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}}, e^{i(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} + 2\pi/3)}, e^{i(\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{r} + 4\pi/3)} \right) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{k}_1 e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}} \\ \mathbf{k}_2 e^{i(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} + 2\pi/3)} \\ \mathbf{k}_3 e^{i(\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{r} + 4\pi/3)} \end{pmatrix} \\
&= \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{5.80}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}^{(2,1)} &= i\hbar\langle N_2 | \nabla N_1 \rangle \\
&= \frac{\hbar}{3} \left( e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}}, e^{i(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} + 2\pi/3)}, e^{i(\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{r} + 4\pi/3)} \right) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{k}_1 e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}} \\ \mathbf{k}_2 e^{i(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} + 2\pi/3)} \\ \mathbf{k}_3 e^{i(\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{r} + 4\pi/3)} \end{pmatrix} \\
&= \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 e^{i2\pi/3} + \mathbf{k}_3 e^{i2\pi/3} \\
&= \frac{\hbar k}{2} (\mathbf{u}_x + i\mathbf{u}_y).
\end{aligned} \tag{5.81}$$

De même, on trouve

$$\mathcal{A}^{(1,2)} = \frac{\hbar k}{2} (\mathbf{u}_x - i\mathbf{u}_y), \quad \mathcal{A}^{(2,2)} = 0, \tag{5.82}$$

de sorte que la matrice *connexion de Berry* prend une forme simple en utilisant les matrices de Pauli<sup>5</sup> :

$$\mathcal{A} = \frac{\hbar k}{2} (\hat{\sigma}_x \mathbf{u}_x + \hat{\sigma}_y \mathbf{u}_y) = \frac{\hbar k}{2} \boldsymbol{\sigma}. \tag{5.83}$$

On trouve donc ici une situation simple où la connexion de Berry est uniforme dans l'espace, mais correspond à une courbure non nulle. L'expression générale (5.70) donne dans ce cas particulier

$$\mathcal{B} = \frac{\hbar k^2}{2} \hat{\sigma}_z \mathbf{u}_z, \tag{5.84}$$

c'est-à-dire un champ uniforme dans l'espace dont l'orientation dépend de l'état interne de l'atome.

5. Rappelons leur définition :

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

## 5-2 La physique du couplage spin-orbite

Le couplage spin-orbite est un phénomène bien connu en physique atomique et en physique de la matière condensée. Son origine est généralement relativiste : une particule chargée bouge à vitesse  $v$  dans une région où règne un champ électrique  $\mathcal{E}$ . Dans le référentiel de la particule, un champ magnétique motionnel  $\mathcal{B} \propto v\mathcal{E}$  apparaît. L'interaction entre ce champ magnétique et le moment magnétique de la particule, lui-même proportionnel au spin  $S$ , donne naissance au couplage spin-orbite.

En physique atomique, le champ électrique  $\mathcal{E}$  auquel est soumis un électron est le champ coulombien créé par le noyau et le couplage spin-orbite peut s'écrire après réarrangement comme  $\propto \mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$ , où  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$  est le moment cinétique orbital de l'électron considéré. Dans les solides, le champ électrique apparaît par exemple à l'interface<sup>6</sup> entre deux matériaux, là où un gaz d'électron bi-dimensionnel est réalisé [couplage de Rashba, voir par exemple Galitski & Spielman (2013) pour plus de détails].

Les applications du couplage spin-orbite en physique des matériaux donnent lieu actuellement à des recherches intenses autour de la spintronique, tirant parti du contrôle que l'on peut avoir entre le spin et l'impulsion des électrons de conduction grâce à un champ électrique extérieur.

Sur le plan fondamental, le couplage spin-orbite peut également déboucher sur de nombreux effets spectaculaires parmi lesquels on peut citer :

- Le couplage spin-orbite peut donner naissance à des matériaux appelés *isolants topologiques*, qui sont des isolants dans le cœur, mais conducteurs en surface (Hasan & Kane 2010). Les propriétés de conduction en surface sont topologiquement robustes, d'une manière analogue (surtout pour le cas 2D) aux états de bord que nous avons rencontrés pour l'effet Hall quantique. Toutefois, à la différence de l'effet Hall, il n'y pas ici de champ magnétique extérieur qui brise l'invariance par renversement du temps. Par ailleurs, les conditions de température nécessaires pour atteindre ces états d'isolants topologiques sont moins contraignantes que celles requises pour l'effet Hall quantique (Hasan & Kane 2010).

6. Un champ électrique peut également apparaître dans le cœur du matériau si celui-ci n'a pas la symétrie d'inversion, le couplage spin-orbite étant alors de type Dresselhaus.

- Pour une particule de spin  $S$ , l'hamiltonien spin-orbite

$$\hat{H} = \frac{(\hat{\mathbf{p}} - \eta\mathbf{S})^2}{2M} \quad (5.85)$$

possède un niveau fondamental infiniment dégénéré. En effet, tous les états d'impulsion  $\mathbf{p}$  telle que  $|\mathbf{p}| = \eta S$  sont d'énergie nulle si on choisit correctement l'orientation du spin. Pour des bosons, cette dégénérescence infinie de l'état fondamental change radicalement la nature de la transition de Bose-Einstein (Zhou & Cui 2013).

- Considérons une interaction de contact (onde  $s$ ) pour un gaz de fermions ; on sait que si le gaz est polarisé, le résultat de cette interaction est nul du fait du principe de Pauli. En présence de couplage spin-orbite, une interaction effective apparaît même si le gaz est contraint à occuper une seule bande dans le diagramme d'énergie. Ceci permet d'envisager la formation de superfluides de type  $p_x + ip_y$  à partir d'interactions « traditionnelles » en onde  $s$  (Zhang et al. 2008).
- Pour un gaz de Fermi en contact avec un supraconducteur, le couplage spin-orbite peut donner naissance dans un échantillon à deux dimensions à des états à topologie non triviale, avec des modes de Majorana d'énergie nulle au sein d'un vortex (Sau et al. 2010). Ces modes de Majorana peuvent encore être présents à une dimension (Oreg et al. 2010; Lutchyn et al. 2010) et l'expérience récente de Mourik et al. (2012) a donné des signatures de leur existence, même si ces résultats restent encore débattus.

### 5-3 La version 1D du couplage spin-orbite

Le couplage spin-orbite à deux dimensions que nous venons d'envisager n'a pas encore été réalisé avec des atomes froids. En revanche, une version simplifiée uni-dimensionnelle, initialement identifiée par Higbie & Stamper-Kurn (2002), a été observée par plusieurs groupes, à commencer par le groupe du NIST pour un gaz de bosons (Lin et al. 2011b), puis par Cheuk et al. (2012) et Wang et al. (2012) pour des fermions.

Cette version 1D est en fait implicite dans le traitement exact que nous avons déjà présenté de l'interaction atome-lumière dans une onde

plane (§ 2). L'origine du couplage entre degrés de libertés externes (l'impulsion de l'atome) et internes (le niveau occupé) est simplement l'effet Doppler. Notons tout de suite une différence majeure avec le cas multi-dimensionnel : le couplage obtenu dans ce cas est abélien.

Nous pouvons reprendre telle quelle la forme de l'hamiltonien correspondant à la transition Raman  $|g_1\rangle \leftrightarrow |g_2\rangle$  considérée en début de chapitre

$$\hat{H}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} (\mathbf{p} - \hbar\mathbf{k})^2/2M + \hbar\Delta/2 & \hbar\kappa_0/2 \\ \hbar\kappa_0/2 & (\mathbf{p} + \hbar\mathbf{k})^2/2M - \hbar\Delta/2 \end{pmatrix}, \quad (5.86)$$

où l'écriture est faite dans la base des « familles » :

$$\mathcal{F}(\mathbf{p}) = \{|g_1, \mathbf{p} - \hbar\mathbf{k}\rangle, |g_2, \mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}\rangle\}. \quad (5.87)$$

Cet hamiltonien peut se réécrire en termes des matrices de Pauli :

$$\hat{H}(\mathbf{p}) = \frac{1}{2M} (\mathbf{p} - \mathcal{A})^2 + \frac{\hbar\Delta}{2} \hat{\sigma}_z + \frac{\hbar\kappa_0}{2} \hat{\sigma}_x \quad \text{avec } \mathcal{A} = \hbar\mathbf{k}\hat{\sigma}_z. \quad (5.88)$$

ce qui correspond, presque trivialement, à la forme recherchée ! Il est clair que les trois composantes de  $\mathcal{A}$  commutent entre elles. Comme  $\mathcal{A}$  ne dépend par ailleurs pas de la position, la courbure de Berry  $\mathcal{B}$  définie en (5.62) est nulle dans ce cas particulier.

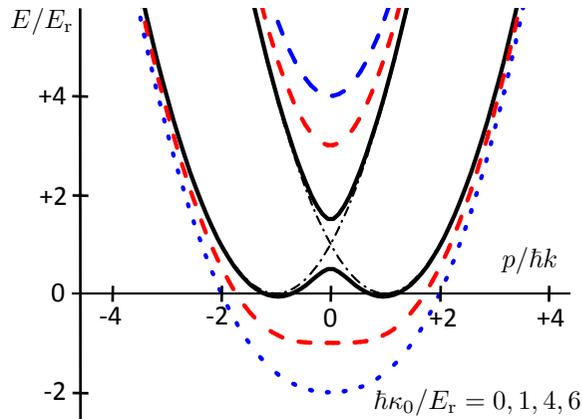
Malgré le passage à une dimension, certaines caractéristiques du couplage spin-orbite restent pertinentes. Par exemple, pour  $\Delta = 0$  et une amplitude assez faible du couplage Raman, on conserve la non-unicité de l'état fondamental de l'hamiltonien à une particule. On a tracé sur la figure 5.12 la variation du niveau d'énergie le plus bas de (5.86)

$$E_{\in}(p) = \frac{p^2}{2M} + E_r - \frac{\hbar}{2} \left[ \kappa_0^2 + 4 \left( \frac{kp}{M} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (5.89)$$

On trouve que cette énergie est minimale en deux impulsions symétriques non nulles  $p$  et  $-p$  tant que la pulsation de Rabi vérifie

$$\hbar\kappa_0 < 4E_r. \quad (5.90)$$

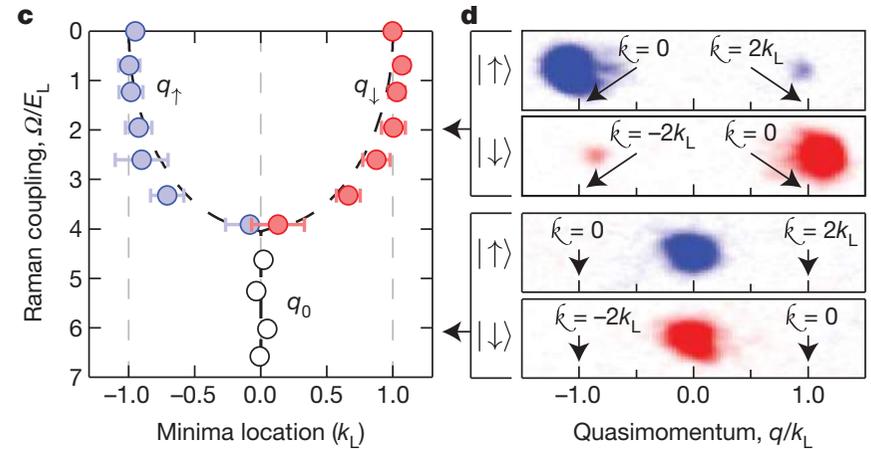
Au delà de cette valeur, le minimum de  $E_{\in}(p)$  est situé en  $p = 0$  et on se retrouve approximativement dans la situation de l'approximation adiabatique étudiée en section 2. Le cas intéressant du point de vue spin-orbite,



**FIGURE 5.12.** Niveaux d'énergie de (5.86) pour un désaccord  $\Delta = 0$  et pour des valeurs croissantes de la fréquence de Rabi  $\kappa_0$ .

$\hbar\kappa_0 < 4E_T$ , est donc l'opposé du cas où l'approximation adiabatique est valide. Notons que chacun des minima est associé à un état interne prépondérant, l'état  $|g_2\rangle$  pour le minimum en  $p < 0$  et l'état  $|g_1\rangle$  pour le minimum en  $p > 0$ . On a reporté sur la figure 5.13 des résultats obtenus dans le groupe du NIST qui ont pleinement confirmé cette image simple pour des atomes de rubidium en isolant deux sous-niveaux Zeeman ( $m_F = 0$  et  $m_F = -1$ ) du niveau  $F = 1$ .

Au niveau de la particule unique, l'obtention et la description du couplage spin-orbite 1D est donc extrêmement simple et relève davantage d'une réinterprétation du diagramme habituel en énergie d'un atome habillé que d'une nouvelle configuration. En revanche, dès qu'on cherche à prendre en compte les interactions entre particules, le couplage spin-orbite enrichit considérablement le problème ; de multiples questions sont encore ouvertes sur les phases susceptibles d'apparaître aussi bien dans les gaz de Bose (voir par exemple Li et al. (2012)) que pour des fermions, avec la possibilité déjà mentionnée de générer des particules de Majorana aux extrémités d'une chaîne atomique dans un état supra-conducteur topologique (Oreg et al. 2010; Lutchyn et al. 2010).



**FIGURE 5.13.** Résultats tirés de Lin et al. (2011b) montrant l'évolution de la positions des minima de  $E_{\infty}(p)$  avec la pulsation de Rabi  $\kappa_0$ . La couleur code les populations relatives des deux sous-niveaux Zeeman en jeu  $m_F = 0$  et  $m_F = -1$ .

## Références

- Bohm, A., A. Mostafazadeh, H. Koizumi, Q. Niu & J. Zwanziger (2003), *Geometric Phases in Quantum Systems*, Berlin, Heidelberg, New York: Springer.
- Cheuk, Lawrence W., Ariel T. Sommer, Zoran Hadzibabic, Tarik Yefsah, Waseem S. Bakr & Martin W. Zwierlein (2012), « Spin-Injection Spectroscopy of a Spin-Orbit Coupled Fermi Gas », in *Phys. Rev. Lett.* 109 (9), p. 095302.
- Galitski, Victor & Ian B. Spielman (2013), « Spin-orbit coupling in quantum gases », in *Nature* 494, p. 49.
- Goldman, N., G. Juzeliunas, P. Ohberg & I. B. Spielman (2013), « Light-induced gauge fields for ultracold atoms », arXiv :1308.6533.
- Hasan, M. Z. & C. L. Kane (2010), « *Colloquium* : Topological insulators », in *Rev. Mod. Phys.* 82 (4), pp. 3045–3067.
- Higbie, J. & D. M. Stamper-Kurn (2002), « Periodically Dressed Bose-Einstein Condensate : A Superfluid with an Anisotropic and Variable Critical Velocity », in *Phys. Rev. Lett.* 88 (9), p. 090401.

- Julia-Diaz, B., D. Dagnino, K. J. Günter, T. Graß, N. Barberán, M. Lewenstein & J. Dalibard (2011), « Strongly correlated states of a small cold-atom cloud from geometric gauge fields », in *Phys. Rev. A* 84 (5), p. 053605.
- Juzeliūnas, G., J. Ruseckas & J. Dalibard (2010), « Generalized Rashba spin-orbit coupling for cold atoms », in *Phys. Rev. A* 81, p. 053403.
- Li, Yun, Lev P. Pitaevskii & Sandro Stringari (2012), « Quantum Tricriticality and Phase Transitions in Spin-Orbit Coupled Bose-Einstein Condensates », in *Phys. Rev. Lett.* 108 (22), p. 225301.
- Lin, Y. J., R. L. Compton, A. R. Perry, W. D. Phillips, J. V. Porto & I. B. Spielman (2009a), « Bose-Einstein Condensate in a Uniform Light-Induced Vector Potential », in *Phys. Rev. Lett.* 102, p. 130401.
- Lin, Y.-J., R. L. Compton, K. Jiménez-García, J. V. Porto & I. B. Spielman (2009b), « Synthetic magnetic fields for ultracold neutral atoms », in *Nature* 462, pp. 628–632.
- Lin, Y.-J., R. L. Compton, K. Jiménez-García, W.D. Phillips, J.V. Porto & I.B. Spielman (2011a), « A synthetic electric force acting on neutral atoms », in *Nature Physics* 7, p. 531.
- Lin, Y.J., K. Jiménez-García & I. B. Spielman (2011b), « Spin-orbit-coupled Bose-Einstein condensates », in *Nature* 471, p. 83.
- Lutchyn, Roman M., Jay D. Sau & S. Das Sarma (2010), « Majorana Fermions and a Topological Phase Transition in Semiconductor-Superconductor Heterostructures », in *Phys. Rev. Lett.* 105 (7), p. 077001.
- Möller, G. & N. R. Cooper (2010), « Condensed ground states of frustrated Bose-Hubbard models », in *Phys. Rev. A* 82 (6), p. 063625.
- Mourik, V., K. Zuo, S. M. Frolov, S. R. Plissard, E. P. A. M. Bakkers & L. P. Kouwenhoven (2012), « Signatures of Majorana Fermions in Hybrid Superconductor-Semiconductor Nanowire Devices », in *Science* 336, p. 1003.
- Oreg, Yuval, Gil Refael & Felix von Oppen (2010), « Helical Liquids and Majorana Bound States in Quantum Wires », in *Phys. Rev. Lett.* 105 (17), p. 177002.
- Sau, Jay D., Roman M. Lutchyn, Sumanta Tewari & S. Das Sarma (2010), « Generic New Platform for Topological Quantum Computation Using Semiconductor Heterostructures », in *Phys. Rev. Lett.* 104 (4), p. 040502.
- Wang, Pengjun, Zeng-Qiang Yu, Zhengkun Fu, Jiao Miao, Lianghui Huang, Shijie Chai, Hui Zhai & Jing Zhang (2012), « Spin-Orbit Coupled Degenerate Fermi Gases », in *Phys. Rev. Lett.* 109 (9), p. 095301.
- Wilczek, Frank & A. Zee (1984), « Appearance of Gauge Structure in Simple Dynamical Systems », in *Phys. Rev. Lett.* 52.24, pp. 2111–2114.
- Xiao, Di, Ming-Che Chang & Qian Niu (2010), « Berry phase effects on electronic properties », in *Rev. Mod. Phys.* 82 (3), pp. 1959–2007.
- Zhang, Chuanwei, Sumanta Tewari, Roman M. Lutchyn & S. Das Sarma (2008), «  $p_x + ip_y$  Superfluid from  $s$ -Wave Interactions of Fermionic Cold Atoms », in *Phys. Rev. Lett.* 101 (16), p. 160401.
- Zhou, Qi & Xiaoling Cui (2013), « Fate of a Bose-Einstein Condensate in the Presence of Spin-Orbit Coupling », in *Phys. Rev. Lett.* 110 (14), p. 140407.

# Chapitre 6

## Magnétisme dans un réseau périodique

### Sommaire

<b>1</b>	<b>Champs de jauge sur réseau</b> . . . . .	<b>2</b>
1-1	Rappels : modèle des liaisons fortes . . . . .	2
1-2	Réseau sous champ magnétique . . . . .	3
1-3	Choix de jauge . . . . .	3
1-4	Jauge de Landau . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Le papillon de Hofstadter</b> . . . . .	<b>5</b>
2-1	L'équation de Harper . . . . .	5
2-2	Le spectre de Hofstadter . . . . .	6
2-3	Le nombre de Chern . . . . .	7
2-4	Expériences sur des super-réseaux . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Les réseaux optiques secoués</b> . . . . .	<b>9</b>
3-1	Rappel : le cas unidimensionnel (version 1). . . . .	9
3-2	Le cas unidimensionnel (version 2). . . . .	11
3-3	Le cas bi-dimensionnel. . . . .	11
3-4	Exemple d'expériences avec un réseau secoué . . . . .	13
<b>4</b>	<b>Réseaux combinant différents états internes</b> . . . . .	<b>13</b>
4-1	L'effet tunnel assisté par laser sur une échelle . . . . .	14
4-2	Passage à un réseau bi-dimensionnel . . . . .	16
4-3	Rectification du flux . . . . .	16
<b>5</b>	<b>Remarques finales</b> . . . . .	<b>17</b>

Nous nous sommes intéressés jusqu'ici à la génération d'un champ de jauge artificiel pour un atome se déplaçant librement dans l'espace ou confiné dans un potentiel harmonique. Une autre classe très importante de problèmes porte sur le magnétisme orbital en présence d'un potentiel spatialement périodique. Ce type de question peut apparaître par exemple quand on étudie l'effet d'un fort champ magnétique sur le fluide d'électrons d'un cristal.

La richesse de ce problème est liée à l'existence de deux échelles de longueur qui peuvent être du même ordre. La première est la maille  $a$  du réseau périodique, que l'on peut prendre carré pour fixer les idées, la seconde est la longueur magnétique que nous avons déjà rencontrée

$$\ell = \sqrt{\hbar/qB}. \quad (6.1)$$

Le rapport de ces deux longueurs peut s'écrire en terme du flux  $\Phi = Ba^2$  du champ magnétique au travers d'une cellule unité, exprimé en unité du quantum de flux  $\Phi_0 = h/q$  :

$$\frac{a^2}{\ell^2} = \frac{qBa^2}{\hbar} = 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}. \quad (6.2)$$

Rappelons que cette quantité peut être comprise comme la phase Aharonov-Bohm accumulée par la fonction d'onde de la particule qui se déplacerait sur le bord d'une des cellules du réseau.

Tant que le flux  $\Phi$  reste petit devant  $\Phi_0$ , on ne s'attend pas à des modifications spectaculaires de la physique rencontrée pour une particule libre : le pas du réseau est beaucoup plus petit que la taille typique des orbites cyclotron, qui ne devraient donc pas être très affectées par la discrétisation de l'espace. Ce régime  $\Phi \ll \Phi_0$  correspond au cas des solides « ordinaires » (maille  $a$  de quelques angströms) et des champs réalisables en laboratoire (quelques dizaines de Teslas au maximum).

En revanche, pour les grands champ magnétiques tels que  $\Phi \sim \Phi_0$ , la « compétition » entre ces deux échelles de longueur va induire une physique radicalement nouvelle, avec un spectre à une particule dont nous allons voir qu'il possède une structure fractale. Ce régime peut être exploré avec des matériaux « synthétiques » et/ou des champs magnétiques artificiels, en particulier des atomes froids confinés dans un réseau optique. Ce problème du mouvement quantique en présence simultanée d'un potentiel périodique et d'un champ magnétique a fait l'objet de plusieurs séminaires attachés à cette série de cours. Dans ce chapitre, nous allons nous concentrer sur quelques points marquants, sans chercher à être exhaustif sur ce problème à la fois riche et complexe.

## 1 Champs de jauge sur réseau

### 1-1 Rappels : modèle des liaisons fortes

Nous commencerons notre étude par quelques rappels sur le modèle simple d'un réseau 1D ou 2D dans le régime des liaisons fortes, en nous restreignant à une seule bande d'énergie. Ce problème a été étudié en détail dans le cours de l'an dernier et nous allons donc nous borner à en donner les éléments utiles pour la suite.

Considérons un réseau uni-dimensionnel périodique, de période spatiale  $a$  (figure 6.1). On note  $|w_j\rangle$  l'état de l'atome lorsqu'il est localisé sur le site situé en  $x_j = ja$  ( $j \in \mathbb{Z}$ ). La dynamique de l'atome dans le réseau est caractérisée par le coefficient tunnel  $J$ , qui donne l'amplitude de probabilité pour sauter du site  $j$  vers un des deux voisins  $j \pm 1$ . L'hamiltonien

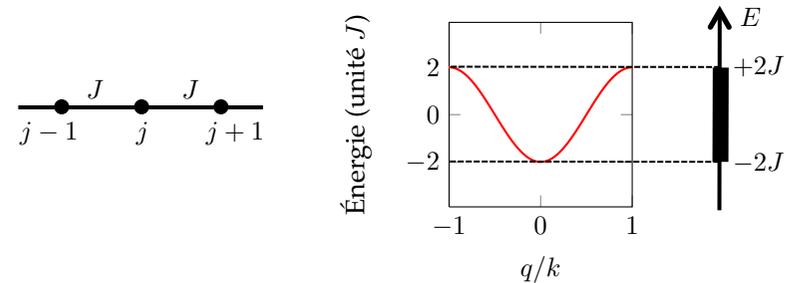


FIGURE 6.1. Réseau 1D en régime des liaisons fortes (Hubbard), avec une bande d'énergie de largeur  $4J$ .

décrivant le mouvement de l'atome est donc

$$\hat{H} = -J (\hat{T} + \hat{T}^\dagger) \quad (6.3)$$

où l'opérateur  $\hat{T}$  translate la particule d'un site vers la droite

$$\hat{T} = \sum_j |w_{j+1}\rangle \langle w_j|. \quad (6.4)$$

Les états propres de cet hamiltonien sont les fonctions de Bloch, que l'on peut voir comme la transposition de la notion d'onde plane à cet espace discrétisé :

$$|\psi_q\rangle = \sum_j e^{ijaq} |w_j\rangle, \quad (6.5)$$

le quasi-moment  $q$  étant choisi par convention dans la zone de Brillouin  $q \in ]-\pi/a, \pi/a]$ . L'énergie d'un état  $|\psi_q\rangle$  est donnée par

$$E(q) = -2J \cos(aq), \quad (6.6)$$

ce qui conduit à une bande d'énergie centrée en 0 et de largeur  $4J$ .

Le cas bi-dimensionnel est une généralisation directe de ce qui précède, au moins dans le cas d'un réseau carré. Un site est maintenant repéré par deux entiers  $j, l$ , correspondant aux deux directions d'espace  $x, y$ . L'hamiltonien (séparable) s'écrit

$$\hat{H} = \hat{H}_x + \hat{H}_y \quad \text{avec} \quad \hat{H}_\nu = -J (\hat{T}_\nu + \hat{T}_\nu^\dagger), \quad \nu = x, y, \quad (6.7)$$

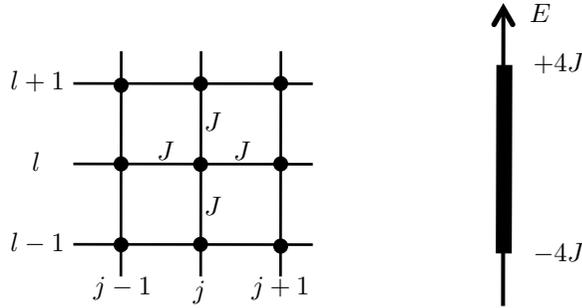


FIGURE 6.2. Réseau carré 2D en régime des liaisons fortes (Hubbard), avec une bande d'énergie de largeur  $8J$ .

ou encore, de manière explicite :

$$\hat{H} = -J \sum_{j,l} (|w_{j+1,l}\rangle\langle w_{j,l}| + |w_{j,l+1}\rangle\langle w_{j,l}|) + \text{h.c.} \quad (6.8)$$

Ses vecteurs propres sont des fonctions de Bloch  $|\psi_{\mathbf{q}}\rangle$  repérées maintenant par un vecteur  $\mathbf{q} = (q_x, q_y)$  et ayant pour énergie  $E(\mathbf{q})$

$$|\psi_{\mathbf{q}}\rangle = \sum_{j,l} e^{ia(jq_x + lq_y)} |w_{j,l}\rangle, \quad E(\mathbf{q}) = -2J (\cos(aq_x) + \cos(aq_y)), \quad (6.9)$$

soit une bande d'énergie centrée en 0 et de largeur  $8J$ .

## 1-2 Réseau sous champ magnétique

En présence d'un champ magnétique perpendiculaire au plan du réseau, l'hamiltonien (6.8) doit être modifié pour prendre en compte la phase de Aharonov-Bohm

$$\phi(\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}') = \frac{q}{\hbar} \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}'} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \quad (6.10)$$

le long des chemins qui mènent d'un site  $\mathbf{r} = (j, l)$  aux quatre sites voisins  $\mathbf{r}' = (j \pm 1, l)$  et  $(j, l \pm 1)$ . Une manière approchée pour ce faire est

la *substitution de Peierls*<sup>1</sup>, qui consiste à assigner – dans ce modèle de liaisons fortes – des phases différentes aux coefficients tunnel le long des liens horizontaux et verticaux qui forment le réseau carré 2D :

$$-J |w_{j+1,l}\rangle\langle w_{j,l}| \longrightarrow -J e^{i\phi(j,l \rightarrow j+1,l)} |w_{j+1,l}\rangle\langle w_{j,l}| \quad (6.11)$$

avec bien sûr

$$\phi(j, l \rightarrow j+1, l) = -\phi(j+1, l \rightarrow j, l) \quad (6.12)$$

pour garantir que l'hamiltonien reste hermitien.

## 1-3 Choix de jauge

Tout comme il existe un arbitraire de choix de jauge pour une particule mobile dans le plan continu  $xy$ , il existe également un arbitraire de jauge dans le choix de ces phases. Pour nous en convaincre, considérons d'abord le modèle à 4 sites de la figure 6.3, correspondant à l'hamiltonien

$$\hat{H} = -J (e^{i\phi_1} |a\rangle\langle d| + e^{i\phi_2} |b\rangle\langle a| + e^{i\phi_3} |c\rangle\langle b| + e^{i\phi_4} |d\rangle\langle c|) + \text{h.c.} \quad (6.13)$$

Considérons le changement de base suivant, qui consiste simplement à redéfinir la phase des états utilisés :

$$|\tilde{a}\rangle = e^{i\phi_1} |a\rangle, \quad |\tilde{b}\rangle = e^{i(\phi_1+\phi_2)} |b\rangle, \quad |\tilde{c}\rangle = e^{i(\phi_1+\phi_2+\phi_3)} |c\rangle, \quad |\tilde{d}\rangle = |d\rangle. \quad (6.14)$$

On voit immédiatement que l'hamiltonien (6.13) se réécrit

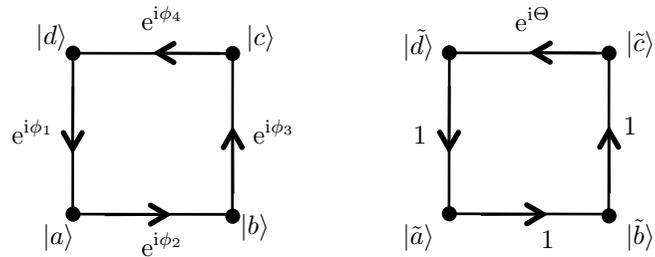
$$\hat{H} = -J (|\tilde{a}\rangle\langle \tilde{d}| + |\tilde{b}\rangle\langle \tilde{a}| + |\tilde{c}\rangle\langle \tilde{b}| + e^{i\Theta} |\tilde{d}\rangle\langle \tilde{c}|) + \text{h.c.} \quad (6.15)$$

avec

$$\Theta = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4. \quad (6.16)$$

Dans ce cas particulier, on a donc pu choisir tous les coefficients tunnel réels sauf un d'entre eux, qui concentre la phase totale des coefficients initiaux. Nous avons placé ce coefficient complexe sur le lien supérieur de la

1. Pour des charges bougeant dans un réseau en présence d'un champ magnétique, le passage de l'hamiltonien de base à cet hamiltonien modèle avec des coefficients tunnels complexes est loin d'être évident. Les limitations de cette *substitution de Peierls* ont été discutées par plusieurs auteurs (Luttinger 1951; Nenciu 1991); toutefois, dans le contexte de la simulation du magnétisme par des atomes froids, ces limitations ne sont pas pertinentes car nous allons chercher à reproduire directement l'hamiltonien modèle (6.21).



**FIGURE 6.3.** Principe d'un changement de jauge, où on redéfinit les états de la particule pour « concentrer » la phase des coefficients tunnels sur un lien particulier de la cellule.

plaquette, mais on peut bien sûr choisir de placer ce coefficient tunnel  $J e^{i\Theta}$  sur n'importe quel autre côté, l'important étant que sa phase soit égale à  $\Theta$ .

En généralisant cet argument, on peut montrer que les quantités invariantes de jauge pour un réseau carré infini sont les sommes

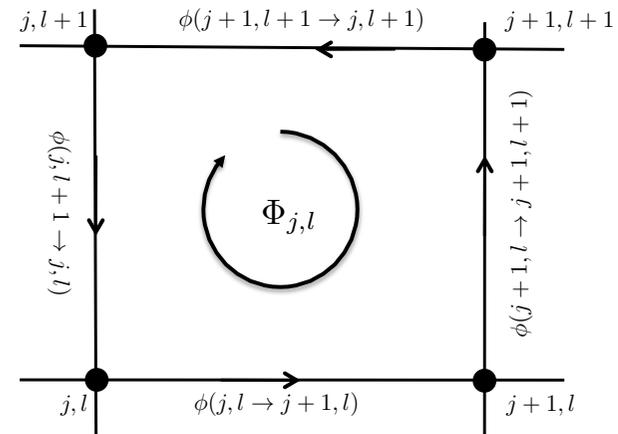
$$\begin{aligned} \frac{q}{h} \Phi_{j,l} &= \phi(j,l \rightarrow j+1,l) + \phi(j+1,l \rightarrow j+1,l+1) \\ &+ \phi(j+1,l+1 \rightarrow j,l+1) + \phi(j,l+1 \rightarrow j,l). \end{aligned} \quad (6.17)$$

Chaque somme représente la phase accumulée dans le trajet autour d'une plaquette donnée du réseau (figure 6.4), en l'occurrence la plaquette avec le site  $(j,l)$  dans son coin inférieur gauche. Tous les choix des  $\phi(j,l \rightarrow j \pm 1,l)$ ,  $\phi(j,l \rightarrow j, l \pm 1)$  conduisant au même ensemble  $\{\Phi_{j,l}\}$  seront équivalents. La signification physique de  $\Phi_{j,l}$  est, comme dans le cas continu, le flux du champ magnétique à travers la plaquette considérée.

Pour montrer comment ce résultat peut être mis en pratique, adoptons une stratégie directement inspirée de ce que nous avons fait pour la plaquette carrée isolée de la figure 6.3. Partons d'un réseau carré infini, sur lequel chaque lien correspond à un coefficient tunnel *a priori* complexe.

- Partant du site  $(j,l) = (0,0)$  (figure 6.5a), on peut commencer par modifier la phase de tous les sites de la ligne horizontale  $l = 0$  (sauf le site  $|w_{0,0}\rangle$  qui sert de point de départ)

$$|w_{j,0}\rangle \rightarrow |\tilde{w}_{j,0}\rangle, \quad j \neq 0, \quad (6.18)$$



**FIGURE 6.4.** Pour chaque plaquette, les phases  $\phi(j,l \rightarrow j',l')$  intervenant dans les éléments de matrice tunnel entre proches voisins peuvent être sommées pour former la quantité invariante de jauge  $(q/h) \Phi_{j,l}$ , cf. (6.17). La quantité  $\Phi_{j,l}$  représente le flux du champ magnétique à travers cette plaquette.

avec par exemple

$$|\tilde{w}_{1,0}\rangle = e^{i\phi_{00 \rightarrow 1,0}} |w_{1,0}\rangle, \quad |\tilde{w}_{2,0}\rangle = e^{i(\phi_{00 \rightarrow 1,0} + \phi_{1,0 \rightarrow 2,0})} |w_{2,0}\rangle, \dots$$

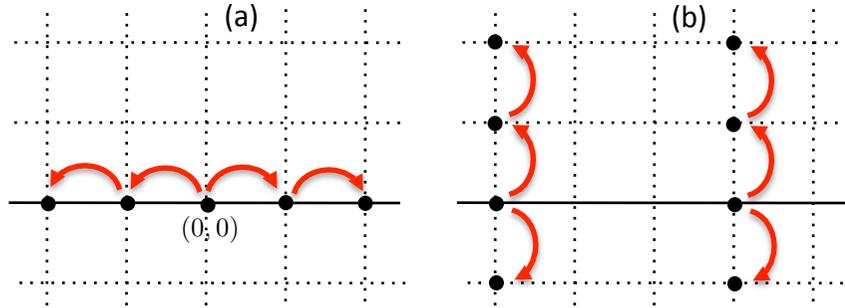
de sorte que les coefficients tunnels de cette ligne horizontale  $l = 0$  deviennent réels.

- L'expression de chaque état  $|\tilde{w}_{j,0}\rangle$  étant alors fixée, on peut considérer chaque ligne verticale et redéfinir la phase des coefficients des sites le long de chaque ligne

$$|w_{j,l}\rangle \rightarrow |\tilde{w}_{j,l}\rangle, \quad l \neq 0, \quad (6.19)$$

pour que les coefficients tunnels associés à tous les liens verticaux soient également réels (figure 6.5b).

Au terme de cette procédure, la phase de chaque état  $|w_{j,l}\rangle$  a été redéfinie de manière unique ; tous les liens verticaux sont réels, et la phase des liens horizontaux est fixée de manière unique (en accord avec (6.17)), avec une phase nulle pour la ligne horizontale  $l = 0$ .



**FIGURE 6.5.** Procédure pour fixer la phase des coefficients tunnels de manière unique dans un réseau carré. (a) On redéfinit la phase des états de la ligne horizontale  $l = 0$  pour que les coefficients tunnel le long de cette ligne soient réels. (b) On redéfinit la phase des états en dehors de la ligne  $l = 0$  pour que tous les coefficients tunnels le long des liens verticaux soient réels. Les phases liées à la présence du champ magnétique sont alors concentrées sur les liens horizontaux (en dehors de la ligne  $l = 0$ ).

#### 1-4 Jauge de Landau

Considérons à partir de maintenant un champ magnétique uniforme  $B$ , pour lequel tous les flux  $\Phi_{j,l}$  sont identiques. On peut faire un choix similaire à la jauge de Landau, selon laquelle le potentiel vecteur est aligné selon une direction de l'espace,  $x$  ou  $y$ . Choisissons par exemple le potentiel vecteur parallèle à l'axe  $x$  dans (6.10), ce qui correspond pour le cas continu à  $\mathbf{A} = (-By, 0, 0)$ . Ceci revient à prendre toutes les phases des transitions verticales  $\phi(j, l \rightarrow j, l + 1)$  nulles et à choisir les phases dans la direction horizontale  $\phi(j, l \rightarrow j \pm 1, l)$  linéaires vis à vis de  $l$  :

$$\phi(j, l \rightarrow j, l + 1) = 0, \quad \phi(j, l \rightarrow j \pm 1, l) = \pm 2\pi\alpha l. \quad (6.20)$$

L'hamiltonien que nous allons considérer dans la suite s'écrit donc :

$$\hat{H} = -J \sum_{j,l} (e^{i2\pi\alpha l} |w_{j+1,l}\rangle \langle w_{j,l}| + |w_{j,l+1}\rangle \langle w_{j,l}|) + \text{h.c.} \quad (6.21)$$

L'incrément de phase  $2\pi\alpha$  caractérise entièrement le problème. Puisqu'une phase est définie modulo  $2\pi$ , on peut restreindre  $\alpha$  à l'intervalle

$[0, 1[$  (voire même  $[0, 1/2]$  puisque  $\alpha$  et  $1 - \alpha$  représentent des situations équivalentes par inversion  $x \rightarrow -x$ ). Ce nombre  $\alpha$  est directement relié au flux  $\Phi$  du champ magnétique à travers une plaquette :

$$\alpha = \frac{1}{2\pi} \frac{q}{\hbar} \Phi = \frac{\Phi}{\Phi_0}, \quad (6.22)$$

déjà introduit en (6.2). Comme nous l'avons signalé en introduction, pour des réseaux cristallins « réels », la maille du réseau est de l'ordre de l'ångström et les champs magnétiques les plus grands sont de l'ordre de 50 Teslas, ce qui restreint  $\alpha$  à des valeurs ( $\sim 10^{\pm 4}$ ) faibles devant 1. Les atomes froids dans des réseaux optiques constituent un moyen (parmi d'autres), pour aller explorer une partie plus grande du domaine de variation de  $\alpha$ .

## 2 Le papillon de Hofstadter

L'hamiltonien en présence de champ magnétique (6.21) est remarquablement proche de la version à champ nul (6.8). Néanmoins, le facteur de phase  $e^{i2\pi\alpha l}$  modifie considérablement le spectre en énergie et la forme des états propres. Nous n'allons pas résoudre entièrement ce problème, mais nous allons donner quelques indications ainsi que les résultats principaux.

### 2-1 L'équation de Harper

Notons tout d'abord qu'avec le choix de jauge de Landau que nous avons fait, nous n'avons pas brisé l'invariance par translation de  $a$  le long de l'axe horizontal. On peut donc toujours chercher les fonctions propres de l'hamiltonien sous forme de fonctions de Bloch<sup>2</sup> selon l'axe  $x$  :

$$|\Psi\rangle = \sum_{j,l} C_l e^{ijaq_x} |w_{j,l}\rangle, \quad (6.23)$$

les coefficients  $C_l$  étant à ce stade inconnus. Pour les déterminer, on écrit l'équation aux valeurs propres pour  $|\Psi\rangle$  et on obtient l'équation de Harper

$$C_{l \in 1} + 2C_l \cos(2\pi\alpha l - aq_x) + C_{l+1} = -(E/J) C_l. \quad (6.24)$$

2. tout comme on avait cherché les états propres en jauge de Landau sous forme d'ondes planes dans une direction.

On s'est donc ramené à la diagonalisation d'une matrice tri-diagonale, bien adaptée à une résolution numérique.

## 2-2 Le spectre de Hofstadter

Une classe importante de solutions porte sur le cas où  $\alpha$  est un nombre rationnel :  $\alpha = p'/p$ , où  $p$  et  $p'$  sont deux entiers. On constate alors que le problème redevient également invariant par translation le long de l'axe vertical, mais avec une période spatiale augmentée,  $pa$  au lieu de  $a$ . En effet, on a dans ce cas

$$\phi(j, l+p \rightarrow j+1, l+p) = 2\pi\alpha(l+p) = 2\pi\alpha l + 2\pi p' = \phi(j, l \rightarrow j+1, l) \quad (6.25)$$

où la dernière égalité est vraie modulo  $2\pi$ . On retrouve alors un problème de particule en mouvement dans un réseau périodique, mais avec une cellule unité de taille  $a \times (pa)$  et  $p$  sites par cellule unité. On sait alors que la bande fondamentale de largeur  $8J$  va se fragmenter en  $p$  sous-bandes, généralement séparées par des gaps<sup>3</sup>.

**Exemple du flux 1/3.** Pour illustrer la méthode générale, considérons l'exemple du flux  $\alpha = 1/3$ . La cellule unité, qui a pour taille  $a$  selon la direction  $x$  et  $3a$  selon la direction  $y$ , comporte 3 sites, notés  $|A\rangle, |B\rangle, |C\rangle$  sur la figure 6.6. Chaque cellule est repérée par les indices  $j, l$ , avec par convention le site  $A$  au point  $a(j\mathbf{u}_x + 3l\mathbf{u}_y)$ . Cherchons les états propres de l'hamiltonien sous la forme d'une fonction de Bloch repérée par le vecteur de Bloch  $\mathbf{q} = (q_x, q_y)$  :

$$|\Psi_{\mathbf{q}}\rangle = \sum_{j,l} e^{ia(jq_x + 3lq_y)} (\alpha|A_{j,l}\rangle + \beta|B_{j,l}\rangle + \gamma|C_{j,l}\rangle) \quad (6.26)$$

avec

$$q_x \in ]-\pi/a, \pi/a], \quad q_y \in ]-\pi/(3a), \pi/(3a)]. \quad (6.27)$$

Les coefficients  $\alpha, \beta, \gamma$  se déduisent de l'équation aux valeurs propres  $\hat{H}|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle$ , ce qui revient à chercher les états propres de l'hamiltonien

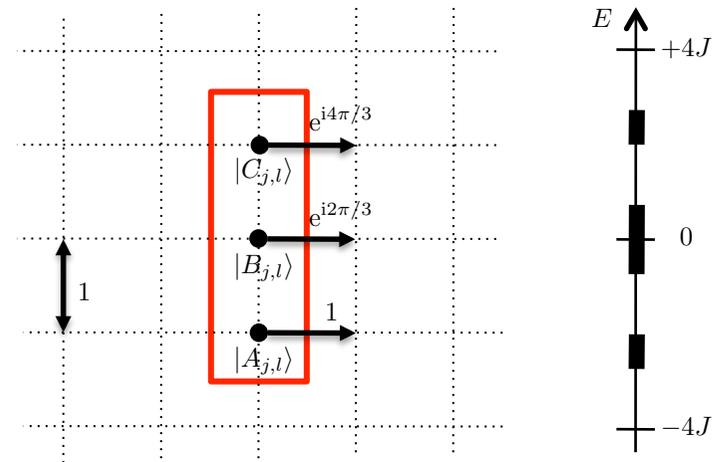


FIGURE 6.6. Choix d'une cellule unité de taille  $a \times 3a$  pour un flux magnétique tel que  $\alpha = 1/3$ . On a représenté à droite les trois sous-bandes résultant de la fragmentation de la bande initiale de largeur  $8J$ .

dans l'espace réciproque :

$$\hat{\mathcal{H}}(\mathbf{q}) = -J \begin{pmatrix} 2 \cos(aq_x) & 1 & e^{i3aq_y} \\ 1 & 2 \cos(aq_x + 2\pi/3) & 1 \\ e^{i3aq_y} & 1 & 2 \cos(aq_x + 4\pi/3) \end{pmatrix} \quad (6.28)$$

écrit ici dans la base  $\{|A\rangle, |B\rangle, |C\rangle\}$ . La diagonalisation de cette matrice  $3 \times 3$  donne trois valeurs propres fonctions de  $\mathbf{q}$ . Quand on fait varier  $q_x$  et  $q_y$  dans les intervalles (6.27), on voit apparaître 3 bandes d'énergie représentées sur la figure 6.6. Le spectre d'énergie est symétrique par rapport à  $E = 0$  et sa largeur totale est réduite par rapport à la valeur  $8J$  trouvée en l'absence de champ magnétique. La sous-bande fondamentale a pour largeur  $\sim 0.7J$  et elle est séparée de la sous-bande intermédiaire par la largeur  $\sim 1.3J$ .

**Forme générale du spectre.** Le résultat général pour le spectre de l'hamiltonien est tracé sur la figure 6.7. Ce spectre présente une structure fractale très particulière appelée *papillon de Hofstadter* (Hofstadter 1976). On peut

<sup>3</sup>. Ce gap est parfois remplacé par un contact de type *point de Dirac*. C'est par exemple le cas pour  $\alpha = 1/2$ .

comprendre l'apparition de cette structure fractale en comparant deux valeurs très proches de flux, par exemple  $100/300$  et  $101/300$  et en remarquant qu'elles conduisent à des spectres très différents, l'un avec 3 sous-bandes (figure 6.6), l'autre avec 301 sous-bandes. On pourra trouver une étude détaillée de cette structure fractale, de sa self-similarité et de ses symétries, ainsi que de nombreuses références sur le site web de Gilles Montambaux<sup>4</sup>.

**Vers des champs magnétiques faibles :**  $\alpha = 1/p$ . On trouve dans ce cas  $p$  sous-bandes, et la largeur des sous-bandes tend vers 0 quand  $p$  augmente. Les bandes les plus basses sont à peu près équidistantes, avec un écart qui tend également vers 0, mais moins vite que leur largeur. Le spectre devient donc presque discret, ce qui rappelle bien sûr la structure en niveaux de Landau d'une particule libre. On peut vérifier quantitativement ce lien, en prenant pour masse de la particule la relation déduite de (6.9) en bas de bande :

$$E(\mathbf{q}) \approx Ja^2 \mathbf{q}^2 \equiv \frac{\hbar^2 \mathbf{q}^2}{2M_{\text{eff}}} \Rightarrow M_{\text{eff}} = \frac{\hbar^2}{2Ja^2} \quad (6.29)$$

et en vérifiant que l'écart entre niveaux est bien égal à la pulsation cyclotron  $\omega_c = qB/M_{\text{eff}}$ , qui s'écrit ici

$$\hbar\omega_c = 2J \frac{\Phi}{\Phi_0}. \quad (6.30)$$

### 2-3 Le nombre de Chern

Nous voyons sur le spectre de Hofstadter que les niveaux de Landau apparaissent naturellement comme la limite asymptotique  $\Phi \rightarrow 0$  des sous-bandes trouvées pour un flux  $\propto 1/p$ , où  $p$  est un entier. Pour aller au-delà de cette simple remarque visuelle, il faut caractériser de manière quantitative les propriétés de ces sous-bandes pour voir dans quelle mesure elles conduisent globalement aux mêmes propriétés physiques que les niveaux de Landau pour une particule libre.

Une propriété remarquable des niveaux de Landau, indépendante de la forme précise de l'échantillon, est l'existence d'états de bords chiraux,

4. [www.equipes.lps.u-psud.fr/Montambaux/cours-seminaires/hofstadter-tutorial.pdf](http://www.equipes.lps.u-psud.fr/Montambaux/cours-seminaires/hofstadter-tutorial.pdf)

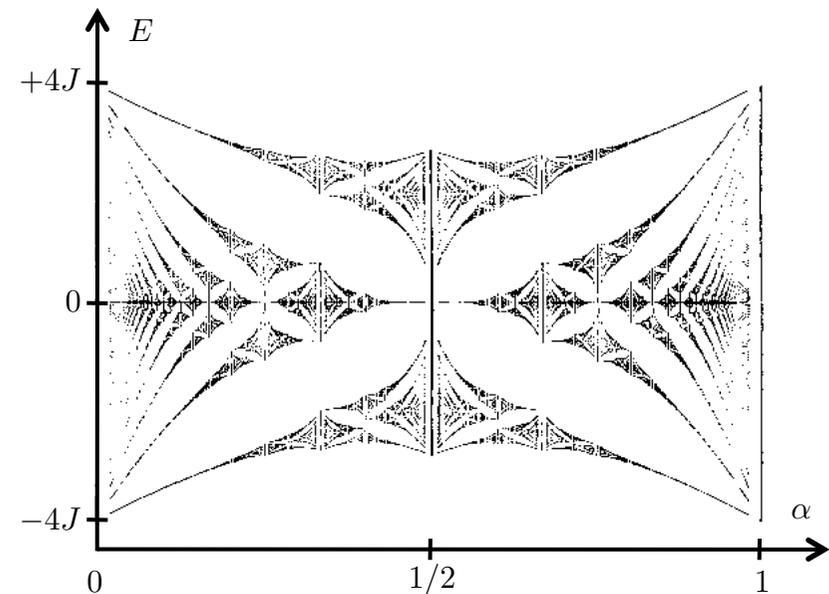


FIGURE 6.7. Papillon de Hofstadter : spectre en énergie d'une particule bougeant sur un réseau carré dans l'approximation des liaisons fortes, en présence d'un champ magnétique. Le flux du champ magnétique à travers une plaquette du réseau est tel que  $2\pi\alpha = \Phi/\Phi_0$  (Hofstadter 1976).

que nous avons pu relier à la notion de courant de Hall. Rappelons le résultat principal ; prenons un échantillon rectangulaire et considérons une situation où le niveau de Landau fondamental est complètement rempli de particules fermioniques sans interaction ; les autres niveaux de Landau sont supposés vides. Si on applique une différence de potentiel  $\Delta E_x$  entre les deux bords de l'échantillon selon l'axe  $x$ , alors un courant de particules apparaît dans la direction  $y$ , de valeur  $\dot{N}_y = \Delta E_x/h$ . Obtient-on la même propriété pour des particules sur réseau ?

La réponse à cette question, trouvée par Thouless et al. (1982) [voir aussi Kohmoto (1989)], est contenue dans la valeur d'un invariant topologique,

le nombre de Chern  $C$  défini par :

$$J_y = \frac{C}{h} F_x, \quad (6.31)$$

où  $F_x$  est une force uniforme appliquée sur le réseau dans la direction  $x$  et  $J_y$  le courant de particules dans la direction perpendiculaire  $y$ . Quand on suppose la bande fondamentale remplie de fermions n'interagissant pas les uns avec les autres et les autres bandes vides, ce nombre de Chern vaut :

$$C = \frac{1}{2\pi} \int_{Z_B} \Omega_z(\mathbf{q}) dq_x dq_y \quad (6.32)$$

où l'intégrale de la fonction  $\Omega_z(\mathbf{q})$  porte sur la première zone de Brillouin. La définition de la fonction de  $\Omega_z(\mathbf{q})$  est la transposition directe à l'espace réciproque de la notion de courbure de Berry que nous avons introduite dans l'espace des positions (Xiao et al. 2010). Puisqu'on dispose d'un hamiltonien périodique, on peut chercher ses états propres sous forme d'ondes de Bloch. En se restreignant à la bande fondamentale qui est par hypothèse la seule peuplée, ces ondes de Bloch sont notées

$$\Psi_{\mathbf{q}}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{r} \cdot \mathbf{q}} u_{\mathbf{q}}(\mathbf{r}), \quad (6.33)$$

où  $u_{\mathbf{q}}(\mathbf{r})$  est une fonction périodique sur le réseau. On définit alors la connexion de Berry

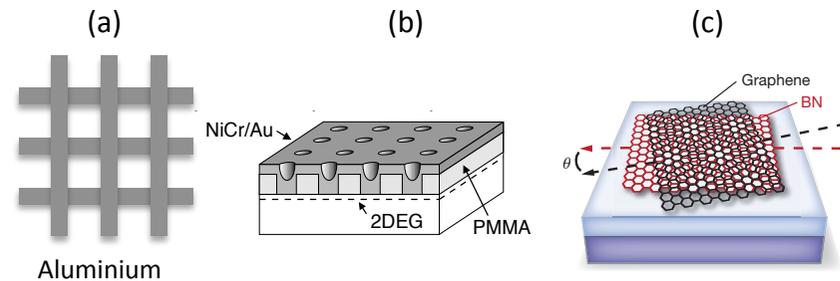
$$\mathcal{A}(\mathbf{q}) = i \langle u_{\mathbf{q}} | \nabla_{\mathbf{q}} u_{\mathbf{q}} \rangle, \quad (6.34)$$

qui permet d'évaluer la phase géométrique accumulée par une particule qui parcourt une boucle fermée dans l'espace des quasi-moments. La courbure de Berry est

$$\Omega(\mathbf{q}) = \nabla_{\mathbf{q}} \times \mathcal{A}(\mathbf{q}). \quad (6.35)$$

On peut montrer que le nombre de Chern ainsi défini est un entier positif, négatif ou nul. Quand cet entier est nul, le réseau est topologiquement trivial : une force appliquée selon  $x$  n'induit aucun courant macroscopique selon  $y$ . En revanche, s'il est non nul, on est en présence d'un phénomène du type *courant de Hall*, où une force dans une direction induit un courant dans une direction perpendiculaire.

Pour avoir une intuition de la signification de cet entier, revenons à un effet bien connu de la force appliquée  $F_x$  : elle va créer un phénomène



**FIGURE 6.8.** Systèmes utilisés expérimentalement pour explorer les propriétés magnétiques liées au papillon de Hofstadter (a) : Pannetier et al. (1984); (b) : Albrecht et al. (2001); (c) : Dean et al. (2013).

d'oscillations de Bloch<sup>5</sup> selon la direction  $x$ , avec le défilement du quasi-moment  $\dot{q}_x = F_x/h$ . Pour un réseau de cellule unité rectangulaire  $a \times b$ , la période de l'oscillation de Bloch correspond au temps pour parcourir toute la zone de Brillouin (largeur  $2\pi/a$ ), soit  $\tau_B = h/F_x a$ . Intéressons-nous au nombre de particules  $\delta N$  qui traversent une cellule unité, soit un segment horizontal de largeur  $a$  le long de l'axe  $x$ , en une période de Bloch  $\tau_B$  :

$$\delta N = a J_y \tau_B = a \left( \frac{C}{h} F_x \right) \left( \frac{h}{F_x a} \right) = C. \quad (6.36)$$

Le nombre de particules qui traversent une cellule unité en une période Bloch est donc quantifié, et le nombre de Chern donne la valeur de ce quantum. Pour les valeurs rationnelles particulières  $1/p$  du flux par plaquette, on trouve que le nombre de Chern de la sous-bande fondamentale vaut 1, tout comme pour le niveau de Landau fondamental trouvé en absence de réseau. Ces deux systèmes ont donc la même structure topologique et conduisent à des propriétés de conduction électrique équivalentes [voir Kohmoto (1989) pour une discussion du cas général  $\alpha = p'/p$ ].

<sup>5</sup>. Des propositions de mesure du nombre de Chern exploitant cette dynamique dans des expériences d'atomes froids ont été faites par Price & Cooper (2012) et Dauphin & Goldman (2013).

## 2-4 Expériences sur des super-réseaux

Comme nous l'avons indiqué en introduction, la maille d'un réseau cristallin ordinaire est trop petite pour permettre d'atteindre le régime  $\Phi/\Phi_0 \sim 1$  avec des champs magnétiques réalistes. Au cours des trente dernières années, plusieurs classes de systèmes – en dehors des gaz d'atomes froids – ont été étudiées pour approcher la physique du papillon de Hofstadter. Signalons en ici trois (cf. figure 6.8) :

- Pannetier et al. (1984) ont fabriqué un réseau carré de bandes d'aluminium de  $2 \mu\text{m}$  de large et espacées de  $6 \mu\text{m}$ . Le réseau de surface  $1 \text{cm}^2$  contient plus de 2 millions de sites *a priori* identiques. La mesure de la température critique de supraconductivité  $T_c(B)$  a montré des variations rapides pour des valeurs rationnelles simples ( $1/2, 2/5, 1/3, \dots$ ) du flux par plaquette.
- Albrecht et al. (2001) ont utilisé un gaz d'électrons bi-dimensionnel confiné dans une hétérostructure GaAs/AlGaAs. Un réseau périodique (période 120 nm) de NiCr/Au est déposé sur l'échantillon pour moduler spatialement le potentiel ressenti par les électrons. La mesure de la conductance de Hall a révélé la fragmentation du spectre en sous-bandes, comme attendu théoriquement.
- Dean et al. (2013) ont utilisé deux feuilles de graphène légèrement tournées l'une par rapport à l'autre pour réaliser une figure de Moiré, avec une périodicité de 15.5 nm. Ils utilisent eux aussi une mesure de la conductivité de Hall pour explorer le spectre d'énergie du papillon et mettre en évidence sa structure récursive.

## 3 Les réseaux optiques secoués

Pour implémenter l'hamiltonien (6.21) avec un gaz d'atomes froids dans un réseau optique, il faut trouver une procédure pour modifier le coefficient tunnel  $J$  et le rendre complexe, avec une phase qui dépend de l'indice repérant la direction verticale  $l$ . Nous avons déjà rencontré une technique similaire dans le cours de l'an dernier lorsque nous nous sommes intéressés à la localisation dynamique : nous avons vu que le coefficient tunnel dans un réseau 1D secoué pouvait être notablement modifié, voire

même changer de signe. C'est cette même technique que nous allons passer en revue maintenant.

Notons qu'il existe des méthodes différentes pour simuler un champ magnétique sur un réseau. Tout d'abord, on peut faire tourner physiquement le réseau dans l'espace : le passage dans le référentiel tournant garantit, comme pour un gaz homogène, l'apparition d'un champ magnétique effectif (Tung et al. 2006). On peut également moduler de manière chirale les paramètres d'un réseau de manière à simuler une rotation : par exemple, pour un réseau composé de cellules hexagonales, donc avec trois orientations possibles des côtés, on peut en principe moduler séparément les trois coefficients tunnels correspondants et obtenir après moyenne sur le temps un hamiltonien avec champ magnétique effectif (Kitagawa et al. 2010) [voir aussi l'article de Sørensen et al. (2005) pour une proposition voisine]. Il a également été proposé par Hemmerich & Smith (2007) d'utiliser des faisceaux additionnels pour générer des micro-rotors au niveau de chaque site du réseau ; ce schéma réalise en fait un champ magnétique alterné, dont le signe change d'une plaquette à l'autre [voir aussi Lim et al. (2008)].

### 3-1 Rappel : le cas unidimensionnel (version 1).

Pour préparer notre analyse, commençons par rappeler comment dans le cas à une dimension, on peut modifier le coefficient tunnel, voire lui conférer une phase complexe non nulle. Commençons par le réseau le plus simple possible, avec l'hamiltonien

$$\hat{H}_0 = -J \sum_j (|w_{j+1}\rangle\langle w_j| + |w_j\rangle\langle w_{j+1}|) \quad (6.37)$$

Supposons que l'on secoue ce réseau en remplaçant le potentiel statique périodique du réseau  $V(x)$  par

$$\mathcal{V}(x, t) = V[x - x_0(t)], \quad (6.38)$$

où  $x_0(t)$  est une fonction périodique du temps de pulsation  $\Omega$ . Nous allons supposer ici que  $\Omega \gg J/\hbar$ , de sorte que la modulation est rapide comparée à la dynamique tunnel du réseau. Nous avons montré dans le cours de

l'an dernier que le fait de secouer le réseau revient, via la transformation unitaire générée par l'opérateur

$$\hat{U}(t) = \exp(ix_0(t)\hat{p}/\hbar), \quad (6.39)$$

à passer à l'hamiltonien avec un élément de matrice tunnel complexe :

$$\hat{H}(t) = -J e^{iMa\hat{x}_0(t)/\hbar} \sum_j |w_{j+1}\rangle \langle w_j| + \text{h.c.} \quad (6.40)$$

Écrivons le vecteur d'état sous la forme

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_j \alpha_j(t) |w_j\rangle \quad (6.41)$$

où l'évolution des amplitudes  $\alpha_j$  est donnée par l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \dot{\alpha}_j = -J \left( \alpha_{j+1} e^{iMa\hat{x}_0(t)/\hbar} + \alpha_{j-1} e^{+iMa\hat{x}_0(t)/\hbar} \right). \quad (6.42)$$

Nous allons maintenant tirer parti du fait que les  $\alpha_j$  sont des variables lentes pour moyenner sur une période d'oscillation les coefficients de cette équation<sup>6</sup>. On obtient donc l'équation d'évolution approchée pour les  $\alpha_j$

$$i\hbar \dot{\alpha}_j = -\bar{J}^* \alpha_{j+1} - \bar{J} \alpha_{j-1} \quad (6.43)$$

avec un coefficient tunnel renormalisé

$$\bar{J} = J \langle e^{iMa\hat{x}_0(t)/\hbar} \rangle. \quad (6.44)$$

**Modulation sinusoïdale.** Pour une modulation sinusoïdale de la position du réseau du type

$$\frac{Ma}{\hbar} \hat{x}_0(t) = \xi_0 \sin(\Omega t + \phi) \quad (6.45)$$

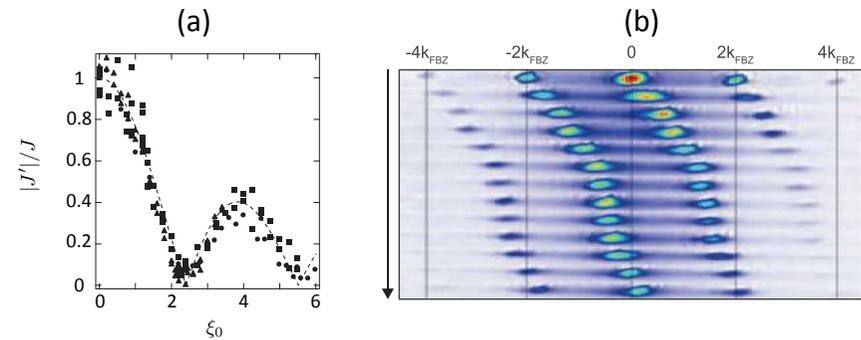
où  $\xi_0$  est un nombre sans dimension caractérisant l'amplitude de la modulation, on trouve que le coefficient tunnel moyen est réel et vaut<sup>7</sup>

$$\bar{J} = J \langle e^{i\xi_0 \sin(\Omega t + \phi)} \rangle = J \mathcal{J}_0(\xi_0) \quad (6.47)$$

6. Une approche plus rigoureuse, mais donnant le même résultat final, utilise l'approche de Floquet (cf. cours 2012-13).

7. On rappelle que

$$e^{ix \sin \theta} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} J_n(x) e^{in\theta}. \quad (6.46)$$



**FIGURE 6.9.** Exemples de modification de l'effet tunnel dans des réseaux à une dimension. (a) Changement du signe du coefficient tunnel par une modulation sinusoïdale du réseau (Lignier et al. 2007). (b) Changement de la phase du coefficient tunnel et décalage des pics en impulsion observés après temps de vol (Struck et al. 2012)).

où les  $J_n$  désignent les fonctions de Bessel de première espèce. Cette renormalisation du coefficient tunnel, avec son possible changement de signe, a été vue dans une expérience menée avec des atomes de rubidium par Lignier et al. (2007) (figure 6.9a).

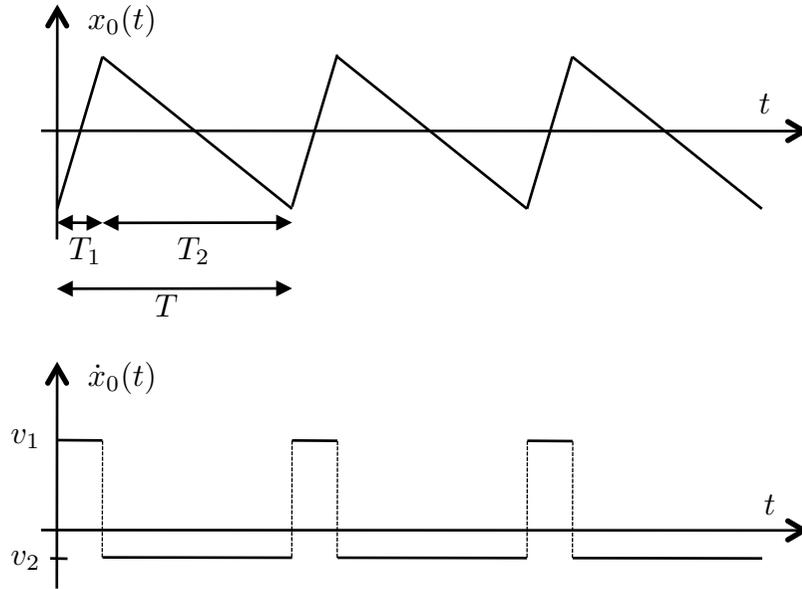
**Modulation asymétrique.** Supposons maintenant qu'on prenne une modulation de la position du réseau qui ne soit pas invariante par renversement du temps, comme la dent de scie asymétrique de la figure 6.10 : le réseau se déplace à vitesse  $v_1 > 0$  pendant une durée  $T_1$ , puis à vitesse  $v_2 < 0$  pendant une durée  $T_2$ , avec

$$v_1 T_1 + v_2 T_2 = 0, \quad T = T_1 + T_2, \quad (6.48)$$

de sorte que le déplacement moyen sur une période  $T$  est nul. Dans ce cas, la moyenne sur le temps de la fonction  $e^{iMa\hat{x}_0(t)/\hbar}$  est *a priori* complexe :

$$\frac{\bar{J}}{J} = \langle e^{iMa\hat{x}_0(t)/\hbar} \rangle = \frac{T_1}{T} e^{iMav_1/\hbar} + \frac{T_2}{T} e^{iMav_2/\hbar}. \quad (6.49)$$

Dans le cas 1D, une phase non nulle du coefficient tunnel se manifeste par un décalage de l'impulsion correspondant au bas de la bande considérée.



**FIGURE 6.10.** Modulation de la position d'un réseau optique 1D conduisant à un coefficient tunnel complexe (voir aussi Struck et al. (2012)).

Ce décalage, analogue à celui créé par un potentiel vecteur uniforme sur une particule libre et décrit au chapitre 5, a été observé par Struck et al. (2012) dans une expérience de temps de vol (figure 6.9b).

### 3-2 Le cas unidimensionnel (version 2).

Supposons maintenant que l'hamiltonien  $\hat{H}_0$  contienne, en plus des termes tunnel, un potentiel linéaire statique

$$\hat{H}_0 = -J \sum_j (|w_{j+1}\rangle\langle w_j| + |w_j\rangle\langle w_{j+1}|) - \hbar\Omega_0 \sum_j j |w_j\rangle\langle w_j|. \quad (6.50)$$

En absence de modulation, on sait que les états propres sont les fonctions de Wannier–Stark localisées. Supposons maintenant que l'on module le ré-

seau de manière sinusoïdale avec une pulsation  $\Omega$  voisine de (ou égale à)  $\Omega_0$ . On s'attend à induire une résonance entre sites adjacents qui va restaurer la conduction sur le réseau. Pour confirmer cette intuition, procédons comme ci-dessus ; nous écrivons le vecteur d'état à l'instant  $t$  sous la forme

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_j \alpha_j(t) e^{ij\Omega_0 t} |w_j\rangle, \quad (6.51)$$

et déduisons de l'équation de Schrödinger obtenue après la transformation unitaire (6.39) l'évolution des amplitudes de probabilité  $\alpha_j$

$$i\hbar \dot{\alpha}_j = -J \left( \alpha_{j+1} e^{i(Ma\dot{x}_0(t)/\hbar\Omega_0 t)} + \alpha_{j-1} e^{+i(Ma\dot{x}_0(t)/\hbar\Omega_0 t)} \right). \quad (6.52)$$

Pour

$$\Omega = \Omega_0, \quad \frac{Ma}{\hbar} \dot{x}_0(t) = \xi_0 \sin(\Omega t + \phi), \quad (6.53)$$

on obtient de nouveau, après moyenne sur le temps, une équation d'évolution pour les  $\alpha_j$  qui est identique à celle d'un réseau statique :

$$i\hbar \dot{\alpha}_j = -\bar{J}^* \alpha_{j+1} - \bar{J} \alpha_{j-1} \quad (6.54)$$

avec un coefficient tunnel renormalisé complexe :

$$\bar{J} = J \langle e^{i[\xi_0 \sin(\Omega t + \phi) \in \Omega_0 t]} \rangle = J \mathcal{J}_1(\xi_0) e^{i\phi}. \quad (6.55)$$

On a donc réussi par cette procédure à « imprimer » la phase  $\phi$  de la modulation sur le coefficient tunnel  $\bar{J}$ , ce qui était le but recherché : si cette méthode peut se généraliser à 2D, on disposera d'un moyen pour simuler un champ magnétique non nul sur le réseau.

### 3-3 Le cas bi-dimensionnel.

Nous avons vu dans ce qui précède deux manières de rendre le coefficient tunnel complexe dans un problème uni-dimensionnel. Elles peuvent toutes les deux se généraliser à deux dimensions, mais conduisent à des résultats différents.

- La méthode de la modulation asymétrique de la figure 6.10 est généralisable par exemple à un réseau triangulaire<sup>8</sup> (Struck et al. 2013). En pratique, on choisit une modulation qui fait tourner chaque site du réseau sur une orbite fermée. Cette méthode conduit alors à un flux alterné, avec par exemple une phase positive pour les triangles « pointe en haut » et une phase négative pour les triangles « pointe en bas ».
- La méthode vue en § 3-2, combinant réseau tilté et modulation résonante, présente certaines difficultés à être transposée telle quelle [voir par exemple la proposition de Kolovsky (2011) et sa critique par Creffield & Sols (2013)]. Pour contourner ces difficultés, il vaut mieux abandonner l'idée d'une modulation globale du réseau, où tous les sites bougent de la même quantité  $r_0(t)$ , pour passer à une modulation locale, où chaque site  $j, l$  bouge de manière différente de ses voisins. C'est ce type de modulation que nous allons maintenant explorer (Aidelsburger et al. 2013; Miyake et al. 2013).

Partons d'un réseau « tilté » dans la direction horizontale, c'est-à-dire le réseau de base auquel on ajoute un potentiel linéaire constant qui déplace l'énergie du site  $(j, l)$  de la quantité  $j \hbar \Omega_0$  :

$$\hat{H}_0 = \sum_{j,l} j \hbar \Omega_0 |w_{j,l}\rangle \langle w_{j,l}| - J \sum_{j,l} (|w_{j+1,l}\rangle \langle w_{j,l}| + |w_{j,l+1}\rangle \langle w_{j,l}|) + \text{h.c.} \quad (6.56)$$

Nous allons supposer dans ce qui suit que  $\hbar \Omega_0 \gg J$ , ce qui signifie que l'effet tunnel le long de la direction  $x$  est pratiquement inhibé (les fonctions de Wannier–Stark coïncident avec les fonctions de Wannier), alors que l'effet tunnel selon  $y$  est inchangé.

Ajoutons à ce terme statique un potentiel dépendant du temps, qui vient moduler l'énergie de chaque site avec une pulsation  $\Omega$  :

$$\hat{V}(t) = \sum_{j,l} \hbar \Omega_1 \sin(\Omega t - \theta_{j,l}). \quad (6.57)$$

Nous allons utiliser cette modulation pour rétablir un effet tunnel résonnant ( $\Omega \sim \Omega_0$ ) dans la direction  $x$ , mais le coefficient tunnel correspondant

8. Elle ne fonctionne pas pour un réseau carré ou hexagonal, ou plus généralement pour un réseau dans lequel chaque plaquette possède des bords parallèles deux à deux, car les phases des deux coefficients tunnels correspondants s'annulent alors systématiquement.

va acquérir une phase qui sera relié à  $\theta_{j,l}$ . Notons qu'un tel potentiel peut être réalisé en superposant au réseau optique de base le potentiel dipolaire créé par une onde stationnaire composée elle-même de deux ondes lumineuses progressives de pulsation  $\omega_1$  et  $\omega_2 = \omega_1 + \Omega$  et de vecteurs d'ondes  $\mathbf{k}_1$  et  $\mathbf{k}_2$ . La phase  $\theta_{j,l}$  est alors linéaire en  $j$  et  $l$  :

$$\theta_{j,l} = (\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{r} \equiv \eta_x j + \eta_y l. \quad (6.58)$$

Considérons maintenant l'évolution du vecteur d'état

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{j,l} \alpha_{j,l}(t) |w_{j,l}\rangle \quad (6.59)$$

sous l'effet de l'hamiltonien total  $\hat{H}_0 + \hat{V}(t)$  :

$$i \dot{\alpha}_{j,l} = [j \Omega_0 + \Omega_1 \sin(\Omega t - \theta_{j,l})] \alpha_{j,l} - \frac{J}{\hbar} (\alpha_{j+1,l} + \alpha_{j \in 1,l} + \alpha_{j,l+1} + \alpha_{j,l \in 1}) \quad (6.60)$$

Cette équation contient des termes d'évolution rapide, avec les fréquences caractéristiques  $\Omega$  et  $\Omega_0$ , et des termes plus lents avec la fréquence caractéristique  $J/\hbar$ . Pour travailler avec des variables lentes, il est commode d'introduire

$$\tilde{\alpha}_{j,l}(t) = \alpha_{j,l}(t) \exp \left\{ i \left[ j \Omega_0 t - \frac{\Omega_1}{\Omega} \cos(\Omega t - \theta_{j,l}) \right] \right\}, \quad (6.61)$$

qui conduit à l'équation pour les variables tildées

$$i \dot{\tilde{\alpha}}_{j,l} = -\frac{J}{\hbar} \left[ F(j, l, t) \tilde{\alpha}_{j+1,l} + G(j, l, t) \tilde{\alpha}_{j,l+1} + \dots \right] \quad (6.62)$$

où les points de suspension correspondent aux transitions  $(j, l) \rightarrow (j-1, l)$  et  $(j, l) \rightarrow (j, l-1)$ .

Puisqu'on s'intéresse maintenant à des variables lentes, on peut moyenner les coefficients  $F(j, l, t)$  et  $G(j, l, t)$  sur une période de l'oscillation forcée  $2\pi/\Omega$  en se plaçant exactement à la condition de résonance  $\Omega = \Omega_0$ . On trouve :

$$\begin{aligned} \langle F(j, l, t) \rangle &= \left\langle \exp \left\{ i \left[ -\Omega_0 t + \frac{\Omega_1}{\Omega} (\cos(\Omega t - \theta_{j+1,l}) - \cos(\Omega t - \theta_{j,l})) \right] \right\} \right\rangle \\ &= \left\langle e^{i \Omega_0 t} \exp \left[ 2i \frac{\Omega_1}{\Omega} \sin((\theta_{j+1,l} - \theta_{j,l})/2) \sin(\Omega t - (\theta_{j,l} + \theta_{j+1,l})/2) \right] \right\rangle \\ &= \mathcal{J}_1 \left( \frac{2\Omega_1}{\Omega} \sin(\eta_x/2) \right) e^{i \theta_{j,l}} \end{aligned} \quad (6.63)$$

où on a utilisé  $\theta_{j+1,l} - \theta_{j,l} = \eta_x$  et  $(\theta_{j,l} + \theta_{j+1,l})/2 = \theta_{j,l} + \eta_x/2$  (la phase globale  $e^{i\eta_x/2}$  est ensuite omise). De même, on obtient

$$\langle G(j, l, t) \rangle = \mathcal{J}_0 \left( \frac{2\Omega_1}{\Omega} \sin(\eta_y/2) \right) \quad (6.64)$$

si bien que l'hamiltonien effectif après moyenne sur une période temporelle s'écrit :

$$\hat{H} = -J_x \sum_{j,l} (e^{i\theta_{j,l}} |w_{j+1,l}\rangle \langle w_{j,l}| + \text{h.c.}) - J_y \sum_{j,l} (|w_{j,l+1}\rangle \langle w_{j,l}| + \text{h.c.}) \quad (6.65)$$

avec

$$J_x = J \mathcal{J}_1 \left( \frac{2\Omega_1}{\Omega} \sin(\eta_x/2) \right), \quad J_y = J \mathcal{J}_0 \left( \frac{2\Omega_1}{\Omega} \sin(\eta_y/2) \right). \quad (6.66)$$

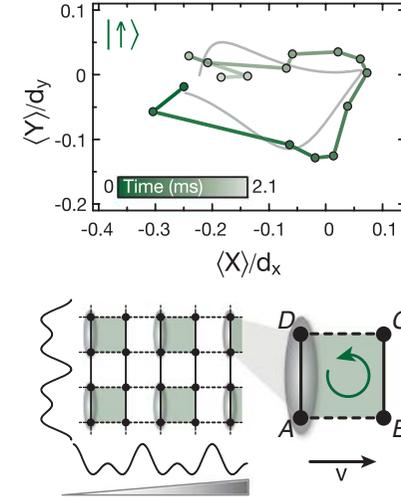
Pour vérifier que cet hamiltonien correspond bien à ce que l'on cherche, on calcule finalement le flux sur une plaquette :

$$\begin{aligned} \frac{q}{h} \Phi_{j,l} &= \phi(j, l \rightarrow j+1, l) + \phi(j+1, l \rightarrow j+1, l+1) \\ &+ \phi(j+1, l+1 \rightarrow j, l+1) + \phi(j, l+1 \rightarrow j, l) \\ &= -\theta_{j,l} + \theta_{j,l+1} \\ &= \eta_y. \end{aligned} \quad (6.67)$$

On constate donc qu'il faut prendre à la fois  $\eta_y \neq 0$  pour que ce flux soit lui-même non nul, et  $\eta_x \neq 0$  pour le coefficient tunnel  $J_x$  soit non nul.

### 3-4 Exemple d'expériences avec un réseau secoué

Plusieurs expériences ont récemment montré la validité du principe permettant de générer un champ artificiel à partir d'un réseau secoué (Aidelsburger et al. 2013; Miyake et al. 2013; Struck et al. 2013). Nous montrons sur la figure 6.11 les résultats du groupe de Munich, obtenus en isolant à l'aide d'un super réseau des plaquettes de  $2 \times 2$  sites dans le plan  $xy$ . La présence du champ magnétique artificiel est révélée par le mouvement cyclotron des atomes dans ces plaquettes, avec la chiralité attendue. Ces expériences ont ensuite été étendues au cas où les plaquettes sont connectées

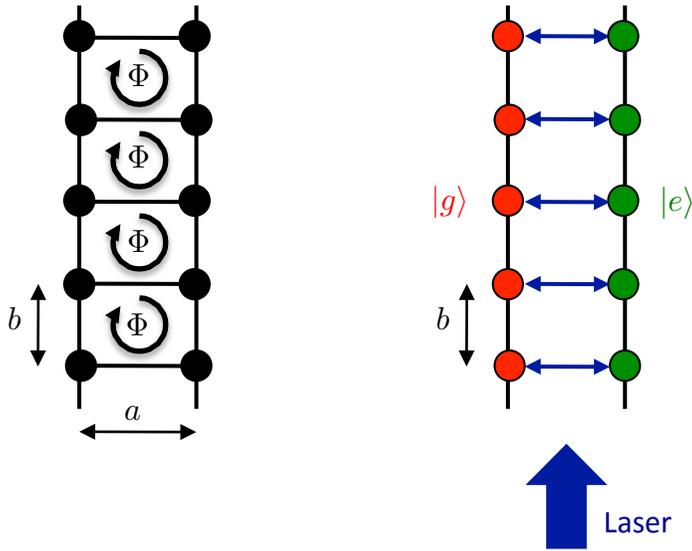


**FIGURE 6.11.** Trajectoires cyclotron obtenues dans un réseau secoué par Aidelsburger et al. (2013). La ligne grise représente un fit du résultat attendu théoriquement, obtenu à partir d'une résolution de l'équation de Schrödinger pour une plaquette. Chaque plaquette comprend  $2 \times 2$  sites, et est obtenue grâce à deux super-réseaux dans les directions  $x$  et  $y$ .

entre elles selon une des deux directions de l'espace, réalisant alors une échelle. Dans cette géométrie d'échelle, les chercheurs de Munich ont mis en évidence un analogue de l'effet Meissner (Atala et al. 2014).

## 4 Réseaux combinant différents états internes

Le fait d'utiliser plusieurs états internes dans un réseau optique vient donner un degré de liberté très appréciable pour « imprimer » une phase lors du passage d'un site à l'autre du réseau. Le processus en jeu dans ce cas est l'effet tunnel assisté par laser, que nous allons présenter tout d'abord sur un système simple, uni-dimensionnel, avant de passer ensuite au cas d'un réseau infini à deux dimensions.



**FIGURE 6.12.** Gauche : échelle infinie de sites composée de deux montants séparés par une distance  $a$ . Les barreaux de l'échelle sont équidistants (écart  $b$ ). Une particule chargée peut sauter d'un site à l'autre par effet tunnel. Un champ magnétique uniforme perpendiculaire à l'échelle induit un flux  $\Phi$  par plaquette. Droite : simulation de cette échelle avec un double réseau optique, piégeant un atome dans un des deux états internes  $|g\rangle$  et  $|e\rangle$ . Un faisceau laser se propageant selon la direction du réseau induit une transition  $|g\rangle \leftrightarrow |e\rangle$ , analogue à l'effet tunnel le long des barreaux de l'échelle de gauche. La phase du laser  $\phi = ky$  varie linéairement avec l'indice  $j$  des barreaux et « s'imprime » sur l'élément de matrice correspondant, ce qui permet de simuler un flux magnétique.

#### 4-1 L'effet tunnel assisté par laser sur une échelle

Il s'agit de simuler une géométrie de sites situés sur une échelle à deux montants, représentée sur la figure 6.12. Cette échelle est plongée dans un champ magnétique et nous supposons qu'elle est bien décrite dans le cadre de l'approximation des liaisons fortes. Le champ magnétique est comme précédemment caractérisé par le flux  $\Phi$  à travers chaque plaquette.

Pour cette simulation, nous allons utiliser un atome à deux états internes, notés  $|g\rangle$  et  $|e\rangle$ . Un potentiel de piégeage, de type réseau optique le long de la direction  $y$ , permet de localiser les atomes sur les montants de l'échelle. Ce potentiel est choisi différent pour  $|g\rangle$  et pour  $|e\rangle$ , ce qui permet de localiser chacun de ces deux états sur un montant différent ( $|g\rangle$  à gauche,  $|e\rangle$  à droite).

Nous supposons ces deux états internes stables (pas d'émission spontanée) et nous considérons une transition laser qui permet de provoquer une transition résonante entre eux. En pratique, si on considère des atomes « à deux électrons externes », comme l'Ytterbium, ces deux états correspondront respectivement à l'état fondamental ( $^1S_0$ ) et à l'état excité de très longue durée de vie ( $^3P_0$ ). Pour des atomes alcalins, on utilisera pour  $|g\rangle$  et  $|e\rangle$  deux sous-niveaux issus de l'état fondamental et la transition couplant ces deux états sera une transition Raman, impliquant un processus d'absorption et un processus d'émission stimulée.

Plaçons-nous dans un modèle à une bande et notons  $|w_j^g\rangle$  et  $|w_j^e\rangle$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ , les états spatiaux pour les deux niveaux internes. Pour simplifier, nous supposons les fonctions d'onde correspondantes identiques, à une translation près :

$$w_j^g(\mathbf{r}) = w_0(x, y - jb), \quad w_j^e(\mathbf{r}) = w_0(x - a, y - jb). \quad (6.68)$$

En absence de laser, on est donc en présence de deux réseaux optiques 1D découplés, avec l'hamiltonien écrit dans l'approximation des liaisons fortes

$$\hat{H} = \hat{H}_g + \hat{H}_e, \quad \hat{H}_\alpha = -J_y \sum_{j \in \mathbb{Z}} |w_{j+1}^\alpha\rangle \langle w_j^\alpha| + \text{h.c.}, \quad \alpha = g, e. \quad (6.69)$$

Pour coupler ces deux réseaux, considérons un faisceau laser résonnant avec la transition  $|g\rangle \leftrightarrow |e\rangle$ , avec un vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  parallèle à l'axe  $y$  des

réseaux. Le couplage atome-laser s'écrit

$$\hat{V} = \frac{\hbar\kappa}{2} e^{iky} |e\rangle\langle g| + \text{h.c.} \quad (6.70)$$

Réécrivons ce couplage à l'aide des  $|w_j^\alpha\rangle$ ; compte tenu de la restriction à une seule bande, on a la relation de fermeture pour les espaces de Hilbert interne et externe

$$\hat{1} = |g\rangle\langle g| \otimes \left( \sum_j |w_j^g\rangle\langle w_j^g| \right) + |e\rangle\langle e| \otimes \left( \sum_j |w_j^e\rangle\langle w_j^e| \right). \quad (6.71)$$

En insérant cette relation de fermeture à gauche et à droite de  $\hat{V}$ , on obtient

$$\hat{V} = \sum_{j,j'} \mathcal{V}_{j,j'} |e, w_j\rangle\langle g, w_{j'}| + \text{h.c.} \quad (6.72)$$

avec

$$\mathcal{V}_{j,j'} = \frac{\hbar\kappa}{2} \int w_j^e(\mathbf{r}) e^{iky} w_{j'}^g(\mathbf{r}) d^2r. \quad (6.73)$$

Puisque nous nous sommes placés dans l'approximation des liaisons fortes, les fonctions d'onde  $w_j^e(\mathbf{r})$  et  $w_{j'}^g(\mathbf{r})$  sont bien localisées et on peut considérer que leur recouvrement est négligeable dès que l'on prend  $j \neq j'$ . On peut alors simplifier le coefficient  $\mathcal{V}_{j,j'}$

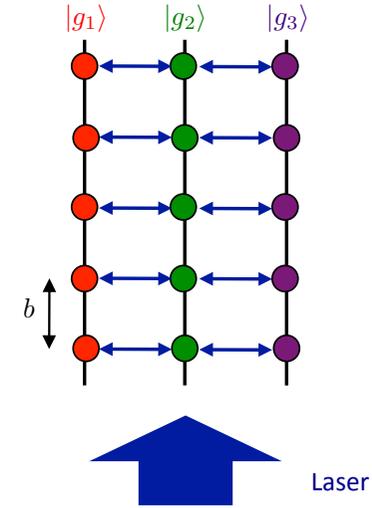
$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{j,j'} &\approx \delta_{j,j'} \frac{\hbar\kappa}{2} \int w_0(x-a, y-jb) e^{iky} w_0(x, y-jb) d^2r \\ &\approx \delta_{j,j'} J_x e^{ijkb}, \end{aligned} \quad (6.74)$$

où le coefficient tunnel  $J_x$  est proportionnel à la fréquence de Rabi et au recouvrement des fonctions de Wannier pour les états internes  $|g\rangle$  et  $|e\rangle$  :

$$J_x = \frac{\hbar\kappa}{2} \int w_0(x-a, y) e^{iky} w_0(x, y) d^2r. \quad (6.75)$$

Pour une fonction  $w_0(x, y)$  invariante par réflexion  $y \rightarrow -y$ , ce coefficient  $J_x$  est réel :

$$J_x = \frac{\hbar\kappa}{2} \int w_0(x-a, y) \cos(ky) w_0(x, y) d^2r. \quad (6.76)$$



**FIGURE 6.13.** Simulation d'une double échelle avec un atome à trois niveaux internes (Celi et al. 2014). Ce schéma de niveau peut donner naissance à un spectre voisin du papillon de Hofstadter et à des états de bords correspondant à des courants opposés dans les états  $|g_1\rangle$  et  $|g_3\rangle$ .

L'expression (6.74) correspond à ce que l'on cherche : on a un coefficient tunnel complexe dont la phase croît linéairement avec l'indice  $j$  de sorte que la phase totale accumulée sur le pourtour d'une plaquette est non nulle :

$$|g, j\rangle \xrightarrow{J_y} |g, j+1\rangle \xrightarrow{J_x e^{i(j+1)kb}} |e, j+1\rangle \xrightarrow{J_y} |e, j\rangle \xrightarrow{J_x e^{-i jkb}} |g, j\rangle \quad (6.77)$$

soit une phase

$$(j+1)kb - jkb = kb \quad (6.78)$$

qui est la même pour toutes les plaquettes : on simule ainsi une échelle à deux sites avec un champ magnétique uniforme tout le long de l'échelle.

**Réseau de dimension artificielle.** On peut remarquer que dans la simulation de l'échelle qui précède, rien n'impose à la longueur  $a$  d'être non

nulle. L'échelle peut avoir une double nature, réelle dans l'espace selon la direction  $y$  et fictive (n'impliquant que les degrés de liberté internes) selon la direction  $x$ . La nécessité d'avoir une longueur  $a$  non nulle ne viendra que plus loin, lorsqu'on cherchera à augmenter le nombre de sites dans la direction  $x$ . Partant de cette remarque, Celi et al. (2014) ont proposé d'étendre le traitement précédent à un atome à  $N$  états internes,  $|g_n\rangle$ ,  $n = 1, \dots, N$  en choisissant un couplage atome lumière qui induit les transitions

$$|g_n, j\rangle \xrightarrow{J_x e^{i j k b}} |g_{n+1}, j\rangle. \quad (6.79)$$

Ceci permet de simuler une échelle dont les barreaux sont situés dans l'espace réel et les  $N$  montants sont associés aux  $N$  états internes. Pour une implémentation pratique de ce dispositif, on peut prendre par exemple  $N = 3$  et prendre pour les  $|g_n\rangle$  les trois états Zeeman  $m = 0, \pm 1$  d'un niveau fondamental atomique de moment cinétique 1 (figure 6.13).

## 4-2 Passage à un réseau bi-dimensionnel

Nous allons maintenant chercher à étendre le schéma de l'échelle considérée ci-dessus à un réseau bi-dimensionnel. Dans ce cas, la longueur  $a$  est bien réelle et on considère une série de réseaux 1D correspondant alternativement à l'état interne  $|g\rangle$  et à l'état interne  $|e\rangle$ . On reconstitue ainsi un réseau à deux dimensions dont les sites  $(j, l)$  sont par convention occupés par un atome dans l'état  $|g\rangle$  (resp.  $|e\rangle$ ) si l'indice  $j$  du site est pair (resp. impair).

En analysant précisément les phases correspondant à l'effet tunnel assisté par laser, on constate que ce réseau correspond en fait à un flux alterné. Alors qu'un flux uniforme est obtenu en prenant de manière systématique

$$|j, l\rangle \xrightarrow{e^{i l k b}} |j + 1, l\rangle \quad (6.80)$$

on a ici (cf. figure 6.14)

$$|j, l\rangle \xrightarrow{e^{i l k b}} |j + 1, l\rangle \quad \text{si } j \text{ pair} \quad (6.81)$$

car cela correspond à une transition  $|g\rangle \rightarrow |e\rangle$  (similaire à ce qu'on a vu ci-dessus) et

$$|j, l\rangle \xrightarrow{e^{-i l k b}} |j + 1, l\rangle \quad \text{si } j \text{ impair} \quad (6.82)$$

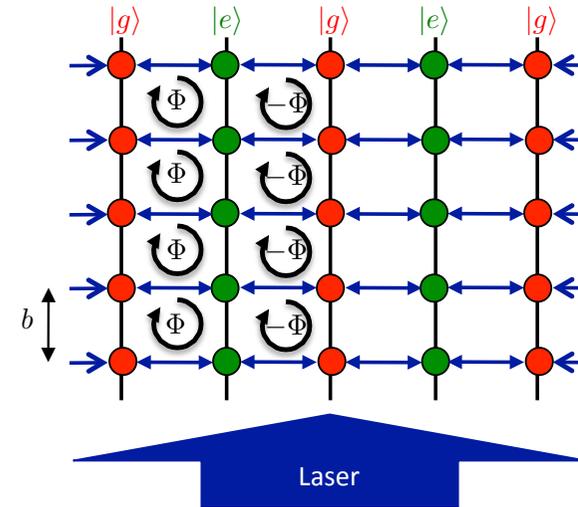


FIGURE 6.14. Réalisation d'un réseau carré à flux alterné : on utilise un seul faisceau lumineux pour générer l'effet tunnel assisté par laser.

correspondant à une transition  $|e\rangle \rightarrow |g\rangle$ . La somme de la phase accumulée quand on parcourt une plaquette a donc un signe qui alterne d'une colonne à l'autre.

Ce réseau à flux alterné présente des propriétés intéressantes quand on prend en compte les interactions (Möller & Cooper 2010), mais il ne correspond pas à ce que la simulation du magnétisme homogène recherchée. Il reste à « rectifier » le champ magnétique pour obtenir un flux de même signe sur chaque plaquette.

## 4-3 Rectification du flux

Plusieurs techniques ont été proposées pour passer du flux magnétique alterné de la figure 6.14 à un flux homogène. La proposition initiale de Jaksch & Zoller (2003) faisait appel à l'application d'un potentiel supplémentaire linéaire pour lever la dégénérescence entre les différentes transitions  $|e\rangle \rightarrow |g\rangle$  possibles. Une version légèrement différente, mieux ap-

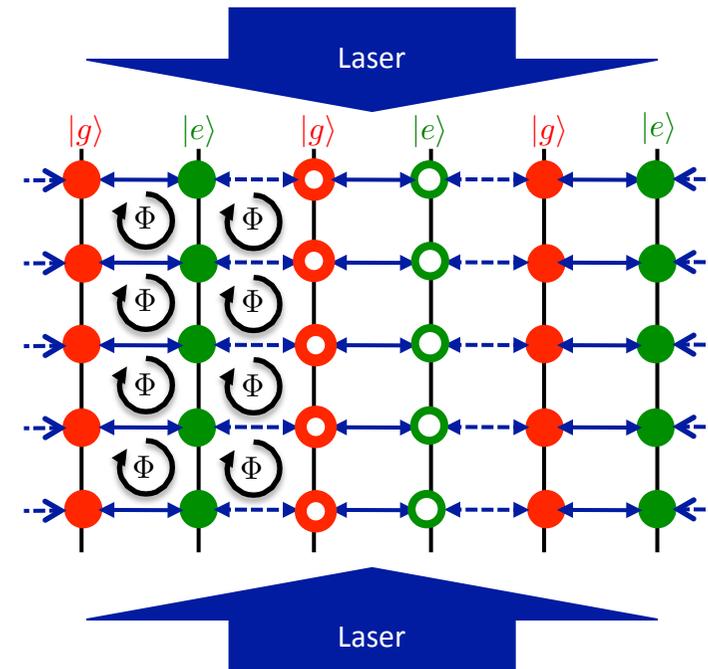
propriété aux atomes alcalino-terreux qui sont les plus prometteurs pour ce type d'étude, a été proposée par Gerbier & Dalibard (2010). Son principe est esquissé sur la figure 6.15. Grâce à un super-réseau optique selon la direction  $x$ , de période double de celle du réseau principal, on module l'énergie des états internes  $|g\rangle$  et  $|e\rangle$  entre deux valeurs, correspondant aux disques pleins et aux disques creux de la figure 6.15. Les différentes transitions  $|e\rangle \rightarrow |g\rangle$  sont assurées par des faisceaux lumineux se propageant selon  $+u_y$  ou  $-u_y$  et de fréquence bien choisie, pour assurer que la phase accumulée autour de chaque plaquette reste partout la même.

## 5 Remarques finales

### Est-ce utile de mettre en jeu plusieurs états internes ?

Nous avons exploré dans cette section deux approches possibles pour réaliser un hamiltonien de type Hofstadter. La première n'utilise pas de transitions entre états internes atomiques et consiste à moduler dans le temps certains paramètres du réseau ; la phase de cette modulation va être transférée aux atomes et jouer le rôle de phase Aharonov-Bohm. La seconde approche utilise des transitions entre états internes induites par des faisceaux auxiliaires. Quand un atome absorbe un de ces photons auxiliaires, la phase du faisceau s'imprime sur la fonction d'onde atomique, ce qui génère l'effet recherché.

Comparons maintenant les avantages et inconvénients de ces deux méthodes. La première approche ne fait pas appel à des faisceaux lumineux proches de résonance et évite donc en principe tout problème de chauffage lié au phénomène d'émission spontanée de photons. En revanche, elle impose des contraintes assez fortes sur l'amplitude des coefficients tunnel réalisables. Pour chiffrer ces contraintes, introduisons le gap  $\Delta$  entre la bande fondamentale avec laquelle on souhaite travailler et la première bande excitée. Toute notre analyse a été fondée sur un calcul mono-bande et elle n'est donc valable que si le taux de transfert vers la bande excitée est négligeable. Pour cela, il faut que le décalage en énergie  $\hbar\Omega_0$  entre les deux fonctions de Wannier localisées sur deux sites adjacents soit petit devant le



**FIGURE 6.15.** Simulation d'un flux uniforme avec des atomes à deux états internes  $|g\rangle$  et  $|e\rangle$  piégés dans un réseau optique. Un super-réseau dans la direction  $x$  module l'énergie des états  $|g\rangle$  entre deux valeurs, représentées par des disques rouges alternativement pleins et creux. Il en va de même pour les états  $|e\rangle$ . On génère ainsi 4 fréquences de transitions différentes pour  $|e\rangle \rightarrow |g\rangle$ . Deux de ces transitions, marquées par une double flèche en trait plein, sont induites par le faisceau lumineux venant du bas ; les deux autres, marquées par une double flèche en trait pointillé, sont induites par le faisceau lumineux venant du haut. De la sorte, le signe de la phase accumulée sur chaque plaquette est constant, ce qui correspond au flux uniforme recherché.

gap entre les deux bandes :

$$\hbar\Omega_0 \ll \Delta. \quad (6.83)$$

Nous avons vu que pour induire de manière efficace un effet tunnel entre sites adjacents, il fallait choisir la fréquence de modulation  $\Omega$  voisine de  $\Omega_0$ . Cette fréquence  $\Omega$  caractérise la partie rapide de l'évolution de la fonction d'onde et l'effet tunnel renormalisé

$$\bar{J} = J \mathcal{J}_1(\xi) e^{i\phi} \quad (6.84)$$

caractérise quant à lui la partie lente de cette évolution. Au final, on arrive donc à la hiérarchie d'inégalités

$$|\bar{J}| \leq J \ll \Omega \approx \Omega_0 \ll \Delta. \quad (6.85)$$

Le désaccord  $\Delta$  ne peut pas être pris très grand devant l'énergie de recul, sinon l'effet tunnel  $J$  devient négligeable. L'ordre de grandeur des coefficients tunnel  $\bar{J}$  que l'on peut réaliser par cette méthode est donc par construction faible.

Pour des atomes alcalino-terreux, l'utilisation d'états internes peut se faire sans risque de chauffage par émission spontanée, car la durée de vie de l'état excité  $|e\rangle$  est très grande devant toute durée réaliste d'une expérience. La contrainte principale est donc de ne pas peupler une bande excitée dans la transition  $|g\rangle \rightarrow |e\rangle$ , ce qui impose de prendre une fréquence de Rabi  $\kappa$  petite devant  $\Delta/\hbar$ . Le coefficient tunnel obtenu est alors de l'ordre de  $\hbar\kappa$ , avec un coefficient de réduction qui fait intervenir le recouvrement entre les fonctions de Wannier pour  $|g\rangle$  et  $|e\rangle$ . On arrive donc à la série d'inégalités :

$$\bar{J} \leq \hbar\kappa \ll \Delta. \quad (6.86)$$

Cette série est moins contraignante que (6.85) et on peut donc s'attendre à des coefficients tunnels potentiellement plus grands pour cette approche qui tire profit de plusieurs états internes.

Notons pour terminer que nous n'avons pas pris en compte ici les effets à plusieurs particules ; ces derniers peuvent conduire à des effets notablement différents, selon que tous les atomes sont dans le même état interne ou que plusieurs états sont occupés, avec la possibilité d'avoir des collisions inélastiques entre atomes.

## Tableau récapitulatif

Nous avons exploré au cours des trois derniers cours un certain nombre de méthodes pour simuler un magnétisme orbital ou un couplage spin-orbite avec des atomes neutres. Comme nous l'avons annoncé initialement, ces méthodes peuvent être classées selon au moins deux critères : (i) utilise-t-on ou non plusieurs états internes ? (ii) l'hamiltonien est-il ou non dépendant du temps ? Nous avons résumé ces différentes approches dans le tableau 6.16. Chaque case de ce tableau a été illustrée, parfois de plusieurs manières, dans ces cours<sup>9</sup>. Selon les espèces atomiques considérées et les phénomènes recherchés, on pourra privilégier l'une ou l'autre de ces approches, aucune ne s'étant encore imposée comme une stratégie universelle pour étudier l'ensemble des phénomènes liés au magnétisme orbital.

	Hamiltoniens indépendant du temps	Hamiltoniens dépendant du temps pulsation $\Omega$
Pas d'utilisation d'états internes	Rotation à moment cinétique conservé	$\Omega \sim \omega_c$ : rotation forcée avec agitateur tournant $\Omega \gg \omega_c$ : réseaux secoués
Utilisation d'états internes	Phase de Berry Réseaux de flux Effet tunnel assisté par laser Couplage spin-orbite	Couplage spin-orbite

**FIGURE 6.16.** Classification des procédures pour générer du magnétisme orbital artificiel (pulsation cyclotron  $\omega_c$ ) ou un couplage spin-orbite.

<sup>9</sup>. à l'exception de la case en bas à droite. Pour cette dernière, on pourra consulter par exemple Xu et al. (2013); Anderson et al. (2013); Goldman & Dalibard (2014).

## Références

- Aidelsburger, M., M. Atala, M. Lohse, J. T. Barreiro, B. Paredes & I. Bloch (2013), « Realization of the Hofstadter Hamiltonian with Ultracold Atoms in Optical Lattices », in *Phys. Rev. Lett.* 111 (18), p. 185301.
- Albrecht, C., J. H. Smet, K. von Klitzing, D. Weiss, V. Umansky & H. Schweizer (2001), « Evidence of Hofstadter's Fractal Energy Spectrum in the Quantized Hall Conductance », in *Phys. Rev. Lett.* 86 (1), pp. 147–150.
- Anderson, B. M., I. B. Spielman & G. Juzeliunas (2013), « Magnetically Generated Spin-Orbit Coupling for Ultracold Atoms », in *Phys. Rev. Lett.* 111 (12), p. 125301.
- Atala, M., M. Aidelsburger, M. Lohse, J. T. Barreiro, B. Paredes & I. Bloch (2014), « Observation of the Meissner effect with ultracold atoms in bosonic ladders », arXiv :1402.0819.
- Celi, A., P. Massignan, J. Ruseckas, N. Goldman, I. B. Spielman, G. Juzeliunas & M. Lewenstein (2014), « Synthetic Gauge Fields in Synthetic Dimensions », in *Phys. Rev. Lett.* 112, p. 043001.
- Creffield, C. E. & F. Sols (2013), « Comment on "Creating artificial magnetic fields for cold atoms by photon-assisted tunneling" », in *EPL* 101, p. 40001.
- Dauphin, Alexandre & Nathan Goldman (2013), « Extracting the Chern Number from the Dynamics of a Fermi Gas : Implementing a Quantum Hall Bar for Cold Atoms », in *Phys. Rev. Lett.* 111 (13), p. 135302.
- Dean, C. R., L. Wang, et al. (2013), « Hofstadter's butterfly and the fractal quantum Hall effect in moiré superlattices », in *Nature* 497, p. 598.
- Gerbier, Fabrice & Jean Dalibard (2010), « Gauge fields for ultracold atoms in optical superlattices », in *New Journal of Physics* 12.3, p. 033007.
- Goldman, N. & J. Dalibard (2014), « Periodically-driven quantum systems : Effective Hamiltonians and engineered gauge fields », arXiv :1404.4373.
- Hemmerich, A. & C. Morais Smith (2007), « Excitation of a d-Density Wave in an Optical Lattice with Driven Tunneling », in *Phys. Rev. Lett.* 99 (11), p. 113002.
- Hofstadter, D. R. (1976), « Energy levels and wave functions of Bloch electrons in rational and irrational magnetic fields », in *Phys. Rev. B* 14.6, pp. 2239–2249.
- Jaksch, D. & P. Zoller (2003), « Creation of effective magnetic fields in optical lattices : the Hofstadter butterfly for cold neutral atoms », in *New Journal of Physics* 5, p. 56.1.
- Kitagawa, Takuya, Erez Berg, Mark Rudner & Eugene Demler (2010), « Topological characterization of periodically driven quantum systems », in *Phys. Rev. B* 82 (23), p. 235114.
- Kohmoto, Mahito (1989), « Zero modes and the quantized Hall conductance of the two-dimensional lattice in a magnetic field », in *Phys. Rev. B* 39 (16), pp. 11943–11949.
- Kolovsky, A. R. (2011), « Creating artificial magnetic fields for cold atoms by photon-assisted tunneling », in *EPL* 93, p. 20003.
- Lignier, H., C. Sias, D. Ciampini, Y. Singh, A. Zenesini, O. Morsch & E. Arimondo (2007), « Dynamical Control of Matter-Wave Tunneling in Periodic Potentials », in *Phys. Rev. Lett.* 99 (22), p. 220403.
- Lim, Lih-King, C. Morais Smith & Andreas Hemmerich (2008), « Staggered-Vortex Superfluid of Ultracold Bosons in an Optical Lattice », in *Phys. Rev. Lett.* 100 (13), p. 130402.
- Luttinger, J. M. (1951), « The Effect of a Magnetic Field on Electrons in a Periodic Potential », in *Phys. Rev.* 84.4, pp. 814–817.
- Miyake, Hirokazu, Georgios A. Siviloglou, Colin J. Kennedy, William Cody Burton & Wolfgang Ketterle (2013), « Realizing the Harper Hamiltonian with Laser-Assisted Tunneling in Optical Lattices », in *Phys. Rev. Lett.* 111 (18), p. 185302.
- Möller, G. & N. R. Cooper (2010), « Condensed ground states of frustrated Bose-Hubbard models », in *Phys. Rev. A* 82 (6), p. 063625.
- Nenciu, G. (1991), « Dynamics of band electrons in electric and magnetic fields : rigorous justification of the effective Hamiltonians », in *Rev. Mod. Phys.* 63.1, p. 91.
- Pannetier, B., J. Chaussy, R. Rammal & J. C. Villegier (1984), « Experimental Fine Tuning of Frustration : Two-Dimensional Superconducting Network in a Magnetic Field », in *Phys. Rev. Lett.* 53 (19), pp. 1845–1848.
- Price, H. M. & N. R. Cooper (2012), « Mapping the Berry curvature from semiclassical dynamics in optical lattices », in *Phys. Rev. A* 85 (3), p. 033620.
- Sørensen, A. S., E. Demler & M. D. Lukin (2005), « Fractional Quantum Hall States of Atoms in Optical Lattices », in *Phys. Rev. Lett.* 94, p. 086803.
- Struck, J., C. Ölschläger, M. Weinberg, P. Hauke, J. Simonet, A. Eckardt, M. Lewenstein, K. Sengstock & P. Windpassinger (2012), « Tunable Gauge

- Potential for Neutral and Spinless Particles in Driven Optical Lattices », in *Phys. Rev. Lett.* 108 (22), p. 225304.
- Struck, J., M. Weinberg, et al. (2013), « Engineering Ising-XY spin-models in a triangular lattice using tunable artificial gauge fields », in *Nature Physics* 9, p. 738.
- Thouless, D. J., M. Kohmoto, M. P. Nightingale & M. den Nijs (1982), « Quantized Hall Conductance in a Two-Dimensional Periodic Potential », in *Phys. Rev. Lett.* 49.6, pp. 405–408.
- Tung, S., V. Schweikhard & E. A. Cornell (2006), « Observation of Vortex Pinning in Bose-Einstein Condensates », in *Phys. Rev. Lett.* 97 (24), p. 240402.
- Xiao, Di, Ming-Che Chang & Qian Niu (2010), « Berry phase effects on electronic properties », in *Rev. Mod. Phys.* 82 (3), pp. 1959–2007.
- Xu, Zhi-Fang, Li You & Masahito Ueda (2013), « Atomic spin-orbit coupling synthesized with magnetic-field-gradient pulses », in *Phys. Rev. A* 87 (6), p. 063634.

# Chapitre 7

## Magnétisme artificiel et interactions : condensats en rotation

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Interactions dans un gaz froid . . . . .</b>	<b>2</b>
1-1	Interaction de contact . . . . .	2
1-2	Approximation de champ moyen . . . . .	4
1-3	Passage à deux dimensions . . . . .	5
1-4	Régime de Thomas-Fermi à 2D . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Vortex dans un condensat . . . . .</b>	<b>7</b>
2-1	L'apparition du premier vortex . . . . .	7
2-2	L'argument de Feynman . . . . .	9
2-3	La forme d'équilibre du condensat . . . . .	11
2-4	Observations expérimentales . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Rotation et niveau de Landau fondamental . . . . .</b>	<b>12</b>
3-1	Rappel : niveaux de Landau en jauge symétrique	13
3-2	Fonctions du LLL et vortex . . . . .	14
3-3	Expériences dans le LLL . . . . .	15
<b>4</b>	<b>Au delà du champ moyen . . . . .</b>	<b>16</b>
4-1	État fondamental à $N$ particules dans le LLL . . .	17
4-2	Quelques états remarquables . . . . .	17
4-3	Schémas de détection envisageables . . . . .	18

---

Nous allons dans ce dernier chapitre nous intéresser à l'effet combiné d'un champ magnétique artificiel et des interactions. Il s'agit d'un sujet extrêmement vaste qui donne naissance à de nombreux phénomènes en physique de la matière condensée, autant à partir du magnétisme de spin que du magnétisme orbital : ferro et antiferromagnétisme, effet Hall quantique, supraconductivité et effet Meissner, spintronique, isolants et supraconducteurs topologiques, etc. Nous n'allons aborder ici qu'une très faible partie de ce vaste domaine en nous concentrant sur le comportement d'un superfluide en présence d'un champ magnétique uniforme.

Le système que nous allons considérer est un condensat de bosons en interaction répulsive. Nous partirons de l'équivalence

$$\text{Magnétisme orbital} \longleftrightarrow \text{Rotations}$$

pour étudier le comportement d'un gaz de Bose placé dans un piège harmonique tournant. Ce système en apparence très simple va nous permettre d'introduire une série de notions importantes : approximation de champ moyen, fréquence critique pour la nucléation d'un vortex, réseau d'Abrikosov, passage vers des états fortement corrélés. Des phénomènes similaires à ceux que nous allons décrire ici sont attendus également pour des gaz de fermions en interaction, si ces gaz sont suffisamment froids pour être décrit par une fonction d'onde macroscopique.

Nous nous intéresserons ici au cas d'une interaction répulsive entre atomes, qui représente le cas le plus intéressant sur le plan pratique. Nous nous limiterons à une interaction de contact, et nous renvoyons le lecteur vers l'article de revue de Cooper (2008) pour une description des phé-

nomènes susceptibles d'apparaître pour une interaction à longue portée comme l'interaction dipole-dipole.

Nous allons commencer ce chapitre par une brève présentation de la description des interactions présentes dans un gaz d'atomes froids, pour passer ensuite à la description d'un condensat en régime de champ moyen. Nous verrons comment la notion de niveau de Landau fondamental apparaît naturellement dans ce contexte, et nous terminerons par la description de la transition vers des états fortement corrélés, qui n'a pas encore été observée expérimentalement pour ces gaz d'atomes froids. Nous allons faire toute cette présentation pour un gaz à deux dimensions, ce qui permet de simplifier quelque peu le traitement mathématique tout en conservant les phénomènes essentiels. On trouvera dans les articles de revue de Bloch et al. (2008); Cooper (2008); Fetter (2009) de nombreuses références aux phénomènes qui seront évoqués ici.

## 1 Interactions dans un gaz froid

### 1-1 Interaction de contact

Nous nous limiterons dans tout ce qui suit à un gaz de particules interagissant via un potentiel à courte portée. Plus précisément, pour deux atomes séparés par une distance  $r$ , le potentiel d'interaction comporte (cf. figure 7.1) :

- une partie attractive due aux forces de van der Waals

$$U_{\text{vdW}}(r) = \frac{C_6}{r^6} \quad (7.1)$$

qui est dominant quand  $r$  est suffisamment grand pour que le passage par effet tunnel d'un électron d'un atome à l'autre soit négligeable (typiquement  $r > 8 \text{ \AA}$ ),

- une partie intermédiaire attractive ou répulsive correspondant à la liaison covalente (saut de l'électron d'un atome à l'autre), donnant naissance aux potentiels singulet et triplet.
- une partie répulsive à très courte distance ( $r < 4 \text{ \AA}$ ) due à la répulsion électrostatique des cœurs électroniques.

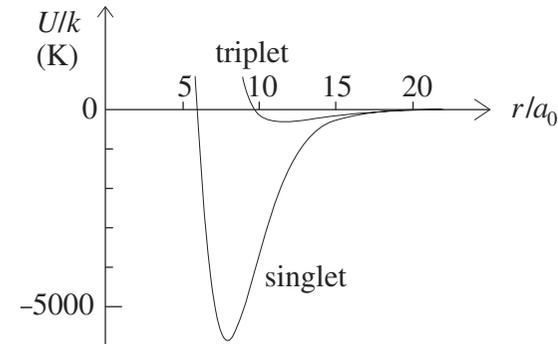


FIGURE 7.1. Représentation simplifiée du potentiel d'interaction entre deux atomes de rubidium séparés par la distance  $r$ . L'unité de longueur est le rayon de Bohr  $a_0 = 0.53 \text{ \AA}$  (figure extraite de Pethick & Smith (2002)).

À très basse énergie, l'amplitude de diffusion caractérisant la collision entre deux atomes de vecteur d'onde relatif  $k$  est isotrope et quasiment indépendante de l'énergie (collision dans l'onde  $s$ ). La collision se décrit par un seul nombre, la longueur de diffusion  $a$ , dont on déduit les différentes quantités pertinentes. Par exemple, pour un gaz de bosons tous préparés dans le même état interne, la section efficace de collision vaut  $\sigma = 8\pi a^2$ .

Puisque seule compte la longueur de diffusion pour décrire les interactions dans un gaz d'atomes froids, il est inutile de connaître la forme exacte du potentiel représenté sur la figure 7.1. Tout autre potentiel à courte portée conduisant à la même longueur de diffusion donnera naissance à la même physique. On utilise donc traditionnellement une forme mathématique très simple, une interaction de contact, pour modéliser le potentiel réel à trois dimensions :

$$U^{(3D)}(\mathbf{r}) = \frac{4\pi\hbar^2 a}{M} \delta^{(3D)}(\mathbf{r}), \quad (7.2)$$

**Remarque : le pseudo-potentiel.** En dehors du cas uni-dimensionnel, un potentiel proportionnel à la distribution de Dirac présente des singularités qui peuvent conduire à des difficultés mathématiques. Une version légèrement plus compliquée de l'interaction de contact à trois dimensions

permet d'éviter ces difficultés ; il s'agit du pseudo-potentiel (Huang 1987) défini par son action sur une fonction  $\psi(\mathbf{r})$  :

$$U^{(3D)}(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) = \frac{4\pi\hbar^2 a}{M} \delta(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial r} (r\psi(\mathbf{r})). \quad (7.3)$$

En pratique, nous n'aurons pas à recourir à ce pseudo-potentiel pour le traitement de champ moyen qui va suivre.

**Qu'est-ce qu'un gaz froid pour les collisions ?** Nous avons mentionné que la section efficace devenait isotrope pour une énergie de collision suffisamment basse. Donnons un critère précis pour cette approximation. Quand on fait un développement en ondes partielles pour traiter la collision entre particules, on voit apparaître pour chaque onde partielle de moment cinétique  $\ell$  la barrière centrifuge

$$U_{\text{centrif.}}^{(\ell)}(r) = \frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2m_r r^2}, \quad (7.4)$$

où  $m_r = M/2$  est la masse réduite de la paire d'atomes. Pour les collisions en onde  $s$ , cette barrière est nulle. En revanche, dès que l'on considère  $\ell \neq 0$ , cette barrière vient empêcher les atomes de s'approcher l'un de l'autre et elle a donc un effet opposé au potentiel attractif de van der Waals.

Regardons la somme de ces potentiels pour l'onde partielle<sup>1</sup>  $\ell = 2$  (cf. figure 7.2) :

$$U_{\text{tot}}^{(\ell=2)}(r) = U_{\text{vdW}}(r) + U_{\text{centrif.}}^{(\ell=2)}(r) = \frac{C_6}{r^6} + \frac{3\hbar^2}{m_r r^2}. \quad (7.5)$$

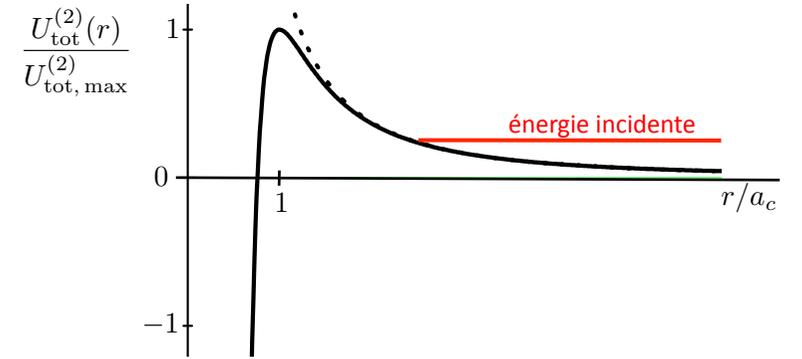
Ce potentiel est maximal pour  $r = a_c/2^{1/4}$ , où  $a_c$  est la longueur caractéristique associée à l'interaction de van der Waals :

$$a_c = \left( \frac{2m_r C_6}{\hbar^2} \right)^{1/4}. \quad (7.6)$$

La hauteur de la barrière en ce point vaut

$$U_{\text{tot,max}}^{(2)} = \sqrt{8} \frac{\hbar^2}{m_r a_c^2}. \quad (7.7)$$

1. Pour des bosons polarisés, l'onde partielle  $\ell = 1$  est interdite car elle correspond à une fonction d'onde antisymétrique par échange des deux particules.



**FIGURE 7.2.** Trait continu : somme du potentiel de van der Waals et du potentiel centrifuge pour  $\ell = 2$ , pointillé : potentiel centrifuge uniquement. Pour une énergie incidente beaucoup plus basse que la hauteur  $U_{\text{tot,max}}^{(2)}$ , les particules ne ressentent pratiquement pas le potentiel de Van der Waals.

Si l'énergie incidente des particules est bien inférieure à cette hauteur, soit

$$k_B T \ll \frac{\hbar^3}{(m_r^3 C_6)^{1/2}}, \quad (7.8)$$

leur distance minimale d'approche pour cette onde partielle va rester beaucoup plus grande que  $a_c$ . Ceci signifie que les particules seront essentiellement sensibles au potentiel centrifuge, et pas au potentiel de van der Waals.

Pour cette onde partielle  $\ell = 2$  (et pour toutes les suivantes qui ont une barrière centrifuge encore plus grande), tout se passe donc comme si l'interaction de van der Waals n'existait pas. Seule l'onde  $s$  correspondant à  $\ell = 0$ , qui ne contient pas de potentiel centrifuge, contribue. Or, la diffusion dans l'onde  $s$  est par définition isotrope, d'où le résultat. Pour les atomes alcalins, on trouve que le membre de droite de l'inégalité (7.8) est de l'ordre de la centaine de microkelvins, voire davantage, et l'approximation de collisions dans l'onde  $s$  est excellente dans le régime de dégénérescence quantique atteignable expérimentalement (autour ou en dessous du microkelvin).

## 1-2 Approximation de champ moyen

Considérons maintenant une assemblée de  $N$  atomes placés dans un potentiel extérieur  $V(\mathbf{r})$  et interagissant par l'intermédiaire du potentiel  $\sum U(\mathbf{r}_i \Leftrightarrow \mathbf{r}_j)$ , où  $\mathbf{r}_i$  et  $\mathbf{r}_j$  sont les coordonnées de deux atomes. L'hamiltonien total du système s'écrit donc :

$$\hat{H}^{(N)} = \sum_{j=1}^N \left( \frac{\hat{p}_j^2}{2M} + V(\mathbf{r}_j) \right) + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} U(\mathbf{r}_i \Leftrightarrow \mathbf{r}_j) \quad (7.9)$$

Nous allons chercher l'état fondamental de ce système de manière approchée, correspondant à l'idée physique que toutes les particules sont condensées et décrites par la même fonction d'onde. Ceci revient à utiliser une approximation de champ moyen ; on néglige toute corrélation entre atomes et on écrit l'état fondamental sous la forme

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = \psi(\mathbf{r}_1) \dots \psi(\mathbf{r}_N), \quad (7.10)$$

où la fonction d'onde macroscopique  $\psi$  est normalisée :

$$\int |\psi(\mathbf{r})|^2 d^3r = 1. \quad (7.11)$$

Une fois choisie la fonction  $\psi(\mathbf{r})$ , on peut évaluer l'énergie moyenne du système

$$E^{(N)}[\psi] = \langle \Psi | \hat{H}^{(N)} | \Psi \rangle \quad (7.12)$$

Les  $N$  termes d'énergie cinétique et d'énergie potentielle donnent tous la même contribution

$$\int \left( \frac{\hbar^2}{2M} |\nabla \psi(\mathbf{r})|^2 + V(\mathbf{r}) |\psi(\mathbf{r})|^2 \right) d^3r, \quad (7.13)$$

et les  $N(N \Leftrightarrow 1)/2$  termes d'interaction ont également tous la même expression

$$\iint U(\mathbf{r}_1 \Leftrightarrow \mathbf{r}_2) |\psi(\mathbf{r}_1)|^2 |\psi(\mathbf{r}_2)|^2 d^3r_1 d^3r_2 = \frac{4\pi\hbar^2 a}{M} \int |\psi(\mathbf{r})|^4 d^3r. \quad (7.14)$$

En prenant  $N \Leftrightarrow 1 \approx N$ , on obtient donc dans cette approximation de champ moyen l'énergie par particule  $E[\psi] = E^{(N)}[\psi]/N$  :

$$E[\psi] = \int \left( \frac{\hbar^2}{2M} |\nabla \psi(\mathbf{r})|^2 + V(\mathbf{r}) |\psi(\mathbf{r})|^2 + \frac{2\pi\hbar^2 a N}{M} |\psi(\mathbf{r})|^4 \right) d^3r \quad (7.15)$$

qu'il s'agit de minimiser en choisissant la valeur appropriée de  $\psi$ , tout en tenant compte de la contrainte de normalisation.

**Équation de Gross-Pitaevskii.** La minimisation de l'énergie (7.15) sous la contrainte que la fonction d'onde doit être normée (7.11) est un problème variationnel qui peut se résoudre par la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Les états qui rendent (7.15) extrémale sont les solutions de l'équation de Gross-Pitaevskii

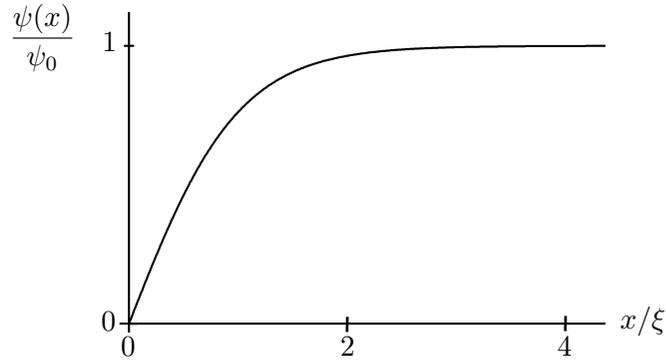
$$\Leftrightarrow \frac{\hbar^2}{2M} \Delta \psi(\mathbf{r}) + V(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) + \frac{4\pi\hbar^2 a N}{M} |\psi(\mathbf{r})|^2 \psi(\mathbf{r}) = \mu \psi(\mathbf{r}), \quad (7.16)$$

où le *potentiel chimique*  $\mu$  est le multiplicateur de Lagrange introduit pour prendre en compte la contrainte sur la norme. Il correspond physiquement à l'augmentation  $E^{(N+1)} \Leftrightarrow E^{(N)}$  de l'énergie de l'état fondamental quand on ajoute une particule au système à  $N$  corps.

**Longueur de cicatrisation  $\xi$ .** Un point important de cette description en champ moyen est l'émergence d'une longueur caractéristique associée aux interactions, la *longueur de cicatrisation*  $\xi$ . Pour montrer comment cette longueur apparaît, considérons un condensat confiné dans le demi-espace  $x > 0$ , avec une paroi dans le plan  $x = 0$  qui impose à la fonction d'onde de s'annuler sur ce plan. Les interactions répulsives entre atomes vont favoriser les états où le gaz occupe un maximum d'espace ; pour ces états, la fonction d'onde prend des valeurs significatives à des distances arbitrairement proches de la paroi, donc augmentant lentement depuis le nœud en  $x = 0$ . En revanche, le terme d'énergie cinétique favorise des fonctions d'onde variant lentement dans l'espace. La longueur de cicatrisation émerge comme le meilleur compromis entre ces deux contraintes.

On peut trouver la solution exacte de l'équation de Gross-Pitaevskii (7.16) dans le cas qui nous intéresse

$$\psi(x) = \psi_0 \tanh(x/\xi), \quad (7.17)$$



**FIGURE 7.3.** Variation (7.17) de la fonction d'onde au voisinage d'une paroi, modélisée comme la surface plane  $x = 0$  sur laquelle  $\psi(x)$  doit s'annuler. La longueur caractéristique  $\xi$ , appelée longueur de cicatrisation (healing length) est reliée au potentiel chimique  $\mu$  par  $\xi = \hbar/\sqrt{M\mu}$  (relation valable aussi bien à 3D qu'à 2D).

avec

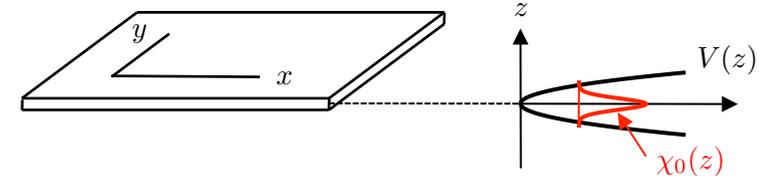
$$\xi = \frac{\hbar}{\sqrt{M\mu}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi a \rho^{(3D)}}}, \quad \mu = \frac{4\pi\hbar^2 a}{M} \rho^{(3D)}, \quad \rho^{(3D)} = N\psi_0^2. \quad (7.18)$$

Cette fonction d'onde s'annule bien en  $x = 0$  et tend vers la constante  $\psi_0$  pour  $x \gg \xi$ .

### 1-3 Passage à deux dimensions

Nous allons désormais nous concentrer sur les propriétés du gaz d'atomes dans le plan  $xy$ . Ce choix est motivé par le fait que le magnétisme induit par un champ  $\mathbf{B}$  parallèle à l'axe  $z$  se manifeste essentiellement dans ce plan. Cette restriction va nous permettre de simplifier notablement les calculs et les notations, tout en conservant les éléments physiquement importants.

Sur le plan mathématique, cette restriction au plan  $xy$  se fait en recherchant les fonctions d'onde  $\psi$  qui minimisent l'énergie (7.15) sous la forme



**FIGURE 7.4.** Confinement selon la direction  $z$  par un potentiel harmonique. L'état du gaz selon  $z$  est supposé « gelé » et décrit par la fonction d'onde  $\chi_0(z)$ , d'extension  $a_z$ . Les interactions dans le plan  $xy$  sont alors décrites par le nombre sans dimension  $g \propto a/a_z$  (cf. 7.22), où  $a$  est la longueur de diffusion à 3D.

factorisée

$$\psi(x, y, z) = \phi(x, y) \chi_0(z), \quad (7.19)$$

et en supposant que  $\chi_0(z)$  est figée. Physiquement, un tel régime peut être atteint en appliquant selon  $z$  un régime de confinement très fort de sorte que les atomes occupent seulement l'état fondamental de l'hamiltonien décrivant le mouvement selon cette direction (figure 7.4).

Nous allons supposer par ailleurs que le potentiel de confinement dans le plan  $xy$  est harmonique et isotrope, de pulsation  $\omega$ . On se ramène donc à l'énergie de champ moyen :

$$E[\phi] = \int \left( \frac{\hbar^2}{2M} |\nabla \phi(\mathbf{r})|^2 + \frac{1}{2} M \omega^2 r^2 |\phi(\mathbf{r})|^2 + \frac{\hbar^2}{2M} N g |\phi(\mathbf{r})|^4 \right) d^2r, \quad (7.20)$$

où la constante d'interaction  $g$  (sans dimension) est définie par

$$g = 4\pi a \int |\chi_0(z)|^4 dz. \quad (7.21)$$

Si le confinement selon  $z$  est harmonique de pulsation  $\omega_z$  et si  $\chi_0(z) \propto \exp(\pm z^2/2a_z^2)$  représente l'état fondamental de cet oscillateur, alors

$$g = \sqrt{8\pi} \frac{a}{a_z}, \quad (7.22)$$

où  $a_z = \sqrt{\hbar/M\omega_z}$ . Considérons par exemple un gaz de rubidium confiné par un piège de fréquence  $\omega_z/2\pi = 5$  kHz ; on trouve  $a_z = 150$  nm, ce qui combiné avec  $a = 5.1$  nm, conduit à un couplage  $g = 0.17$ .

**Interaction effective à deux dimensions.** L'énergie en champ moyen à deux dimensions donnée en (7.20) peut être obtenue formellement en prenant pour potentiel d'interaction entre deux particules

$$U^{(2D)}(\mathbf{r}) = \frac{\hbar^2}{M} g \delta^{(2D)}(\mathbf{r}). \quad (7.23)$$

Dans le cas général, cette distribution de Dirac bi-dimensionnelle peut conduire à des singularités mathématiques; pour décrire un processus de collision à deux dimensions en physique quantique, il faut en principe introduire un coefficient de couplage dépendant de l'énergie [voir par exemple Adhikari (1986); Petrov & Shlyapnikov (2001); Olshanii & Pricoupenko (2002)]. Toutefois, ces singularités n'interviennent pas dans le traitement de champ moyen que nous considérons ici, ni dans le traitement au delà du champ moyen, mais restreint au niveau de Landau fondamental, que nous aborderons au paragraphe 4 (Haldane 1983); dans ces deux cas, on peut représenter l'interaction entre particules par le potentiel de contact à deux dimensions (7.23), caractérisé par le coefficient de couplage constant  $g$ , sans introduire de pathologie mathématique.

#### 1-4 Régime de Thomas-Fermi à 2D

Pour progresser dans l'étude de l'état d'équilibre du gaz, commençons par remarquer que la stabilité du nuage résulte de deux phénomènes antagonistes présents dans l'expression de l'énergie (7.20) :

- Le terme de piégeage en  $M\omega^2 r^2/2$  favorise une fonction  $\phi$  localisée au voisinage de l'origine pour minimiser l'énergie potentielle.
- Les deux termes d'énergie cinétique et d'interaction ont l'effet contraire : ces deux énergies diminuent quand on augmente l'extension de la fonction  $\phi$ .

Le terme de piégeage joue donc toujours un rôle essentiel dans l'équilibre. Son effet sera contrebalancé majoritairement soit par l'énergie cinétique, soit par l'énergie d'interaction. Pour déterminer laquelle de ces deux énergies est dominante pour assurer l'équilibre, introduisons la taille  $R$  caractérisant l'extension de  $\phi$ . Puisque  $\phi$  est normée, on a  $\phi \sim 1/R$  sur la zone

où elle prend des valeurs significatives. On en déduit

$$\frac{\hbar^2}{M} \int |\nabla\phi(\mathbf{r})|^2 d^2r \sim \frac{\hbar^2}{MR^2}, \quad \frac{\hbar^2}{M} Ng \int |\phi(\mathbf{r})|^4 d^2r \sim \frac{\hbar^2}{MR^2} Ng. \quad (7.24)$$

Par conséquent si  $Ng \ll 1$ , c'est l'énergie cinétique qui vient contrebalancer l'énergie potentielle et on peut ignorer les interactions. Dans le cas opposé  $Ng \gg 1$ , c'est l'interaction répulsive entre atomes qui s'oppose à la force de piégeage et l'énergie cinétique est négligeable. Ce deuxième cas, qui correspond au régime de Thomas-Fermi, est aisément atteint en pratique; si on reprend la valeur  $g \sim 0.2$  donnée plus haut, il suffit de placer une dizaine d'atomes dans le piège.

Si on néglige l'énergie cinétique, (7.20) se simplifie pour donner

$$Ng \gg 1: \quad E[\phi] \approx \frac{1}{2} M\omega^2 \int r^2 |\phi|^2 + \frac{\hbar^2}{2M} Ng \int |\phi|^4, \quad (7.25)$$

et l'équation de Gross-Pitaevskii associée devient une équation algébrique

$$\frac{1}{2} M\omega^2 r^2 \phi(\mathbf{r}) + \frac{\hbar^2}{M} Ng |\phi(\mathbf{r})|^2 \phi(\mathbf{r}) = \mu \phi(\mathbf{r}). \quad (7.26)$$

dont la résolution est simple. En introduisant le rayon de Thomas-Fermi  $R_{\text{TF}}$

$$\mu = \frac{1}{2} m\omega^2 R_{\text{TF}}^2; \quad (7.27)$$

on obtient

$$\begin{aligned} Ng |\phi(\mathbf{r})|^2 &= \frac{1}{2a^4} (R_{\text{TF}}^2 \Leftrightarrow r^2) & \text{si } r < R \\ \phi(\mathbf{r}) &= 0 & \text{si } r \geq R. \end{aligned} \quad (7.28)$$

où on a posé  $a = (\hbar/M\omega)^{1/2}$ . Pour terminer notre analyse, il reste à exprimer le fait que la fonction  $\phi(\mathbf{r})$  est normée, ce qui fournit une relation entre le rayon de Thomas-Fermi et le paramètre  $Ng$  :

$$R_{\text{TF}} = a \left( \frac{4Ng}{\pi} \right)^{1/4}, \quad \mu = \hbar\omega \left( \frac{Ng}{\pi} \right)^{1/2}. \quad (7.29)$$

Une quantité utile pour la suite est la densité surfacique  $\rho(\mathbf{r})$ , et en particulier sa valeur au centre du condensat :

$$\rho(0) = N|\phi(0)|^2 = \sqrt{\frac{N}{\pi g}} a^{\epsilon 2}. \quad (7.30)$$

On constate donc que deux effets se produisent lorsque l'on augmente le nombre d'atomes dans le condensat :

- le rayon augmente comme  $N^{1/4}$ , donc la surface comme  $\sqrt{N}$ .
- la densité au centre augmente elle aussi comme  $\sqrt{N}$ .

**Remarque.** Les relations entre potentiel chimique, longueur de cicatrization et rayon de Thomas–Fermi :

$$\mu = \frac{\hbar^2}{M\xi^2}, \quad \mu = \frac{1}{2}M\omega^2 R_{\text{TF}}^2 = \hbar\omega \frac{R_{\text{TF}}^2}{2a^2}, \quad (7.31)$$

peuvent se combiner pour donner

$$\xi = a \left( \frac{\pi}{Ng} \right)^{1/4}, \quad \xi R_{\text{TF}} = \sqrt{2} a^2. \quad (7.32)$$

Pour un piège de fréquence et donc de  $a$  donnés, la longueur de cicatrization et le rayon de Thomas-Fermi varient en sens inverse quand on augmente le nombre d'atomes :  $\xi$  diminue et  $R_{\text{TF}}$  augmente, leur produit restant constant.

## 2 Vortex dans un condensat

Nous considérons maintenant un condensat confiné dans un piège harmonique isotrope de pulsation  $\omega$  dans le plan  $xy$  et mis en rotation avec un agitateur tournant à fréquence angulaire  $\Omega$ . L'hamiltonien à une particule s'écrit dans le référentiel tournant

$$\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2M} + \frac{1}{2}M\omega^2 \hat{\mathbf{r}}^2 \Leftrightarrow \Omega \hat{L}_z \quad (7.33)$$

Nous allons nous intéresser dans ce qui suit à l'état fondamental de ce condensat en présence d'interactions, dans l'hypothèse où ces dernières peuvent être décrites par une interaction de champ moyen. Il va donc s'agir de trouver la fonction  $\phi(x, y)$  qui minimise la fonctionnelle d'énergie associée à (7.33) :

$$E[\phi] = \int \left( \frac{\hbar^2}{2M} |\nabla\phi|^2 + \frac{1}{2}M\omega^2 r^2 |\phi|^2 \Leftrightarrow \Omega \phi^* (\hat{L}_z \phi) + \frac{\hbar^2}{2M} Ng |\phi|^4 \right) d^2r. \quad (7.34)$$

### 2-1 L'apparition du premier vortex

La notion de vortex, ou tourbillon, va jouer un rôle crucial dans la recherche de l'état fondamental en présence d'un champ de jauge. Nous avons déjà rencontré cette notion quand nous avons étudié au chapitre 2 les états propres de l'hamiltonien à une particule dans un piège isotrope. Nous avons montré que l'état fondamental et les deux premiers états excités étaient donnés par

$$\text{Fondamental :} \quad \psi_0(\mathbf{r}) = e^{\epsilon r^2/2a_{\perp}^2}, \quad (7.35)$$

$$\text{Premier niveau excité :} \quad \psi_{\pm}(\mathbf{r}) = r e^{\pm i\varphi} e^{\epsilon r^2/2a_{\perp}^2} \quad (7.36)$$

Les deux états qui forment une base du premier niveau excité portent un moment cinétique non nul, en l'occurrence  $\pm\hbar$ . Ils possèdent toutes les caractéristiques des vortex que nous allons rencontrer dans ce qui suit :

- Le centre d'un vortex est toujours un point auquel la densité  $\rho(\mathbf{r}) = |\phi(\mathbf{r})|^2$  s'annule.
- Le long d'un contour fermé entourant le centre du vortex, la phase de  $\phi(\mathbf{r})$  évolue continûment pour donner un enroulement de  $\pm 2\pi$ , ou un multiple de cette quantité dans le cas d'un vortex de charge multiple.
- Pour un vortex unique au centre d'un condensat, le champ de vitesse  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  que l'on déduit de la phase  $\theta(\mathbf{r})$  de la fonction d'onde

$$\phi(\mathbf{r}) = |\phi(\mathbf{r})| e^{i\theta(\mathbf{r})} \quad \rightarrow \quad \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{\hbar}{M} \nabla\theta(\mathbf{r}), \quad (7.37)$$

varie comme  $1/r$ . Cette propriété existe également pour un fluide classique, mais la spécificité d'un condensat est la quantification de la cir-

culution de la vitesse : sur un contour entourant le vortex, on a

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \pm \frac{\hbar}{Mr} \mathbf{u}_\varphi, \quad \oint \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \pm \frac{h}{M} \quad (7.38)$$

pour un vortex de charge 1.

La modification importante qui va apparaître en présence d'interactions est la taille du cœur du vortex. Alors que pour les états (7.36), la taille du cœur (typiquement la largeur à mi-hauteur du trou central de densité) est de l'ordre de  $a$ , la taille du cœur d'un vortex à l'équilibre en présence d'interactions est plus petite, d'ordre  $\xi$  (ceci ne sera plus vrai quand l'état fondamental sera restreint au LLL, voir § 3). L'apparition de la longueur de cicatrization dans ce contexte n'est pas surprenante. Imposer la présence d'un vortex en un point donné revient à imposer à la fonction d'onde de s'annuler en ce point. Quand on s'éloigne du cœur, la densité surfacique  $\rho(\mathbf{r})$  augmente pour reprendre au loin sa valeur en l'absence de vortex. La taille d'équilibre du cœur, qui résulte d'un compromis en énergie cinétique et énergie d'interaction, est donc naturellement donnée [à un facteur numérique près, voir par exemple Castin & Dum (1999)] par la longueur de cicatrization.

Il est intéressant d'évaluer le nombre d'atomes manquants  $\delta N$  dans un cœur de vortex dans ce cas bi-dimensionnel. En utilisant (7.30-7.32), on trouve

$$\delta N \sim \rho(0) \pi \xi^2 = \frac{\pi}{g}. \quad (7.39)$$

Pour la situation physique envisagée en § 1-3 pour des atomes de rubidium ( $g = 0.17$ ), on trouve  $\delta N \sim 20$ . Le déficit en atomes lié à la présence d'un vortex est donc petit devant le nombre d'atomes typique dans un condensat (de  $10^3$  à  $10^6$ ). La situation devient encore plus frappante quand on augmente la force des interactions pour atteindre une valeur du couplage  $g$  qui dépasse l'unité. Le déficit en atomes  $\delta N$  devient alors inférieur à 1, ce qui veut dire qu'un vortex ne peut pas être détecté par le trou qu'il crée dans le gaz *in situ*. C'est ce qui se produit dans les films d'hélium liquide par exemple.

Puisqu'un état à un vortex centré correspond à un moment cinétique de  $\hbar$  par particule, il provoque un abaissement d'énergie pour au moins un des termes de  $E[\phi]$  donné en (7.34),  $\Leftrightarrow \Omega \langle L_z \rangle$ . On peut donc s'attendre à

voir un ou plusieurs vortex apparaître dans l'état fondamental du gaz en rotation.

Toutefois, il y a une énergie cinétique supplémentaire<sup>2</sup> associée au champ de vitesse du vortex  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  :

$$\Delta E^{(N)} = \frac{M}{2} \int \rho(\mathbf{r}) \mathbf{v}^2(\mathbf{r}) d^2r, \quad (7.40)$$

que nous devons évaluer pour déterminer quand l'état à un vortex devient énergiquement favorable par rapport à l'état sans vortex. Le profil de densité  $\rho(\mathbf{r})$  est essentiellement inchangé par rapport à sa valeur en absence de vortex, excepté au voisinage immédiat du cœur, c'est-à-dire pour  $r \lesssim \xi$ . Pour le champ de vitesse  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  orthoradial (7.38), l'accroissement d'énergie cinétique par particule vaut

$$\Delta E = \frac{\Delta E^{(N)}}{N} \approx \frac{M}{2N} \rho(0) \int_\xi^{R_{\text{TF}}} \left( 1 \Leftrightarrow \frac{r^2}{R_{\text{TF}}^2} \right) \frac{\hbar^2}{M^2 r^2} 2\pi r dr. \quad (7.41)$$

L'intégrale se calcule simplement pour donner

$$\Delta E \approx \hbar \omega \sqrt{\frac{\pi}{Ng}} \ln \frac{R_{\text{TF}}}{e\xi} \quad (7.42)$$

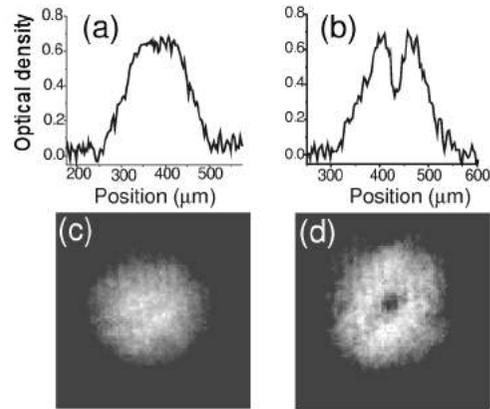
L'approximation de Thomas–Fermi est valable dans le cas  $Ng \gg 1$ ; cet accroissement d'énergie par particule est donc petit<sup>3</sup> devant  $\hbar\omega$ , alors que l'énergie par particule ( $\sim \mu$ ) est quant à elle grande devant  $\hbar\omega$  [voir par exemple (7.31)].

Le coût en énergie cinétique d'un vortex est donc relativement minime et, grâce au terme en  $\Leftrightarrow \Omega L_z$ , il suffit d'une faible rotation pour favoriser sa création sur le plan énergétique. Plus précisément, puisqu'un vortex centré correspond à un moment cinétique  $\hbar$ , la variation d'énergie  $\Delta E \Leftrightarrow \hbar\Omega$  devient négative quand  $\Omega$  dépasse la valeur critique  $\Omega_c$  donnée par (Baym & Pethick 1996; Dalfvo & Stringari 1996):

$$\frac{\Omega_c}{\omega} \approx \sqrt{\frac{\pi}{Ng}} \ln \frac{R_{\text{TF}}}{e\xi} \ll 1. \quad (7.43)$$

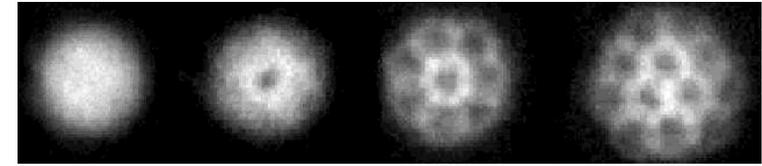
2. On pourra estimer également l'accroissement d'énergie potentielle du nuage du fait du transfert des particules initialement à une distance  $r \lesssim \xi$  du centre vers les couches extérieures, et vérifier qu'il est négligeable devant l'augmentation d'énergie cinétique calculée ici.

3. L'argument du logarithme est au plus de l'ordre du millier, et le logarithme est donc lui-même de l'ordre de quelques unités.



**FIGURE 7.5.** Tourbillon observé à l'ENS dans un condensat (3D) de rubidium en rotation (Madison et al. 2000a). Ces images ont été prises après un temps de vol qui augmente la taille du coeur du vortex, qui devient ainsi observable (pour une description théorique de l'effet de ce temps de vol, voir par exemple Dalfovo & Modugno (2000)). Expériences menées avec  $\sim 10^5$  atomes de rubidium dans un piège tel que  $\omega/2\pi = 220$  Hz. À gauche,  $\Omega/2\pi = 145$  Hz, à droite  $\Omega/2\pi = 152$  Hz.

**Premières expériences.** Nous avons reporté sur la figure 7.5 les premières observations de vortex dans des condensats atomiques en rotation (Madison et al. 2000a). On trouve bien qu'au dessus d'une fréquence de rotation critique, un premier vortex apparaît dans le condensat. Dans cette première expérience, la fréquence critique  $\Omega_c$  ne correspondait pas à celle prédite en (7.43), mais était systématiquement plus élevée et égale environ à  $\omega/\sqrt{2}$ . L'explication quantitative de ce phénomène réside dans le fait qu'il y a une barrière énergétique à fournir pour faire pénétrer un vortex dans un condensat. Il ne suffit pas que l'état final avec vortex ait une énergie plus basse que l'état sans vortex, il faut également qu'il existe un chemin pour que le vortex initialement à l'extérieur du nuage pénètre à l'intérieur. L'existence d'un tel chemin est favorisée pour  $\Omega \approx \omega/\sqrt{2}$ , en raison d'une instabilité dynamique de la surface du condensat autour de cette fréquence de rotation (Sinha & Castin 2001), [voir également Recati et al. (2001), Lobo et al. (2004) et les films associés sur la page personnelle d'Yvan Castin].



**FIGURE 7.6.** Augmentation du nombre de vortex avec la fréquence de rotation. Figure obtenue à l'ENS, extraite de Madison et al. (2000b).

## 2-2 L'argument de Feynman

Quand le champ magnétique artificiel ou la fréquence de rotation  $\Omega$  augmentent, le nombre de vortex au sein du condensat à l'équilibre croît, comme on peut le voir sur la figure 7.6. Avant d'étudier ce problème spécifiquement quantique, il est utile de commencer par l'étude du problème classique équivalent. Considérons donc un fluide classique (supposé incompressible pour simplifier), de densité  $\rho$  et confiné dans une boîte circulaire de rayon  $R$ . La boîte tourne autour de son axe à la fréquence angulaire  $\Omega$  et on suppose que les parois sont suffisamment rugueuses pour mettre le fluide en mouvement. La recherche de l'état d'équilibre doit donc se faire dans le référentiel en rotation, puisque ce référentiel est le seul où les forces agissant sur le fluide sont indépendantes du temps.

Plaçons-nous à deux dimensions et cherchons le champ de vitesse  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  du fluide dans le laboratoire, une fois l'équilibre atteint. L'énergie cinétique du fluide dans le laboratoire est

$$E_c^{(\text{lab})} = \frac{1}{2} M \rho \int \mathbf{v}^2(\mathbf{r}) d^2r \quad (7.44)$$

et l'énergie dans le référentiel tournant vaut :

$$E_c^{(\text{rt})} = E_c^{(\text{lab})} \Leftrightarrow \Omega L_z, \quad \text{avec } L_z = \rho \int \mathbf{r} \times \mathbf{v}(\mathbf{r}) d^2r. \quad (7.45)$$

Cette énergie peut se mettre sous la forme

$$E_c^{(\text{rt})} = \frac{1}{2} M \rho \int (\mathbf{v}(\mathbf{r}) \Leftrightarrow \Omega \times \mathbf{r})^2 d^2r \Leftrightarrow \frac{1}{2} J \Omega^2, \quad (7.46)$$

avec  $\Omega = \Omega \mathbf{u}_z$ . La quantité  $J = M \int r^2 d^2r$  désigne le moment d'inertie du disque. Il est alors immédiat de constater que le champ de vitesse qui minimise (7.46) est le champ de rotation rigide :

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \Omega \times \mathbf{r}. \quad (7.47)$$

Ce champ de vitesse correspond à une vorticité (rotationnel du champ de vitesse) uniforme

$$\nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{r}) = 2\Omega. \quad (7.48)$$

Revenons maintenant au cas d'un superfluide décrit par une fonction d'onde macroscopique  $\phi(\mathbf{r}) = |\phi(\mathbf{r})| e^{i\theta(\mathbf{r})}$ . Nous avons déjà indiqué que le champ de vitesse en un point de densité non nulle vaut

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{\hbar}{M} \nabla \theta(\mathbf{r}). \quad (7.49)$$

On en déduit qu'en dehors d'un zéro de densité, la vorticité s'annule puisque le rotationnel d'un gradient est toujours nul.

Considérons maintenant un vortex centré en  $\mathbf{r}_0$ ; le champ de vitesse est orthoradial au voisinage de ce point :

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) \approx \frac{\hbar}{M|\mathbf{r} \leftrightarrow \mathbf{r}_0|} \mathbf{u} + \dots, \quad (7.50)$$

ce qui correspond à la vorticité :

$$\nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{2\pi\hbar}{M} \delta(\mathbf{r} \leftrightarrow \mathbf{r}_0) + \dots \quad (7.51)$$

Dans un superfluide, la vorticité est donc concentrée en des points discrets correspondant aux centres des vortex, alors qu'elle est diffuse dans un fluide classique [cf. eq. (7.48)].

Pour trouver la répartition des vortex dans un superfluide à l'équilibre, Feynman (1955) a suggéré d'utiliser le principe de correspondance et de poser que la densité moyenne de vortex  $\rho_v$  doit conduire à une vorticité après lissage égale à la vorticité d'un fluide classique pour la même rotation. En comparant (7.48) et (7.51), cet argument conduit à

$$2\Omega = \frac{2\pi\hbar}{M} \rho_v \quad \Rightarrow \quad \rho_v = \frac{M\Omega}{\pi\hbar}. \quad (7.52)$$

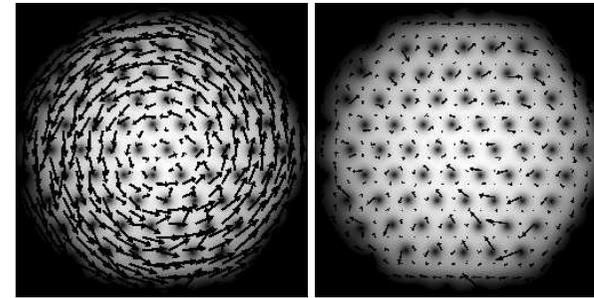


FIGURE 7.7. Figure extraite de l'article de Feder & Clark (2001), montrant la distribution en densité et le champ de vitesse d'un condensat dans le référentiel du laboratoire (à gauche) et dans le référentiel tournant (à droite). Ces résultats ont été obtenus pour un condensat de  $2 \cdot 10^5$  atomes de rubidium dans un piège 3D de fréquences  $\omega/2\pi = 8$  Hz et  $\omega_z/2\pi = 5$  Hz. La fréquence de rotation est  $\Omega = 0.95\omega$ .

Cette hypothèse est confirmée par les simulations numériques; nous donnons en figure 7.7 le résultat d'un calcul fait par Feder et al. (1999), montrant l'état d'énergie minimale d'un condensat en rotation. Cet état contient effectivement des vortex qui s'arrangent en un réseau triangulaire régulier, similaire au réseau d'Abrikosov des vortex dans les supraconducteurs de type II plongés dans un champ magnétique. La densité moyenne de vortex est en bon accord avec la prédiction de Feynman (7.52) et le champ de vitesse reproduit correctement le champ de rotation rigide (7.47) (avec bien sûr des déviations au voisinage du cœur des vortex).

**Remarque.** Nous nous sommes limités ici au cas de vortex de charge 1, ce qui est justifié par une analyse de stabilité dynamique ou thermodynamique des vortex de charge plus élevée: ces derniers sont instables et il est toujours préférable sur le plan énergétique de les séparer en deux (ou plusieurs) vortex de charge unité (Castin & Dum 1999).

### 2-3 La forme d'équilibre du condensat

La distribution d'équilibre des atomes dans un piège en rotation s'obtient (dans l'approximation de champ moyen) en minimisant l'énergie totale (7.20) que nous réécrivons ici dans le référentiel tournant :

$$E[\phi] = E_c[\phi] + E_p[\phi] + E_{\text{int}}[\phi] \Leftrightarrow \Omega \langle L_z \rangle_\phi \quad (7.53)$$

avec

$$E_c[\phi] = \frac{\hbar^2}{2M} \int |\nabla \phi|^2, \quad E_p[\phi] = \frac{1}{2} M \omega^2 \int r^2 |\phi|^2 \quad (7.54)$$

$$E_{\text{int}}[\phi] = \frac{\hbar^2}{2M} N g \int |\phi|^4, \quad \langle L_z \rangle_\phi = \Leftrightarrow \hbar \int \phi^* (\mathbf{r} \times \nabla) \phi \quad (7.55)$$

Il s'agit maintenant de trouver une forme approchée de la fonction  $\phi$  qui minimise l'énergie totale (7.53). Pour cela, nous allons faire l'hypothèse suivante :

*La taille  $\xi$  des vortex est petite devant la distance moyenne entre vortex  $\rho_v^{-2}$ .*

Cette hypothèse nous permet de négliger la variation en densité au voisinage du cœur dans l'estimation de l'énergie cinétique et de l'énergie d'interaction, et de traiter la fonction  $\phi$  comme une fonction régulière. Grâce à l'argument de Feynman, on sait par ailleurs que le champ de vitesse  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  est donné en bonne approximation par le champ de vitesse de rotation rigide (7.47). On peut alors faire l'approximation :

$$\mathbf{v} \approx \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \Rightarrow E_c[\phi] \approx \frac{1}{2} M \Omega^2 \int r^2 |\phi|^2, \quad (7.56)$$

$$\text{et } \Leftrightarrow \Omega \langle L_z \rangle_\phi \approx \Leftrightarrow M \Omega^2 \int r^2 |\phi|^2. \quad (7.57)$$

A partir de ces deux hypothèses, l'énergie (7.53) peut se réécrire

$$E[\phi] \approx \frac{1}{2} M (\omega^2 \Leftrightarrow \Omega^2) \int r^2 |\phi|^2 + \frac{\hbar^2}{2M} N g \int |\phi|^4 \quad (7.58)$$

On retrouve alors une fonctionnelle d'énergie standard dans l'approximation de Thomas-Fermi, la seule modification par rapport à (7.25) étant la substitution :

$$\omega^2 \Leftrightarrow \omega^2 \Leftrightarrow \Omega^2, \quad (7.59)$$

qui correspond à la réduction de la raideur du piège du fait du potentiel centrifuge.

Tous les résultats obtenus dans le premier paragraphe à propos de la forme d'équilibre d'un condensat dans la limite de Thomas-Fermi restent donc qualitativement valables : en particulier, le profil de densité moyen du condensat garde sa forme parabolique, mais le rayon  $R_{\text{TF}}$  augmente

$$R_{\text{TF}} = a \left( \frac{4}{\pi} N g \right)^{1/4} \Leftrightarrow R_{\text{TF}} = a \left( \frac{4}{\pi} \frac{N g}{1 \Leftrightarrow \Omega^2 / \omega^2} \right)^{1/4}. \quad (7.60)$$

Ce rayon croît donc indéfiniment quand  $\Omega$  augmente et on retrouve la limite centrifuge : le rayon d'équilibre devient infini quand  $\Omega$  atteint la valeur de piègeage  $\omega$  avec :

$$\Omega \rightarrow \omega : \quad R_{\text{TF}} \approx a \left( \frac{2}{\pi} \frac{N g}{1 \Leftrightarrow \Omega / \omega} \right)^{1/4}. \quad (7.61)$$

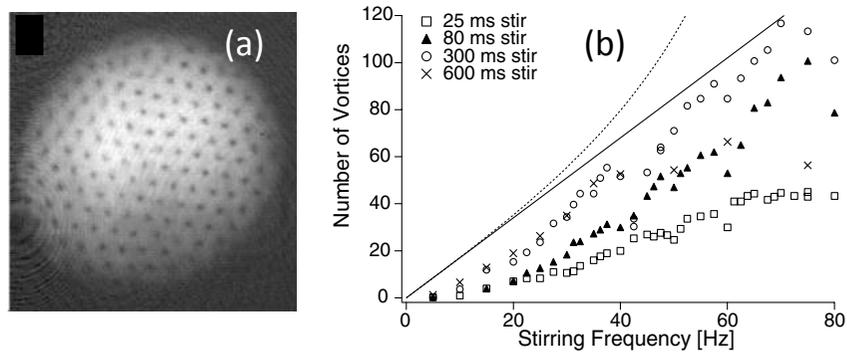
### 2-4 Observations expérimentales

Nous avons reporté sur la figure 7.8a une observation spectaculaire faite au MIT d'un réseau de plus d'une centaine de vortex [figure tirée de l'article de Abo-Shaeer et al. (2001)]. Cette expérience a fourni un premier test de la loi de variation du nombre total de vortex dans le nuage

$$N_v = \rho_v \pi R_{\text{TF}}^2 \quad \text{avec} \quad \rho_v = \frac{M \Omega}{\pi \hbar}, \quad (7.62)$$

en fonction de la fréquence de rotation  $\Omega$ . Cette prédiction (adaptée au cas 3D) est tracée en ligne pointillée sur la figure 7.8b, extraite de Raman et al. (2001). On constate sur cette figure que le nombre de vortex détecté est systématiquement un peu plus bas que celui attendu, ce que les auteurs de Raman et al. (2001) attribuent à un état d'équilibre imparfait du condensat avec l'agitateur tournant.

Des expériences similaires ont également été menées avec des gaz de fermions préparés dans un état superfluide dans un régime d'interaction forte (*crossover* BEC-BCS). Des réseaux de vortex ont également été observés, de part et d'autre de la limite unitaire [voir la figure 7.9, tirée de l'article de Zwierlein et al. (2005)].



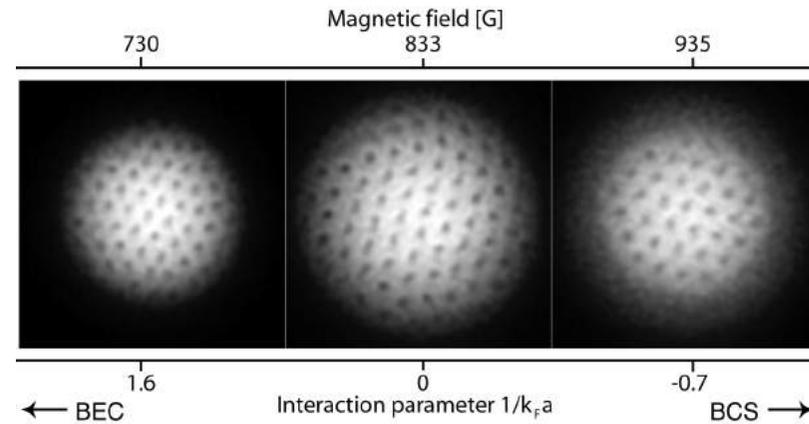
**FIGURE 7.8.** Figures obtenues au MIT, tirées des articles de Abo-Shaeer et al. (2001) et Raman et al. (2001), montrant un grand réseau de vortex pour un condensat 3D de 50 millions d'atomes de sodium, dans un piège de fréquence  $\omega/2\pi = 86$  Hz dans le plan  $xy$ . La fréquence de rotation pour la figure a est de 60 Hz. La ligne continue dans la figure b montre le nombre de vortex attendu selon la loi  $\rho_v = M\Omega/\pi\hbar$ , en prenant en compte l'accroissement du rayon lié à la déformation centrifuge.

### 3 Rotation et niveau de Landau fondamental

Quand on augmente la vitesse de rotation  $\Omega$  pour approcher la limite centrifuge  $\Omega = \omega$  et atteindre des champs magnétiques artificiels de plus en plus grands, on constate que l'hypothèse ayant conduit au régime de Thomas-Fermi devient incorrecte. Nous avons supposé que la taille  $\xi$  du cœur des vortex était petite devant la distance entre vortex, de sorte qu'on pouvait négliger le trou de densité correspondant et remplacer la vraie fonction d'onde du condensat par une fonction d'onde lissée. Or, la longueur de cicatrisation croît indéfiniment quand la fréquence de rotation  $\Omega$  se rapproche de  $\omega$ . En effet, la densité spatiale au centre du condensat varie avec la fréquence effective du piège  $(\omega^2 \Leftrightarrow \Omega^2)^{1/2}$  comme [cf. 7.30] :

$$\Omega \rightarrow \omega : \quad \rho(0) \propto (\omega^2 \Leftrightarrow \Omega^2)^{1/2} \quad \Rightarrow \quad \xi \propto (\omega^2 \Leftrightarrow \Omega^2)^{\epsilon 1/4}. \quad (7.63)$$

L'interprétation de ce résultat est simple : quand on augmente la vitesse de rotation, la force centrifuge déforme de plus en plus le gaz, dont la taille



**FIGURE 7.9.** Observation par Zwierlein et al. (2005) d'un réseau de vortex pour un superfluide fermionique d'atomes de  ${}^6\text{Li}$  en rotation. On utilise une résonance de Feshbach pour se placer au voisinage de la limite unitaire  $a = \infty$ . A droite, le gaz est dans un régime BCS, à gauche dans un régime de condensat de molécules. Cette figure a été obtenue avec 2 millions d'atomes de  ${}^6\text{Li}$  dans un piège 3D correspondant à  $\omega/2\pi = 57$  Hz, pour une fréquence de rotation  $\Omega/2\pi = 45$  Hz.

diverge à la limite  $\Omega = \omega$ . Le gaz étant de plus en plus dilué, les particules interagissent de moins en moins, le potentiel chimique diminue en conséquence et la longueur de cicatrisation  $\xi \propto \mu^{\epsilon 1/2}$  augmente.

Par ailleurs, dans cette limite de rotation rapide  $\Omega \approx \omega$ , l'argument de Feynman conduit à une densité de vortex

$$\rho_v = \frac{M\omega}{\pi\hbar} = \frac{1}{\pi a^2}, \quad (7.64)$$

soit une distance entre vortex  $\sim a$ . Il existe donc une fréquence de rotation pour laquelle  $\xi$  devient supérieur à  $a$  :

$$\frac{\Omega}{\omega} \gtrsim 1 \Leftrightarrow \frac{1}{Ng} \quad (7.65)$$

Au delà de cette fréquence, notre hypothèse initiale n'est plus valable et la description de la fonction d'onde du condensat est notablement modifiée. Pour bien préciser le régime susceptible d'apparaître, nous allons d'abord revenir sur les états à une particule et la notion de niveau de Landau.

### 3-1 Rappel : niveaux de Landau en jauge symétrique

Nous avons rencontré au chapitre 2 les états propres de l'hamiltonien à une particule  $\hat{H}_0$  correspondant à un oscillateur isotrope bi-dimensionnel. Rappelons les résultats principaux :

- Les niveaux d'énergie sont repérés par un entier  $n_0 \geq 0$  et s'écrivent :

$$E_{n_0} = (n_0 + 1)\hbar\omega. \quad (7.66)$$

- Chaque niveau a pour dégénérescence  $n_0 + 1$  : le niveau fondamental  $n_0 = 0$  n'est pas dégénéré, le niveau  $n_0 = 1$  dégénéré deux fois, etc. Ces niveaux à une particule sont représentés sur la figure 7.10a.
- Comme l'hamiltonien à une particule commute avec la composante selon  $z$  de l'opérateur moment cinétique  $\hat{L}_z$ , on peut trouver une base propre commune aux deux opérateurs. Rappelons que les fonctions propres de  $\hat{L}_z = \hbar\partial_\varphi$  ont une dépendance angulaire en  $e^{im\varphi}$ , et que la valeur propre correspondante pour  $\hat{L}_z$  est  $m\hbar$ , où  $m$  est un entier positif, négatif ou nul. Les états de la base propre commune à  $\hat{H}$  et  $\hat{L}_z$  sont donc repérés par les deux nombres quantiques  $n_0$  et  $m$ , et notés  $|n_0, m\rangle$ .
- Les  $n_0 + 1$  valeurs possibles de  $L_z$  dans le sous-espace propre de  $\hat{H}$  d'énergie  $(n_0 + 1)\hbar\omega$  sont les  $m\hbar$  avec :

$$m \in \{\pm n_0, \pm n_0 + 2, \dots, n_0 \Leftrightarrow 2, n_0\}, \quad \text{soit } |m| \leq n_0, \quad n_0 \Leftrightarrow m \text{ pair.} \quad (7.67)$$

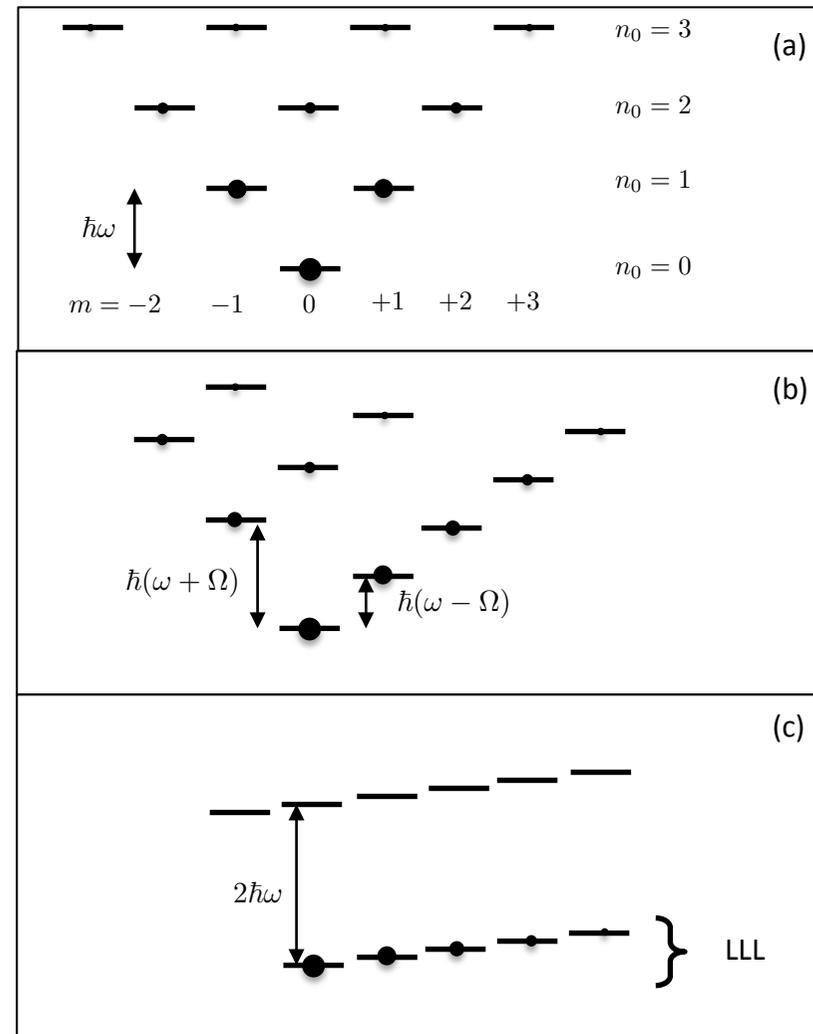
En particulier, les états

$$\phi_m(r, \varphi) \propto r^{|m|} e^{im\varphi} e^{-r^2/2a_\perp^2}, \quad (7.68)$$

sont états propres de l'hamiltonien à une particule avec l'énergie  $(|m| + 1)\hbar\omega$  et correspondent donc aux états  $|n_0 = |m|, m\rangle$ .

Effectuons maintenant le passage dans le référentiel tournant  $\hat{H}_0 \rightarrow \hat{H} = \hat{H}_0 \Leftrightarrow \Omega \hat{L}_z$ . La recherche des états propres de cet hamiltonien à une particule est calquée sur ce que nous avons vu au chapitre 2 pour le problème de Landau en jauge symétrique. Plus précisément, les états  $|n_0, m\rangle$  restent états propres de  $\hat{H}$  avec les valeurs propres (figure 7.10b-c)

$$E_{n_0, m} = (n_0 + 1)\hbar\omega \Leftrightarrow m\hbar\Omega, \quad |m| \leq n_0, \quad n_0 \Leftrightarrow m \text{ pair.} \quad (7.69)$$



**FIGURE 7.10.** (a) Niveaux de l'oscillateur harmonique isotrope à deux dimensions. Les points noirs correspondent (qualitativement) aux populations d'un état de champ moyen dont le potentiel chimique  $\mu$  est de quelques  $\hbar\omega$ . (b-c) : Niveaux d'énergie de l'hamiltonien d'un oscillateur harmonique isotrope 2D dans le référentiel tournant, pour des valeurs croissantes de la fréquence de rotation  $\Omega$ . (b) :  $\Omega = 0.4\omega$ , (c)  $\Omega = 0.9\omega$ . Pour (c), on a représenté avec des points noirs les populations d'un état localisé dans le niveau de Landau fondamental (LLL).

En particulier, les états  $\phi_m$  sont états propres de  $\hat{H}$  avec les valeurs propres

$$\text{États } \phi_m \text{ de (7.68) : } E_{n_0=m,m} = m\hbar(\omega \Leftrightarrow \Omega) + \hbar\omega. \quad (7.70)$$

Quand la fréquence de rotation  $\Omega$  est égale à la fréquence de piégeage  $\omega$ , les états se regroupent en multiplicités dégénérées, correspondant aux énergies

$$\Omega = \omega : E_n = (2n + 1)\hbar\omega, \quad n = \frac{n_0 \Leftrightarrow m}{2} \in \mathbb{N}, \quad (7.71)$$

et on retrouve les niveaux de Landau équidistants, avec l'écart  $\omega_c = 2\omega$  entre deux niveaux consécutifs. Le niveau de Landau fondamental,  $n = 0$ , est engendré par l'ensemble des  $\phi_m$ .

Si on se limite à  $\Omega$  voisin de  $\omega$ , mais quand même légèrement inférieur pour éviter l'explosion centrifuge, la dégénérescence stricte des niveaux de Landau est levée, mais le spectre à une particule continue à se regrouper en multiplicités, avec deux échelles d'énergie bien distinctes (cf. figure 7.10c) :

- une petite échelle d'énergie  $\hbar(\omega \Leftrightarrow \Omega)$ , qui correspond à la distance entre deux états  $|n_0, m\rangle$  et  $|n_0 + 1, m_0 + 1\rangle$  d'une même multiplicité,
- une grande échelle d'énergie  $\hbar(\omega + \Omega) \approx \hbar\omega_c$  correspondant à la distance entre les niveaux les plus bas de deux multiplicités adjacentes.

### 3-2 Fonctions du LLL et vortex

Une fois identifiés les états propres de l'hamiltonien à une particule, on peut revenir sur la condition

$$\xi \geq a \quad \mu \leq \hbar\omega \quad (7.72)$$

qui marque la fin de la validité de l'approximation de Thomas–Fermi traditionnelle. Il est clair sur le diagramme d'énergie de la figure 7.10c que l'inégalité  $\mu \leq \hbar\omega$  signifie que seuls les états du LLL sont significativement peuplés dans ce régime. L'entrée dans ce régime correspond à une forme bien particulière de l'état fondamental du système, qui est maintenant de la forme :

$$\phi(\mathbf{r}) = \sum_m \alpha_m \phi_m(\mathbf{r}). \quad (7.73)$$

Chaque fonction  $\phi_m(\mathbf{r})$  s'écrivant

$$\phi_m(\mathbf{r}) \propto r^m e^{im\varphi} e^{\in r^2/2a_{\perp}^2} = u^m e^{\in r^2/2a_{\perp}^2} \quad \text{avec } u = x + iy, \quad (7.74)$$

une fonction du LLL est du type

$$\phi(\mathbf{r}) = P(u) e^{\in r^2/2a_{\perp}^2}, \quad (7.75)$$

où  $P(u)$  est un polynôme ou une fonction analytique de la variable complexe  $u$ . Limitons-nous pour simplifier au cas des polynômes : explorer le LLL revient à se donner un degré (arbitraire)  $m_{\max}$  pour ce polynôme et ses  $m_{\max} + 1$  coefficients, ou de manière équivalente, se donner les  $m_{\max}$  zéros  $u_1, u_2, \dots, u_{m_{\max}}$  du polynôme et écrire  $\phi(\mathbf{r})$  sous la forme

$$\phi(\mathbf{r}) \propto \prod_{m=1}^{m_{\max}} (u \Leftrightarrow u_m) e^{\in r^2/2a_{\perp}^2}. \quad (7.76)$$

La fonction  $\phi(\mathbf{r})$  possède une structure de vortex autour de chaque zéro  $u_m$  avec un enroulement de phase positif de  $+2\pi$ . En effet, au voisinage immédiat d'un zéro donné, par exemple  $u_1$ , la variation de  $\phi(\mathbf{r})$  est  $\phi(\mathbf{r}) \sim C(u \Leftrightarrow u_1)$  où  $C$  est une constante, ce qui correspond bien à un enroulement de phase de  $+2\pi$  quand on tourne autour de  $u_1$  dans le sens positif.

Il y a dans le LLL une correspondance biunivoque entre la position des vortex et la fonction d'onde elle-même (Ho 2001). Partant de l'expression (7.76), la densité atomique  $\rho$  et la densité de vortex  $\rho_v$

$$\rho(\mathbf{r}) = |\phi(\mathbf{r})|^2, \quad \rho_v(\mathbf{r}) = \sum_{m=1}^{m_{\max}} \delta(\mathbf{r} \Leftrightarrow \mathbf{r}_m), \quad (7.77)$$

où  $\mathbf{r}_m$  est le point de coordonnées  $x = \mathcal{R}e(u_m)$ ,  $y = \mathcal{I}m(u_m)$ , sont reliées par

$$\Delta \{\ln[\rho(\mathbf{r})]\} = 4\pi\rho_v(\mathbf{r}) \Leftrightarrow \frac{4}{a^2}. \quad (7.78)$$

Cette relation découle directement de l'identité mathématique à deux dimensions

$$\Delta [\ln|\mathbf{r} \Leftrightarrow \mathbf{r}_0|] = 2\pi \delta(\mathbf{r} \Leftrightarrow \mathbf{r}_0). \quad (7.79)$$

Notons un cas limite intéressant de la relation (7.78). Si on se donne une densité de vortex uniforme dans le plan et égale à  $1/(\pi a^2)$ , alors la densité spatiale est également uniforme. Ce cas correspond à des niveaux de

Landau exactement dégénérés, où le gaz s'étale dans tout le plan. Cette situation est équivalente à la limite obtenue en (7.64) en prenant exactement  $\Omega = \omega$ .

Partant de (7.78), Ho (2001) a fait l'hypothèse *ad hoc* d'une densité de vortex uniforme, mais légèrement inférieure à  $1/(\pi a^2)$ . On déduit de (7.78) que  $\ln[\rho(r)]$  varie quadratiquement avec  $r$ , et donc que  $\rho(r)$  est une gaussienne, après moyenne sur les trous causés par la distribution de vortex. Des analyses plus précises [voir par exemple Cooper et al. (2004); Watanabe et al. (2004); Aftalion et al. (2005); Matveenko et al. (2009)] sont venues approfondir et corriger quelque peu cette hypothèse de Ho (2001). En fait, le profil de densité qui minimise l'énergie est (approximativement) une parabole inversée et pas une gaussienne. Cette parabole inversée  $\rho(r) \propto R^2 - r^2$  s'annule au delà du rayon :

$$R = a \left( \frac{2}{\pi} \frac{bNg}{1 \Leftrightarrow \Omega/\omega} \right)^{1/4}. \quad (7.80)$$

On retrouve donc la forme de la solution de Thomas–Fermi (7.61), avec un paramètre multiplicatif supplémentaire noté  $b$ . Ce nombre  $b \approx 1.1596$  est le paramètre d'Abrikosov. Il décrit le fait qu'en présence d'un réseau de vortex avec une densité  $\rho_v \sim 1/a^2$ , les atomes interagissent entre eux un peu plus que si leur densité était uniforme. Les trous créés par les vortex doivent être compensés par des zones où la densité est plus élevée, et il y a donc un prix supplémentaire à payer en terme d'énergie d'interaction en présence d'un réseau de vortex.

Puisque densité de vortex et densité atomique sont liées par (7.78), le fait que la densité atomique ne soit pas gaussienne entraîne que la densité de vortex n'est pas uniforme. C'est effectivement ce que donne la minimisation de la fonctionnelle d'énergie. On a représenté sur la figure 7.11 la distribution des vortex et la distribution atomique correspondante. On voit que sur les bords du nuage, le réseau de vortex perd son caractère triangulaire pour se distordre. Plus précisément, la densité de vortex chute, ce qui a pour effet d'augmenter la courbure de  $\ln[\rho(r)]$ , et donc de faire chuter cette densité sur les bords du nuage plus vite que pour une fonction gaussienne.

Notons pour terminer que l'on peut facilement estimer le nombre de fonctions  $\phi_m$  qui sont peuplées significativement dans l'état fondamental.

Une fonction  $\phi_m$  étant piquée en  $r \sim \sqrt{m} a$ , le rayon  $R$  du nuage constitue une mesure de l'indice  $m_{\max}$  des fonctions du LLL peuplées. Ce nombre  $m_{\max}$  donne ensuite le nombre de zéros du polynôme caractérisant l'état du système, donc le nombre de vortex à l'intérieur du nuage :

$$N_v = m_{\max} \approx \frac{R^2}{a^2} \approx \left( \frac{bgN}{1 \Leftrightarrow \Omega/\omega} \right)^{1/2} \quad (7.81)$$

où on a négligé des coefficients d'ordre unité. On peut calculer dans cette même approximation le moment cinétique moyen par particule

$$\langle L \rangle \approx \frac{m_{\max}}{3} \hbar. \quad (7.82)$$

Le nombre d'états peuplés croît donc indéfiniment quand la fréquence de rotation  $\Omega$  s'approche de  $\omega$ . Quand ce nombre  $m_{\max}$  devient de l'ordre du nombre de particules  $N$ , l'approximation de champ moyen n'est plus valable et on rentre dans le régime fortement corrélé; nous aborderons ce régime dans la partie 4. L'estimation (7.81) prédit que ce nombre d'états devient comparable à  $N$  quand  $\Omega \sim \omega(1 \Leftrightarrow g/N)$ . En reprenant la fréquence critique pour le premier vortex (7.43) et la condition d'entrée dans le LLL (7.65), on peut donc séparer les fréquences de rotation en différents domaines

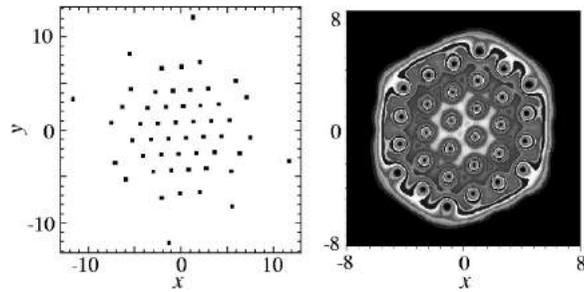
$$\frac{\Omega_c}{\omega} < \frac{\Omega}{\omega} < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{gN} : \text{ vortex de taille } \xi \ll a, \quad (7.83)$$

$$1 \Leftrightarrow \frac{1}{gN} < \frac{\Omega}{\omega} < 1 \Leftrightarrow \frac{g}{N} : \text{ LLL, vortex de taille } a, \quad (7.84)$$

$$1 \Leftrightarrow \frac{g}{N} < \frac{\Omega}{\omega} : \text{ en dehors du champ moyen. } \quad (7.85)$$

### 3-3 Expériences dans le LLL

Nous avons déjà décrit au chapitre 4 la méthode de mise en rotation par évaporation sélective (*evaporative spinup*) mise au point par le groupe de Boulder pour atteindre des vitesses de rotation très élevées  $\Omega = 0.993\omega$ . Ceci a permis d'atteindre le régime LLL, qui se manifeste expérimentalement par une augmentation importante de la taille du cœur des vortex. On



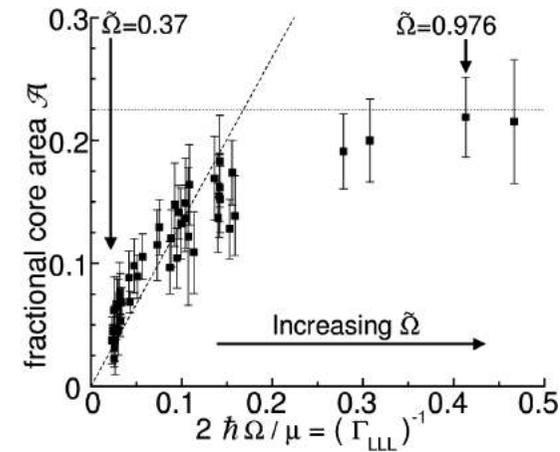
**FIGURE 7.11.** Exemple de distribution pour les vortex (à gauche) et pour la densité atomique (à droite) dans le LLL. Cette figure est tirée de Aftalion et al. (2005) et correspond à  $Ng/(1 \leftrightarrow \Omega/\omega) = 3000$ . Les longueurs sont données en unité de  $a$ .

a représenté sur la figure 7.12 la fraction de la surface occupée par les cœurs de vortex en fonction de la vitesse de rotation dans l'expérience de Boulder (Schweikhard et al. 2004; Coddington et al. 2004). Pour les vitesses de rotation faibles, cette fraction est petite devant 1, comme on s'y attend puisque  $\xi \ll a$ . Pour des grandes vitesses de rotation, cette fraction devient très significative ( $\sim 20\%$ ), puisque la taille du cœur et l'écart entre vortex sont alors comparables, d'ordre  $a$ . Les paramètres de cette expérience correspondent à une constante de couplage  $g \approx 5 \cdot 10^3$  avec un nombre d'atomes de l'ordre de  $10^5$ .

Une autre méthode pour approcher le LLL étudiée à l'ENS consiste à ajouter un potentiel quartique  $\eta r^4$  au potentiel harmonique de confinement  $m\omega^2 r^2/2$ . Ceci permet de choisir des fréquence de rotation  $\Omega$  proches ou égales à  $\omega$  sans risquer de perdre le gaz du fait de la force centrifuge (Bretin et al. 2004).

## 4 Au delà du champ moyen

Pour motiver ce dernier paragraphe, revenons sur le critère de validité du traitement de champ moyen que nous avons utilisé jusqu'ici. Pour qu'un état de champ moyen soit une bonne approximation de l'état fondamental à  $N$  corps, il faut que le nombre d'états propres  $\phi_m$  de l'hamiltonien



**FIGURE 7.12.** Fraction de l'espace occupée par les cœurs de vortex en fonction de la vitesse de rotation  $\Omega$ . L'entrée dans le régime LLL se traduit par une fraction non négligeable devant l'unité [figure extraite de Schweikhard et al. (2004)].

nien à une particule significativement peuplée reste petit devant le nombre d'atomes  $N$ . Si ce n'est pas le cas, on peut généralement construire des états présentant des fortes corrélations entre particules qui conduisent à un abaissement notable de l'énergie par rapport au résultat de champ moyen.

Pour le problème du gaz de Bose en rotation, nous avons déjà indiqué en (7.85) que l'entrée dans le régime corrélé correspond à  $\Omega \gtrsim \omega(1 \leftrightarrow g/N)$ . L'analyse de ce régime de rotation ultra-rapide présente de fortes analogies avec celle de l'effet Hall quantique fractionnaire, dans lequel on s'intéresse aux états corrélés d'un gaz d'électrons en interaction coulombienne en présence d'un fort champ magnétique. Dans les deux cas, les états intéressants sont généralement limités au LLL et possèdent une propriété remarquable, l'incompressibilité : l'état fondamental est séparé de tous les états excités du système par un gap qui est indépendant de la taille du système et qui est proportionnel à la force des interactions  $g$ .

#### 4-1 État fondamental à $N$ particules dans le LLL

Nous avons vu plus haut que les états à une particule sont de la forme  $\phi(\mathbf{r}) = P(u) \exp(\pm r^2/2a^2)$ , avec  $u = x + iy$  et  $P(u)$  un polynôme de la variable  $u$ . Pour un système de bosons sans spin, un état général à  $N$  corps est donc de la forme

$$\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) = \mathcal{P}(u_1, u_2, \dots, u_N) \exp(\pm \sum_i r_i^2/2a^2), \quad (7.86)$$

où  $\mathcal{P}(u_1, u_2, \dots, u_N)$  est un polynôme symétrique des  $N$  variables complexes  $u_i$ . La recherche des états propres de l'hamiltonien à  $N$  corps se fait généralement par une méthode de diagonalisation exacte pour des nombres de particules pas trop élevés (de l'ordre de la dizaine).

L'hamiltonien à  $N$  corps commute avec l'opérateur moment cinétique total  $\hat{L}_z$  et on peut donc chercher une base d'états propres commune aux deux opérateurs. Nous allons nous intéresser ici à l'état fondamental de l'hamiltonien pour un moment cinétique total  $\mathcal{L}$  donné<sup>4</sup>. Or le moment cinétique d'une fonction du LLL à une particule,  $u^m \exp(\pm r^2/2a^2)$ , est directement donné par la valeur de l'exposant  $m$ . Pour le système à  $N$  particules, on va donc chercher le polynôme  $\mathcal{P}$  donnant l'état fondamental à  $\mathcal{L}$  fixé comme une somme de monômes ayant tous le même degré total :

$$u_1^{\alpha_1} \dots u_N^{\alpha_N} \quad \text{avec} \quad \sum_i \alpha_i = \mathcal{L}. \quad (7.87)$$

Par exemple, pour un système de 3 particules et un moment cinétique total  $\mathcal{L} = 3$ , on cherche le polynôme  $\mathcal{P}$  correspondant à l'état fondamental sous la forme

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(u_1, u_2, u_3) &= \alpha u_1 u_2 u_3 \\ &+ \beta [(u_1^2(u_2 + u_3) + u_2^2(u_1 + u_3) + u_3^2(u_1 + u_2))] \\ &+ \gamma (u_1^3 + u_2^3 + u_3^3). \end{aligned}$$

Le premier terme de cette somme, proportionnel à  $u_1 u_2 u_3$ , correspond à un état de type *champ moyen*, plus précisément un vortex centré puisque

4. Dans cette partie, le moment cinétique total est exprimé en unité de  $\hbar$ . La quantité  $\mathcal{L}$  est donc un entier positif ou nul.

les trois particules sont dans le même état  $\phi_1(\mathbf{r})$ . Les autres termes de la somme correspondent à des états corrélés des trois particules.

La procédure pour rechercher l'état fondamental à  $N$  corps est donc la suivante :

- On se donne un moment cinétique total  $\mathcal{L}$ , correspondant à un sous-espace du LLL pour lequel les polynômes symétriques sont fabriqués à partir des monômes (7.87).
- On considère dans ce sous-espace l'état fondamental de l'hamiltonien

$$\hat{H} = \sum_i \left( \frac{\hat{\mathbf{p}}_i^2}{2M} + \frac{1}{2} M \omega^2 \hat{\mathbf{r}}_i^2 \right) + \frac{\hbar^2}{M} g \sum_{i < j} \delta^{(2)}(\mathbf{r}_i \leftrightarrow \mathbf{r}_j). \quad (7.88)$$

Or la partie à un corps de cet hamiltonien donne le même résultat  $(\mathcal{L} + N)\hbar\omega$  pour tous les états du sous-espace considéré. On se ramène donc à la diagonalisation de l'hamiltonien d'interaction

$$\hat{H}_{\text{int.}} = \frac{\hbar^2}{M} g \sum_{i < j} \delta^{(2)}(\mathbf{r}_i \leftrightarrow \mathbf{r}_j), \quad (7.89)$$

dans ce sous-espace.

- Une fois connue l'énergie d'interaction, on obtient l'énergie totale dans le référentiel tournant en ajoutant le terme  $(\mathcal{L} + N)\hbar\omega \leftrightarrow \Omega\mathcal{L}$  à la valeur propre trouvée pour  $\hat{H}_{\text{int.}}$ .

#### 4-2 Quelques états remarquables

La description de tous les états corrélés qui ont été identifiés dans cette procédure de diagonalisation exacte dépasse très largement le cadre de ce cours et nous renvoyons le lecteur à l'article de revue très complet de Cooper (2008) pour une présentation détaillée. Nous allons décrire ici quelques phases remarquables qui ont été identifiées quand on varie le rapport  $\mathcal{L}/N$ .

**La fonte du réseau de vortex.** Partant d'un régime bien décrit par le champ moyen, augmentons la vitesse de rotation du gaz ; la première déviation attendue par rapport à ce régime de champ moyen est la fonte du

réseau de vortex du fait des fluctuations quantiques. Cette fonte a été prédite par Cooper et al. (2001) avec une technique de diagonalisation exacte pour des facteurs de remplissage  $\nu = N/N_v$  compris entre 6 et 10. Cette valeur peut être retrouvée en calculant l'amplitude  $\Delta$  des fluctuations quantiques des positions des vortex et appliquant le critère heuristique de Lindemann. On s'attend à ce que ces fluctuations déstabilisent le réseau quand leur amplitude devient de l'ordre du dixième de la distance entre vortex  $\rho_v^{\in 1/2}$  (Sinova et al. 2002).

**L'état de Laughlin.** Il s'agit d'un état remarquable, fortement corrélé, qui est un état propre exact de l'hamiltonien à  $N$  corps. Le polynôme symétrique correspondant à cet état s'écrit

$$\mathcal{P}_{\text{Lau.}}(u_1, u_2, \dots, u_N) = \prod_{i < j} (u_i \leftrightarrow u_j)^2, \quad (7.90)$$

de degré total  $\mathcal{L} = N(N \leftrightarrow 1)$  et s'étendant sur toutes les fonctions à une particule du LLL de  $m = 0$  à  $m_{\text{max}} = 2(N \leftrightarrow 1)$ , soit un facteur de remplissage  $\nu = 1/2$ . L'action de  $\hat{H}_{\text{int}}$  sur cet état donne strictement 0, puisque  $\hat{H}_{\text{int}}$  correspond à une interaction de contact alors que l'état de Laughlin correspond à une probabilité strictement nulle de trouver deux particules au même endroit.

L'état de Laughlin est incompressible et le gap au premier état excité de même moment cinétique est  $\approx 0.1 g \hbar \omega$  (Regnault & Jolicoeur 2003; Regnault & Jolicoeur 2004). L'état de Laughlin est caractérisé par une distribution quasi-uniforme des particules sur un disque de rayon  $a \sqrt{2N}$ .

**Les descendants de l'état de Laughlin.** Pour des moments cinétiques plus grands que celui donnant naissance à l'état de Laughlin  $\mathcal{L} = N(N \leftrightarrow 1)$ , tout état du type

$$\mathcal{P}(u_1, \dots, u_N) = \mathcal{P}_{\text{Lau.}}(u_1, \dots, u_N) Q(u_1, \dots, u_N) \quad (7.91)$$

où  $Q$  est un polynôme symétrique quelconque de  $u_1, \dots, u_N$ , sera également un état d'énergie d'interaction strictement nulle. L'interprétation physique de ces états dépend du degré de  $Q$ . Pour un degré d'ordre 1, il s'agit d'excitations de bord de l'état de Laughlin; en choisissant un

degré égal à  $N$ , on peut construire des quasi-trous en un point donné  $U_0 = X_0 + iY_0$  en prenant (Paredes et al. 2001; Paredes et al. 2002)

$$Q(u_1, \dots, u_N) = \prod_j (u_j \leftrightarrow U_0) \quad (7.92)$$

**L'état de Moore-Read.** Pour  $N$  pair, Cooper et al. (2001) ont identifié l'état de moment cinétique  $\mathcal{L} = N(N \leftrightarrow 2)/2$ , également appelé *Pfaffien* :

$$\mathcal{P}(u_1, \dots, u_N) = \mathcal{S} \left[ \prod_{i < j \leq N/2} (u_i \leftrightarrow u_j)^2 \prod_{N/2 < l < n} (u_l \leftrightarrow u_n)^2 \right] \quad (7.93)$$

comme étant en très bonne approximation un état propre de  $\hat{H}_{\text{int}}$  ( $\mathcal{S}$  désigne l'opérateur de symétrisation). Plus précisément, le recouvrement de l'état (7.93) avec le véritable état propre déterminé numériquement pour cette valeur de  $\mathcal{L}$  est supérieur à 0.88 tant que  $N \leq 14$  (Chang et al. 2004). Cet état se décompose sur des états à une particule<sup>5</sup> allant de  $m = 0$  à  $m = N \leftrightarrow 2$ , correspondant à un facteur de remplissage  $\nu = 1$ . Cet état est également séparé par un gap  $\sim 0.05 g \hbar \omega$  des états excités de même  $\mathcal{L}$  (Chang et al. 2004). Remarquons que pour l'état approché (7.93), la probabilité d'avoir trois particules au même point est nulle.

### 4-3 Schémas de détection envisageables

Nous terminons ce paragraphe par quelques méthodes qui ont été proposées pour détecter expérimentalement ces états fortement corrélés. Remarquons d'abord que l'observation de ces états sera probablement limitée à de faibles nombres d'atomes si on utilise la méthode de rotation d'un piège harmonique. En effet la relation (7.85) définissant l'entrée dans le régime corrélé, associée à une force d'interaction  $g \sim 1$  et une fréquence de rotation réaliste  $\Omega \approx 0.99 \omega$  donne un nombre d'atomes maximal de l'ordre de 100.

5. Par exemple, pour  $N = 4$ , on a

$$\mathcal{P}(u_1, \dots, u_4) = (u_1 \leftrightarrow u_2)^2 (u_3 \leftrightarrow u_4)^2 + (u_1 \leftrightarrow u_3)^2 (u_2 \leftrightarrow u_4)^2 + (u_1 \leftrightarrow u_4)^2 (u_2 \leftrightarrow u_3)^2.$$

Une première signature d'états à la Laughlin ou à la Moore-Read se-rait de voir une réduction des pertes dues aux collisions inélastiques. En effet, la probabilité d'avoir 3 particules au même endroit est nulle pour ces états (alors qu'elle n'est pas nulle pour des états de champ moyen). Une autre voie d'approche est liée à l'incompressibilité de ces états, qui donne naissance à un profil de densité en forme de « pièce montée » dans un piège harmonique, chaque plateau de la pièce montée correspondant à un état incompressible différent. Une troisième possibilité est d'utiliser un système de détection de très bonne résolution spatiale pour détecter un à un les atomes du gaz (éventuellement après un temps de vol), et reconstruire ainsi les fonctions de corrélation spatiales permettant de caractériser l'état de départ.

Signalons pour terminer une proposition plus ambitieuse (Paredes et al. 2001). Il s'agit d'étudier la possibilité de créer des anyons dans un gaz décrit par un état de type *effet Hall quantique fractionnaire* (Wilczek 1982); partant d'un état de Laughlin, on creuserait un trou dans le gaz à l'aide d'un faisceau laser très focalisé, produisant ainsi un état du type (7.92). En bougeant adiabatiquement ce trou dans le gaz, le système devrait acquérir une phase géométrique qui pourrait ensuite être mesurée par une expérience d'interférométrie. La mesure de la phase accumulée devrait révéler le caractère anyonique (ni boson, ni fermion) de la quasi-particule ainsi créée par le faisceau laser.

## Références

- Abo-Shaeer, J. R., C. Raman, J. M. Vogels & W. Ketterle (2001), « Observation of Vortex Lattices in Bose–Einstein Condensates », in *Science* 292, pp. 476–479.
- Adhikari, Sadhan K. (1986), « Quantum scattering in two dimensions », in *American Journal of Physics* 54.4, pp. 362–367.
- Aftalion, A., X. Blanc & J. Dalibard (2005), « Vortex patterns in a fast rotating Bose–Einstein condensate », in *Phys. Rev. A* 71.2, p. 023611.
- Baym, G. & C. J. Pethick (1996), « Ground-state properties of magnetically trapped Bose-condensed rubidium gas », in *Phys. Rev. Lett.* 76.1, pp. 6–9.
- Bloch, I., J. Dalibard & W. Zwerger (2008), « Many-body physics with ultracold gases », in *Rev. Mod. Phys.* 80.3, 885, p. 885.
- Bretin, V., S. Stock, Y. Seurin & J. Dalibard (2004), « Fast Rotation of a Bose–Einstein Condensate », in *Phys. Rev. Lett.* 92, p. 050403.
- Castin, Y. & R. Dum (1999), « Bose–Einstein condensates with vortices in rotating traps », in *Eur. Phys. J. D* 7, p. 399.
- Chang, C. C., N. Regnault, T. Jolicoeur & J. K. Jain (2004), « Composite fermionization of bosons in rapidly rotating atomic traps », in *Phys. Rev. A* 72, p. 013611.
- Coddington, I., P. C. Haljan, P. Engels, V. Schweikhard, S. Tung & E. A. Cornell (2004), « Experimental studies of equilibrium vortex properties in a Bose-condensed gas », in *Phys. Rev. A* 70, p. 063607.
- Cooper, N. R. (2008), « Rapidly rotating atomic gases », in *Advances in Physics* 57.6, pp. 539–616.
- Cooper, N. R., N. K. Wilkin & J. M. F. Gunn (2001), « Quantum Phases of Vortices in Rotating Bose–Einstein Condensates », in *Phys. Rev. Lett.* 87.12, p. 120405.
- Cooper, N. R., S. Komineas & N. Read (2004), « Vortex lattices in the lowest Landau level for confined Bose–Einstein condensates », in *Phys. Rev. A* 70.3, p. 033604.
- Dalfovo, F. S. & M. Modugno (2000), « Free expansion of Bose–Einstein condensates with quantized vortices », in *Phys. Rev. A* 61, p. 023605.
- Dalfovo, F. S. & S. Stringari (1996), « Bosons in anisotropic traps : Ground state and vortices », in *Phys. Rev. A* 53, p. 2477.
- Feder, D. L., C. W. Clark & B. I. Schneider (1999), « Nucleation of vortex arrays in rotating anisotropic Bose–Einstein condensates », in *Phys. Rev. A* 61, R011601.
- Feder, David L. & Charles W. Clark (2001), « Superfluid-to-Solid Crossover in a Rotating Bose-Einstein Condensate », in *Phys. Rev. Lett.* 87 (19), p. 190401.
- Fetter, Alexander L. (2009), « Rotating trapped Bose–Einstein condensates », in *Rev. Mod. Phys.* 81.2, pp. 647–691.
- Feynman, R. P. (1955), « Application of quantum mechanics to liquid helium », in *Progress in Low Temperature Physics*, ed. by C. J. Gorter, vol. 1, North Holland Publishing Co., Amsterdam: North-Holland, , p. 17.
- Haldane, F. D. M. (1983), « Fractional Quantization of the Hall Effect : A Hierarchy of Incompressible Quantum Fluid States », in *Phys. Rev. Lett.* 51, p. 605.
- Ho, T. L. (2001), « Bose–Einstein Condensates with Large Number of Vortices », in *Phys. Rev. Lett.* 87, p. 060403.

- Huang, K. (1987), *Statistical Mechanics*, New York: Wiley.
- Lobo, C., A. Sinatra & Y. Castin (2004), « Vortex lattice formation in Bose–Einstein condensates », in *Phys. Rev. Lett.* 92, p. 020403.
- Madison, K. W., F. Chevy, W. Wohlleben & J. Dalibard (2000a), « Vortex Formation in a Stirred Bose–Einstein Condensate », in *Phys. Rev. Lett.* 84, p. 806.
- (2000b), « Vortices in a stirred Bose±Einstein condensate », in *J. Mod. Opt.* 47, p. 2715.
- Matveenko, S. I., D. Kovrizhin, S. Ouvry & G. V. Shlyapnikov (2009), « Vortex structures in rotating Bose-Einstein condensates », in *Phys. Rev. A* 80 (6), p. 063621.
- Olshanii, M. & L. Pricoupenko (2002), « Rigorous Approach to the Problem of Ultraviolet Divergencies in Dilute Bose Gases », in *Phys. Rev. Lett.* 88, p. 010402.
- Paredes, B., P. Fedichev, J. I. Cirac & P. Zoller (2001), « 1/2-Anyons in Small Atomic Bose–Einstein Condensates », in *Phys. Rev. Lett.* 87.1, p. 010402.
- Paredes, B., P. Zoller & J. I. Cirac (2002), « Fermionizing a small gas of ultracold bosons », in *Phys. Rev. A* 66.3, p. 033609.
- Pethick, C.J. & H. Smith (2002), *Bose–Einstein Condensation in Dilute Gases*, Cambridge University Press.
- Petrov, D. S. & G. V. Shlyapnikov (2001), « Interatomic collisions in a tightly confined Bose gas », in *Phys. Rev. A* 64, p. 012706.
- Raman, C., J. R. Abo-Shaeer, J. M. Vogels, K. Xu & W. Ketterle (2001), « Vortex nucleation in a stirred Bose–Einstein condensate », in *Phys. Rev. Lett.* 87, p. 210402.
- Recati, A., F. Zambelli & S. Stringari (2001), « Overcritical rotation of a trapped Bose–Einstein condensate », in *Phys. Rev. Lett.* 86, p. 377.
- Regnault, N. & Th. Jolicoeur (2003), « Quantum Hall Fractions in Rotating Bose–Einstein Condensates », in *Phys. Rev. Lett.* 91.3, p. 030402.
- (2004), « Quantum Hall fractions for spinless bosons », in *Phys. Rev. B* 69.23, p. 235309.
- Schweikhard, V., I. Coddington, P. Engels, V. P. Mogendorff & E. A. Cornell (2004), « Rapidly Rotating Bose–Einstein Condensates in and near the Lowest Landau Level », in *Phys. Rev. Lett.* 92.4, p. 040404.
- Sinha, S. & Y. Castin (2001), « Dynamic instability of a rotating Bose–Einstein condensate », in *Phys. Rev. Lett.* 87, p. 190402.
- Sinova, J., C. B. Hanna & A. H. MacDonald (2002), « Quantum Melting and Absence of Bose–Einstein Condensation in Two-Dimensional Vortex Matter », in *Phys. Rev. Lett.* 89.3, p. 030403.
- Watanabe, G., G. Baym & C. J. Pethick (2004), « Landau Levels and the Thomas-Fermi Structure of Rapidly Rotating Bose–Einstein Condensates », in *Phys. Rev. Lett.* 93.19, p. 190401.
- Wilczek, Frank (1982), « Magnetic Flux, Angular Momentum, and Statistics », in *Phys. Rev. Lett.* 48.17, pp. 1144–1146.
- Zwierlein, M. W., J. R. Abo-Shaeer, A. Schirotzek, C. H. Schunck & W. Ketterle (2005), « Vortices and superfluidity in a strongly interacting Fermi gas », in *Nature* 435, p. 1047.